

# Helikodalne plohe

---

Šoštarić, Matija

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:574932>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-23**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Matija Šoštarić

## Helikoidalne plohe

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Matija Šoštarić

## Helikoidalne plohe

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

## Sažetak

U ovome radu promatrat ćemo plohe koje nastaju helikoidalnim gibanjem tzv. *helikoidalne plohe*. Helikoidalno gibanje sastoji se od istovremene translacije u smjeru nekog pravca i rotacije oko istog pravca. Osim u diferencijalnoj geometriji, helikoidalne plohe nalazimo posvuda oko nas. Medicina, mehanika i brodogradnja samo su neka zanimanja koja se svakodnevno susreću sa helikoidalnim ploham a te helikoidalnim gibanjem. Formule koje ćemo navesti vrlo važnu ulogu imaju u svakodnevnim inženjerskim projektima. Iskazat ćemo bitne definicije i teoreme helikoidalnih ploha te navesti određene pomoćne tvrdnje. Nadalje, navest ćemo parametrizaciju helikoidalne plohe generirane ravninskom krivuljom, pogledat ćemo primjere helikoidalnih ploha te se posebno osvrnuti na plosnate helikoidalne plohe. Slike koje nemaju naveden izvor izrađene su u programu Mathematica.

**Ključne riječi:** Helikoidalna ploha, helikoidalno gibanje, cilindrična spirala.

# Helicoidal surfaces

## Summary

In this work we will observe surfaces which are the result of a screw motion, also called *generalized helicoids*. Screw motion consists of simultaneous translation in the direction of a certain line and rotation around the same line. Generalized helicoids can be found everywhere around us. Medicine, mechanics and shipbuilding are just some of the fields that are on a daily basis encountered by generalized helicoids and screw motion. The mentioned formulas play a very important role in everyday engineering projects. Some important definitions and theorems of generalized helicoids will be presented, as well as some auxiliary statements. Furthermore, the parameterization of generalized helicoid generated by a curve will be specified, and some examples of generalized helicoids will be given with special emphasis on flat generalized helicoids.

Images that do not have a source listed were created in Mathematica.

**Keywords:** Generalized helicoid, screw motion, helix.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha</b>	<b>2</b>
1.1 Definicija plohe . . . . .	2
1.2 Operator oblika plohe . . . . .	2
1.3 Gaussova i srednja zakrivljenost . . . . .	3
1.4 Prva i druga fundamentalna forma plohe . . . . .	3
<b>2 Helikoidalne plohe</b>	<b>6</b>
2.1 Definicija helikoidalnih ploha . . . . .	6
2.2 Parametrizacija helikoidalne plohe . . . . .	7
2.3 Zakrivljenost helikoidalnih ploha . . . . .	7
2.4 Primjeri helikoidalnih ploha . . . . .	9
2.5 Plosnate helikoidalne plohe . . . . .	10
2.6 Helikoidalne plohe oko nas . . . . .	12
<b>Literatura</b>	<b>13</b>

## Uvod

Svrha ovog rada je proučiti helikoidalne plohe te navesti neke primjere takvih ploha. U ovome radu promatrat ćemo plohe koje nastaju helikoidalnim gibanjem tzv. helikoidalne plohe. Helikoidalno gibanje sastoji se od istovremene translacije u smjeru nekog pravca i rotacije oko istog pravca. Osim u diferencijalnoj geometriji, helikoidalne plohe nalazimo posvuda oko nas. Medicina, mehanika i brodogradnja samo su neka zanimanja koja se svakodnevno susreću sa helikoidalnim ploham a te helikoidalnim gibanjem.

Rad se sastoji od dva poglavlja. U prvom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove i iskazati teoreme vezane za plohe u  $\mathbb{R}^3$  koji će nam kasnije koristiti. U drugom poglavlju posebno ćemo se osvrnuti na same helikoidalne plohe. Dat ćemo njihovu definiciju, parametrizirat ćemo ih te na osnovu prijašnjih rezultata, navest ćemo gotove formule za fundamentalne veličine prvog i drugog reda te Gaussovu i srednju zakrivljenost. Promotrit ćemo vrste helikoidalnih ploha te ćemo se posebno osvrnuti na plosnate helikoidalne plohe. Na samom kraju ćemo fotografijama pokazati postojanost helikoidalnih ploha u prirodi.

