Primjena kompleksnih brojeva u algebri i geometriji

Kovačević, Maja

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Maja Kovačević

Primjena kompleksnih brojeva u algebri i geometriji

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Maja Kovačević

Primjena kompleksnih brojeva u algebri i geometriji

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

Prvi oblik zadataka s obilježjima imaginarnog broja pojavljuje se oko 50.godine prije Krista u djelu "Stereometrica" Herona iz Aleksandrije. U Indiji je u 9.st. Mahavira uočio da negativni brojevi nisu kvadrati, odnosno da po prirodi stvari, negativno nema drugog korijena. Kompleksni brojevi proizašli su iz rješavanja kubne jednadžbe, a ne kako mnogi vjeruju iz kvadratne jednadžbe. Stari matematičari znali su da kvadratna jednadžba može imati dva, jedno ili nijedno rješenje, no to nisu mogli tvrditi i za kubnu jednadžbu. Međutim, prilikom njezinog rješavanja naišli su na matematički problem koji je riješen u 16.st., te su za njegove potrebe uvedeni kompleksni brojevi. Zatim 1572. godine objavljene su prve tri knjige Algebre talijanskog matematičara Rafaela Bombellija u kojima opisuje pravila računanja s kompleksnim brojevima, te daje pravilo za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje. Imaginarne brojeve zapisuje kao kvadratne korijene negativnih brojeva, te se smatra prvom osobom u povijesti koja je kao smislene prihvatila kompleksne brojeve. Nadalje, opći prikaz $a + bi$ odnosno nazive *"realni"* i *"imaginarni"* broj uveo je francuski matematičar i filozof Rene Descartes. Gauss je smjestio kompleksne brojeve u ravninu, te svojim utjecajem postigao njihovo univerzalno prihvaćanje. Uvođenje slova i kao oznake $\sqrt{-1}$ u svijet kompleksnih brojeva pripisuje se švicarskom matematičaru Leonardu Euleru. Danas su upravo po tome i prepoznatljivi. Kompleksni brojevi, osim u matematici, imaju bitnu ulogu i u drugim znanstvenim područjima, kao što su elektrotehnika, elektromagnetizam, dinamika fluida, obrada signala i druge. Ipak, jedna od najvažnijih primjena vezana je uz teoriju elektriciteta, odnosno izmjenične struje. U ovom radu najprije ćemo definirati kompleksne brojeve te navesti njihove različite zapise kao što su algebarski, trigonometrijski i eksponencijalni zapis te potom na temelju primjera reći nešto o njihovoj primjeni u algebri i geometriji.

1 Kompleksni brojevi

U ovom poglavlju definirat ćemo skup kompleksnih brojeva i algebarske operacije na njemu. Definirat ćemo apsolutnu vrijednost kompleksnog broja i navesti njezinu geometrijsku interpretaciju. Prikazat ćemo ga u kompleksnoj ravnini i definirati njegove različite zapise. Jedan od najkorisnijih zapisa je prikaz kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku, te ćemo za takve kompleksne brojeve definirati operacije zbrajanja, množenja i dijeljenja. Sve definicije i teoremi navedeni u ovom poglavlju preuzeti su iz [5].

1.1 Pojam kompleksnog broja i algebarske operacije

Jednadžba oblika $a^2 + 1 = 0$ nema realnih rješenja. Stoga želimo pronaći novi skup brojeva u kojem će ta jednadžba imati rješenja. Dakle, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ proširujemo do novog skupa u kojem vrijede sva standardna svojstva algebarskih operacija. Takav skup označavat ćemo sa $\mathbb{C}$ i zvati ga skup *kompleksnih brojeva*, a možemo ga izgraditi na sljedeći način tako da zahtijevamo da za njega vrijede sljedeća svojstva:

1.) $\mathbb{C}$ sadrži skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,

2.) $\mathbb{C}$ sadrži rješenje kvadratne jednadžbe $a^2 + 1 = 0$,

3.) na njemu su definirane operacije zbrajanja i množenja za koje vrijede svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.

Vidimo da rješenja jednadžbe $a^2 + 1 = 0$ nisu realni brojevi te da njezino rješenje odgovara broju $a^2 = -1$. Označimo ga s i i nazovimo *imaginarnom jedinicom*. Prema prethodno navedenom svojstvu 2.), broj i pripada skupu $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1. *Broj* ***i*** *je takav kompleksan broj za koji vrijedi $i^2 = -1$ i nazivamo ga* ***imaginarna jedinica****.*

Prema svojstvima *1.)* i *3.)* skupu kompleksnih brojeva pripadaju brojevi oblika $3i$, $(-4)i$, itd. Takve brojeve zovemo *imaginarnim* te uočimo da za bilo koji realni broj b skupu $\mathbb{C}$ pripadaju brojevi oblika bi. Zbroj kompleksnih brojeva mora biti kompleksan broj, zato prema svojstvima *1.)* i *3.)* skupu kompleksnih brojeva pripadaju brojevi oblika $3 + 3i$, $1 - 4i$, itd.

U nastavku ćemo definirati kompleksan broj.

Definicija 1.2. *Svaki broj* ***z*** *koji se može zapisati u obliku*

$$z = a + bi \tag{1.1}$$

gdje su a, b realni brojevi naziva se ***kompleksan broj****. Broj a nazivamo* ***realni dio****, a broj b* ***imaginarni dio*** *kompleksnog broja te pišemo $a = Re\ z$, $b = Im\ z$. Prikaz (1.1) naziva se* ***algebarski*** *ili* ***standardni prikaz*** *kompleksnog broja z.*

Sljedeća definicija skupa kompleksnih brojeva s unaprijed definiranim algebarskim operacijama je matematički korektnija.

Definicija 1.3. *Neka je dan Kartezijev produkt* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. *Na tom skupu definiramo operaciju zbrajanja*

$$+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),\ \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

i množenja

$$\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc),\ \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Skup $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *zajedno s ovako definiranim operacijama zbrajanja i množenja nazivamo* ***skup kompleksnih brojeva*** *i označavamo ga s* $\mathbb{C}$.

Preciznije, skup kompleksnih brojeva zajedno s operacijama zbrajanja i množenja nazivamo poljem. Za više detalja vidi [2]. Iz prethodne definicije vidimo da smo skup kompleksnih brojeva definirali kao

$$\mathbb{C} := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\},$$

te da se kompleksan broj **z** možemo prikazati kao **uređeni par** $(a,\ b)$ realnih brojeva. Promotrimo sada podskup skupa $\mathbb{C}$ koji se sastoji od brojeva oblika $(a,0)$. Po *Definiciji 1.3.* vrijedi:

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0),$$

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2, 0).$$

Uočimo da je rezultat zbrajanja i množenja broj istog oblika, pri čemu se čuvaju algebarske operacije po prvoj komponenti. Zaključujemo da brojeve oblika $(a,0)$ možemo promatrati i kao realne brojeve smještene u skup kompleksnih brojeva. Prema tome broj $(a,0)$ zovemo realni broj i označavamo ga s a. Možemo zaključiti da je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ pravi podskup skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Brojeve oblika $(0,b)$ možemo zapisati kao: $(0,b) = (b,0) \cdot (0,1)$, pri čemu nam je $i = (0,1)$. Vrijedi:

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Iz definicije operacija zbrajanja i množenja imamo:

$$(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1),$$

što kraće pišemo $z = a + bi$.

