Forward i futures ugovori na financijskim tržištima

Veseličić, Valentina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij – Financijska matematika i statistika

Valentina Veseličić

Forward i futures ugovori na financijskim tržištima

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij – Financijska matematika i statistika

Valentina Veseličić

Forward i futures ugovori na financijskim tržištima

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

Financijska tržišta su nastala iz vrlo praktične potrebe kao pomoć ljudima da učinkovitije kupuju i prodaju imovinu te pomoć poduzećima da brže prikupe novac koji im je potreban. Tokom godina ona su rasla sve brže i postajala sve veća. U drugoj polovici prošlog stoljeća, dogodile su se značajne promjene u financijskom sustavu te su se one odrazile na nove financijske instrumente, institucije i mehanizme financijskog sustava.

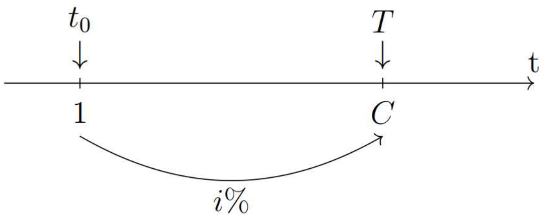
Danas, *financijsko tržište* se odnosi na svako tržište na kojem se trguje vrijednosnim papirima, uključujući tržište dionica, tržište obveznica, devizno tržište i tržište derivata. Ukratko, kažemo da se na financijskom tržištu trguje *financijskim instrumentima* - dokumentirani dokaz vlasništva nad nekom financijskom imovinom kojom se može trgovati na financijskom tržištu. Neki od primjera su: dionice, obveznice, blagajnički zapisi itd. *Dionica* je vlasnički vrijednosni papir koji predstavlja pravo vlasništva u određenom dioničkom društvu. *Obveznica* je vrijednosni papir koji sadrži priznanje postojanja neke obveze, a služi vjerovniku kao dokaz da je dužnik obvezu preuzeo. Dijelimo ih na obveznice s kuponom i bez kupona gdje *kupon* predstavlja pravo na isplatu pripadajuće kamate za određeno razdoblje. Financijski instrumenti se dijele na dvije važne kategorije: osnovni financijski instrumenti (novac, dionice, obveznice...) i izvedeni financijski instrumenti (opcije, forward i futures ugovori...). Drugi naziv za izvedene financijske instrumente je *izvedenice*. Oni se koriste za kontroliranje i upravljanje rizikom, a vrijednost im ovisi o vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata.

Glavni cilj svakog pojedinca na financijskom tržištu je smanjiti/ograničiti/kontrolirati tržišni rizik. *Tržišni rizik* predstavlja gubitak uzrokovan promjenama na financijskom tržištu kao što su npr. promjene cijena financijskih instrumenata, deviznih tečajeva, burzovnih indeksa te kamatnih stopa. Naveli smo već da se za reduciranje rizika koriste izvedenice. Najveći volumen trgovanja izvedenicama odvija se na burzovnom tržištu, iako je u novijem vremenu prošireno i na OTC tržište. *OTC tržište* (eng. *over the counter*) je tržište na kojem se prodaja financijskih instrumenata odvija neposredno između dvije zainteresirane strane. *Burza* ili *burzovno tržište* je specijalizirano tržište gdje se prema unaprijed utvrđenim pravilima trguje različitim financijskim instrumentima. Burza se najčešće veže za trgovanje dionicama.

2 Uvod u financijsko tržište

2.1 Kamatne stope, sadašnja i buduća vrijednost, diskontni faktor

Pretpostavimo da smo investirali ili posudili jednu novčanu jedinicu uz kamatnu stopu i, u trenutku t_0 do trenutka T u kojem raspolažemo s iznosom C. Trenutak t_0 je *početni trenutak*, a T nazivamo *trenutak dospijeća*. Jedinična uložena vrijednost u trenutku t_0 se naziva *sadašnja vrijednost* ili kraće PV (eng. *present value*), a iznos C odgovarajuća *buduća vrijednost*, tj. FV (eng. *future value*). Vrijednost i predstavlja *kamatnu stopu* ili *prinos*. Pogledajmo grafički prikaz navedene situacije.



Slika 1: Kamata na vremensko razdoblje od t_0 do T

Na financijskom tržištu se najčešće koristi *efektivna kamatna stopa* (EKS) koja odražava ukupne troškove koje klijent plaća pri podizanju i otplati kredita, odnosno ukupan prihod kojeg ostvaruje na temelju depozita. Radi točnog izračunavanja budućih vrijednosti i jednostavnosti, uzet ćemo da je EKS godišnja i konstanta te ju označavati s r'.

Ukoliko smo u sustavu jednostavnog ukamaćivanja gdje se kamate uvijek računaju na sadašnju vrijednost, koristimo sljedeću formulu:

$$PV(1 + r't) = FV, \tag{1}$$

gdje je t broj godina na koje deponiramo vrijednost PV. Dakle, buduća vrijednost jednaka je sumi sadašnje vrijednosti i obračunate kamate na sadašnju vrijednost.
Drugi slučaj je složeno ukamaćivanje gdje se kamate obračunavaju na kamate pa vrijedi sljedeća formula:

$$PV(1 + r')^t = FV. \tag{2}$$

Dodatno, ako se ukamaćivanje vrši više puta godišnje (n puta godišnje), prema [7, str. 4] vrijedi:

$$PV\left(1 + \frac{r'}{n}\right)^{n\cdot t} = FV. \tag{3}$$

Ako vrijeme t nije izraženo u godinama, onda se koristi jedna od sljedeće tri metode za izračun dana:

METODA	GODINA	DANI U MJESECU
francuska	360 dana	prema kalendaru
njemačka	360 dana	30 dana
engleska	365 ili 366 dana	prema kalendaru

Tablica 1: Tablica metoda za obračun dana

Na američkom i europskom tržištu novca se koristi francuska metoda, a na dulje dospijeće (dulje od godinu dana), ovisno o vrsti financijskog instrumenta:

- američko financijsko tržište: njemačka metoda ili engleska metoda s 365 dana,
- europsko financijsko tržište: njemačka ili engleska metoda.

Primjer 2.1 Pogledajmo jedan primjer koristeći navedene formule i metode.

1. *Neka je $PV = 1$ deponirano na $t = 115$ dana uz EKS $r' = 4\%$ godišnje prema jednostavnom ukamaćivanju i francuskoj metodi.*

$$FV = 1\left(1 + 0.04 \cdot \frac{115}{360}\right) = 1.0128.$$

2. *Neka je sada $t = 3$ godine uz složeno ukamaćivanje.*

$$FV = 1(1 + 0.04)^3 = 1.1249.$$

3. *Ako uzmemo da je EKS polugodišnji, imamo sljedeće:*

$$FV = 1\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{2\cdot 3} = 1.1262.$$

   Iz 2. i 3. možemo vidjeti kako je buduća vrijednost veća što je ukamaćivanje češće.

4. *Kombinacijom formule (1) i (2), ukoliko je $t = 3$ godine $+$ 115 dana, imamo:*

$$FV = 1(1 + 0.04)^3 \cdot \left(1 + 0.04 \cdot \frac{115}{360}\right) = 1.1392.$$

Primijetimo kako se jednadžbe (1) i (2) mogu zapisati na sljedeći način:

$$PV = FV \cdot \frac{1}{1 + r't}, \tag{4}$$

$$PV = FV \cdot \frac{1}{(1 + r')^t}, \tag{5}$$

gdje navedene razlomke označavamo s D_t i nazivamo *diskontnim faktorima*. Obzirom da se vrijeme t nalazi u nazivniku, vidimo da se s povećanjem vremenskog razdoblja diskontni faktor smanjuje.

Primjer 2.2 Izračunajmo sada diskontni faktor iz primjera 2.1, dijelova 1. i 2..

1.

$$D_t = \frac{1}{1 + 0.04 \cdot \frac{115}{360}} = \frac{1}{1.0128} = 0.9874.$$

2.

$$D_t = \frac{1}{(1 + 0.04)^3} = \frac{1}{1.1249} = 0.8889.$$

Osim jednostavnog i složenog ukamaćivanja koje smatramo diskretnim, imamo i neprekidno ukamaćivanje. Vidjeli smo primjere gdje se ukamaćivanje vrši na nekoliko godina, mjeseci, dana te došli do zaključka kako je buduća vrijednost veća što je ukamaćivanje češće. Odnosno, buduća vrijednost raste s porastom n, gdje n predstavlja koliko puta godišnje se vrši ukamaćivanje (npr. godišnje, polugodišnje, mjesečno, dnevno). Zanima nas sada što se događa ukoliko n sve više i više raste, odnosno periodi ukamaćivanja su kraći i kraći, npr. svaki sat, svaka minuta. Možemo pretpostaviti kako bi buduća vrijednost FV također rasla, sve do neke granice. Zapravo ćemo promatrati što se događa s FV kada n pustimo u beskonačno i period postane neprekidan. Krenimo od već poznatog limesa:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{6}$$

Ukoliko uzmemo da je r fiksan te da je $x=\frac{n}{r}$ i obje strane podignemo na r-tu potenciju dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}\cdot r}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=e^{r}. \tag{7}$$

Pretpostavimo da je, za fiksan r, FV iz formule (3) funkcija od n te n pustimo u beskonačno, prema [7, str. 7] imamo:

$$FV(n\to\infty)=PV\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=PV\cdot e^{r}, \tag{8}$$

gdje r nazivamo *neprekidna kamatna stopa* ili *intezitet kamate.* Veza između r i r' dana je sljedećom formulom:

$$r'=e^{r}-1, \tag{9}$$

što je uvijek veće od -1. Negativan r' nazivamo *negativna EKS* što znači da zapravo klijent banci plaća naknadu za deponiranje vlastitih sredstava.
Diskontni faktor u neprekidnom vremenu, kao i kod diskretnog vremena, dobivamo iz jednadžbe $PV=FV\cdot D_t$ pa vrijedi sljedeće:

$$D_t=e^{-r\cdot t}. \tag{10}$$

Primjer 2.3 Vratimo se na primjer 2.1 gdje je $r'=4\%$, $t=3$ godine, $PV=1$, $D_t=0.8889$ te $FV=1.1249$ u diskretnom vremenu. Izračunajmo sada FV i D_t u neprekidnom vremenu.
Ako samo uvrstimo zadane vrijednosti u formule za neprekidno ukamaćivanje, dobivamo:

$$FV=e^{0.04\cdot 3}=1.1275,$$
$$D_t=e^{-0.04\cdot 3}=0.8869.$$

Međutim, prelazimo s diskrenog vremena na neprekidno pa zapravo trebamo izračunati r:

$$r=ln(r'+1)=ln1.04=0.03922.$$

Prema tome, dobivamo sljedeće vrijednosti:

$$FV = e^{0.03922 \cdot 3} = 1.1249,$$
$$D_t = e^{-0.03922 \cdot 3} = 0.8889,$$

što je jednako kao i u diskretnom vremenu obzirom da je vrijeme ukamaćivanja 4 godine.

Prema prethodnom primjeru možemo vidjeti kako se složeno i neprekidno ukamaćivanje podudara kad je u pitanju "diskretno" vrijeme.

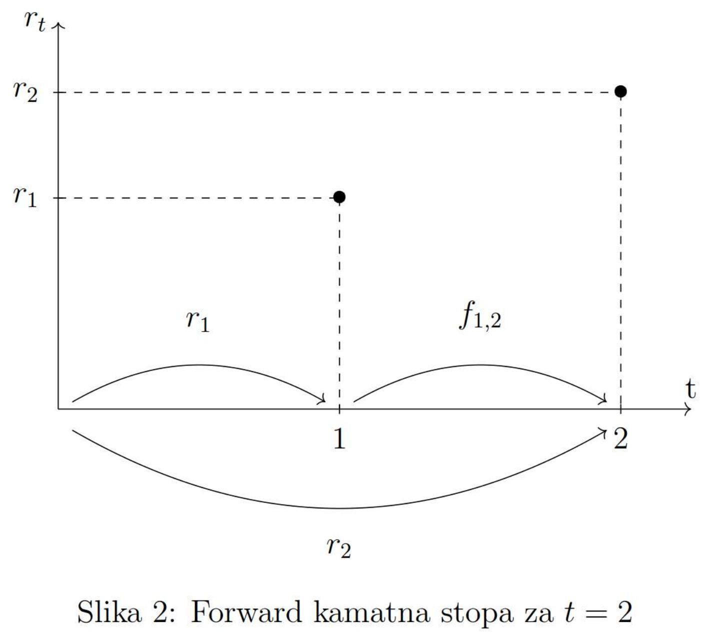
2.2 Forward stopa

Pretpostavimo sada da imamo skup kamatnih stopa $r_1, r_2, \ldots, r_T$ koje odgovaraju vremenskom razdoblju $t = 1, 2, \ldots, T$. Na temelju toga, definiramo *forward kamatnu stopu* $f_{t,t+1}$ između trenutka t i $t+1$. Forward kamatna stopa je kamatna stopa koja se primjenjuje na financijsku transakciju koja će se dogoditi u budućnosti. Za $f_{0,1}$ vrijedi da je jednako r_1, odnosno jedan trenutak unaprijed nakon nultog trenutka forward stope jednak je kamatnoj stopi prvog trenutka.