# 1 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove i iskazati teoreme vezane za lokalne plohe. Definicije i teoremi su preuzeti iz [2].

## 1.1 Definicija plohe

**Definicija 1.** Podskup  $S \subset \mathbb{R}^3$  je **ploha** ako za svaku točku  $p \in S$  postoji otvorena okolina  $V \subset \mathbb{R}^3$  i preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  s otvorenog skupa  $U \subset \mathbb{R}^2$  koje je glatko preslikavanje i homeomorfizam otvorenih skupova.

Preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  se naziva **kartom** ili **parametrizacijom plohe S**. Za plohu kažemo da je **regularna** ako je diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$  injektivan.

Diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$  je injektivan ako i samo ako su vektori  $x_u := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$  i  $x_v := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$  linearno nezavisni, što vrijedi ako i samo ako je  $x_u \times x_v \neq 0$ . Vidjeti [2, str. 37].

Nadalje, za preslikavanje  $c : I \rightarrow S$  na plohi  $S$  kažemo da je glatko, ako je za kartu  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ ,  $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ , preslikavanje  $\mathbf{x} \circ c : I \rightarrow U$  glatko.

**Definicija 2.** Krivuljom na plohi nazivamo svako glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow S$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ .

## 1.2 Operator oblika plohe

Neka je  $S$  regularna ploha,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  karta plohe  $S$  i  $p \in \mathbf{x}(U)$ .

**Definicija 3.** Tangencijalni vektor karte  $\mathbf{x}$  u točki  $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  je vektor  $v_p \in \mathbb{R}_p^3$  za koji postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$ ,  $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$  takva da je

$$c(0) = p, \quad c'(0) = v_p.$$

Sa  $T_p S$  označavat ćemo skup svih tangencijalnih vektora u  $p$ .

**Definicija 4.** Potprostor  $T_p S$  se naziva **tangencijalna ravnina plohe S** u točki  $p$ .

Ukoliko u točki plohe postoji jedinstvena tangencijalna ravnina, točka plohe je **regularna**. Tangencijalna ravnina u regularnoj točki  $p \in S$  sadrži tangente svih krivulja koje leže na plohi  $S$  i prolaze točkom  $p$ . S druge strane, točke plohe u kojima takve tangente ne formiraju ravninu, tj. tangencijalni vektori nisu linearno nezavisni, zovu se **singularne** točke.

**Definicija 5.** Standarni jedinični vektor normale karte  $\mathbf{x}$  je vektor

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|},$$

pri čemu su  $\mathbf{x}_u$  i  $\mathbf{x}_v$  vektori koji razapinju tangencijalnu ravninu  $T_p S$  plohe  $S$  u točki  $p$ .

**Definicija 6.** Preslikavanje  $S_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$  definirano s

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} n(p)$$

nazivamo **operatorom oblika plohe S** u točki  $p$  ili **Weingartenovo preslikavanje**.



### 1.3 Gaussova i srednja zakrivljenost

Operator  $S_p$  je simetričan pa postoji ortonormirana baza  $T_p S$  u kojoj će njegov matricni prikaz biti upravo dijagonalna matrica. Označit ćemo tu bazu s  $\{e_1, e_2\}$  te će vrijediti

$$S_p(e_1) = k_1(p)e_1, \quad S_p(e_2) = k_2(p)e_2,$$

$$S_p = \begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}.$$

**Definicija 7.** Funkcija  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$K(p) = \det S_p$$

naziva se **Gaussova zakrivljenost** plohe  $S$  u točki  $p$ .

**Definicija 8.** Funkcija  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p,$$

pri čemu je  $\operatorname{tr}$  oznaka za trag matrice operatora  $S_p$ , naziva se **srednja zakrivljenost** plohe  $S$  u točki  $p$ .