Definicija 1.4. *Dva kompleksna broja* $z_1 = (a_1, b_1)$ *i* $z_2 = (a_2, b_2)$ *su jednaka ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dio, tj.*

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

1.1.1 Operacije s kompleksnim brojevima

U skupu $\mathbb{C}$ mogu se definirati algebarske operacije, zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja definirane su na prirodan način zbrajajući i množeći kompleksne brojeve poput algebarskih izraza (kao polinomi po varijabli i), uzimajući pri tome u obzir činjenicu da je $i^2 = -1$.

Teorem 1.5. *Neka su $z_1 = a_1+b_1i$, $z_2 = a_2+b_2i$ dva kompleksna broja. Zbroj, razlika, umnožak kompleksnih brojeva zapisanih u algebarskom zapisu računaju se na sljedeći način:*

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2)i + (b_1 \pm b_2)i. \tag{1.2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \tag{1.3}$$

Promotrimo prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^3 \cdot i = -i^2 = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i^5 \cdot i = -1. \end{aligned}$$

Uočavamo da se nakon pete potencije račun ponavlja, stoga dolazimo do općenitog zapisa

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = i^r,$$

pri čemu je r ostatak pri dijeljenju broja n, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

1.2 Kompleksno konjugirani broj i apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Za proizvoljan kompleksan broj $z = a + bi$ sa $\overline{z}$ označavamo broj

$$\overline{z} := a - bi, \tag{1.4}$$

koji nazivamo **kompleksno konjugiranim** brojem broja z. Par $z, \overline{z}$ nazivamo par *kompleksno konjugiranih* brojeva, zato što vrijedi sljedeće:

$$\overline{\overline{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z.$$

Za umnožak para kompleksno konjugiranih brojeva vrijedi:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Sada ćemo definirati dijeljenje kompleksnih brojeva. Metoda koja se koristi slična je racionalizaciji algebarskih razlomaka. Kvocijent se množi jedinicom zapisanom kao kvocijent kompleksno konjugiranog djelitelja sa samim sobom. Provedimo takav postupak za kompleksne brojeve $z_1 = a_1 + b_1i$ i $z_2 = a_2 + b_2i$,

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}\cdot\frac{a_2-b_2 i}{a_2-b_2 i}\\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2-a_1b_2 i+b_1a_2 i}{a_2^2-(b_2 i)^2}\\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}\\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.\end{aligned}$$

Definicija 1.6. ***Modul ili apsolutna vrijednost*** *kompleksnog broja z je realan nenegativan broj*

$$|z| := \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1.5}$$

Vrijedi $z = 0$ ako i samo ako je $|z| = 0$. Ako je $z \neq 0$, onda je njegov modul pozitivan realan broj.

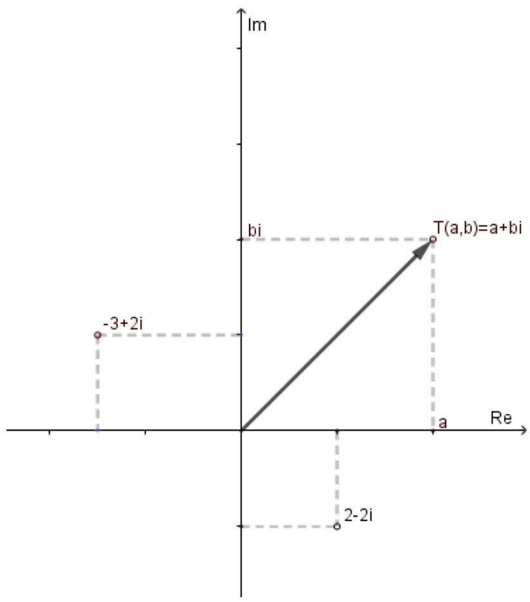
Vrijede sljedeća svojstva kompleksnih brojeva:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$,
4. Za proizvoljan $z \in \mathbb{C}$ vrijedi: $z + \overline{z} = 2\text{Re } z, \quad z - \overline{z} = 2i \cdot \text{Im } z$,
5. $\text{Re } z \leqslant |z|$, $\text{Im } z \leqslant |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$,
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$,
7. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
8. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$,
9. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1.3 Kompleksna ravnina

Kao što smo već naveli, kompleksnom broju $z = a + bi$ odgovara uređeni par realnih brojeva (a, b). To znači da ukoliko želimo grafički prikazati kompleksan broj, pridružit ćemo mu točku $\mathbf{T}(a, b)$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu xOy. Upravo tu točku T nazivamo **geometrijskom slikom** kompleksnog broja z, pri čemu z predstavlja **koordinate točke** T. Os x Kartezijevog sustava u ravnini naziva se **realna os** (Re) u $\mathbb{C}$, zato što na nju smještamo samo realne brojeve, dok se os y naziva **imaginarna os** (Im) jer na nju smještamo samo imaginarne brojeve. Takvu ravninu nazivamo **kompleksna ravnina** ili **Gaussova ravnina.**[1] Svakoj točki ravnine odgovara točno jedan kompleksan broj.

[1]Carl Fridrich Gauss (1777.-1855.), njemački matematičar i astronom

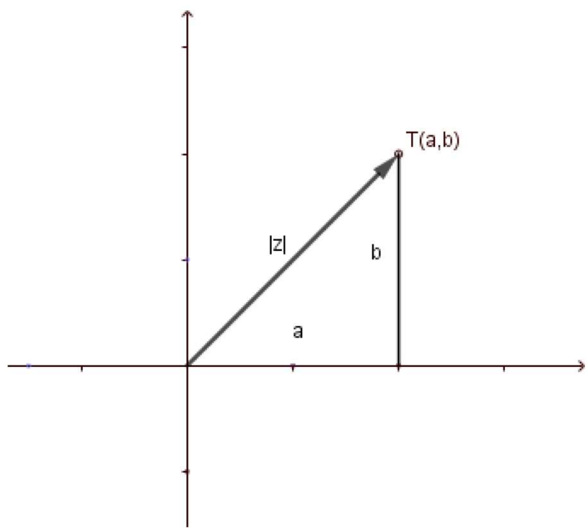


Slika 1: Prikaz kompleksnog broja u Gaussovoj ravnini

Kompleksnom broju možemo pridružiti radijvektor točke T te na taj način kompleksne brojeve poistovjećujemo s vektorima. Uočimo da za kompleksne brojeve operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja realnim brojem možemo poistovjetiti s takvim operacijama za vektore.