Promotrimo za početak kako odrediti $f_{1,2}$ iz sljedeće jednakosti:

$$(1 + r_2)^2 = (1 + r_1)(1 + f_{1,2}). \tag{11}$$

Investiranje ili posuđivanje na dva vremenska trenutka uz kamatnu stopu r_2 mora biti jednako investiranju ili posuđivanju na jedan trenutak uz r_1 i zatim investiranju ili posuđivanju novonastalog prihoda uz forward kamatnu stopu $f_{1,2}$. Prema tome, ili smo izvršili operaciju u jednom koraku s kamatnom stopom r_2 ili smo to napravili u dva koraka: prvo s r_1, a zatim s $f_{1,2}$. Ovaj pristup zahtijeva tržište bez arbitraže o kojem ćemo pisati u sljedećem poglavlju. Odnosno, forward stopa $f_{1,2}$ je usklađena s kamatnim stopama r_1 i r_2 te proizlazi iz njih kada ih promatramo na istim trenucima (trenutak 1 i 2). Pogledajmo ovu priču na grafičkom prikazu.



Slika 2: Forward kamatna stopa za $t = 2$

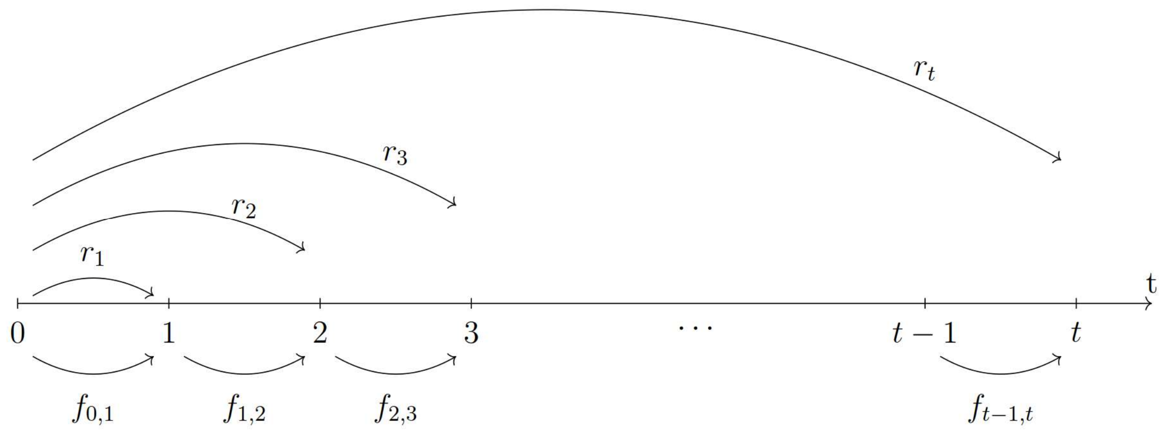
Generalizacijom formule (11) prema [7, str. 10] imamo:

$$(1+r_t)^t = (1+r_{t-1})^{t-1}(1+f_{t-1,t}) = \prod_{i=1}^{t}(1+f_{i-1,i}), \tag{12}$$

$f_{t-1,t}$ možemo promatrati kao *graničnu kamatnu stopu*, odnosno *stopu reinvestiranja* u razdoblju koje odgovara strukturi kamatnih stopa koje su prevladavale u prethodnom razdoblju. Iz formule (12) također imamo:

$$f_{t-1,t} = \frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-1})^{t-1}} - 1. \tag{13}$$

Napomenimo da u slučaju vremenskog podrazdoblja koje je manje od početnog vremenskog razdoblja, jednadžbu (13) moramo prilagoditi koristeći formulu (1) umjesto formule (2). Pogledajmo sljedeću sliku koja grafički prikazuje jednadžu (12).



Slika 3: Forward kamatna stopa za t uzastopnih vremenskih trenutaka

Primjer 2.4 Neka je $r_2 = 5\%$ i $r_3 = 6\%$. Izračunajmo $f_{2,3}$.

$$f_{2,3} = \frac{1.06^3}{1.05^2} - 1 = 0.08028\cdots = 8.03\%.$$

Prema prethodnom primjeru možemo primijetiti kako rastom kamatnih stopa kroz vrijeme raste i forward stopa. Također vrijedi i obratno, ako kamatne stope opadaju kroz vrijeme i forward stopa se smanjuje.

Ukoliko želimo izračunati forward stopu za n vremenskih trenutaka nakon t trenutaka, koristimo sljedeće formule izvedene iz formula (12) i (13):

$$(1+r_{t+n})^{t+n} = (1+r_t)^t(1+f_{t,t+n})^n, \tag{14}$$

$$f_{t,t+n} = \sqrt[n]{\frac{(1+r_{t+n})^{t+n}}{(1+r_t)^t}} - 1, \tag{15}$$

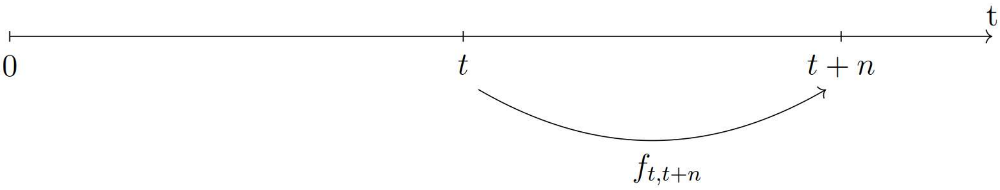
te raščlanjivanjem forward stopa na nekoliko jediničnih razdoblja imamo:

$$
\begin{aligned}
(1+f_{t,t+n})^n &= (1+f_{t,t+1})(1+f_{t+1,t+2})\dots(1+f_{t+n-1,t+n}), && (16)\\
(1+r_t)^t &= (1+f_{0,1})(1+f_{1,2})\dots(1+f_{t-1,t}). && (17)
\end{aligned}
$$

Kao što smo definirali diskontni faktor kod EKS, možemo ga definirati i kod forward stope:

$$
D_t = \frac{1}{(1+r_t)^t} = \frac{1}{(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})\dots(1+f_{t-1,t})}. \tag{18}
$$

Na sljedećem grafičkom prikazu nalazi se ilustrativni primjer forward kamatne stope za n vremenskih trenutaka nakon t trenutaka.



Slika 4: Forward kamatna stopa na n vremenskih trenutaka nakon t trenutaka

Primjer 2.5 Neka je $r_1 = 4\%$, $r_2 = 5\%$ i $r_3 = 6\%$. Izračunajmo $f_{1,3}$.

$$
f_{1,3} = \sqrt{\frac{1+r_3^3}{1+r_1}} - 1 = \sqrt{\frac{1.06^3}{1.04}} - 1 = 7.01\%.
$$

2.3 Uvjet bez arbitraže

U prethodnom poglavlju spomenuli smo kako forward stopa na financijskom tržištu zahtijeva uvjet bez arbitraže. Također, taj uvjet vrijedi i za većinu financijskih instrumenata, kad god je to moguće. Možemo ju opisati i kao situaciju u kojoj ne postoji način da trgovac ostvari profit bez rizika kupnjom nekog financijskog instrumenta.
Prema tome, tržišne forward stope ne smiju biti previše različite od njihovih teoretskih izračuna[1]. Pod arbitražnim operacijama podrazumijevaju se operacije koje zadovoljavaju sljedeća tri uvjeta:

- operacija mora donijeti dobit,
- ta dobit mora biti poznata i sigurna od početka operacije,
- operacija ne smije zahtijevati unos gotovine.

Arbitražna operacija uvijek treba slijediti sljedeći postupak:

- ako se operacija odnosi na cijene, arbitraža je moguća u tržišnoj cijeni koja je veća ili niža od njezine teorijske ("fer") vrijednosti gdje teorijska vrijednost predstavlja vrijednost dobivenu odgovarajućim matematičkim modelima i izračunima,

[1]Teorijska vrijednost je formulom ili modelom definirana vrijednost koju znanstvenik očekuje od jednadžbe, uz pretpostavku savršenih ili gotovo savršenih uvjeta.

- ako se operacija odnosi na financijske instrumente kojima se trguje na financijskim tržištima uz određenu kamatnu stopu, arbitraža je moguća u tržišnoj stopi koja je veća ili niža od njezine "fer" vrijednosti.

Kako bismo pobliže objasnili zahtjev za uvjet bez arbiraže kod forward stope, pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.6 Pretpostavimo da je teorijska vrijednost forward stope $f_{1,2}$ jednaka 7.01%.

1. *Neka je tržišna forward stopa $f_{1,2}$ manja od teorijske vrijednosti i iznosi* 6.80%. *Arbitražer bi napravio sljedeće:*

   - *Posudio bi jedinični iznos na godinu dana uz kamatnu stopu od* 5% *i godinu kasnije bi reinvestirao dobiveni iznos uz forward stopu* 6.80%. *Prema* (12) *imamo dug od:*

   $$(1 + 0.05)(1 + 0.068) = 1.1214.$$

   - *Investirao bi jedinični iznos na* 2 *godine uz kamatnu stopu od* 6% *što dovodi prema* (12) *do prihoda:*

   $$(1 + 0.06)^2 = 1.1236.$$

   Obzirom da obje operacije radi istovremeno, ostvaruje profit od 0.0022 *koja je od početka poznata i fiksirana što označava arbitražnu operaciju.*

2. *Neka je sada tržišna forward stopa* $f_{1,2} = 7.20\%$ *što je veće od teorijske vrijednosti. Arbitražer bi napravio sljedeće:*

   - *Na godinu dana bi investirao jedinični iznos po kamatnoj stopi od* 5% *i nakon toga bi reinvestirao dobiveni iznos na godinu dana po forward stopi od* 7.20%. *Povrat koji ostavruje ovom operacijom iznosi:*

   $$(1 + 0.05)(1 + 0.072) = 1.1256.$$

   - *Posudio bi jedinični iznos na* 2 *godine po kamatnoj stopi od* 6% *što bi ga koštalo:*

   $$(1 + 0.06)^2 = 1.1236.$$

   Ovom operacijom ostvaruje profit od 0.0020 *prema istim uvjetima kao u prethodnoj.*

U praksi je normalno da se tržišne cijene malo razlikuju od njihovih teorijskih vrijednosti pod uvjetom da te razlike ostanu manje od troškova povezanih s arbitražnom operacijom. Što je tržište likvidnije manje su mogućnosti za arbitražu jer je pokazano kako su tržišne vrijednosti gotovo jednake teorijskim vrijednostima. Suprotno, ako je tržište relativno nelikvidno, može postojati mogućnost za arbitražu, ali budući da te operacije treba izvesti dovoljno puno puta da se ostvari znatan profit, nedostatak likvidnosti tog tržišta čini tu operaciju neizvodljivom. Često se događa da se mnoge operacije zloupotrebljavaju kao arbitraža iako su zapravo čisto špekulativne - špekulant je uvjeren kako će njegova operacija dovesti do većeg profita na temelju razlike između promatranih tržišnih vrijednosti i njegove vlastite procjene teorijske vrijednosti.

2.4 Pretpostavke na financijskom tržištu

U prethodnim poglavljima naveli smo općenite definicije i formule koje se koriste u izračunu sadašnjih i budućih vrijednosti nekog depozita. Pomoću njih izvodimo formule za računanje vrijednosti financijske imovine na financijskom tržištu.

Neka je S_t^i vrijednost i-te financijske imovine u trenutku t, gdje je $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$, $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, $d, T \in \mathbb{N}$. Na financijskom tržištu trgujemo s d rizičnih financijskih instrumenata i jednim nerizičnim financijskim instrumentom (novac) čiju vrijednost u trenutku t označavamo S_t^0. Vrijednost nerizične financijske imovine nam je poznata u svakom trenutku ako je poznata EKS. Prema formuli (2) u diskretnom vremenu imamo:

$$S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t \tag{19}$$

i u neprekidnom vremenu prema formuli (8) imamo:

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt}. \tag{20}$$

Kao što smo naveli, pretpostavljamo da su EKS r' i neprekidna kamatna stopa r konstante. Vrijednosti rizične financijske imovine poznate su u trenutku $t = 0$, a u ostalim trenucima ih modeliramo nenegativnim slučajnim varijablama.

Pretpostavljamo kako svi investitori na tržištu imaju jednak pristup svim informacijama te su one ugrađene u vrijednost financijskih instrumenata. Smatramo kako je sva financijska imovina beskonačno djeljiva i likvidna, odnosno može se kupovati i prodavati u neograničenim količinama. Osim toga, može se i posuđivati bez troškova - moguće je zadužiti se u financijskim instrumentima te time posjedovati negativan broj tih financijskih instrumenata. Često se pretpostavlja kako se može trgovati bez transakcijskih troškova te da posjedovanje financijske imovine ne ostavaruje nikakav dodatni prihod ili trošak.