Primijetimo da su  $k_1(p), k_2(p)$  svojstvene vrijednosti operatora  $S_p$  te ih zovemo **glavne zakrivljenosti** plohe  $S$  u točki  $p$ , dok vektore  $e_1, e_2$  zovemo **glavnim vektorima**.

Sada imamo

$$K(p) = k_1(p)k_2(p), \quad H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

**Definicija 9.** Za plohu  $S$  kažemo da je:

- **plosnata** ako je  $K(p) = 0$  za svaku točku  $p$  plohe,
- **minimalna** ako je  $H(p) = 0$  za svaku točku  $p$  plohe,
- **ploha konstantne zakrivljenosti** ako je  $K(p) = m, m \in \mathbb{R}$  za svaku točku  $p$  plohe.

Ravnina, cilindrična ploha i tangentna ploha primjeri su plosnatih ploha. S druge strane, primjeri ploha konstantne zakrivljenosti su sfera i pseudosfera, dok su primjeri minimalnih ploha upravo helikoid i katenoid.

### 1.4 Prva i druga fundamentalna forma plohe

**Definicija 10.** Prva fundamentalna forma plohe  $S$  u točki  $p \in S$  je simetričan, bilinearan funkcional  $I : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definiran s

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p = v \cdot w.$$

Prvom fundamentalnom formom nazivamo i pridruženu kvadratnu formu  $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I(v_p) = v_p \cdot v_p$

Djelovanje prve fundamentalne forme na tangencijalni vektor  $v_p$  možemo zapisati pomoću karte plohe. Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  karta i  $v_p \in T_p S$ . Prema definiciji tangencijalnog vektora, postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$  takva da je  $c(0) = p$  i  $c'(0) = v_p$ . Neka je  $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ ,  $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  te vrijedi  $v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0)$ . Dobivamo,

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p = \mathbf{x}_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{x}_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Definirat ćemo funkcije  $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$  na način:  $E = \mathbf{x}_u^2$ ,  $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ ,  $G = \mathbf{x}_v^2$ .

Upravo te funkcije  $E, F$  i  $G$  nazivamo **fundamentalnim veličinama prvog reda** plohe  $S$  u karti  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Definicija 11.** Druga fundamentalna forma plohe  $S$  u točki  $p \in S$  je simetričan, bilinearan funkcional  $II : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definiran s

$$II(v_p, w_p) = S_p(v_p) \cdot w_p.$$

*Pridružena kvadratna forma*

$$II : T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

*također se naziva drugom fundamentalnom formom.*

Analogno kao za prvu fundamentalnu formu, za drugu fundamentalnu formu dobivamo sljedeći zapis pomoću karte plohe

$$\begin{aligned} II(v_p) &= S(v_p) \cdot v_p \\ &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0)(u'(0))^2 \\ &\quad + S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0))u'(0)v'(0) \\ &\quad + S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)(v'(0))^2. \end{aligned}$$

Definirat ćemo funkcije  $L, M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$  na način:

$$\begin{aligned} L &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\ M &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)), \\ N &= S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Upravo te funkcije  $L, M$  i  $N$  nazivamo **fundamentalnim veličinama drugog reda** plohe  $S$  u karti  $\mathbf{x}$ .

Možemo pisati

$$II(v_p) = Lu'(0)^2 + 2Mu'(0)v'(0) + Nv'(0)^2$$

ili

$$II(v_p) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Pomoću fundamentalnih veličina prvog i drugog reda dolazimo do sljedećeg rezultata:

**Propozicija 1.** (Vidjeti [2, Propozicija 3.5.1]) Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  karta za plohu  $S$  te neka su  $E, F, G, L, M$  i  $N$  fundamentalne veličine prvog, odnosno drugog reda s obzirom na kartu  $\mathbf{x}$ . Tada su Gaussova i srednja zakrivljenost dane formulama