1.3.1 Udaljenost kompleksnih brojeva

Modul ili apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z = a + bi$ definirali smo u poglavlju *1.2.* Geometrijska interpretacija modula kompleksnog broja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ predstavlja udaljenost točke $\mathbf{T}(a, b)$ do ishodišta.



Slika 2: Modul kompleksnog broja

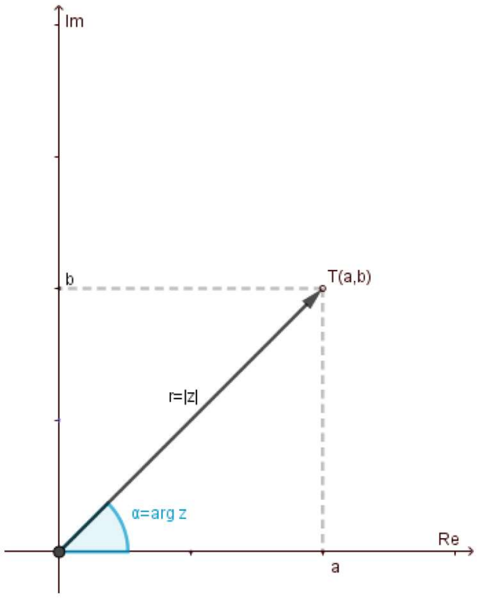
Neka su zadana dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Promotrimo modul njihove razlike

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}. \end{aligned}$$

Uočimo da smo dobili formulu za udaljenost dviju točaka u ravnini. Stoga $|z_1 - z_2|$ predstavlja udaljenost točaka z_1 i z_2 u Gaussovoj ravnini.

1.4 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Neka je $\mathbf{T}(a, b)$ točka u kompleksnoj ravnini koja odgovara kompleksnom broju $z = a + bi$, a njezin položaj u ravnini obično opisujemo pripadnim Kartezijevim koordinatama koje su povezane s algebarskim prikazom kompleksnog broja. No, postoji i drugi način na koji se može opisati ista točka, pomoću polarnih koordinata: udaljenosti r točke do ishodišta i kuta α koji radijvektor $\overrightarrow{OT}$ zatvara s pozitivnim dijelom realne osi i označavamo s $T(r, \alpha)$. Dakle, brojevi r i α određuju jednoznačno položaj točke $\mathbf{T}$ u ravnini.



Slika 3: Položaj točke T opisan polarnim koordinatama

Iz slike vidimo da ukoliko točku T spustimo u ishodište tada ona odgovara kompleksnom broju $z = 0$ te je $r = 0$, a kut α nije određen.

Jedno od pitanja koje si postavljamo je: Koja je veza između polarnih i Kartezijevih koordinata? Odgovor možemo iščitati iz prethodne slike (*Slika 3.*). Vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{r}$$

odnosno:

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos\alpha, \\ b = r \cdot \sin\alpha. \end{cases} \tag{1.6}$$

Odavde slijedi:

$$z = a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{1.7}$$

Takav prikaz kompleksnog broja naziva se **trigonometrijski prikaz** broja z. Kvadriranjem i zbrajanjem izraza (1.6.) dobivamo:

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha).$$

Budući je $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ dobivamo:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

odakle slijedi da je r *realan nenegativan broj*, odnosno **modul** kompleksnog broja. On će biti jednak nuli samo ako je $z = 0$, odnosno ako točka T padne u ishodište.

Argumentom kompleksnog broja z nazivamo mjeru kuta α unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$, a definiramo ga kao otklon od pozitivnog dijela realne osi do radijvektora kojim se prikazuje broj z u Gaussovoj ravnini (Slika 3.) i pišemo $\alpha = arg(z)$.On nije jednoznačno određen jer je mjera kuta određena do na višekratnik od 2π te ga određujemo ovisno o predznacima brojeva a i b odnosno na temelju informacija o kvadrantu u kojem se nalazi broj z.

Očitavanjem sa Slike 3. ili dijeljenjem jednadžbi (1.6.) za $a \neq 0$ dobivamo formulu po kojoj se računa kut α:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}.$$

Ako je $a = 0$, tada broj z leži na imaginarnoj osi, te je kut α 0 ili π, ovisno o tome leži li z na pozitivnom, odnosno negativnom dijelu imaginarne osi.

1.4.1 Operacije nad kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

U ovom potpoglavlju pokazat ćemo kako se pomoću trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja mogu na jednostavniji način izvoditi operacije množenja, dijeljenja i potenciranja

Neka su dana dva proizvoljna kompleksna broja različita od nule u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2).$$

U nastavku ćemo ih pomnožiti i iskoristiti adicijski teorema za trigonometrijske funkcije:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \\ &= r_1r_2[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2] \\ &= r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Izraz (1.8.) predstavlja trigonometrijski prikaz broja z_1z_2, pri čemu je:

1. r_1r_2 njegov modul, pa stoga vrijedi:

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

2. $\alpha_1 + \alpha_2$ njegov argument, pa vrijedi:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg\, z_1 + \arg\, z_2.$$

Dakle, možemo zaključiti da se dva kompleksna broja prikazana u trigonometrijskom obliku množe tako da im se moduli pomnože, a argumenti zbroje.

Nadalje ćemo izvesti nekoliko formula koje će nam koristiti za prikaz dijeljenja kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku. U nastavku ćemo za proizvoljan kompleksan broj $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ odrediti njegovu recipročnu vrijednost u trigonometrijskom prikazu.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \\ &= \frac{1}{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \cdot \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \\ &= \frac{1}{r}[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Iz prethodnog prikaza vidimo da vrijedi:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}, \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg\, z.$$

Sada ćemo iskoristiti ove formule pomoću kojih ćemo prikazati dijeljenje dva kompleksna broja zapisana u trigonometrijskom obliku.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \\ &= r(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \cdot \frac{1}{r}(\cos(-\alpha_2) + i\sin(-\alpha_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Izraz (1.10.) predstavlja trigonometrijski prikaz broja $\frac{z_1}{z_2}$, pri čemu je:

1. $\frac{r_1}{r_2}$ njegov modul, pa stoga vrijedi:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

2. $\alpha_1 - \alpha_2$ njegov argument, pa vrijedi:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\, z_1 - \arg\, z_2.$$

Znači, dva kompleksna broja prikazana u trigonometrijskom obliku dijelimo tako da im podijelimo module, a oduzmemo argumente.

Ranije smo pokazali da se dva kompleksna broja z_1 i z_2 prikazana u trigonometrijskom obliku množe na sljedeći način:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Ako uzmemo da je $z_1 = z_2$ i uvrstimo u prethodni izraz dobit ćemo:

$$z^2 = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

Primjenom iste formule pomnožimo z^2 sa z i dobivamo:

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \cdot r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r^3(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha).$$

Analogno dalje, z^3 pomnožimo sa z, pa z^4, itd. Time dolazimo do zaključka da vrijedi općenita formula za *potenciranje kompleksnih brojeva* koja glasi:

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Iz nje čitamo da je:

1. r^n modul broja z^n, pa stoga vrijedi:

$$|z^n| = |z|^n,$$

2. $n\alpha$ argument broja z^n, pa vrijedi:

$$\arg(z^n) = n \arg z.$$

Izraz (1.11.) nazivamo **De Moivreova formula**[2].