3 Forward ugovori

Forward ugovor je jedna od najstarijih i najosnovnijih financijskih izvedenica. Ukratko, s tim ugovorom se unaprijed fiksira vrijednost neke imovine u trenutku dospijeća te se kupac ugovora želi zaštititi od velikog rasta cijene, a prodavatelj od velikog pada. Po forward ugovoru kažemo da je kupac imovine u *long poziciji* dok je prodavatelj imovine u *short poziciji*.

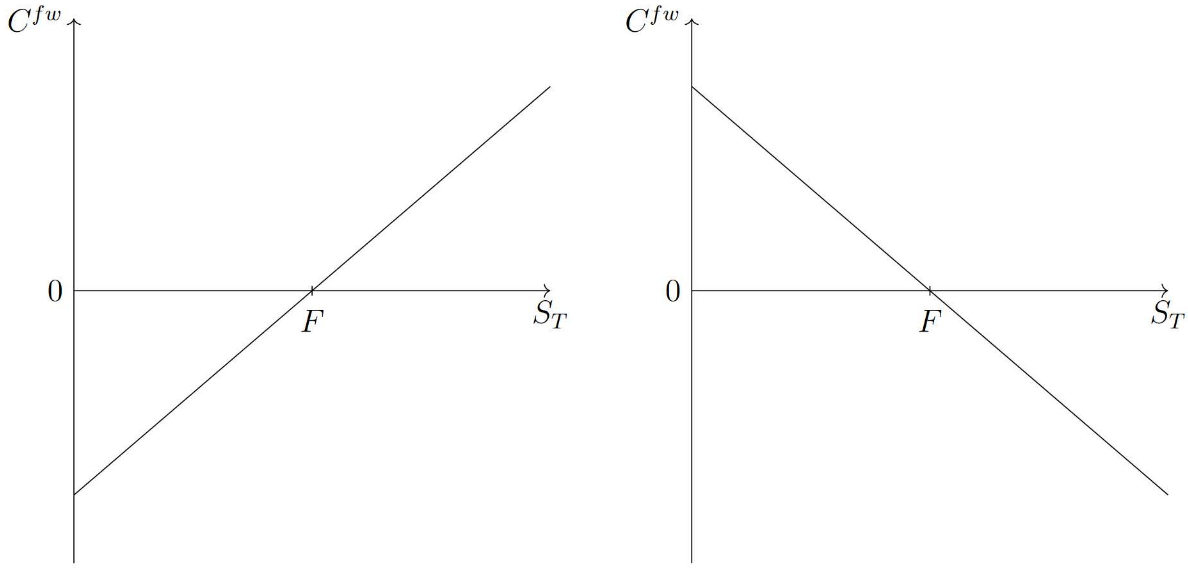
Definicija 3.1 ***Forward ugovor*** *je ugovor kojim se jedna strana (kupac) obvezuje na kupnju, a druga strana (prodavatelj) na prodaju financijskog instrumenta u trenutku dospijeća T po točno određenoj cijeni izvršenja F.*

Poznavajući tržišnu vrijednost S_T financijskog instrumenta u trenutku dospijeća T i cijenu izvršenja F dogovorenu ugovorom, možemo odrediti koliki je povrat forward ugovora u trenutku dospijeća:

1. za kupca (long pozicija): $S_T - F$,
2. za prodavatelja (short pozicija): $F - S_T$.

Obje vrijednosti mogu biti pozitivne ili negativne, ovisno o tome je li tržišna vrijednost financijskog istrumenta veća ili manja od cijene izvršenja. Obzirom da sklapanje ugovora ne košta ništa, isplata iz ugovora ujedno je i ukupna dobit ili gubitak prodavatelja ili kupca, ovisno o poziciji. Prema tome, u trenutku dospijeća T, povrat forward ugovora jednak je:

$$C^{fw} = S_T - F. \tag{21}$$



(a) long pozicija (b) short pozicija

Slika 5: Vrijednost forward ugovora u long i short poziciji

Sudionici na financijskom tržištu žele znati kolika će biti forward cijena u trenutku dospijeća. Ako uzmemo u obzir pretpostavke na financijskom tržištu iz prethodnog poglavlja, imamo sljedeću lemu koja nam omogućava izračun forward cijene.

Lema 3.1 *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, jedinstvena nearbitražna cijena izvršenja (forward cijena) forward ugovora s dospijećem u trenutku T za financijski instument koji u trenutku $t = 0$ vrijedi S_0 je $F_0 = S_0(1 + r')^T$ ili $F_0 = S_0 e^{r \cdot T}$, ovisno o vrsti ukamaćivanja.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti s neprekidnim ukamaćivanjem.

1. Neka je $F_0 > S_0 e^{r \cdot T}$.
   U trenutku $t = 0$ posudimo S_0 novca uz intezitet kamate r i kupimo neki financijski instrument. Sklopimo forward ugovor u short poziciji s dospijećem u trenutku T i s cijenom izvršenja F_0. U trenutku T izvršimo obvezu iz forward ugovora i prodamo financijski instrument po cijeni F_0. Zatim vratimo banci dug od $S_0 e^{r \cdot T}$. Nakon toga nam ostaje zarada od $F_0 - S_0 e^{r \cdot T} > 0$.

2. Neka je sada $F_0 < S_0 e^{r \cdot T}$.
   U trenutku $t = 0$ sada posudimo jedan financijski instrument i prodamo ga za S_0. Taj iznos (nerizično) uložimo u banku uz intezitet kamate r. Sklopimo forward ugovor u long poziciji s dospijećem u trenutku T i cijenom izvršenja F_0. U trenutku T iz banke podignemo ulog u iznosu od $S_0 e^{r \cdot T}$ te u skladu s forward ugovorom kupimo financijski instrument po cijeni F_0. Nakon toga, ostaje nam zarada u iznosu $S_0 e^{r \cdot T} - F_0 > 0$.

Prema tome slijedi kako je $F_0 = S_0 e^{r \cdot T}$ jedina nearbitražna forward cijena. Analogni postupak za složeno ukamaćivanje.

■

Primjer 3.1 *Pretpostavimo da smo sklopili 4-mjesečni forward ugovor kako bismo kupili obveznicu bez kupona s dospijećem godinu dana od danas uz godišnji intezitet kamate* 0.06. *Cijena obveznice u trenutku $t = 0$ je* \$930.
$\Rightarrow T = \frac{4}{12}$, $r = 0.06$, $S_0 = 930$,

$$F_0 = 930 \cdot e^{0.06 \cdot \frac{4}{12}} = \$948.79.$$

To bi bila cijena izvršenja forward ugovora sklopljenog danas.

Već smo naveli da vrijednost financijskih instrumenata u trenutku t modeliramo nenegativnom slučajnom varijablom. Pretpostavimo da je vrijednost financijskog instrumenta u trenutku dospijeća T modelirana na sljedeći način:

$$S_T \sim \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle, \qquad 0 < F_1 < F_2.$$

Primijetimo da u slučaju kada su obje vrijednosti slučajne varijable S_T, F_1 i F_2, manje od jedinstvene nearbitražne forward cijene ($F_1 < F_2 < F$) nitko neće htjeti sklopiti forward ugovor u long poziciji s cijenom F u trenutku T jer tu imovinu u trenutku T može kupiti jeftinije. Suprotno, u slučaju kada su F_1 i F_2 veće od F ($F < F_1 < F_2$) nitko neće htjeti sklopiti forward ugovor u short poziciji s cijenom F u trenutku T jer tu imovinu u trenutku T mogu prodati za višu cijenu. Iz toga možemo zaključiti da treba vrijediti $F_1 < F < F_2$ kako bi imalo smisla sklapati forward ugovor.

U prethodnoj lemi smo uzeli u obzir pretpostavku financijskog tržišta da posjedovanje financijske imovine ne ostvaruje nikakav dodatni prihod ili trošak. Pretpostavimo sada da želimo sklopiti forward ugovor za financijsku imovinu koja će vlasniku osigurati predvidljiv novčani prihod (npr. dionica s isplatom dividendi).

Lema 3.2 *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za financijski instrument koji u trenutku $t = 0$ vrijedi S_0 i čijim posjedovanjem ostvarujemo prihod čija je sadašnja vrijednost I, mora biti $F_0 = (S_0 - I)e^{r \cdot T}$.*

Dokaz. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da se radi o dionici i da se vlasniku dionice u trenutku $t \in [0, T]$ isplaćuje dividenda u iznosu C. Prema tome, sadašnja vrijednost dividende dana je formulom $I = Ce^{-rt}$.

1. Neka je $F_0 > (S_0 - I)e^{r \cdot T}$.
   U trenutku $t = 0$ posudimo iznos I na t vremena i iznos $(S_0 - I)$ na T vremena, uz intezitet kamate r. Ukupno smo posudili iznos S_0 te s njim kupujemo dionicu. Sklopimo forward ugovor u short poziciji s dospijećem u trenutku T i s cijenom izvršenja F_0. U trenutku t isplaćuje nam se iznos dividende C. Banci smo u tom trenutku dužni $Ie^{rt} = Ce^{-rt}e^{rt} = C$ pa nam vrijednost dividende pokriva dug prema banci. U trenutku T izvršimo obvezu iz forward ugovora i prodamo dionicu po cijeni F_0. Sada banci dugujemo iznos $(S_0 - I)e^{r \cdot T}$ te nam nakon pokrivanja duga ostaje zarada $F_0 - (S_0 - I)e^{r \cdot T} > 0$.

2. Neka je sada $F_0 < (S_0 - I)e^{r \cdot T}$.
   U trenutku $t = 0$ sada posudimo jednu dionicu i prodamo ju za S_0. Taj iznos (nerizično) uložimo u banku tako da iznos I uložimo na t vremena, a iznos $(S_0 - I)$ na T vremena, uz intezitet kamate r. Sklopimo forward ugovor u long poziciji s dospijećem u trenutku T i cijenom izvršenja F_0. U trenutku t podižemo iznos $Ie^{rt} = C$ iz banke kako bismo pokrili isplatu dividende. Zatim u trenutku T iz banke podignemo ulog u iznosu od $(S_0 - I)e^{r \cdot T}$ te u skladu s forward ugovorom kupimo dionicu po cijeni F_0. Nakon toga, ostaje nam zarada u iznosu $(S_0 - I)e^{r \cdot T} - F_0 > 0$.

■

Primjer 3.2 *Pretpostavimo da smo sklopili 10-mjesečni forward ugovor kako bismo kupili donicu s cijenom* 50$ *uz godišnji intezitet kamate* 0.08. *Također pretpostavimo da očekujemo dividendu u iznosu* 0.75$ *nakon* 3 *mjeseca,* 6 *mjeseci i* 9 *mjeseci. Prema tome, sadašnja vrijednost dividendi I jednaka je*

$$I = 0.75e^{-0.08 \cdot \frac{3}{12}} + 0.75e^{-0.08 \cdot \frac{6}{12}} + 0.75e^{-0.08 \cdot \frac{9}{12}} = 2.162.$$

Trenutak dospijeća je $T = \frac{10}{12}$ pa je forward cijena jednaka

$$F_0 = (50 - 2.162)e^{0.08 \cdot \frac{10}{12}} = \$51.14.$$

Nadalje možemo još pretpostaviti da nam je poznat prinos dividendi, a ne isplata. Prinos dividende pokazuje postotak isplaćenih dividendi u proteklih godinu dana prema tekućoj tržišnoj cijeni dionice. Računa se prema sljedećoj formuli:

$$\text{prinos dividendi} = \frac{\text{godišnja dividenda}}{\text{cijena dionice}}.$$

Lema 3.3 *Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za financijski instrument koji u trenutku $t = 0$ vrijedi S_0 i ima prinos dividendi q, mora biti $F_0 = S_0 e^{(r-q)\cdot T}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da posjedujemo jednu jedinicu financijske imovine i da dobiveni prihod reinvestiramo u nju. Taj prihod uzrokuje rast udjela u imovini s prinosom dividendi q. Do trenutka dospijeća T, naše vlasništvo je naraslo na e^{qT} jedinica. Sklapamo forward ugovor u cilju prodaje e^{qT} jedinica po forward cijeni F_0. Znamo da sadašnja vrijednost priljeva u trenutku dospijeća T mora biti jednaka iznosu odljeva u trenutku $t = 0$ pa vrijedi $S_0 e^{rT} = F_0 e^{qT}$.

1. Neka je $F_0 > S_0 e^{(r-q)\cdot T}$.
   U trenutku $t = 0$ posudimo iznos S_0 uz intezitet kamate r i kupimo neku financijsku imovinu. Sklopimo forward ugovor u short poziciji za e^{qT} jedinica imovine s dospijećem u trenutku T. Po dospijeću prihoda, reinvestiramo ga u imovinu. U trenutku T izvršimo obvezu iz forward ugovora i prodamo imovinu po cijeni $F_0 e^{qT}$. Zatim vratimo dug od $S_0 e^{rT}$ i ostane nam zarada od $F_0 e^{qT} - S_0 e^{rT} > 0$.

2. Neka je sada $F_0 < S_0 e^{(r-q)\cdot T}$.
   U trenutku $t = 0$ posudimo jednu jedinicu financijske imovine i prodamo ju za S_0. Taj iznos uložimo nerizično u banku uz intezitet kamate r. Sklopimo forward ugovor u long pozicji za e^{qT} jedinica imovine s dospijećem u trenutku T. U trenutku T iz banke podignemo ulog u iznosu od $S_0 e^{rT}$ te u skladu s forward ugovorom kupimo imovinu po cijeni $F_0 e^{qT}$. Nakon toga, ostaje nam zarada u iznosu $S_0 e^{rT} - F_0 e^{qT} > 0$.