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

## 2 Helikoidalne plohe

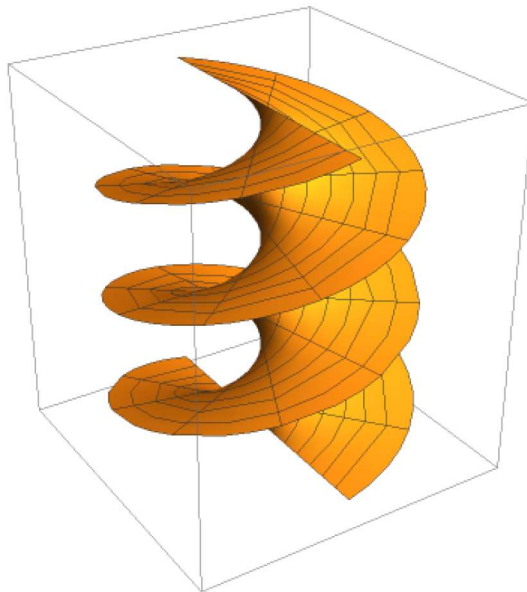
U ovom poglavlju detaljnije ćemo se baviti helikoidalnim plohami. Točnije, promatrat njihovu ćemo parametrizaciju, navesti primjere takvih ploha, iskazati i dokazati formulu po kojoj se računaju zakrivljenosti helikoidalnih ploha te se ukratko osvrnuti na specijalnu klasu helikoidalnih ploha - plosnate helikoidalne plohe. Sve definicije i teoremi u ovom poglavlju preuzeti su iz [1].

### 2.1 Definicija helikoidalnih ploha

Najpoznatiji predstavnici helikoidalnih ploha su helikoidi i određene rotacijske plohe kojima se detaljnije bavio njemački matematičar Minding.<sup>1</sup>

**Definicija 12.** *Neka je  $\Pi$  ravnina u  $\mathbb{R}^3$ ,  $l$  pravac iz ravine  $\Pi$  te  $c$  krivulja u  $\Pi$ . Pretpostavimo da krivulja  $c$  rotira oko pravca  $l$  u ravnini  $\mathbb{R}^3$  i istovremeno se translacija paralelno s pravcem  $l$  tako da je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije (simultano gibanje). Tada se na taj način dobiveni skup točaka  $M$  naziva **helikoidalna ploha**. Pravac  $l$  nazivamo **os rotacije**, dok krivulju koja rotira oko  $l$  nazivamo **generatrisa**.*

**Definicija 13.** *Gibanje nastalo simultanom rotacijom i translacijom nazivamo **helikoidalno gibanje**.*



Slika 1: Helikoid

**Definicija 14.** *Omjer brzine translacije i brzine rotacije naziva se **nagib** helikoidalne plohe.*

<sup>1</sup>Ernest Ferdinand Adolf Minding (1806.-1885.) bio je njemački profesor, kasnije dekan Sveučilišta u Tartu, Estonija. Bio je jedan od onih matematičara koji su se o matematici podučavali sami, tj. bio je samouk.

## 2.2 Parametrizacija helikoidalne plohe

Kako helikoidalne plohe nastaju odgovarajućim gibanjem krivulje u prostoru, opisujući takvo gibanje matematičkim funkcijama, možemo eksplicitno izreći parametrizaciju helikoidalnih ploha.

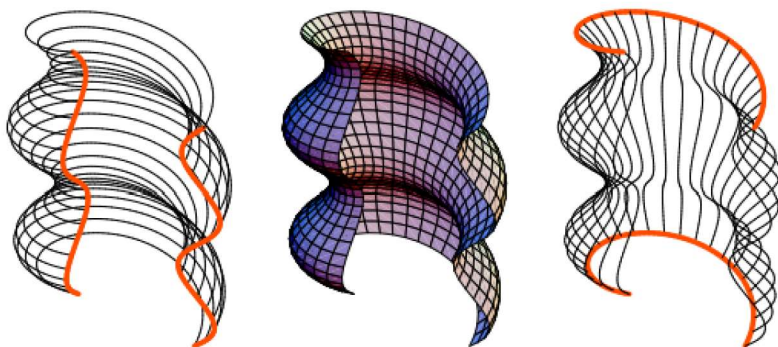
**Definicija 15.** Neka je  $c(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  ravninska krivulja. Helikoidalna ploha generirana krivuljom  $c$  nagiba  $n$  je dana parametrizacijom

$$M(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, nu + \psi(v)). \quad (1)$$