1.5 Eksponencijalni zapis kompleksnog broja

Jedina neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu:

$$f(a+b) = f(a)f(b) \tag{1.12}$$

je eksponencijalna funkcija $f(a) = e^a$.

Za kompleksan broj $z = a + bi$ definirajmo funkciju

$$f(z) = e^a(\cos b + i \sin b). \tag{1.13}$$

Provjerimo sada zadovoljava li takva funkcija jednadžbu (1.12):

$$\begin{aligned} f(z_1)f(z_2) &= e^{a_1}(\cos a_1 + i \sin b_1) \cdot e^{a_2}(\cos b_2 + i \sin b_2) \\ &= e^{a_1+a_2}[\cos(b_1 + b_2) + i \sin(b_1 + b_2)] \\ &= f(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

[2]Abraham de Moivre (1667. - 1754.), francuski matematičar

Dobili smo da zadovoljava jednadžbu te je stoga možemo proglasiti **eksponencijalnom funkcijom** i označiti s e^z.

Dakle, eksponencijalni zapis kompleksnog broja glasi:

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b), \tag{1.14}$$

iz kojeg vidimo da je:

$$|e^z| = e^a, \quad \arg e^z = b.$$

Neka je dan kompleksan broj $z \neq 0$ i jednadžba

$$w^n = z. \tag{1.15}$$

Svako rješenje jednadžbe (1.15) nazivamo n-ti **korijen kompleksnog broja** z i pišemo

$$w = \sqrt[n]{z}. \tag{1.16}$$

U nastavku ćemo za kompleksan broj z, $z \neq 0$ odrediti izraz za njegov n - ti korijen. Najprije prikažimo brojeve z i w u trigonometrijskom obliku:

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$$w = \tau(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Sada ih uvrstimo u izraz (1.15)

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \tau^n(\cos \theta + i \sin \theta)$$

iz kojeg slijedi:

$$\tau^n = r \implies \tau = \sqrt[n]{r} \tag{1.17}$$

$$n\theta = \alpha + 2k\pi \implies \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.18}$$

Broj $\sqrt[n]{r}$ je pozitivan realni broj, pozitivnog broja r. S druge strane, u formuli (1.18) nećemo dobiti beskonačno mnogo različitih vrijednosti za argument θ bez obzira što k uzima sve cjelobrojne vrijednosti. Naime, te vrijednosti će s vremenom definirati isti argument jer će se razlikovati za višekratnik od 2π. Primjerice, krenemo li uvršavati redom za $k = 0, 1, 2, \ldots$ dobivamo sljedeće "različite" vrijednosti argumenta θ:

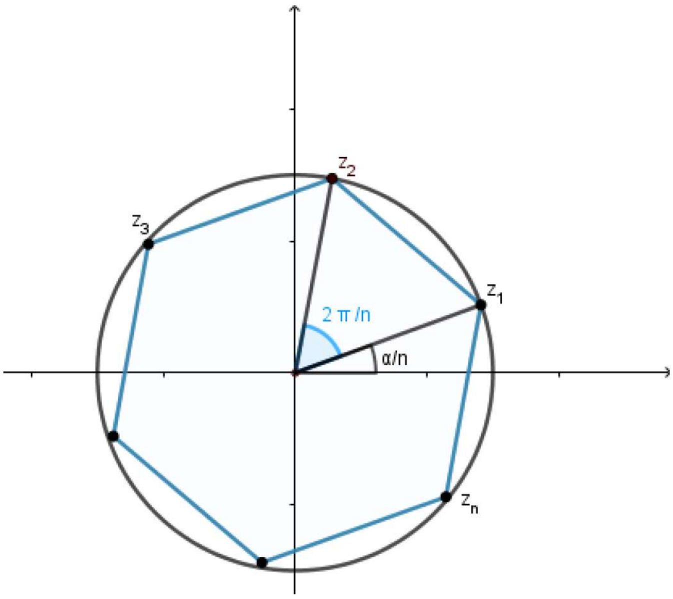
$$\frac{\alpha}{n}, \quad \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \ldots, \quad \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Svaku sljedeću vrijednost možemo dobiti iz gornjih dodavanjem višekratnika broja 2π. Analogno vrijedi i za negativne brojeve.

Dakle, postoji točno n različitih rješenja odnosno vrijednosti n-tog korijena kompleksnog broja z koja su dana formulom:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.19}$$

Svi ti brojevi leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjerom $\sqrt[n]{r}$ jer imaju isti modul, a argumenti uzastopna dva broja razlikuju se za $\frac{2\pi}{n}$. Stoga su n -ti korijeni vrhovi pravilnog n-terokuta kompleksnog broja kojeg određuju u kompleksnoj ravnini.



Slika 4: n- ti korijeni kompleksnog broja z

2 Primjena kompleksnih brojeva u algebri

U ovom poglavlju navest ćemo niz primjera u kojima se kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom zapisu mogu iskoristiti za dokazivanje algebarskih identiteta. Navedeni primjeri su preuzeti iz [5].

Primjer 2.1. *Dokažimo da se izraz*

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdots(a_k^2+b_k^2), \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,\ldots,k$$

može napisati u obliku zbroja dvaju kvadrata.

▶ Trebamo pokazati da je:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdots(a_k^2+b_k^2) = x^2+y^2. \tag{2.1}$$

Lijevu stranu izraza možemo zapisati na sljedeći način:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdots(a_k^2+b_k^2) = \prod_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2).$$

Svaki faktor u gornjem produktu jest zbroj kvadrata dvaju realnih brojeva što nas asocira na modul kompleksnog broja. Promotrimo stoga kompleksne brojeve zadane s $z_n = a_n + b_n i$, $n = 1,\ldots,k$. Tada primjenom svojstva kompleksnih brojeva dobivamo

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2) &= \prod_{n=1}^{k}|z_n|^2 \\
&= \prod_{n=1}^{k}(z_n\cdot\overline{z_n}) \\
&= \prod_{n=1}^{k} z_n \cdot \prod_{n=1}^{k}\overline{z_n} \\
&= \underbrace{\prod_{n=1}^{k} z_n}_{w} \cdot \overline{\left(\prod_{n=1}^{k} z_n\right)} \\
&= w\cdot\overline{w} = |w|^2 = (\mathrm{Re}\ w)^2 + (\mathrm{Im}\ w)^2.
\end{aligned}$$