$\blacksquare$

Primjer 3.3 *Pretpostavimo da smo sklopili 6-mjesečni forward ugovor kako bismo kupili financijsku imovinu za koju smatramo da će osigurati prinos dividendi jednak* 3.96%. *Godišnji intezitet kamate iznosi* 0.01, *a cijena financijske imovine je* \$25.
$\Rightarrow T = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $r = 0.1$, $S_0 = 25, q = 0.0396$,

$$F_0 = 25 e^{(0.1-0.0396)\cdot\frac{1}{2}} = \$25.77.$$

3.1 Vrijednost forward ugovora

U prethodnom poglavlju smo koristili izraze cijena izvršenja označena s F te forward cijena s oznakom F_0. Iako često poistovjećeni, to su zapravo različiti pojmovi te je važno znati razliku. *Cijena izvršenja* F je cijena po kojoj smo sklopili forward ugovor, dogovara se na dan sklapanja ugovora (trenutak $t = 0$) te je ona fiksna i ne mijenja se. *Forward cijena* F_0 je također unaprijed određena cijena koja se plaća za određenu financijsku imovinu, na unaprijed određeni datum u budućnosti (trenutak dospijeća $t = T$), međutim ona ovisi o tržišnoj cijeni te je zbog toga s vremenom promjenjiva.
Na početku forward ugovora, forward cijena čini vrijednost ugovora nultom. Prema tome, u trenutku $t = 0$, forward cijena F_0 i cijena izvršenja F su jednake. Međutim zbog promjenjivosti tržišne cijene financijske imovine o kojoj ovisi forward cijena, vrijednost forward ugovora će poprimiti pozitivnu ili negativnu vrijednost.

Pretpostavimo da je F cijena izvršenja, T trenutak dospijeća te intezitet kamate r konstanta. Varijabla F_0 je forward cijena koja bi bila primijenjiva da danas pregovaramo o ugovoru. Definirajmo s f trenutnu vrijednost forward ugovora. Kako vrijeme prolazi, cijena izvršenja F se ne mijenja i ostaje jednaka jer je unaprijed definirana ugovorom, ali se forward cijena mijenja.

Za vrijednost long pozicije forward ugovora, koji uključuje financijsku imovinu koja ne donosi nikakav prihod, prema [4, str. 107] vrijedi sljedeća formula:

$$f = (F_0 - F)e^{-r \cdot T} = S_0 - Fe^{-r \cdot T}, \tag{22}$$

a za vrijednost short pozicije:

$$f = (F - F_0)e^{-r \cdot T} = Fe^{-r \cdot T} - S_0. \tag{23}$$

U slučaju gdje financijska imovina osigurava prihod iznosa I, vrijednost forward ugovora u long poziciji iznosi:

$$f = S_0 - I - Fe^{-r \cdot T}, \tag{24}$$

a vrijednost long pozicije forward ugovora financijske imovine koja ostvaruje prinos dividendi q je:

$$f = S_0 e^{-q \cdot T} - Fe^{-r \cdot T}. \tag{25}$$

Kako bismo detaljnije objasnili smisao prethodnih jednadžbi, pretpostavimo da imamo dva forward ugovora čije su cijene izvršenja F_0 i F. Prema svim ostalim specifikacijama su jednaki pa njihovu razliku promatramo u razlici između navedenih cijena izvršenja. U trenutku dospijeća T ona je jednaka $F_0 - F$ što kada pretvorimo u vrijednost danas (sadašnja vrijednost), dobivamo vrijednost $(F_0 - F)e^{-r \cdot T}$. Obzirom da je F_0 cijena po kojoj forward ugovor ima vrijednost jednaku 0, vrijednost forward ugovora koji ima cijenu izvršenja F je upravo jednaka iznosu $(F_0 - F)e^{-r \cdot T}$.

Primjer 3.4 *Pretpostavimo da smo sklopili forward ugovor u long poziciji za dionicu, koja ne isplaćuje dividendu, u nekom trenutku u prošlosti. Trenutno imamo još* 6 *mjeseci do dospijeća. Intezitet kamate iznosi* 0.01 *godišnje, cijena dionice je* \$25 *i cijena izvršenja ugovora je* \$24. *Izračunajmo* 6*-mjesečnu forward cijenu.*
$\Rightarrow T = \frac{6}{12},\ r = 0.10,\ S_0 = 25,\ F = 24,$

$$F_0 = 25e^{0.1 \cdot \frac{1}{2}} = \$26.28.$$

Prema tome, vrijednost forward ugovora je

$$f = (26.28 - 24)e^{-0.1 \cdot \frac{1}{2}} = \$2.17.$$

3.2 Forward ugovor za valute

Pretpostavimo da imamo američkog investitora koji zna da će za n mjeseci primiti eure. Može napraviti sljedeće:

- čekati n mjeseci i onda zamijeniti svoje eure po tadašnjem tečaju, uz rizik da će vrijednost eura biti veća ili manja nego u trenutku sklapanja ugovora,

- sklopiti ugovor s bankom vezan za tečaj koji će se primjeniti za n mjeseci na njegovu transakciju.

U slučaju odabira druge opcije, osigurava si smanjenje rizika na način da unaprijed prodaje svoje eure za američke dolare po dogovorenom tečaju koji nazivamo *forward tečaj.*

Uzmimo sada da imamo financijsku imovinu koja se sastoji od jedne jedinice strane valute (euro). Definiramo varijablu S_0 koja predstavlja trenutnu vrijednost u dolarima jedne jedinice eura i varijablu F_0 koja predstavlja forward cijenu u dolarima jedne jedinice eura. Obzirom da strana valuta, u našem slučaju euro, ima svojstvo da vlasnik valute može zaraditi određenu kamatu koja prevladava u stranoj zemlji, definiramo r_f kao vrijednost inozemne bezrizične kamatne stope kada se novac uloži na vrijeme T, a s r označavamo bezrizičnu stopu američkog dolara. Veza između varijabli dana je sljedećom formulom:

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)\cdot T}. \tag{26}$$

Postoje dva načina na koji se navedena financijska imovina može promijeniti u domaću valutu (dolare) u trenutku T. Prvo, možemo investirati na T vremena po r_f i sklopiti forward ugovor za prodaju prihoda u trenutku T za dolare. Prema tom načinu imamo $F_0 e^{r_f T}$ dolara. Drugi način je da zamijenimo eure za dolare na početni dan po tadašnjem tečaju te uložimo dolare na T vremena po stopi r. Taj način generira $S_0 e^{rT}$ dolara. Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, te dvije vrijednosti bi trebale biti jednake:

$$F_0 e^{r_f T} = S_0 e^{rT}, \tag{27}$$

iz čega slijedi formula (26). Primijetimo kako je formula (26) jednaka formuli iz leme 3.3., gdje se umjesto r_f nalazi q. Razlog tomu je što se strana valuta može smatrati investicijskom imovinom koja plaća poznati prinos. Prema tome, prinos predstavlja bezrizičnu kamatnu stopu u stranoj valuti.

Primjer 3.5 *Neka su zadane kamatne stope u Australiji i SAD-u od* 5% *i* 7%, *redom te tečaj od* 0.62 *USD po AUD. Trenutak dospijeća je* 2 *godine. Prema formuli (26) imamo sljedeće:*

$$0.62e^{(0.07-0.05)\cdot 2} = 0.6453.$$

Pretpostavimo da je forward tečaj manji od dobivenog, npr. 0.63. *Možemo napraviti sljedeće:*

1. *posudimo* 1000 *AUD na* 2 *godine po kamatnoj stopi od* 5%, *pretvorimo ih u* $1000 \cdot 0.62 = 620$ *USD i investiramo po kamatnoj stopi od* 7%,
2. *sklopimo forward ugovor za kupnju* 1105.17 *AUD za* $1105.17 \cdot 0.63 = 696.26$ *USD.*

Prvo imamo rast uloga od 620 *USD kroz* 2 *godine na iznos* $620e^{0.07\cdot 2} = 713.17$ *USD. Nadalje, ispoštujemo uvjete iz forward ugovora te s tim iznosom pokrivamo dug* $1000e^{0.05\cdot 2} = 1105.17$. *Strategija stoga dovodi do bezrizične dobiti od* $713.17 - 696.26 = 16.91$ *USD.*

Pretpostavimo sada da je forward tečaj veći od dobivenog, npr. 0.66. *Imamo sljedeći postupak:*

1. *posudimo* 1000 *USD na* 2 *godine po kamatnoj stopi od* 7%, *pretvorimo ih u* $\frac{1000}{0.62} = 1612.90$ *AUD i investiramo po kamatnoj stopi od* 5%,

2. *sklopimo forward ugovor za prodaju* 1782.53 *AUD za* $1782.53 \cdot 0.66 = 1176.47$ *USD.*

Investirani iznos 1612.90 *AUD kroz* 2 *godine narastao je na iznos od* $1612.90e^{0.05 \cdot 2} = 1782.53$ *AUD. Ispoštujemo uvjete forward ugovora te taj iznos pretvorimo u* 1176.47 *USD. Nakon* 2 *godine iznos duga nam je* $1000e^{0.07 \cdot 2} = 1150.27$ *USD. Prema tome, ova strategija dovodi do bezrizične dobiti od* $1176.47 - 1150.27 = 26.20$ *USD.*

3.3 Forward rate Agreement (FRA)

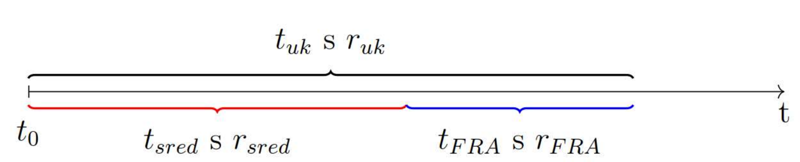
Forward rate agreement (FRA) je forward ugovor o fiksiranju kamatne stope na određeni iznos glavnice, na određeni period čiji su početak i kraj u budućnosti. FRA se dogovara na današnji dan, a na kraju perioda se isplaćuje razlika između referentne[2] i dogovorene fiksne kamatne stope izračunate na iznos glavnice. Ova vrsta ugovora se koristi za zaštitu od promjena referentnih stopa te pri fiksiranju budućih kamatnih prihoda ili rashoda. U poglavlju 2.2. upoznali smo se s forward kamatnom stopom koju ćemo ovdje označiti s r_{FRA}. Također, A. Ruttiens (2013.) uvodi sljedeće oznake:

- t_{sred} srednje razdoblje (razdoblje nastanka rizika) i r_{sred} kamata za to razdoblje,
- t_{uk} ukupno razdoblje i r_{uk} ukupna kamatna stopa,
- t_{FRA} razdoblje FRA ugovora (razdoblje zaduživanja) i r_{FRA} FRA kamatna stopa.

Prema tome, vrijedi

$$r_{FRA} = \frac{r_{uk}t_{uk} - r_{sred}t_{sred}}{t_{FRA}(1 + r_{sred}r_{uk})}, \tag{28}$$

za vremenska razdoblja od najviše godinu dana. Inače FRA tržišta rade na maksimalnom razdoblju od 2 godine, podijeljena na bilo koju kombinaciju podrazdoblja, ali većina volumena trgovanja uključuje kraća razdoblja od nekoliko mjeseci pa se najčešće koristi gore navedena formula. Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti kombinaciju navedenih kamatnih stopa i njihovih vremenskih razdoblja.



Slika 6: Kamatne stope uključene u FRA

[2] Referentne kamatne stope su kamatne stope koje su osnova za sve vrste financijskih ugovora. One se redovno ažuriraju te su javno dostupne svima. U Republici Hrvatskoj koristi se Nacionalna referentna stopa (NRS) koju formira Hrvatska narodna banka (HNB).

3.4 Ugovor o razlici (CFD)

Ugovor o razlici (eng. *Contracts of Difference - CFD*) je financijski ugovor između dvije strane za razmjenu razlike u vrijednosti financijske imovine između vremena otvaranja i zatvaranja ugovora. Oni omogućuju trgovcima i ulagačima priliku da profitiraju od kretanja cijena bez posjedovanja financijske imovine. Može se sklopiti u ulozi kupca ili prodavatelja. Najistaknutija značajka CFD ugovora je što nema dospijeća, čak ni za prodavatelja. Ulagatelj u CFD ugovore zapravo nikada ne posjeduje financijsku imovinu iz ugovora, već umjesto toga primaju prihod na temelju promjene cijene te imovine. Na primjer, umjesto kupnje ili prodaje fizičkog zlata, trgovac može jednostavno nagađati hoće li cijena zlata ići gore ili dolje. U suštini, ulagači mogu koristiti CFD ugovore za oklade o tome hoće li cijena financijske imovine ili vrijednosnog papira iz ugovora porasti ili pasti. Trgovci se mogu kladiti na kretanje prema gore ili prema dolje.
CFD ugovori uključuju neku vrstu budućeg sustava marže (više o tome u sljedećem poglavlju), koji se namiruje na dnevnoj bazi, odnosno:

- ugovaratelj mora imati otvoren račun (račun marže) s početnim kapitalom (depozitom),
- veličina depozita ovisi o vrsti financijske imovine za koju ugovaramo CFD, odnosno o njenoj volatilnosti i likvidnosti, uvećana za brokersku proviziju,
- dnevna dobit (ili dnevni gubitak) zbog dnevne promjene vrijednosti financijskog instrumenta tereti se na računu marže,
- druga ugovorna strana mora održavati minimalnu razinu marže.