Kako su helikoidalne plohe određene i rotacijom generatriše, slično kao za rotacijske plohe, možemo definirati meridijane i paralele helikoidalne plohe. Iz tog razloga možemo definirati sljedeće:

**Definicija 16.** Neka je  $c$  krivulja u ravnini  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  te neka je  $M[c, n]$  helikoidalna ploha generirana rotacijom krivulje  $c$  oko pravca  $l \subset \Pi$  te simultanom translacijom duž pravca  $l$  nagiba  $n$ . **Meridijan** helikoidalne plohe  $M[c, n]$  je presjek same helikoidalne plohe  $M[c, n]$  s bilo kojom ravninom koja sadrži pravac  $l$ . **Paralela** helikoidalne plohe  $M[c, n]$  je presjek same helikoidalne plohe  $M[c, n]$  s bilo kojom ravninom koja je ortogonalna s pravcem  $l$ .

Za općenitu definiciju meridijana i paralele vidi [1, str. 463]. Kako krug ima ulogu paralele za rotacijske plohe, tako za helikoidalne plohe istu ulogu ima helikoidalna krivulja, točnije **cilindrična spirala**. Dakle, kod helikoidalnih ploha  $v$ -parametarske krivulje su meridijani, dok su  $u$ -parametarske krivulje upravo cilindrične spirale. U odnosu na rotacijske plohe, meridijani i paralele kod helikoidalnih ploha nisu međusobno okomiti.



Slika 2: Slika prikazuje redom paralelne cilindrične spirale, samu helikoidalnu plohu i meridijane helikoidalnih ploha. Slika je preuzeta iz [1].

## 2.3 Zakrivljenost helikoidalnih ploha

Helikoidalne plohe su regularne plohe, stoga im je moguće odrediti Gaussovu i srednju zakrivljenost. Sljedeća lema nam daje upravo formule kojima lako možemo izračunati Gaussovu i srednju zakrivljenost, te fundamentalne veličine prvog i drugog reda.

**Lema 1.** (Vidjeti [1, Lema 15.18]) Neka je  $M \subset \mathbb{R}^3$  helikoidalna ploha u karti  $\mathbf{x}$  zadana parametrizacijom  $M(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, nu + \psi(v))$ . Tada su fundamentalne veličine prvog reda

$$E = \varphi^2 + n^2, \quad F = n\psi', \quad G = \varphi'^2 + \psi'^2.$$

Stoga,  $\mathbf{x}$  je regularna ako je

$$EG - F^2 = \varphi^2(\varphi'^2 + \psi'^2) + n^2\varphi'^2 \neq 0.$$

Uzimajući  $D = \sqrt{EG - F^2}$ , imamo

$$L = \frac{-\varphi^2\psi'}{D}, \quad M = \frac{n\varphi'^2}{D}, \quad N = \frac{\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{D}.$$

Nadalje,

$$K = \frac{-n^2\varphi'^4 + \varphi^3\psi'(-\psi'\varphi'' + \varphi'\psi'')}{D^4},$$

$$H = \frac{-2n^2\varphi'^2\psi' - \varphi^2\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2) + \varphi(n^2 + \varphi^2)(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')}{2D^3}.$$

*Dokaz:* Helikoidalnu plohu parametrizirali smo s  $\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, nu + \psi(v))$ . Iz propozicije 1 znamo da je

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

To uz oznaku  $D = \sqrt{EG - F^2}$  zapisujemo

$$K = \frac{LN - M^2}{D^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2D^2}.$$

Radi jednostavnijeg zapisa, označit ćemo  $\varphi = \varphi(v)$ ,  $\psi = \psi(v)$  te znamo da je

$$E = \mathbf{x}_u^2 = \varphi^2 \sin^2 u + \varphi^2 \cos^2 u + n^2 = \varphi^2 + n^2,$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (-\varphi \sin u, \varphi \cos u, n) \cdot (\varphi' \cos u, \varphi' \sin u, \psi') = n\psi',$$

$$G = \mathbf{x}_v^2 = \varphi'^2 \sin^2 u + \varphi'^2 \cos^2 u + \psi'^2 = \varphi'^2 + \psi'^2,$$