Primjer 2.2. *Izračunajmo sumu*

$$1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots$$

▶ Uočimo da trebamo izračunati sumu binomnih koeficijenata, stoga ideja ovog zadatka leži u poznavanju binomne formule, koja glasi:

$$(a+b)^n = a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

Sada broj $(1+i)^n$ prikažimo po binomnoj formuli:

$$\begin{aligned}
(1+i)^n &= 1+\binom{n}{1}1^{n-1}i+\binom{n}{2}1^{n-2}i^2+\binom{n}{3}1^{n-3}i^3+\binom{n}{4}1^{n-4}i^4+\\
&\quad+\binom{n}{5}1^{n-5}i^5+\binom{n}{6}1^{n-6}i^6+\binom{n}{7}1^{n-7}i^7+\cdots+\\
&\quad+\binom{n}{n-1}1^{n-n+1}i^{n-1}+\binom{n}{n}1^{n-1}i^n\\
&= 1+\binom{n}{1}i-\binom{n}{2}-\binom{n}{3}i+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}i-\binom{n}{6}-\binom{n}{7}i+\cdots+\\
&\quad+\binom{n}{n-1}i^{n-1}+i^n.
\end{aligned}$$

Potom mu odredimo realni i imaginarni dio:

$$\mathrm{Re}(1+i)^n = 1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots,$$

$$\mathrm{Im}(1+i)^n = \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots.$$

Vidimo da prva suma odgovara sumi koju moramo izračunati. Da bismo ju izračunali, dovoljno je odrediti realni dio broja $(1+i)^n$. Stoga ga zapišimo u trigonometrijskom prikazu. Vrijedi

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\quad \tan\varphi=\frac{1}{1}=1\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$

te dobivamo

$$(1+i)^n=\Big(\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big)^n=\sqrt{2^n}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big).$$

Sada je jednostavno odrediti rješenje zadatka:

$$1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Prije nego što pređemo na sljedeći primjer, iskazat ćemo teorem koji nam je potreban za njegovo rješavanje.

Teorem 2.1. *Ako je P polinom s realnim koeficijentima i $z \in \mathbb{C}$ njegova nultočka, onda je i $\overline{z}$ nul-točka istog polinoma.*

Dokaz. Vidi [5]. $\square$

Jednostavnije kažemo da nultočke polinoma s realnim koeficijentima dolaze u *kompleksno konjugiranom paru.*

Primjer 2.3. *Dokažimo identitet*

$$a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \Big(a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \Big).$$

► Uočimo da je $P(a) = a^{2n} - 1$ polinom stupnja $2n$, što znači da ima $2n$ nultočaka. Stoga se može zapisati u obliku

$$P(a) = (a - z_0)(a - z_1) \dots (a - z_{2n-1}).$$

Odredimo njegove nultočke.

$$a^{2n} - 1 = 0,$$

$$a^{2n} = 1.$$

Prethodna jednadžba u skupu realnih brojeva ima samo dva rješenja 1 i -1, dok u skupu kompleksnih brojeva ima $2n$ rješenja i to su upravo $2n$-ti korijeni iz jedinice. Broj 1 je također kompleksan broj te ga možemo prikazati u trigonometrijskom obliku:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Njegov modul je jednak 1, a argument 0. Uvrštavanjem u formulu (1.19) dobivamo formulu za $2n$ različitih rješenja odnosno vrijednosti $2n$ -tog korijena :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{2n} + i \sin \frac{2k\pi}{2n} = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Uočimo da za $k = 0$ dobivamo $z_0 = 1$, a za $k = n$ dobivamo $z_n = -1$, odnosno dobivamo realne nultočke, koje su ujedno i *jedine realne nultočke*, a sve ostale su kompleksne. Budući je $P(a)$ polinom s realnim koeficijentima, po *Teoremu 2.1* one dolaze u kompleksno konjugiranim parovima. Stoga, možemo pisati

$$P(a) = (a - z_0)(a - z_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a - z_k)(a - \overline{z_k}). \tag{2.2}$$

U nastavku ćemo uvrstiti poznate vrijednosti u izraz (2.2) i time dobiti tvrdnju zadatka,

$$\begin{aligned}
a^{2n} - 1 &= (a-1)(a+1) \prod_{k=1}^{n-1} (a^2 - (z_k + \overline{z_k}) + z_k \overline{z_k}) \\
&= (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \Big(a^2 - \Big(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \Big) + \cos^2 \frac{k\pi}{n} + \sin^2 \frac{k\pi}{n} \Big) \\
&= (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \Big(a^2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} a + 1 \Big).
\end{aligned}$$

Primjer 2.4. *Primjenom kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku dokazat ćemo i sljedeće identitete:*

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{2.3}$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.4}$$

▶ Kompleksan broj modula 1 zapišimo u trigonometrijskom obliku

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

▶ Napišimo formulu za sumu prvih n članova geometrijskog niza

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \tag{2.5}$$

i u nju uvrstimo $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\ = \frac{1 - \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}. \end{aligned}$$

Sada u tako dobivenom izrazu trebamo prepoznati formule za sinus polovičnog i dvostrukog kuta.

▶ Formula za sinus polovičnog kuta je:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

Uočimo da su izrazi $1 - \cos(n+1)\alpha$ i $1 - \cos\alpha$ zapravo sinusi polovičnog kuta i možemo ih napisati na sljedeći način:

$$1 - \cos(n+1)\alpha = 2\sin^2\frac{(n+1)}{2}\alpha, \tag{2.6}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{2.7}$$

▶ Formula za sinus dvostrukog kuta je:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Potom uočimo da se izrazi $\sin(n+1)\alpha$ i $\sin\alpha$ mogu zapisati na sljedeći način:

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin\frac{(n+1)}{2}\alpha\cos\frac{(n+1)}{2}\alpha, \tag{2.8}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{2.9}$$

Tako dobivene izraze uvrstimo u (2.6) i sredimo do kraja.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha} &= \frac{2\sin^2\frac{(n+1)}{2}\alpha - i\;2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - i\;2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\Big(\sin\frac{(n+1)}{2}\alpha - i\;\cos\frac{n+1}{2}\alpha\Big)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\sin\frac{\alpha}{2} - i\;\cos\frac{\alpha}{2}\Big)} \\
&= \frac{-i\;\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{-i\;\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\Big(\cos\frac{n+1}{2}\alpha + i\;\sin\frac{n+1}{2}\alpha\Big)}{\Big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\;\sin\frac{\alpha}{2}\Big)} \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\Big(\cos\Big(\frac{n\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\Big) + \\
&\quad + i\sin\Big(\frac{n\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\Big)\Big) \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\Big(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\;\sin\frac{n\alpha}{2}\Big)
\end{aligned}$$

- Primjenom formule za sumu prvih n članova geometrijskog niza (2.5) dobivamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\
= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\Big(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\;\sin\frac{n\alpha}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Izdvojimo i izjednačimo realni, odnosno imaginarni dio

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots\cos n\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$1+\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots\sin n\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

i vidimo da smo dobili tražene identitete (2.3) i (2.4).