Ukoliko se investitor nalazi u long poziciji, tereti se za iznos *kamata + marža*, a ukoliko je u short poziciji primit će iznos *kamata - marža*. Ako se CFD ugovor primjenjuje na dionice koje imaju isplatu dividende, iznos dividende će biti uplaćen na kupčev depozit i umanjen s depozita trgovca.

Primjer 3.6 *Pretpostavimo da imamo CDF ugovor u long poziciji za* 1000 *L'Oreal dionica na dan* 29.04.2009. *po cijeni* €52.07. *Zahtijevani početni depozit iznosi* 3%. *Na kraju dana, tržište se zatvara s cijenom* €52.55. *CFD kupac zatvara svoju poziciju sutradan (*30.04.2009.*), kada je cijena dionice* €54.04. *Imamo sljedeće operacije:*

1. ***na dan*** 29.04.2009.*: kupujemo* 1000 *L'Oreal dionica po cijeni od* €52.07 $\Rightarrow 1000 \cdot 52.07 = 52070.00$ *te imamo početni depozit u visini od* 3% $\Rightarrow 52070.00 \cdot \frac{3}{100} = 1562.10$,
2. ***s noći*** 29.04. ***na*** 30.04.*: tržište se zatvara s cijenom* €52.55 *i kamatom* 1.372%, *a dodatno plaćamo i maržu od* 0.5% *te imamo sljedeće* $\Rightarrow 1000 \cdot 52.55 \cdot \frac{0.01872}{365} = 2.70$,
3. ***na dan*** 30.04.2009.*: prodajemo* 1000 *L'Oreal dionica po cijeni* €54.04 $\Rightarrow 1000 \cdot 54.04 = 54040.00$.

Neto rezultat iznosi $54040 - (52070 + 1562.10 + 2.70) = 54040 - 53634.80 =$ €405.20. *Odnosno, povrat na stvarno položeni iznos* $1562.10 + 2.70 = 1564.80$ *iznosi* $\frac{405.20}{1564.80} = 25.9\%$.

4 Futures ugovori

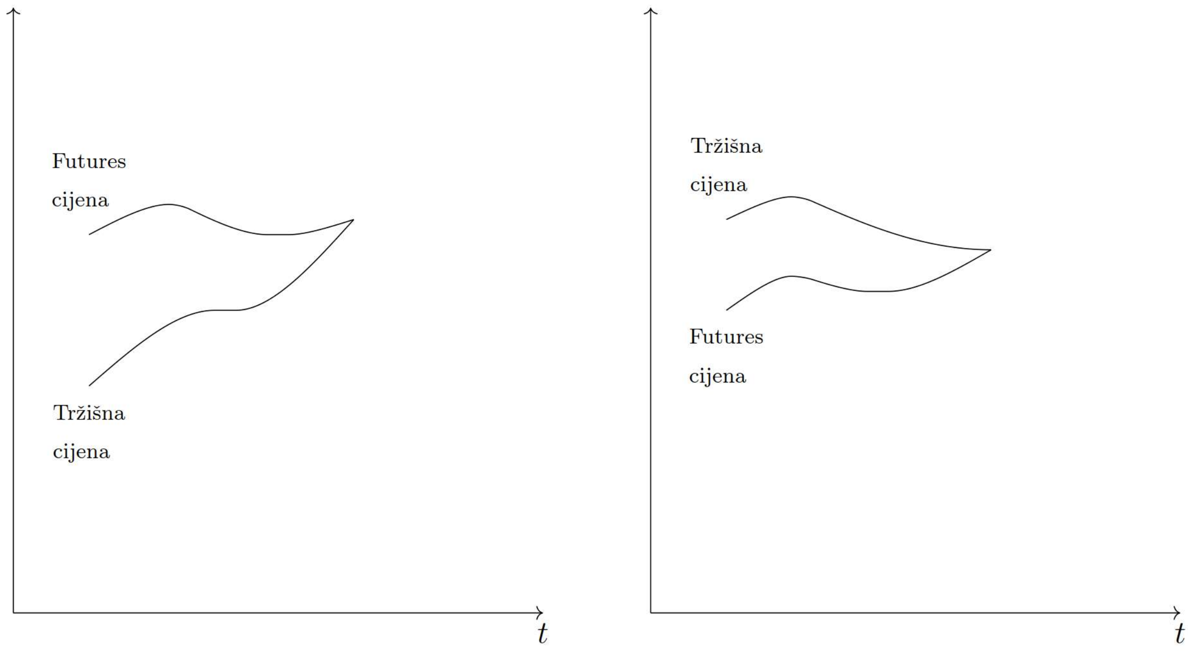
Osim forward ugovora, na financijskom tržištu trguje se i *futures ugovorima.* To su standardizirani vrijednosni papiri kojima se slobodno i organizirano trguje. Prema tome, likvidnost im je veća nego kod forward ugovora. Glavna razlika je što se forward ugovorima trguje na OTC tržištu, a s futures ugovorima se trguje na burzi.

Definicija 4.1 ***Futures ugovor*** *je ugovor kojim se jedna strana (kupac) obvezuje na kupnju, a druga strana (prodavatelj) na prodaju točno određene količine financijskih instrumenata u trenutku dospijeća T po točno određenoj futures cijeni F_0, danas.*

Operacije na burzi su u potpunosti transparentne u cijenama, količinama i specifikacijama ugovora. U svrhu osiguranja dovoljne likvidnosti za privlačenje kupaca i prodavatelja, burza mora standardizirati specifikacije ugovora što je više moguće. Neke od zahtijevanih su:

- dospijeća: $4 - 12$ puta godišnje,
- nominalna količina za jedan ugovor ("veličina ugovora"),
- fluktuacija cijene (eng. *tick*):
  - *tick veličina* = minimalno kretanje cijene instrumenta za trgovanje na tržištu,
  - *tick vrijednost* = tick veličina · nominalna količina,
- namirenje po dospijeću: ili fizički u jedinicama financijskih instrumenata ili u novcu.

Kako se bliži trenutak dospijeća, futures cijena je jednaka ili vrlo blizu tržišnoj cijeni u trenutku dospijeća. Na sljedećem grafičkom prikazu imamo prikazanu vezu između futures cijene i tržišne cijene u i do trenutka dospijeća.



(a) Futures cijena je veća od tržišne cijene

(b) Futures cijena je manja od tržišne cijene

Slika 7: Veza između futures i tržišne cijene kako se trenutak dospijeća približava

Suprotno pretpostavci da imamo uvjet bez arbitraže, diskutirajmo situaciju kada je prisutna arbitraža na financijskom tržištu te je futures cijena veća ili manja od tržišne cijene u trenutku dospijeća T.

1. Kada bi futures cijena bila veća od tržišne cijene u trenutku dospijeća T, trgovci bi sklopili futures ugovor u short poziciji, kupili bi financijsku imovinu i zatim izvršili uvjete ugovora. Taj postupak dovodi do zarade koja je jednaka razlici između futures cijene i tržišne cijene.

2. U slučaju da je futures cijena manja od tržišne cijene u trenutku dospijeća T, razne tvrtke bi se zainteresirale za financijsku imovinu te bi sklopile futures ugovor i zatim čekale izvršenje. S čekanjem, futures cijena raste.

4.1 Sustav marže

Kako bi se uklonio rizik, transakcije se ne sklapaju izravno između kupca i prodavatelja, već oboje sklapaju ugovor s klirinškom kućom[3] burze. One nikada nisu suočene s neispunjenjem plaćanja jer sklapaju ugovore istovremeno s kupcem i prodavateljem. Prema tome, kupac i prodavatelj se suočavaju s tržišnim rizikom, ali ne i kreditnim[4]. S druge strane, klirinške kuće se suočavaju s rizikom ugovornih strana, ali ne i tržišnim. Rizik ugovorne strane je zapravo rizik hoće li, po dospijeću, kupac biti u mogućnosti platiti određeni iznos za primljenu financijsku imovinu i rizik da će ju prodavatelj isporučiti. Ovakvu vrstu rizika pokriva sustav kolateralnih depozita zvan *sustav marže* (eng. *margining system*).

Za početak svaka ugovorna strana mora imati otvoren margin račun (račun marže) u banci koji je odobren od strane burze te na njemu položiti početni depozit utvrđen od strane burze. Dnevni gubitak strane, koja je u gubitku, tereti se s njegova margin računa i uplaćuje se na račun strane koja je na dobitku. Dug na margin računu strane koja je u gubitku mora biti pokriven uplatom odgovarajućeg iznosa tako da je stanje na računu uvijek jednako početnom depozitu. Kako vrijeme prolazi, stanje na margin računu odražava uzastopne dnevne dobitke i gubitke stranaka. Početna razina marže koju fiksira burza, temelji se na kretanju prosječne dnevne cijene financijskog instrumenta s kojim se trguje.

Primjer 4.1 *Uzmimo za primjer futures ugovore na Euro Stoxx 50 indeksu s dospijećem u ožujku 2003. godine. U početnom trenutku (23. siječanj 2003. godine) špekulant prodaje* 100 *ugovora s cijenom od* €2290. *Početna marža za jedan ugovor iznosi* €3000. *Špekulant očekuje pad vrijednosti indeksa. Prema tome imamo sljedeće:*

- *početni depozit* $= 100 \cdot 3000 =$ €300000,
- *tick vrijednost iznosi* €10, *a svaki puta kada cijena padne za* 1, *prodavatelj ostvaruje profit od* €$10 \cdot 100 =$ €1000. *Vrijedi i obratno, u slučaju povećanja za* 1, *špekulant ostvaruje gubitak od* €1000.

Pogledajmo u sljedećoj tablici promjene margin računa u periodu od 23.01. *do* 30.01. *za navedene futures ugovore.*

[3] Klirinške kuće preuzimaju rizik transakcije između dvije strane i smanjuju rizik da jedna od strana ne ispuni svoje obveze tijekom transakcije.

[4] Kreditni rizik je rizik da jedna od strana u financijskom ugovoru neće izvršiti svoju obvezu (djelomično ili u cijelosti), što će dovesti do toga da investitor pretrpi financijski gubitak.

Datum	Cijena ugovora	Tick vrijednosti	Promjena stanja računa	Stanje računa
23.01.	2290			300000
24.01.	2231	-59	$+59000$	359000
27.01.	2151	-80	$+80000$	439000
28.01.	2180	$+29$	-29000	410000
29.01.	2221	$+41$	-41000	369000
30.01.	2218	-3	$+3000$	372000

Tablica 2: Promjena stanja margin računa prodavatelja

U slučaju da prodavatelj odluči kupiti nazad svojih 100 *ugovora, na dan 30.01., njegova zarada iznosi* $372000 - 300000 = €72000$.
Pomoću navedenih podataka dodatno možemo izračunati prednost operacije:

- *kao omjer nominalne vrijednosti operacije i početnog depozita:*

$$\frac{2290 \cdot €10 \cdot 100}{€300000} = \frac{€2290000}{€300000} \approx 7.5,$$

- *ili po svakom ugovoru:*

$$\frac{2290 \cdot €10}{€3000} = \frac{€22900}{€3000} \approx 7.5.$$

4.2 Futures cijene na financijskom tržištu

Pretpostavimo kako pod *prihod* smatramo bilo kakvu isplatu za financijsku imovinu, na primjer: prinos dividende prema burzovnom indeksu, kupon po obveznici, kamatna stopa po valuti i slično. Također, generalizacijom bilo koje vrste financijske imovine na financijskom tržištu, dobivamo sljedeći odnos:

$$\textit{teorijska futures cijena} = \textit{tržišna cijena} + \textit{trošak financiranja} - \textit{prihod},$$

gdje razliku između troška financiranja i prihoda nazivamo *cost of carry*. Ukoliko je on pozitivan, što znači da je financiranje financijske imovine skupo, teorijska futures cijena je veća od tržišne cijene, i obratno.
Ukoliko se nalazimo u sustavu neprekidnog ukamaćivanja, poznato nam je prema prethodnom poglavlju da je forward cijena jednaka

$$F_0 = S_0 e^{r \cdot T},$$

u slučaju gdje tržište ne dopušta arbitražu. Obzirom da nam je pretpostavka kako je intezitet kamate konstantan, forward i futures cijene su teoretski jednake, što ćemo pokazati kasnije u radu. Prema tome, za cost of carry financijske imovine vrijedi sljedeće:

- za dionice bez dividende jednak je intezitetu kamate r,
- za burzovni indeks iznosi $r - q$ gdje je q prinos,
- za valute je $r - r_f$ gdje r predstavlja bezrizičnu stopu domaće valute, a r_f strane valute,
- za robu koja ostvaruje prinos q i zahtijeva troškove skladištenja po stopi u iznosi $r - q + u$,

što ćemo označavati s c. Futures cijena futures ugovora s trenutkom dospijeća T iznosi

$$F_0 = S_0 e^{c \cdot T}, \tag{29}$$

a u slučaju potrošnih dobara

$$F_0 = S_0 e^{(c-y) \cdot T}. \tag{30}$$

4.2.1 Rizik futures ugovora

Jedan od pristupa u opisivanju odnosa između futures cijena i očekivanih tržišnih cijena je baziran na odnosu između rizika i očekivanog povrata. Općenito vrijedi da što je veći rizik investicije, veći je i očekivani povrat.
Pretpostavimo da imamo špekulanta u long poziciji futures ugovora s trenutkom dospijeća T koji očekuje da će tržišna cijena biti veća od futures cijene na isteku ugovora. Također, istovremeno stavlja sadašnju vrijednost futures cijene u bezrizično ulaganje kako bi s dobivenim prihodom izvršio obvezu iz futures ugovora. Nakon toga, imovina je prodana za tržišnu cijenu. Špekulantov novčani tok je sljedeći:

- $t = 0$: $-F_0 e^{-r \cdot T}$,
- $t = T$: $+S_T$.