$$L = \frac{1}{D} \det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -\varphi \cos u & -\varphi \sin u & 0 \\ -\varphi \sin u & \varphi \cos u & n \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \end{vmatrix} = \frac{-\varphi^2\psi'}{D},$$

$$M = \frac{1}{D} \det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ -\varphi \sin u & \varphi \cos u & n \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \end{vmatrix} = \frac{n\varphi'^2}{D},$$

$$N = \frac{1}{D} \det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \varphi'' \cos u & \varphi'' \sin u & \psi'' \\ -\varphi \sin u & \varphi \cos u & n \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \end{vmatrix} = \frac{\varphi(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')}{D}.$$

Uvrštavajući dobivene izraze za  $E, F, G, L, M$  i  $N$  u izraze za  $K$  i  $H$ , dobijamo

$$K = \frac{\frac{(-\varphi^2\psi')(\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi''))}{D^2} - \frac{n^2\varphi'^4}{D^2}}{D^2}$$

$$= \frac{-n^2\varphi'^4 + \varphi^3\psi'(-\varphi''\psi' + \varphi'\psi'')}{D^4}$$

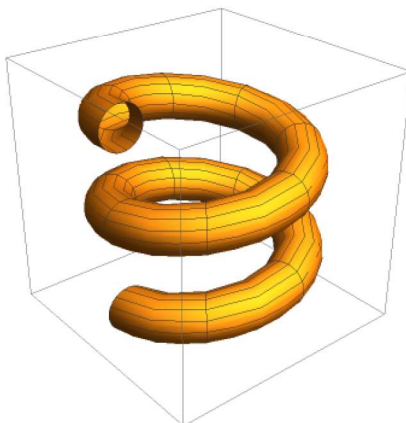
te

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\varphi^2 + n^2)\frac{\varphi(\varphi'\psi' - \varphi'\psi'')}{D} + (-2n\psi')\frac{n\varphi'^2}{D} + (\varphi'^2 + \psi'^2)\frac{-\varphi^2\psi'}{D}}{D^2} \\ &= \frac{-2n^2\psi'\varphi'^2 - \varphi^2\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2) + (\varphi^2 + n^2)\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{D^3}. \end{aligned}$$

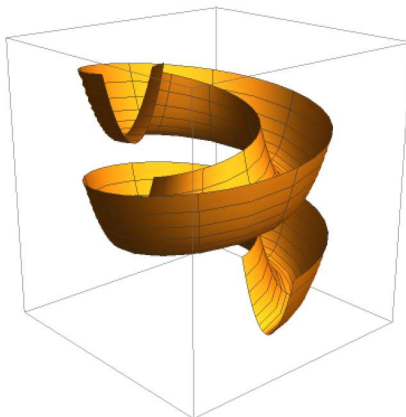
□

## 2.4 Primjeri helikoidalnih ploha

U samoj definiciji helikoidalne plohe spominje se generatrisa kao krivulja koja generira plohu. Znamo da krivulja može biti raznih oblika. Od pravca, preko sinusoida pa sve do krivulja drugog reda što je, na primjer, kružnica. Upravo na taj način možemo podijeliti helikoidalne plohe. One koje su generirane pravcem kao generatrisom, nazivamo plosnate helikoidalne plohe. Razlog tome jest što je njihova Gaussova zakrivljenost jednaka je upravo nuli. Preostale plohe, one koje nisu generirane pravcem, imaju svojstvo da je njihova Gaussova zakrivljenost različita od nule. Na slikama 3 i 4 prikazani su primjeri helikoidalnih ploha čija generatrisa nije pravac.



Slika 3: Helikoidalna ploha nagiba  $c$  generirana kružnicom radijusa  $b$  parametarske jednadžbe  $\mathbf{x}(u, v) = \left( (a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v + \frac{u}{c} \right)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .



Slika 4: Helikoidalna ploha nagiba  $c$  generirana dijelom parabole parametarske jednadžbe  $\mathbf{x}(u, v) = ((a + v) \cos u, (a + v) \sin u, cu + v^2)$ ,  $a > 0$ .