Primjer 2.5. *Primjenom kompleksnih brojeva možemo jednostavno dokazati sljedeći identitet*

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}. \tag{2.10}$$

▶ Glavna ideja dokaza zapravo leži u formuli za n-ti korijen broja 1:

$$w_k=\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Ispišimo sada sva moguća rješenja jednadžbe $w^n=1$:

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\frac{0\pi}{n}+i\sin\frac{0\pi}{n}=1,\\ w_1 &= \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\\ w_2 &= \cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\\ &\vdots\\ w_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dakle, zaključujemo da su to onda nultočke polinoma w^n-1, pa taj polinom možemo prikazati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} w^n-1 &= (w-w_0)(w-w_1)\cdots(w-w_{n-1})\\ &= (w-1)(w-w_1)\cdots(w-w_{n-1}). \end{aligned}$$

Dijeljenjem s faktorom $(w-1)$ i primjenom formule za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, uz uvjet $w\neq 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{w^n-1}{w-1} &= (w-w_1)(w-w_2)\cdots(w-w_{n-1})\\ &= w^{n-1}+w^{n-2}+\ldots+w+1. \end{aligned}$$

Jednakost desnih strana vrijedi $\forall w\in\mathbb{C}$, pa specijalno i za $w=1$, čijim uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} n &= (1-w_1)(1-w_2)\cdots(1-w_{n-1})\\ &= \left(1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\\ &\quad\cdots\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Kao i u prethodnom primjeru, uočimo da su izrazi $1-\cos\frac{2\pi}{n}$ i $\sin\frac{2\pi}{n}$ zapravo sinus polovičnog i sinus dvostrukog kuta, pa ih zapisujemo na sljedeći način:

$$1-\cos\frac{2\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{n},$$
$$\sin\frac{2\pi}{n}=2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

te u nastavku dobivamo:

$$\begin{aligned} n &= \Big(2\sin^2\frac{\pi}{n} - i\ 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\Big)\Big(2\sin^2\frac{2\pi}{n} - i\ 2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\Big)\cdots \\ &\quad \cdots\Big(2\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n} - i\ 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\Big) \\ &= 2^{n-1}\sin\frac{n\pi}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n} - i\ \cos\frac{\pi}{n}\Big)\sin\frac{2\pi}{n}\Big(\sin\frac{2\pi}{n} - i\ \cos\frac{2\pi}{n}\Big)\cdots \\ &\quad \cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big(\sin\frac{(n-1)\pi}{n} - i\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\Big). \end{aligned}$$

Podijelimo cijeli izraz s 2^{n-1} i dobivamo:

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \sin\frac{n\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n} - i\ \cos\frac{\pi}{n}\Big)\Big(\sin\frac{2\pi}{n} - i\ \cos\frac{2\pi}{n}\Big)\cdots \\ \cdots\Big(\sin\frac{(n-1)\pi}{n} - i\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\Big)$$

Potom uzmimo njegovu apsolutnu vrijednost

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^{n-1}} &= \sin\frac{n\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\underbrace{\Big|\sin\frac{\pi}{n} - i\ \cos\frac{\pi}{n}\Big|}_{=1}\underbrace{\Big|\sin\frac{2\pi}{n} - i\ \cos\frac{2\pi}{n}\Big|}_{=1}\cdots \\ &\quad \cdots\underbrace{\Big|\sin\frac{(n-1)\pi}{n} - i\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\Big|}_{=1}. \end{aligned}$$

Vidimo da je apsolutna vrijednost kompleksnih brojeva 1, prema tome dobivamo identitet (2.10) koji smo morali dokazati.

3 Primjena kompleksnih brojeva u geometriji

U ovom poglavlju izvest ćemo formule za trigonometrijske identitete sinusa i kosinusa višestrukih kutova primjenom kompleksnih brojeva te riješiti nekoliko geometrijskih zadataka pomoću geometrijske interpretacije množenja kompleksnih brojeva. Promatrani geometrijski zadaci preuzeti su iz [5]. Primjena kompleksnih brojeva u dokazu složenijih geometrijskih tvrdnji može se pogledati u [4].

3.1 Sinus i kosinus višestrukih kutova

U ovom potpoglavlju pomoću trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja izvest ćemo nama dobro poznate formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta, te na taj način doći do općenite formule za sinus i kosinus višestrukih kutova. Ranije smo izveli formulu za potenciranje kompleksnih brojeva, poznatu kao *de Moivreova formula* koja za kompleksan broj $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ glasi

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha. \tag{3.1}$$

Za $n = 2$ dobivamo:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \tag{3.2}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha. \tag{3.3}$$

Izjednačavanjem desne strane izraza (4.2) i (4.3) te izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela dobivamo formule dvostrukog kuta:

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha \end{cases} \tag{3.4}$$

Za $n = 3$ imamo:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\sin\alpha\cos\alpha + i^3\sin^3\alpha \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha - i\sin^3\alpha. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Odavde slijedi

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha - i\sin^3\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha \\ \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha \end{cases} \tag{3.7}$$

Primjenom identita $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ zapišimo desne strane na sljedeći način:

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ \sin 3\alpha = 3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \end{cases} \tag{3.8}$$

Time dolazimo do općenite formule za sinus i kosinus višestrukih kutova

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n &= \cos n\alpha + i\sin n\alpha\\ &= \binom{n}{0}\cos^n\alpha + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha - \\ &\quad -\binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \dots\end{aligned}$$

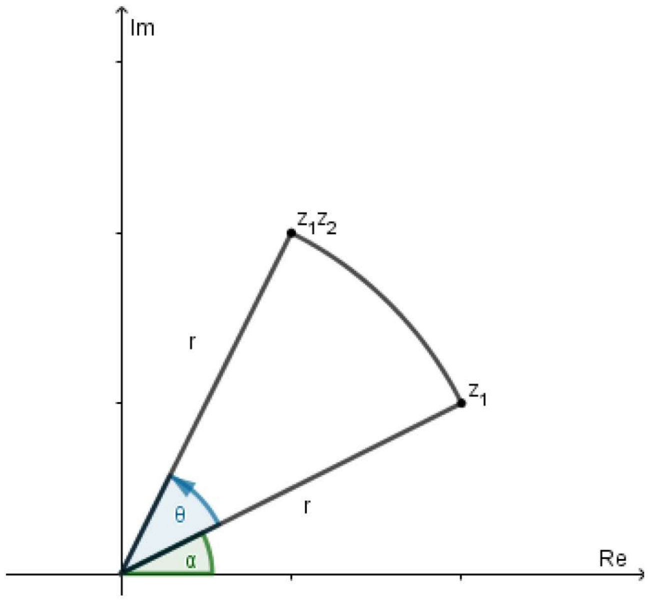
potom razdvojimo realni i imaginarni dio i dobijemo

$$\cos n\alpha = \cos^n - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \dots$$

Uočimo da se sinus u gornjoj formuli javlja uvijek sa parnom potencijom, neovisno o n-u. Stoga možemo uvrštavati $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ i na taj način $\cos n\alpha$ prikazati s pomoću potencije od $\cos\alpha$. Analogno za $\sin n\alpha$.