Zanima nas kako vrednovati ovu investiciju? Kamatna stopa koju bismo trebali koristiti za očekivani novčani tijek, u trenutku dospijeća T, trebala bi biti jednaka investitorovom povratu ulaganja. Pretpostavimo da je k investitorov povrat za ovu investiciju. Sadašnja vrijednost investicije je

$$-F_0 e^{-r \cdot T} + E[S_T] e^{-k \cdot T}, \tag{31}$$

gdje je $E[S_T]$ očekivana vrijednost. Možemo pretpostaviti kako sva ulaganja na tržištima vrijednosnih papira imaju cijenu takvu da imaju nultu sadašnju vrijednost. To znači sljedeće:

$$-F_0 e^{-r \cdot T} + E[S_T] e^{-k \cdot T} = 0 \tag{32}$$

$$\Rightarrow F_0 = E[S_T] e^{(r-k) \cdot T}. \tag{33}$$

Ako povrat financijske imovine nije koreliran s povratom burze[5], ispravno je koristiti bezrizičnu kamatnu stopu r, pa vrijedi $k = r$. Prema tome iz formule (33) imamo:

$$F_0 = E[S_T]. \tag{34}$$

Ovo pokazuje da kada povrat imovine nije u korelaciji s povratom burze, futures cijena je nepristrana procjena očekivane buduće tržišne cijene. U slučaju da je pozitivno korelirano, $k > r$ te formula (33) vodi do $F_0 < E[S_T]$. Odnosno, ako financijska imovina pod futures ugovorom ima pozitivan sistemski rizik[6] možemo očekivati da futures cijena podcjenjuje očekivanu buduću tržišnu cijenu. Primjer financijske imovine koja ima pozitivan sistemski rizik je burzovni indeks. Očekivani povrat investitora na dionice koje spadaju pod burzovni

[5] Povrat burze je stopa rasta godišnjeg prosječnog burzovnog indeksa, a godišnji prosječni indeks burze konstruiran je uzimanjem prosjeka dnevnih burzovnih indeksa. Na američkoj burzi se povrat burze bazira na burzovnom indeksu S&P500, na europskoj burzi Euronext 100 itd.

[6] Sistemski rizik je rizik od kolapsa cijelog financijskog sustava ili cijelog tržišta.

indeks općenito je veći od r. Ako uzmemo da se ostvaruje prinos dividendi u iznosu q, očekivano povećanje indeksa mora biti veće od $r - q$. Jednadžba (29) je stoga u skladu s predviđanjem da cijena futures ugovora podcijenjuje očekivanu buduću tržišnu cijenu dionica za burzovni indeks.
Ako je povrat imovine negativno koreliran s povratom burze, $k < r$ i formula daje $F_0 > E[S_T]$ što znači da ako financijska imovina pod futures ugovorom ima negativan sistemski rizik, možemo očekivati da futures cijena precijenjuje očekivanu buduću tržišnu cijenu.

Kada je futures cijena ispod očekivane buduće tržišne cijene, situacija je poznata pod nazivom *normal backwardation (normalna zaostalost)*, a kada je iznad onda tu situaciju nazivamo *contango*. Navedeni izrazi se koriste i kada se uspoređuje futures cijena s trenutnom tržišnom cijenom.

4.3 Strategije zaštite pomoću futures ugovora

4.3.1 Bazni rizik

Znamo kako se općenito cijena na tržištu nekog financijskog instrumenta razlikuje od njegove teorijske cijene. Neki od razloga su što na tržišne cijene utječe likvidnost tržišta, učinkovitost, tržišni pritisak i slično. Vrlo je intuitivno za pretpostaviti da se tržišna cijena razlikuje od futures cijene. Kako bi se naglasila razlika između njih, definiramo *bazni rizik*:

$$\textit{bazni rizik (b)} = \textit{tržišna cijena} - \textit{futures cijena},$$

gdje u slučaju da oduzimamo teorijsku futures cijenu, bazni rizik nazivamo *teorijski bazni rizik*, a u slučaju oduzimanja tržišne futures cijene, *tržišni bazni rizik*. Bazni rizik može biti pozitivan i negativan. Kako vrijeme prolazi, tržišna cijena i futures cijena se ne mijenja za jednaki iznos. Promjenom tih cijena, mijenja se i vrijednost baznog rizika pa nam on predstavlja strategiju zaštite od rizika da će promjene cijena otići u potpuno suprotnim smjerovima jedan od drugog. Kada se bazni rizik povećava kažemo da jača, a kada se smanjuje da slabi. Uvedimo sljedeće oznake te proučimo bazni rizik:

- S_1: tržišna cijena u trenutku t_1,
- S_2: tržišna cijena u trenutku t_2,
- F_1: futures cijena u trenutku t_1,
- F_2: futures cijena u trenutku t_2,
- b_1: bazni rizik u trenutku t_1,
- b_2: bazni rizik u trenutku t_2.

Dodatno pretpostavimo kako je trenutak t_1 početni trenutak, a t_2 trenutak dospijeća. Prema definiciji imamo:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_1 - F_1, \\ b_2 &= S_2 - F_2. \end{aligned}$$

Pretpostavimo prvo situaciju da znamo kako će financijska imovina biti prodana u trenutku t_2 te sklopimo u trenutku t_1 futures ugovor u short poziciji. U trenutku dospijeća, cijena imovine je S_2, a ostvarena profit iz futures ugovora iznosi $F_1 - F_2$. Cijena koja se dobije za imovinu u tom slučaju iznosi:

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2.$$

U situaciji kada poduzeće zna da će se odviti kupnja financijske imovine u trenutku t_2, u trenutku t_1 sklopi futures ugovor u long poziciji. Cijena koju plaća za imovinu je S_2 i gubitak po ugovoru je $F_1 - F_2$. Cijena koja se plaća za imovinu jednaka je prethodnom izrazu.

U trenutku t_1 poznate su nam vrijednosti S_1, F_1 i b_1, no b_2 vrijednost nije. Kada bi nam bazni rizik u trenutku t_2 bio poznat u trenutku t_1, imali bismo savršenu zaštitu od rizika te ona zapravo ne bi bila potrebna. Primijetimo kako bazni rizik može zapravo dovesti do poboljšanja ili pogoršanja stanja investitora koji se odlučio zaštiti od rizika. U slučaju short pozicije, investitoru pogoduje ako bazni rizik jača neočekivano, a negoduje ako neočekivano slabi. U long poziciji vrijedi suprotno.

4.3.2 Omjer zaštite

Već smo u uvodu naveli kako izvedeni financijski instrumenti, u koje spadaju i forward i futures ugovori, služe za kontrolu i ograničavanje rizika. Postoje razne strategije koje koriste futures ugovore za zaštitu financijske imovine, a neke od njih koriste tako zvani omjer zaštite o kojem ćemo reći nešto više u ovom poglavlju.

Omjer zaštite (eng. *hedge ratio*) je omjer količine zaštićene financijske imovine u futures ugovoru i količine ukupne financijske imovine. U slučaju kada su količine jednake, najčešće se uzima da je omjer zaštite jednak 1. Međutim, to nije uvijek optimalno. Osoba koja ugovara zaštitu financijske imovine trebala bi odabrati omjer zaštite koji će minimizirati varijancu vrijednosti zaštićene financijske imovine.

Teorem 4.1 *Neka je ΔS promjena tržišne cijene S i ΔF promjena futures cijene F od početnog trenutka do trenutka dospijeća futures ugovora. Sa σ_S i σ_F označimo standardnu devijaciju od ΔS i ΔF, redom te s ρ označimo koeficijent korelacije između ΔS i ΔF. Omjer zaštite koji minimizira varijancu vrijednosti zaštićene financijske imovine jednak je:*

$$h^* = \rho \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_F}. \tag{35}$$

Dokaz. Pretpostavimo da očekujemo da će se prodati N_A jedinica financijske imovine u trenutku t_2 te odlučujemo u trenutku t_1 zaštiti određenu količinu imovine sklapajući futures ugovor u short poziciji na N_F jedinica imovine. Omjer zaštite, h, iznosi

$$h = \frac{N_F}{N_A}. \tag{36}$$

Ukupan iznos ostvaren za imovinu, kada se uzme u obzir dobit ili gubitak od zaštite ugovorom, označit ćemo s Y te on iznosi

$$Y = S_2 N_A - (F_2 - F_1) N_F,$$

odnosno

$$Y = S_1 N_A + (S_2 - S_1) N_A - (F_2 - F_1) N_F, \tag{37}$$

gdje su S_1, S_2, t_1, t_2, F_1 i F_2 analogne vrijednostima iz prethodnog poglavlja. Prema navedenim vrijednostima u iskazu teorema i formuli (36), Y možemo zapisati na sljedeći način:

$$Y = S_1 N_A + N_A(\Delta S - h\Delta F). \tag{38}$$

Obzirom da su vrijednosti S_1 i N_A poznate u trenutku t_1, varijanca od Y je minimizirana kada je minimizirana varijanca izraza $\Delta S - h\Delta F$. Varijanca od $\Delta S - h\Delta F$ iznosi

$$v = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F.$$

Kako bismo odredili minimum, trebamo derivirati varijancu te dobivamo sljedeće

$$\frac{dv}{dh} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_F\sigma_S.$$

Ako izjednačimo prethodni izraz s nula te ponovno deriviramo varijancu, gdje zaključujemo kako je $\frac{d^2v}{dh^2}$ pozitivno, vidimo da vrijednost od h koja minimizira varijancu je jednaka

$$h^* = \rho \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_F}.$$

$\blacksquare$

U slučaju kada je $\rho = 1$ i $\sigma_F = \sigma_S$, omjer zaštite h^* jednak je 1.0 što je očekivano ako futures cijena savršeno odražava tržišnu cijenu. Ako je $\rho = 1$ i $\sigma_F = 2\sigma_S$, omjer zaštite h^* je 0.5 što je očekivano ukoliko se futures cijena uvijek promjeni za duplo više od tržišne cijene. Optimalni omjer zaštite je nagib pravca koji najbolje opisuje regresiju ΔS prema ΔF kao što možemo vidjeti na Slici 8.. To je zapravo vrlo intuitivno obzirom da smo dokazali da h^* odgovara omjeru promjena u ΔS prema promjenama u ΔF. Navedene varijance i korelacija se najčešće izračunavaju pomoću povijesnih podataka promjena tržišnih i futures cijena.

Obzirom da možemo kupiti/prodati više futures ugovora, pitanje je koliki je optimalan broj ugovora za zaštitu određene imovine. Definirajmo sljedeće varijable:

- Q_A: veličina imovine koja se želi zaštiti (u jedinicama imovine),
- Q_F: veličina jednog futures ugovora (u jedinicama imovine),
- N^*: optimalan broj futures ugovora za zaštitu.