## 2.5 Plosnate helikoidalne plohe

U ovom dijelu posebno ćemo se osvrnuti na plosnate helikoidalne plohe. Točnije, to su plohe u kojima je krivulja koja se rotira oko osi, tj. generatrisa, pravac. Sljedeći teorem govori nam nešto više o "plosnatosti" plohe.

**Teorem 1.** (Vidjeti [1, Teorem 15.24]) Helikoidalna ploha zadana parametrizacijom (1) je plosnata ako i samo ako je njena generatrisa parametrizirana kao  $c(t) = (t, \varphi(t))$ , gdje je

$$\pm \varphi(t) = t\sqrt{a^2 - \frac{n^2}{t^2}} + n \arcsin \frac{n}{at}.$$

*Dokaz:* Ploha je plosnata ako Gaussova zakrivljenost isčezava u svakoj njezinoj točki, tj.  $K = 0$ , što povlači (lema 1) da je helikoidalna ploha plosnata ako i samo ako generatrisa  $c(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\varphi^3(\varphi'\psi'\psi'' - \psi'^2\varphi'') - n^2\varphi'^2 = 0.$$

Generatrisa može bit parametrizirana tako da je  $\varphi(t) = t$  pa tada gornji izraz prelazi u

$$t^3\psi'\psi'' - n^2 = 0.$$

Sređivanjem dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi')^2 = \frac{2n^2}{t^3}.$$

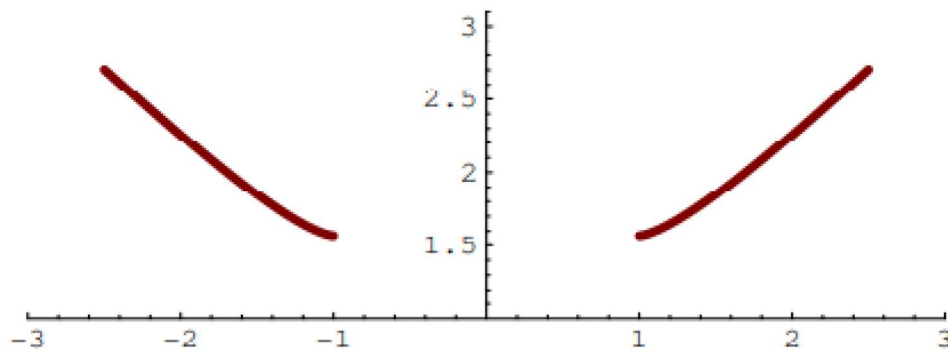
Integriranjem po  $t$  dobijemo

$$\psi'(t) = \pm\sqrt{a^2 - \frac{n^2}{t^2}},$$

gdje je  $a > 0$  integracijska konstanta te ponovnom integracijom dolazimo do konačnog izraza za  $\psi(t)$  koji je oblika

$$\psi(t) = t\sqrt{a^2 - \frac{n^2}{t^2}} + n \arcsin \frac{n}{at}.$$

□

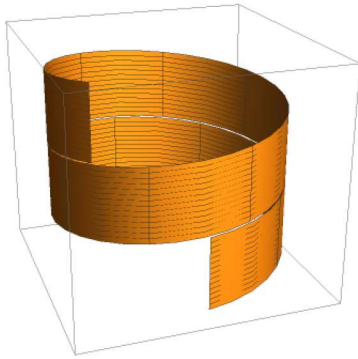


Slika 5: Generatrisa plosnate helikoidalne plohe. Slika je preuzeta iz [1].

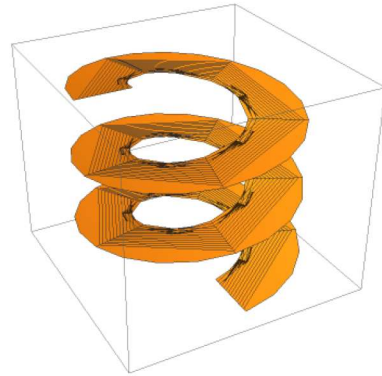


Na slici 5 možemo vidjeti da je pravac udaljen od  $y$ -osi što bi značilo da je generatrisa udaljena od osi rotacije. Upravo na taj način možemo razmotriti tri slučaja:

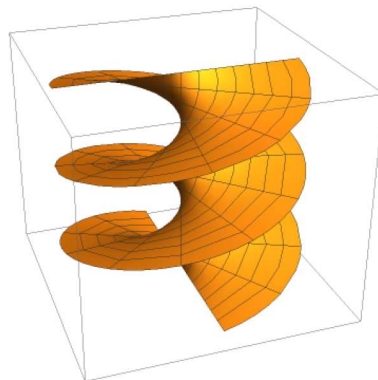
- pravac je paralelan s osi gibanja - generirana ploha je kružni cilindar,
- pravac siječe ortogonalno os gibanja - generirana ploha je helikoid,
- pravac je mimoilazan (i ortogonalan) s osi gibanja - generirana ploha je poopćeni helikoid.



Slika 6: Kružni cilindar



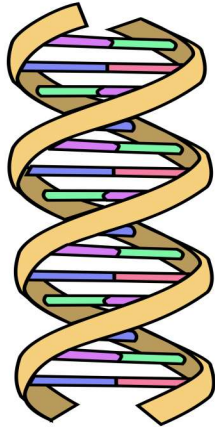
Slika 7: Poopćeni helikoid



Slika 8: Helikoid

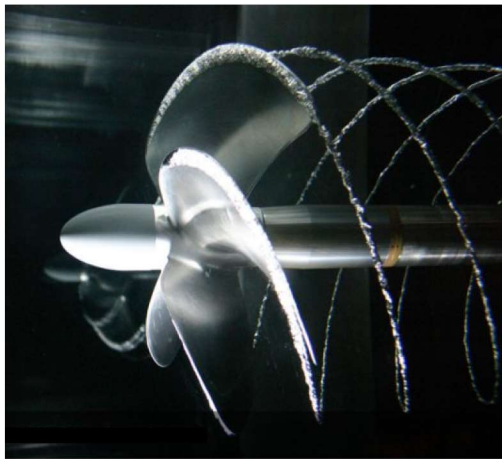
## 2.6 Helikoidalne plohe oko nas

U nastavku ćemo prikazati primjere helikoidalnih ploha koji se nalaze svuda oko nas, a nismo ni svjesni, sve od kružnih stepenica do dijelova dječjih igrališta.



Slika 9: DNA zamišljamo kao helikoidalnu plohu čija je generatrisa dužina koju raspolavlja os rotacije te je okomita na nju. Slika je preuzeta iz [4].

Slika 10: Kružne stepenice zamišljamo kao helikoidalnu plohu čija je generatrisa također dužina, no os rotacije dira tu dužinu u jednoj krajnjoj točki te je isto tako okomita na os rotacije. Slika je preuzeta iz [5].



Slika 11: Propeler plovila zapravo je dio helikoidalne plohe generirane sa više generatrisa čiji je nagib jednak te svaka od njih ima jednu zajedničku točku s osi rotacije. Slika je preuzeta iz [6].

Slika 12: Tobogan je tipičan primjer helikoidalne plohe generirane dijelom parabole koja nema ni jednu zajedničku točku s osi rotacije. Slika je preuzeta iz [7].



## Literatura

- [1] A. GRAY, E. ABBENA, S. SALAMON, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 2006.
- [2] Ž. MILIN ŠIPUŠ, S. VIDAČ, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.
- [3] Z. ŠEPAROVIĆ, *Geometrijski oblici u arhitekturi*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2015.
- [4] URL:[https://hr.m.wikipedia.org/wiki/Datoteka:DNA\\_simple.svg](https://hr.m.wikipedia.org/wiki/Datoteka:DNA_simple.svg).
- [5] URL:<https://www.tavanskestepenice.rs/artikl/unutrasnje-kruzne-stepenice-venezia-crna-konstrukcija-gazista-od-bukovine-sa-efektom-orahovine/>.
- [6] URL:<https://adriaprop.hr/problemi-primjer/>.
- [7] URL:<http://www.lesena-igrala.si/izdelek/tobogani/tobogani-102/spiralni-tobogan-kss-210-360-1123>.