3.2 Geometrijska interpretacija množenja kompleksnih brojeva

Neka je dan proizvoljan kompleksan broj $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i kompleksan broj $z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$, modula 1. Umnožak ta dva broja jednak je $z_1z_2 = r[\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)]$, pri čemu uočavamo da smo dobili kompleksan broj modula r što odgovara broju z_1 čiji je argument uvećan za θ. Dakle, to je točka koja predstavlja broj z_1 u kompleksnoj ravnini zarotirana za kut θ oko ishodišta. Time smo pokazali da množenje s brojem z_2 geometrijski odgovara rotaciji točke koja predstavlja broj z_1 oko ishodišta za kut θ u pozitivnom smjeru. (Slika 5.)



Slika 5: Rotacija točke koja predstavlja broj z_1 za kut θ oko ishodišta

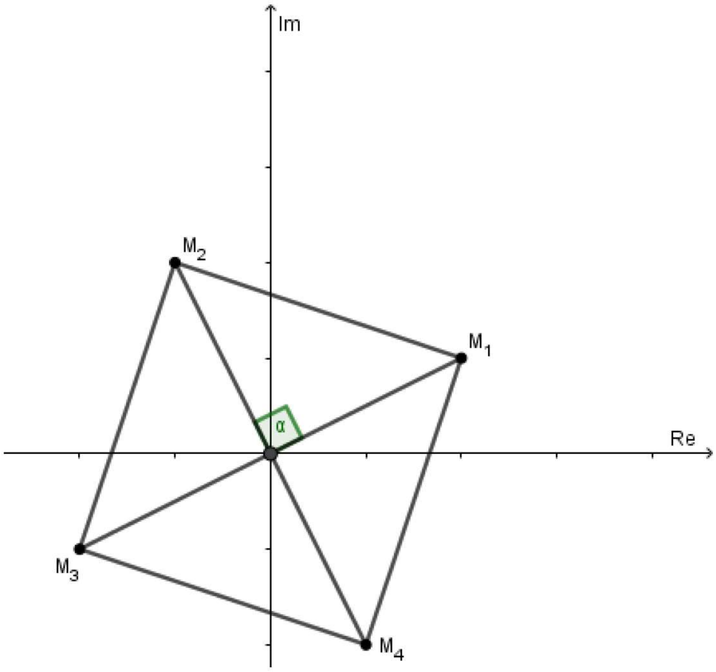
U nastavku ćemo navesti nekoliko geometrijskih zadataka koje ćemo riješiti primjenom geometrijske interpretacije množenja kompleksnih brojeva.

Primjer 3.1. *Neka je $M_1(2,1)$ vrh kvadrata čije je središte u ishodištu. Odredimo koordinate preostalih vrhova kvadrata.*

► Vrhu M_1 odgovara broj $z_1 = 2 + i$. Budući se dijagonale kvadrata sijeku po pravim kutom, vrh M_2 odnosno drugu točku dobit ćemo rotacijom vrha M_1 za 90^0 odnosno za $\frac{\pi}{2}$ oko ishodišta. To nam odgovara množenju s kompleksnim brojem

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Stoga točka M_2 predstavlja kompleksni broj $z_2 = i \cdot z_1 = i(2+i) = 2i + i^2 = 2i - 1$, odnosno vrh $M_2(-1,2)$. Analogno dobivamo koordinate vrhova M_3 i M_4:
$z_3 = i \cdot z_2 = i(-1+2i) = -2 - i$, $M_3(-2,-1)$
$z_4 = i \cdot z_3 = i(-2-i) = 1 - 2i$, $M_4(1,-2)$.



Slika 6: Kvadrat nastao rotacijom pojedinih vrhova za kut $\frac{\pi}{2}$ oko ishodišta

Primjer 3.2. *Neka su E(5, 1) i G(1, 3) dva nasuprotna vrha kvadrata. Odredite koordinate preostalih vrhova kvadrata.*

▶ Budući da nam nije zadano gdje se nalazi središte kvadrata, moramo ga odrediti. Kako su E i G dva nasuprotna vrha kvadrata središte $S(x_S, y_S)$ nalazit će se na polovištu dužine $\overline{EG}$. Njegove koordinate iznose:

$$x_S = \frac{5+1}{2} = 3, \quad y_S = \frac{1+3}{2} = 2,$$

dakle, središte kvadrata nalazi se u točki $S(3,2)$. Dužine $\overline{SE}$ i $\overline{SF}$ su jednake duljine jer se dijagonale kvadrata raspolavljaju. Budući se one i sijeku pod pravim kutom, vrh F odnosno dužinu $\overline{SF}$, dobit ćemo rotacijom dužine $\overline{SE}$ za 90^0 tj. za kut $\frac{\pi}{2}$ oko točke S. Kako rotacija oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$ odgovara množenju s kompleksnim brojem $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, tako vrijedi:

$$\begin{aligned} z_F - z_S &= z \cdot (z_E - z_S) \\ &= i(z_E - z_S). \end{aligned}$$

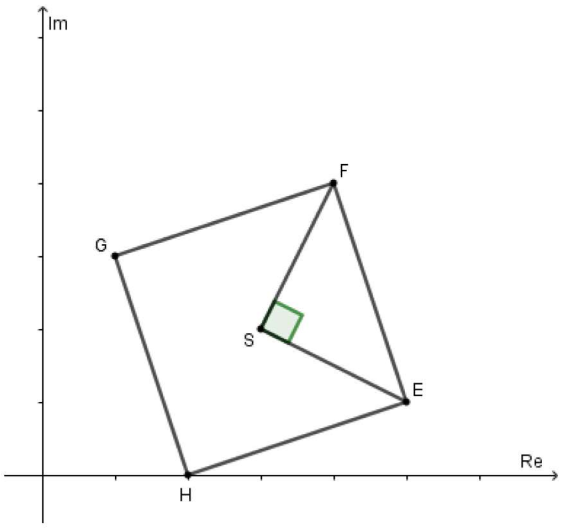
Odavde slijedi:

$$z_F = z_S + i(z_E - z_S) = 3 + 2i + i(5 + i - 3 - 2i) = 4 + 4i.$$

Dakle, koordinate vrha F su $F(4,4)$. Odredimo sada koordinate vrha H. Na slici 7 vidimo da vrh H možemo dobiti rotacijom točke E za 90^0 oko točke S, ali u smjeru kretanja kazaljke na satu, pa slijedi:

$$z_H - z_S = -i(z_E - z_S).$$

Iz te relacije dobivamo koordinate vrha H, $H(2,0)$.



Slika 7: Kvadrat nastao rotacijom pojedinih točaka za kut $\frac{\pi}{2}$ oko točke S

Primjer 3.3. *Neka je B_k točka kompleksne ravnine koja predstavlja kompleksan broj $w_k, k = 1, 2, 3, 4$. Pokazat ćemo da uz uvjet*

$$w_4 - w_2 = i(w_3 - w_1),$$

vrijedi

$$|B_1B_3| = |B_2B_4| \quad i \quad B_1B_3 \perp B_2B_4.$$

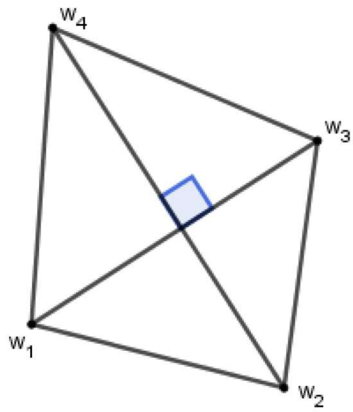
► Iz uvjeta $w_4 - w_2 = i(w_3 - w_1)$, pa slijedi

$$\begin{aligned} |w_4 - w_2| &= |i(w_3 - w_1)| \\ &= |i| \cdot |w_3 - w_1| \\ &= |w_3 - w_1| \end{aligned}$$

iz čega dobivamo da nam vrijedi $|B_1B_3| = |B_2B_4|$.
Dokažimo sada da se dijagonale četverokuta sijeku pod pravim kutom, odnosno da je $B_1B_3 \perp B_2B_4$.

$$\begin{aligned} \arg(w_4 - w_2) &= \arg(i(w_3 - w_1)) \\ &= \arg i + \arg(w_3 - w_1) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg(w_3 - w_1) \end{aligned}$$

iz čega nam slijedi da je $B_2B_4 \perp B_1B_3$.



Slika 8: Četverokut $B_1B_2B_3B_4$

Ovisno o orijentaciji četverokuta $B_1B_2B_3B_4$ umjesto broja i može doći i broj $-i$. Primjetimo da u ovom zadatku vrijedi i obratna tvrdnja te stoga vrijedi da četverokut $B_1B_2B_3B_4$ ima okomite dijagonale jednakih duljina ako i samo ako za njegove vrhove vrijedi $w_4 - w_2 = i(w_3 - w_1)$ ili $w_4 - w_2 = -i(w_3 - w_1)$.

Primjer 3.4. *Neka su $C_1(x_1, y_1), C_2(x_2, y_2)$ točke u kompleksnoj ravnini. Odredit ćemo koordinate točke $D(x, y)$ za koju je trokut C_1C_2D jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu D.*

- Budući se pravi kut nalazi pri vrhu D, vrijedi:

$$|DC_1| = |C_2D| \quad \text{i} \quad DA_1 \perp A_2D.$$

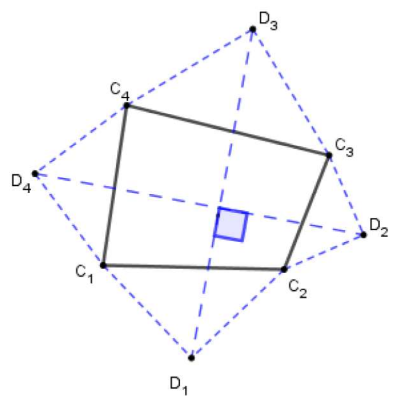
Stoga po obratnoj tvrdnji iz prethodnog zadatka slijedi da je

$$w_1 - w_D = i(w_D - w_2) \quad \text{odnosno} \quad w_D = \frac{w_1 + iw_2}{1+i}.$$

Nakon što uvrstimo koordinate i izdvojimo realni i imaginarni dio dobivamo koordinate točke D:

$$x_D = \frac{x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}, \quad y_D = \frac{y_1 + y_2 - x_1 + x_2}{2}.$$

Primjer 3.5. *Neka je $C_1C_2C_3C_4$ proizvoljan četverokut. S vanjskih ili unutarnjih strana svake stranice konstruiraju se jednakokračni pravokutni trokuti s pravim kutovima u točkama D_1, D_2, D_3, D_4 koje čine četverokut $D_1D_2D_3D_4$* (Slika 9)*. Pokazat ćemo da su dijagonale tog četverokuta jednake duljine i međusobno okomite.*



Slika 9: Dijagonale četverokut $D_1D_2D_3D_4$ jednakih su duljina i međusobno okomite

- Koordinate točaka $D_k, k = 1, 2, 3, 4$ po prethodnom zadatku glase:

$$q_1 = \frac{w_1 + iw_2}{1+i}, \quad q_2 = \frac{w_2 + iw_3}{1+i},$$

$$q_3 = \frac{w_3 + iw_4}{1+i}, \quad q_4 = \frac{w_4 + iw_1}{1+i}.$$

► Trebamo pokazati

$$|D_1D_3| = |D_2D_4| \quad \text{i} \quad D_1D_3 \perp D_2D_4.$$

Po primjeru 4.3, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$q_4 - q_2 = i(q_3 - q_1).$$

Direktnim uvrštavanjem dobije se da je relacija istinita, odnosno da su duljine dijagonala četverokuta $D_1D_2D_3D_4$ jednakih duljina i međusobno okomite.

Literatura

[1] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, 2006.

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] F. M. Brückler, *Povijest matematike I.*, Sveučilište J.J.Strossmayera. Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] A. Corn, *Dokazi geometrijskih tvrdnji pomoću kompleksnih brojeva*, diplomski rad, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2017.

[5] N. Elezović, *Kompleksni brojevi*, Element, Zagreb, 2000.

[6] O. Merino, *A short History of Complex Numbers*, University of Rhode Island, 2006.

[7] T. Strmečki, *Matematika 1*, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2021.

Sažetak

Tema ovog rada su kompleksni brojevi i njihova primjena u algebri i geometriji. Na samom početku rada nalazi se kratki povijesni razvoj kompleksnih brojeva te je navedena njihova primjena u različitim područjima znanosti. Potom slijedi kratki pregled teorije kompleksnih brojeva, krenuvši od samog skupa kompleksnih brojeva, prikaza u kompleksnoj ravnini te njegovim različitim zapisima i računskim operacijama koje smo iskoristili u dokazima matematičkih identiteta. U trećem poglavlju na temelju niza primjera pokazali smo da pomoću trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja možemo dokazati niz algebarskih identita te na taj način istaknuli važnost primjene u algebri. Na samom kraju dokazali smo trigonometrijske identitet za sinus i kosinus višestrukih kutova te opisali geometrijsku interpretaciju množenja kompleksnih brojeva i na taj način na nizu primjera pokazali njihovu primjenu u geometriji.

Ključne riječi: kompleksni brojevi, trigonometrijski zapis kompleksnog broja, algebra, geometrija

Title: Application of complex numbers in algebra and geometry

Summary

The topics of this work are complex numbers and their application in algebra and geometry. At the very beginning of the work, there is a short historical development of complex numbers and their application in different fields of science is stated. Then follows a short overview of the theory of complex numbers, starting from the set of complex numbers itself, shown in the complex plane and its different notations and calculation operations that we used in the proofs of mathematical identities. In the third chapter, based on a series of examples, we showed that using the trigonometric notation of a complex number, we can prove a series of algebraic identities, and in this way they emphasized the importance of application in algebra. At the very end, we proved the trigonometric identity for the sine and cosine of multiple angles and described the geometric interpretation of the multiplication of complex numbers and in this way showed their application in geometry through a series of examples.

Keywords: complex numbers, trigonometric notation of a complex number, algebra, geometry