Naveli smo već da s futures ugovorom želimo zaštititi određenu količinu imovine. Iako možemo zaštititi svu imovinu, mi ipak želimo pronaći optimalnu količinu imovine koja će se zaštititi jednim futures ugovorom. Prema tome, veličina jednog futures ugovora bi trebala biti $h^* \cdot Q_A$ jedinica imovine, a ukupan broj futures ugovora je prema [4, str. 57] dan s

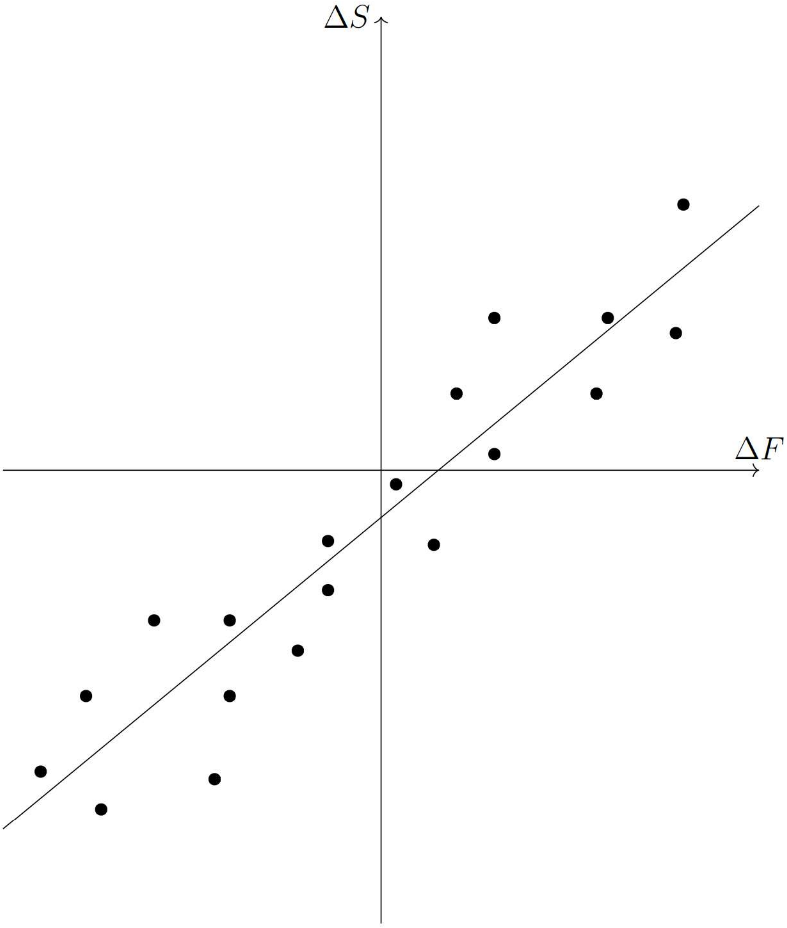
$$N^* = \frac{h^* \cdot Q_A}{Q_F}. \tag{39}$$

Obzirom da futures ugovori imaju dnevna poravnanja[7], potrebna je mala prilagodba formule (39) kako bi se u obzir uzeo taj utjecaj svakodnevnog poravnanja. Tada se u praksi koristi sljedeća formula:

$$N^* = \frac{h^* \cdot V_A}{V_F}, \tag{40}$$

gdje V_A predstavlja novčanu vrijednost imovine koja se želi zaštiti, a V_F novačnu vrijednost jednog futures ugovora. Vrijednost futures ugovora se definira kao umnožak futures cijene i veličine tog ugovora u jedinicama imovine ($F_0 \cdot Q_F$).

[7]Dnevno poravnanje, u trgovanju s futures ugovorima, je proces podmirenja dobiti ili gubitka ostvarene futures pozicijom na kraju svakog trgovačkog dana.



Slika 8: Regresija promjena tržišnih cijena prema promjeni futures cijena

4.4 Futures ugovori na burzovnim indeksima

Burzovni indeks je mjera ili vrijednost koja se koristi za izražavanje i praćenje promjena vrijednosti dijela financijskog tržišta za koje je taj burzovni indeks definiran. Postoje različiti burzovni indeksi. Neki od njih su: S&P500 (USA), TOPIX (Japan), FTSE (UK), CROBEX (Hrvatska) i slično. U slučaju da se burzovni indeks odnosi na neki određeni portfelj[8] dionica, dividende općenito nisu uključene u njegov izračun pa oni zapravo prate kapitalni dobitak/gubitak od ulaganja.

Futures ugovori na burzovnim indeksima mogu se koristiti za zaštitu raznolikog portfelja dionica. Pretpostavimo da imamo neki portfelj dionica te definirajmo sljedeće varijable:

- V_P: trenutna vrijednost portfelja,
- V_F: trenutna vrijednost jednog futures ugovora.

Ukoliko portfelj savršeno odražava indeks, optimalan omjer zaštite jednak je 1.0 te prema formuli (40) vrijedi da je optimalan broj futures ugovora za zaštitu od rizika jednak:

$$N^* = \frac{V_P}{V_F}. \tag{41}$$

[8]Portfelj (ili portfolio) je skup financijske imovine pojedinca koji je sastavljen od različitih financijskih instrumenata kao što su dionice, obveznice, gotovina itd.

Primjer 4.2 *Pretpostavimo da imamo portfelj koji vrijedi* $5050000 *i da on preslikava vrijednost burzovnog indeksa S&P500. Sklopimo futures ugovor veličine od* 250 *jedinica po cijeni od* $1010 *za svaku jedinicu.*
$\Rightarrow V_P = 5050000,\ V_F = 250 \cdot 1010 = 252500,$

$$N^* = \frac{5050000}{252500} = 20.$$

Prema tome, potrebno je takvih 20 *futures ugovora kako bi se portfelj uspješno zaštitio od rizika.*

U slučaju kada portfelj ne odražava indeks, koristimo parametar β koji predstavlja mjeru koja se koristi u temeljnoj analizi (model vrednovanja kapitalne imovine (CAPM)[9]) za određivanje volatilnosti imovine ili portfelja u odnosu na cjelokupno tržište. Njega izražavamo kao nagib pravca dobiven kada se višak povrata portfelja regresira u odnosu na višak povrata tržišta, koristeći nerizičnu stopu. Interpretiramo ga na sljedeći način: ukoliko je $\beta = 2.0$ višak povrata portfelja teži biti **dvostruko veći** od viška povrata tržišta. Također možemo reći kako je višak povrata portfelja dvostruko više volatilan od viška povrata tržišta. Za portfelj koji ima $\beta = 2.0$ kažemo da je dva puta više osjetljiv na kretanje tržišta od portfelja koji ima $\beta = 1.0$. Odnosno, u slučaju zaštite od rizika futures ugovorima, morat ćemo sklopiti duplo više ugovora. Općenito vrijedi da je $h^* = \beta$, pa formula (40) glasi:

$$N^* = \beta \cdot \frac{V_P}{V_F}. \tag{42}$$

Primjer 4.3 *Pretpostavimo da smo sklopili futures ugovor u short poziciji s trenutkom dospijeća* 4 *mjeseca. Koristimo ga za zaštitu portfelja u sljedeća* 3 *mjeseca. Imamo sljedeće vrijednosti:*

- *vrijednost S&P500 indeksa* $S_0 = 1000$,
- *futures cijena* $F_0 = 1010$,
- *vrijednost portfelja* $V_P = \$5050000$,
- *kamatna stopa* $r = 0.04$ *godišnje,*
- *prinos dividende na indeks* $q = 0.01$ *godišnje,*
- *beta portfelja* $\beta = 1.5$.

Prema prethodnom primjeru, vrijednost futures ugovora je $V_F = 252500$ *i sada prema formuli (42) broj ugovora je jednak*

$$N^* = 1.5 \cdot \frac{5050000}{252500} = 30.$$

Uzmimo slučaj da je vrijednost indeksa za 3 *mjeseca jednaka* 900 *i futures cijena tada iznosi* 902*. Dobitak od ugovora iznosi*

$$30 \cdot (1010 - 902) \cdot 250 = \$810000.$$

[9]Model vrednovanja kapitalne imovine (CAPM) opisuje odnos između sistemskog rizika i očekivanog povrata imovine, posebno dionica.

Nadalje, gubitak na indeksu je 10% *te poznato je da prinos dividende od* 1% *godišnje što je* 0.25% *na 3 mjeseca. Kada uključimo dividendu u izračun, investitor bi zaradio* $0.25\% - 10\% = -9.75\%$ *u 3 mjeseca. Prema CAPM modelu imamo sljedeću formulu po kojoj računamo očekivani povrat portfelja:*

$$\text{očekivani povrat portfelja} = \beta \cdot (\text{povrat indeksa - kamatna stopa}) + \text{kamatna stopa}.$$

Obzirom da je kamatna stopa r zadana godišnje, za period od 3 mjeseca iznosi otprilike 1%.

$$\Rightarrow \text{očekivani povrat portfelja} = 1.5 \cdot (-9.75 - 1.0) + 1.0 = -15.125\%$$

Pomoću očekivanog povrata portfelja, računamo očekivanu vrijednost portfelja, koja na kraju 3 mjeseca iznosi:

$$\$5050000 \cdot (1 - 0.15125) = \$4286187.$$

Zbroj očekivane vrijednosti portfelja i dobitak od futures ugovora daje ukupnu vrijednost operacije kojom smo pomoću futures ugovora zaštitili portfelj od rizika.

$$\Rightarrow \$4286187 + \$810000 = \$5096187.$$

U prethodnim izračunima smo pretpostavljali kako želimo zaštiti portfelj dionica, međutim moguće je iste formule koristiti i za zaštitu pojedine dionice. Tada nam β predstavlja betu jedne dionice, V_P ukupnu vrijednost dionica u vlasništvu investitora i V_F trenutnu vrijednost jednog futures ugovora.

4.5 Futures ugovori na robi

Sklapanje futures ugovora ne mora biti isključivo vezano za zaštitu financijske imovine kao što su dionice, obveznice i slično. Možemo ih koristiti i u slučaju zaštite robe, a pod robom podrazumijevamo investicijsku imovinu kao što je zlato i srebro te potrošnu imovinu kao npr. bakar i ulje. Futures ugovori koji se sklapaju radi zaštite robe su najstarija vrsta futures ugovora. Povijesno su se namirivali u fizičkom obliku, međutim sada većina ugovora dopušta i namirenje u gotovini kako bi se olakšalo trgovanje.

Obzirom da zlato i srebro smatramo investicijskom imovinom, njihovi vlasnici, kao što su središnje banke, naplaćuju kamate (stopa najma zlata/srebra) za posudbu istih sredstava. Stoga oni mogu osigurati prihod vlasniku, ali ujedno kao i druge vrste robe, imaju troškove skladištenja.
U poglavlju 4.2 po formuli (29), u slučaju da imovina ne donosi prinos i nema troškove skladišta, futures cijena je dana s $F_0 = S_0 e^{r \cdot T}$. Troškove skladištenja možemo tretirati kao negativan prihod, pa ako s U označimo sadašnju vrijednost svih troškova skladištenja, umanjeni za ostvaren prihod, imamo sljedeću formulu:

$$F_0 = (S_0 + U)e^{r \cdot T}. \tag{43}$$

Primijetimo kako ova formula odgovara forward cijeni za financijsku imovinu koja vlasniku osigurava neki novčani prihod iz leme 3.2 ako uzmemo da je $I = -U$ (trošak skladišta tretiran kao negativan prihod).
Ako su troškovi skladištenja umanjeni za ostvareni prihod, koji su nastali u bilo kojem trenutku trajanja ugovora, proporcionali cijeni robe mogu biti tretirani kao negativan prinos. Tada prema formuli iz leme 3.3 gdje koristimo $q = -u$, imamo:

$$F_0 = S_0 e^{(r+u) \cdot T}, \tag{44}$$

a u predstavlja godišnje troškove skladištenja kao udio u tržišnoj cijeni.

Primjer 4.4 *Pretpostavimo da smo sklopili futures ugovor na godinu dana za imovinu koja ne osigurava prihod. Skladištenje te imovine nas košta \$2 za svaku jedinicu imovine. Ako je tržišna cijena \$450 po jedinici i kamata iznosi 7% godišnje, koliko iznosi futures cijena?*
$\Rightarrow T = 1$, $r = 0.07$, $S_0 = 450$ *i* $U = 2e^{-0.07\cdot 1} = 1.865$,

$$F_0 = (450 + 1.865) \cdot e^{0.07\cdot 1} = \$484.63.$$

Za razliku od investicijske imovine, potrošna imovina ne donosi nikakav prihod vlasniku, ali zato zahtijeva značajne troškove skladištenja. Za neka potrošna dobra tržišna cijena ovisi o lokaciji dostave pa ćemo radi jednostavnosti pretpostaviti kako je lokacija dostave za tržišnu i futures cijenu isto. Pogledajmo sada arbitražne strategije koje se koriste za određivanje futures cijene ovakvih ugovora. Pretpostavimo da imamo sljedeće

$$F_0 > (S_0 + U)e^{r\cdot T}. \tag{45}$$

Investitor može napraviti sljedeće:

1. posuditi iznos $S_0 + U$ po određenoj kamatnoj stopi te ga iskoristiti za kupnju jedne jedinice dobra i plaćanje troškove skladišta,
2. sklopiti futures ugovor u short poziciji za jednu jedinicu dobra.

Ako i ovdje iskoristimo pretpostavku da su futures i forward cijene jednake, ova strategija će dovesti do dobitka u iznosu od $F_0 - (S_0 + U)e^{rT}$ u trenutku dospijeća T. Obzirom na način rada arbitražera, postojat će tendecija povećanja S_0 i smanjenja F_0 sve dok jednadžba (45) ne bude istinita. Prema tome, zaključujemo kako ta jednadžba ne može vrijediti za duži period.
Pretpostavimo sada da vrijedi obratno, tj.

$$F_0 < (S_0 + U)e^{r\cdot T}. \tag{46}$$

Investitori čine sljedeće:

1. prodajom robe štede troškove skladištenja te bezrizično investiraju ostvareni prihod,
2. sklapaju futures ugovor u long poziciji.

Ova strategija dovodi do bezrizičnog profita $(S_0 + U)e^{rT} - F_0$ u trenutku dospijeća T u odnosu na poziciju u kojoj bi investitori bili da su zadržali svoju robu. Jednadžba (46) također ne može vrijediti za duži period iz istog razloga kao i jednadžba (45). Prema tome mora vrijediti $F_0 = (S_0 + U)e^{r\cdot T}$.

Pojedinici i poduzeća koja posjeduju potrošna dobra općenito nemaju u planu prodavati ih jer će ih s vremenom iskoristiti u svojoj proizvodnji. Obzirom da ni forward ni futures ugovore ne mogu fizički iskoristiti, nerado prodaju svoja dobra i sklapaju forward ili futures ugovore za njih. Prema tome, jedino što možemo sigurno tvrditi za futures cijenu ovakvih ugovora je

$$F_0 \leq (S_0 + U)e^{rT}, \tag{47}$$

a u slučaju da su troškovi skladištenja u izraženi kao udio tržišne cijene

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T}. \tag{48}$$

Vlasnici potrošnih dobara često imaju osjećaj da vlasništvo nad fizičkim dobrima pruža određene pogodnosti koje ne ostvaruju vlasnici futures ugovora. Za razliku od futures ugovora, vlasništvo nad nekim potrošnim dobrom omogućava proizvođaču održavanje tijeka proizvodnog procesa i vrlo moguće profit od privremenih lokalnih nestašica. Pogodnosti koje se ostvaruju od vlasništva nad fizičkim dobrima nazivamo *prinos pogodnosti* i označavamo ga s y. Poznavanjem troškova skladištenja, vrijedi sljedeća jednadžba

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U)e^{rT}. \tag{49}$$

Odnosno, ako su troškovi skladištenja u izraženi kao udio tržišne cijene, tada imamo

$$F_0 e^{yT} = S_0 e^{(r+u)T} \Rightarrow F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T}. \tag{50}$$

Možemo reći kako prinos pogodnosti mjeri u kolikoj je mjeri lijeva strana jednadžbi (45) i (46) manja od desne strane. Za investicijsku imovinu mora vrijediti $y = 0$, inače bi postojala arbitraža na tržištu. Dodatno, on odražava očekivanja tržišta u vezi s budućom dostupnošću robe. Prema tome, ako vlasnici imaju male zalihe potrošnog dobra u skladištima, postoji mogućnost da će doći do nestašice te prinos pogodnosti raste. U slučaju da vlasnici posjeduju veliku količinu dobra u svojim skladištima, manje su šanse za nestašicom te prinos pogodnosti pada.

5 Forward vs. futures ugovori

U prethodnim poglavljima smo već naveli neke razlike između forward i futures ugovora. Također smo koristili tvrdnju kako su njihove cijene u određenim uvjetima jednake, što ćemo i dokazati kasnije u poglavlju. Krenimo prvo od njihovih razlika.

Prema njihovim definicijama, vidimo kako se oba ugovora koriste za kupnju ili prodaju određene financijske imovine, za određenu cijenu u određenom trenutku. Dodatno se u futures ugovoru zahtijeva da se definira i točno određena količina financijske imovine te da se dogovore uvjeti dostave (ili fizički u jedinicama financijskih instrumenata ili u novcu). Kod forward ugovora se dogovara jedan trenutak dospijeća i uobičajno se drži do toga trenutka, a zatim se podmiruju obveze iz ugovora. Dok kod futures ugovora se općenito dogovara određeni raspon trenutaka dospijeća, podmiruju se svakodnevno te se često zatvaraju prije trenutka dospijeća. Nadalje, već smo naveli da su futures ugovori standardizirani ugovori kojima se trguje na burzi, a da se s forward ugovorima trguje na OTC tržištu te da oni nisu standardizirani.

Obzirom da s forward i futures ugovorima pokušavamo zaštiti financijsku imovinu od rizika na tržištu, očekujemo neki povrat, odnosno profit od njih. Pogledajmo sada kakva je razlika u profitu ako sklopimo futures i ako sklopimo forward ugovor.
Pretpostavimo da je domaća valuta američki dolar, a strana valuta britanska funta. Neka je investitor A sklopio forward ugovor s trenutkom dospijeća 90 dana i ugovorenim tečajem od 1.90 USD po GBP. Investitor B sklapa futures ugovor s istim uvjetima. Oba investitora sklapaju long poziciju te ulažu 1 milijun funti. Poznato nam je da se ukupan dobitak ili gubitak kod forward ugovora uviđa na kraju razdoblja ugovora, dok se kod futures ugovora realizira svaki dan zbog svakodnevnog obračuna. Nakon 90 dana, vrijednost tečaja iznosi 2.10 USD po GBP. Investitor A ostvaruje gubitak od \$200000 na 90-ti dan, dok investitor B ostvaruje isti gubitak, ali raspoređen na razdoblje od 90 dana. Obzirom da se dobitak i gubitak prati svakodnevno, investitor B će neke dane ostvariti gubitak, a neke dane dobitak. Međutim, ukupno će oba investitora izgubiti jednak iznos.

5.1 Kada su forward i futures cijene jednake?

Tvrdnja 5.1 *Ako forward i futures ugovori imaju isti trenutak dospijeća i intezitet kamate je konstantan sve do izvršenja ugovora, forward i futures cijene su jednake.*

Dokaz. Pretpostavimo da oba ugovora traju n dana te da je s F_i označena futures cijena na kraju i-tog dana ($0 < i < n$). Intezitet kamate, koji je konstantan, označimo s r. Nadalje, pretpostavimo da imamo sljedeću strategiju:

Dan	0	1	$\cdots$	$n-1$	n
Futures cijena	F_0	F_1	$\cdots$	F_{n-1}	F_n
Futures pozicija	e^r	e^{2r}	$\cdots$	e^{nr}	0
Profit	0	$(F_1 - F_0)e^r$	$\cdots$	$(F_{n-1} - F_{n-2})e^{(n-1)r}$	$(F_n - F_{n-1})e^{nr}$
Profit na n-ti dan	0	$(F_1 - F_0)e^{nr}$	$\cdots$	$(F_{n-1} - F_{n-2})e^{nr}$	$(F_n - F_{n-1})e^{nr}$

Tablica 3: Strategija investicije

Na početku i-tog dana, investitoru long pozicija vrijedi e^{ri} te profit ulaganja (dobitak ili gubitak) na dan i iznosi

$$(F_i - F_{i-1})e^{ri}.$$

Pretpostavimo da smo nerizično uložili profit uz r do kraja n-tog dana pa njegova vrijednost tada iznosi

$$(F_i - F_{i-1})e^{ri}e^{(n-i)r} = (F_i - F_{i-1})e^{nr}.$$

Na kraju n-tog dana, vrijednost cijele investicije je jednaka sljedećem iznosu:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{nr} = [(F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \cdots + (F_n - F_{n-1})]e^{nr} = (F_n - F_0)e^{nr}.$$

Uz pretpostavku iz prethodnog poglavlja da s približavanjem trenutku dospijeća, futures cijena se izjednačava s tržišnom cijenom, prethodni izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$(S_T - F_0)e^{nr}.$$

Investiranje iznosa F_0 u npr. bezrizičnu obveznicu uz navedenu strategiju daje sljedeći prihod u trenutku T:

$$F_0e^{nr} + (S_T - F_0)e^{nr} = S_Te^{nr}.$$

Sada pretpostavljamo da je na kraju nultog dana forward cijena jednaka G_0. Ulažemo G_0 u bezrizičnu obveznicu i sklapamo long poziciju forward ugovora koja vrijedi e^{nr}. Forward ugovor u trenutku dospijeća T također jamči iznos S_Te^{nr}. Prema tome, u uvjetima bez arbitraže na financijskom tržištu, vrijedi

$$F_0 = G_0.$$

■

U slučaju kada nemamo konstantnu kamatnu stopu, forward i futures cijene u teoriji više nisu jednake. Razmotrimo situaciju u kojoj je cijena financijske imovine koja se štiti ugovorom, S, pozitivno korelirana s kamatnom stopom. Tada u situaciji kada raste cijena S, investitor koji se nalazi u long poziciji futures ugovora ostvaruje dobitak zbog dnevnih poravnanja (obračuna). Obzirom na pozitivnu korelaciju, raste i kamatna stopa te se pretpostavlja kako će se prethodno navedeni dobitak uložiti po kamatnoj stopi većoj od prosječne. Suprotno, ako cijena S pada, isti investitor ostvaruje gubitak te se taj gubitak obično financira po kamatnoj stopi nižoj od prosječne. Ovakvo kretanje kamatnih stopa ne utječe na investitore koji posjeduju forward ugovore. Ako postoji pozitivna korelacija, futures cijene će biti veće od forward cijena. Ovo je jedan od razloga zašto su futures ugovori investitorima "primamljiviji" od forward ugovora. Međutim, u slučaju negativne korelacije vrijedi obrnuto, odnosno forward cijene su veće od futures cijena.
Bez obzira na moguću promijenjivu kamatnu stopu, ukoliko su forward i futures ugovori sklopljeni na samo nekoliko mjeseci, razlika između forward i futures cijena je većinom zanemariva. U praksi naravno postoje mnogi čimbenici koji pokazuju da su forward i futures cijene različite, međutim oni se ne uključuju u teorijske modele.

Sažetak

Cilj ovog rada je proučiti forward i futures ugovore na financijskim tržištima, njihova svojstva, cijene, način upotrebe i slično. U uvodu smo kratko naveli motivaciju postanka financijskih tržišta te osnovne pojmove i njihove definicije koje se koriste kroz cijeli rad. U drugom poglavlju uvodimo osnovne definicije, pretpostavke i formule na financijskom tržištu. Sljedeće poglavlje se odnosi na forward ugovore, gdje najveći naglasak stavljamo na izvode forward cijena i vrijednosti forward ugovora u različitim uvjetima. Također, razradili smo neke od primjera ugovora. Četvrto poglavlje temelji se na futures ugovorima koji su po svom sastavu i uporabi zahtjevniji od forward ugovora. Objašnjavamo margin sustav, futures cijene te rizik futures ugovora i zaštitu od istog (bazni rizik i omjer zaštite). Posebno smo razradili futures ugovore na burzovnim indeksima i na robi. U zadnjem poglavlju diskutiramo o razlikama između forward i futures ugovora te dokazujemo u kojim uvjetima su njihove cijene jednake.

Ključne riječi

forward ugovor, forward cijena, futures ugovor, futures cijena, intezitet kamate, tržišna cijena, burzovni indeks, dionica, rizik, financijski instrumenti

Abstract

This paper aims to study forward and futures contracts in financial markets, their properties, prices, usage, and the like. In the introduction, we briefly stated the motivation for the emergence of financial markets and the basic terms and definitions used throughout the paper. We introduce the basic definitions, assumptions, and formulas in the financial market in the second chapter. The next chapter deals with forward contracts, where we place the most significant emphasis on forward price derivatives and forward contract values in different conditions. We have also elaborated on some of the examples of contracts. The fourth chapter is about futures contracts, which are more demanding in their composition and use than "forward" contracts. We explain the margin system, futures prices, and the risk of futures contracts and protection against it (base risk and hedge ratio). We have specially developed futures contracts on stock indices and commodities. In the last chapter, we discuss the differences between "forward" and futures contracts, and we prove under what conditions their prices are equal.

Keywords

forward contract, forward price, futures contract, futures price, interest rate, market price, stock index, stock, risk, financial instruments

6 Literatura

[1] M. CAPINSKI, T. ZASTAWNIAK, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003.

[2] J. C. COX, J.E. INGERSOLL, S. A. ROSS, *The Relation Between Forward Prices and Futures Prices*, Journal of Financial Economics 9 (1981), 321 - 346.

[3] J. C. HULL, *Fundamentals of Futures and Options Markets*, Pearson Education, 2017.

[4] J. C. HULL, *Options, Futures and Other Derivatives*, 7. izdanje, Pearson Education, 2009.

[5] J. C. HULL, *Options, Futures and Other Derivatives Solutions Manual*, 8. izdanje, Pearson Education, 2012.

[6] P. RITCHKEN, *Derivative Markets: Theory, Strategy, and Applications*, Harpercollins College Div, 1996.

[7] A. RUTTIENS, *Mathematics of the Financial Markets: Financial Instruments and Derivatives Modelling, Valuation and Risk Issues*, Wiley & Sons, Incorporated, John, 2013.

[8] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Materijali s predavanja, PMF-MO, Zagreb, 2009., https://web.math.pmf.unizg.hr/ bbasrak/pdf_files/MFEsve.pdf

7 Životopis

Zovem se Valentina Veseličić, rođena sam 5. rujna 1997. godine u Slavonskom Brodu. Pohađala sam Osnovnu školu Dragutin Tadijanović od 2004. do 2012. godine. Nakon toga sam upisala Ekonomsko - birotehničku školu Slavonski Brod za zanimanje ekonomist. 2016. godine završavam srednju školu te iste godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku u Osijeku. Završavam ga 2019. godine s temom završnog rada Metrički i topološki prostori pod mentorstvom prof. dr. sc. Dragana Jukića. Iste godine sam upiasla diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku.