Funkcije izvodnice momenata poznatih distribucija

Marković, Krešimir

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Krešimir Marković

Funkcije izvodnice momenata poznatih distribucija

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Krešimir Marković

Funkcije izvodnice momenata poznatih distribucija

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2022.

Sažetak

Tema ovog rada su funkcije izvodnice momenata poznatih parametarskih distribucija. Za početak ćemo proći kroz osnovne pojmove teorije vjerojatnosti pa ćemo reći nešto više o samim funkcijama izvodnicama momenata. Definirat ćemo funkcije izvodnice momenata, navesti ćemo njihova svojstva te ćemo odrediti funkcije izvodnice momenata za neke poznate distribucije kao što su Bernoullijeva distribucija, binomna distribucija, geometrijska distribucija i nekoliko drugih. Za svaku od tih distribucija izračunat ćemo osnovne numeričke karakteristike koristeći upravo funkcije izvodnice momenata.

Ključne riječi

vjerojatnost, funkcije izvodnice momenata, Bernoullijeva distribucija, binomna distribucija, Poissonova distribucija, geometrijska distribucija, negativna binomna distribucija, očekivanje, varijanca

Moment generating functions

Summary

The topic of this bachelor's thesis are moment generating functions. We will start off with recalling some of the basic definitions concerning probability theory and then we will say something about moment generating functions. We will define moment generating functions, go through their properties and calculate them for some well known distributions, such as Bernoulli distribution, binomial distribution, geometric distribution and few others. For every distribution we will calculate numerical characteristics using moment generating functions.

Keywords

probability, moment generating functions, Bernoulli distribution, binomial distribution, Poisson distribution, geometric distribution, negative binomial distribution, expectation, variance

Sadržaj

Uvod

Za početak ćemo definirati neke osnove pojmove kako bi lakše razumijeli definiciju funkcije izvodnice momenata. Ponoviti ćemo definicije iz teorije vjerojatnosti.
U drugom poglavlju definirat ćemo funkciju izvodnicu momenata, iskazati neke važne rezultate za njih te analizirati problem momenata.
U trećem poglavlju analizirat ćemo neke poznate distribucije. Svaku od njih ćemo definirati te ćemo pronaći funkciju izvodnicu momenata za njih. Nadalje, izračunati ćemo osnovne numeričke karakteristike za svaku od njih, tj. očekivanje i varijancu.

1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Slučajni pokus ili slučajni eksperiment je takav pokus čiji ishodi , tj. rezultati nisu jednoznačno određeni uvjetima u kojima izvodimo pokus.*

Napomena 1. *Ishode slučajnog pokusa zvat ćemo elementarni događaji.*

Definicija 2. *Neprazan skup Ω koji reprezentira skup svih ishoda slučajnog pokusa zovemo prostor elementarnih događaja.*
Elemente skupa $\Omega - \omega$ zvati ćemo elementarni događaji.

Definicija 3. *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω jest $\sigma-$algebra skupova ako je*

(F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(F2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$

(F3) $(A_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 4. *Neka je $\mathcal{F}$ $\sigma-$algebra na skupu Ω. Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjeriv prostor.*

Definicija 5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkciju $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost ako vrijedi:*

$(P1)$ $P(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{F}$

$(P2)$ $P(\Omega) = 1$

$P(3)$ *ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$,čim je $i \neq j$, tada vrijedi $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.*

Definicija 6. *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gdje je Ω prostor elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ σ-algebra i P vjerojatnost na Ω naziva se vjerojatnostni prostor.*

Varijablu nazivamo slučajnom varijablom ako su njene moguće realizacije (ishodi) realni brojevi, ali vrijednost koja će se realizirati u pojedinom eksperimentu nije jednoznačno određena uvjetima koje možemo sagledati prilikom istraživanja.

Definicija 7. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$. Svaku funkciju $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ zvat ćemo diskretna slučajna varijabla.*

Definicija 8. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $X \colon \Omega \to D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla. Funkcija $p \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana s*

$$p(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

zove se funkcija gustoće diskretne slučajne varijable X.

Definicija 9. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ i funkcija $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

(i) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) postoji neneagtivna realna funkcija realne varijable f, *takva da vrijedi:*

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju X *zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla na* ω *ili,kraće, neprekidna slučajna varijabla. Funkciju* f *tada zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable* X *ili, kraće, funkcija gustoće slučajne varijable* X.

Definicija 10. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ *diskretan vjerojatnostni prostor i* X *slučajna varijabla na njemu. Ako red* $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ *apsolutno konvergira (tj. ako konvergira red* $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|P\{\omega\}$*), onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima matematičko očekivanje i broj*

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$$

zovemo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.

Definicija 11. *Neka je* X *neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f. *Ako je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X *ima očekivanje i broj*

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X.

Definicija 12. *Neka je* X *slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *i* $r > 0$.

- *Ako postoji* $\mathbb{E}(X^r)$, *onda broj* $\mu_r = \mathbb{E}(X^r)$ *zovemo moment* r*-tog reda ili* r*-ti moment od* X.

- *Ako postoji* $\mathbb{E}(|X^r|)$, *onda broj* $\mathbb{E}(|X^r|)$ *zovemo apsolutni moment* r*-tog reda ili* r*-ti apsolutni moment od* X.

- *Ako postoji* $\mathbb{E}X$ *i* $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}X|^r)$, *onda broj* $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}X|^r)$ *zovemo* r*-ti centralni moment od* X.

- *Ako postoji* $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$, *onda taj nenegativan broj zovemo varijanca slučajne varijable* X *i označavamo* $VarX, \sigma_X^2$ *ili* σ^2.

2 Funkcije izvodnice momenata

2.1 Definicija

U ovom odjeljku X je diskretna slučajna varijabla ili apsolutno neprekidna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Funkcija izvodnica momenata koristi se za računanje momenata slučajne varijable oko nule.

Definicija 13. *Pretpostavimo da postoji* $0 < \delta < 1$ *takav da je* $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ *za sve* $|t| < \delta$. *Funkcija* $M_X \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{tX} f(x) & X diskretna \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x) dx & X neprekidna \end{cases}$$

zove se funkcija izvodnica momenata od X.

Odmah se vidi da je $M_X(0) = 1$.

Propozicija 1 ([4], str. 19.)**.** *Svojstva funkcije izvodnice momenata* M_X :

(i) $M_X(0) = 1$

(ii) $e^{tX} > 0$ *pa je* $0 < \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \infty$

(iii) $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)] = M_X^{(k)}(0)$

(iv) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ *za* $|t| < \delta$ *onda*

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X \geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X < 0\}})$$

. *Dakle,* $\mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X \geq 0\}}) < \infty$ *i* $\mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X < 0\}}) < \infty$ *za* $|t| < \delta$

(v) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ *za* $|t| < \delta$*, onda*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{t|X|} 1_{\{X \geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{t|X|} 1_{\{X < 0\}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X \geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX} 1_{\{X < 0\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX}) \end{aligned}$$

Dakle $\mathbb{E}(e^{t|X|}) < \infty$ za $|t| < \delta$. Nadalje, kako je

$$e^{t|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t|X|)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n |X|^n}{n!}, t \in \mathbb{R},$$

zaključujemo da je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ i $|\mathbb{E}(X^n)| < \infty$ za sve $n \geq 0$. Također zbog $e^{tX} \leq e^{|t||X|}$ i

$$\mathbb{E}(e^{|t||X|}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n |X|^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \mathbb{E}(|X|^n)}{n!} < \infty, |t| < \delta,$$

imamo

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathbb{E}(X^n)}{n!} < \infty, |t| < \delta.$$

Deriviranjem gornje relacije dobivamo

$$M'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\mathbb{E}(X^n)}{(n-1)!}, |t| < \delta,$$

i matematičkom indukcijom za $k \geq 1$,

$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}\mathbb{E}(X^n)}{(n-k)!}, |t| < \delta.$$

Dakle $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ što objašnjava ime *funkcija izvodnica momenata.*
Neka je X slučajna varijabla i neka je funkcija $M_X(t)$ definirana na okolini nule. Razvijmo funkciju $t \to e^{tX}$ u Taylorov red oko nule:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^k) \cdot \frac{t^k}{k!}.$$

Uočimo da vrijednost k-te derivacije funkcije $M_X(t)$ u nuli upravo k-ti moment slučajne varijable X, tj.

$$M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k).$$

Specijalno:

$$\mathbb{E}(X) = M'_X(0), \tag{1}$$

$$VarX = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = M''_X(0) - (M'_X(0))^2 \tag{2}$$

Ako znamo zakon razdiobe od X, onda možemo izračunati sve njene momente koje postoje. Obratno, ako postoje svi momenti od X (i poznati su), te ako su zadovoljeni još neki dodatni uvjeti na njih, tada taj niz momenata jednoznačno određuje razdiobu od X. Nadalje, dvije različite razdiobe ne mogu imati istu funkciju izvodnicu momenata. Dakle, svaka se funkcija izvodnica momenata može prepoznati kao funkcija izvodnica momenata neke točno određene razdiobe.

Napomena 2 ([5, Napomena 1]). *Uočimo da funkciju izvodnicu momenata za brojeće slučajne varijable(diskretne slučajne varijable sa vrijednostima u skupu $\mathbb{N}_0$) možemo dobiti kao kompoziciju funkcije izvodnice vjerojatnosti $g_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ i funkcije $h(t) = e^t$, $h\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$:*

$$(g_X \circ h)(t) = g_X[h(t)] = g_X(e^t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = M_X(t).$$

Funkcija izvodnica momenata brojeće slučajne varijable X može se jednostavno odrediti pomoću njene funkcije izvodnice vjerojatnosti jer vrijedi (ako obje strane postoje za dani t):

$$M_X(t) = g_X(e^t).$$

2.2 Problem momenata

Koristeći funkcije izvodnice momenata možemo prikazati, barem za diskretne slučajne varijable s konačnom slikom, da njena funkcija distribucija u potpunosti ovisi o njenim momentima.

Teorem 1 ([2, Teorem 10.1]). *Neka je X diskretna slučajna varijabla s konačnom slikom $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, funkcijom gustoće p i funkcijom izvodnicom momenata M. Tada je M jedinstveno određena s p i obrnuto.*

Dokaz:
Znamo da p određuje M jer je

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{tx_j} p(x_j). \tag{3}$$

Obratno, pretpostavimo da je $M_X(t)$ poznata. Želimo odrediti vrijednosti od x_j i $p(x_j)$ za $1 \leq j \leq n$.Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $p(x_j) > 0$ za $1 \leq j \leq n$ i da vrijedi

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Znamo da je $M_X(t)$ diferencijabilna za svaki t s obzirom da je ona konačna linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija. Ako izračunamo $M'_X(t)/M_X(t)$, onda vrijedi

$$\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} = \frac{x_1 p(x_1) e^{tx_1} + \cdots + x_n p(x_n) e^{tx_n}}{p(x_1) e^{tx_1} + \cdots + p(x_n) e^{tx_n}}.$$

Ako podijelimo i brojnik i nazivnik s e^{tx_n} dobivamo izraz

$$\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} = \frac{x_1 p(x_1) e^{t(x_1 - x_n)} + \cdots + x_n p(x_n)}{p(x_1) e^{t(x_1 - x_n)} + \cdots + p(x_n)}. \tag{4}$$

S obzirom da je x_n najveći od svih x_j, za $1 \leq j \leq n$, onda izraz (4) konvergira prema x_n kada t ide u ∞. Dakle, pokazali smo

$$x_n = \lim_{t \to \infty} \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}.$$

Nadalje, da pronađemo $p(x_n)$, samo trebamo $M_X(t)$ podijeliti s e^{tx_n} i pustiti t u ∞ . Kada smo odredili x_n i $p(x_n)$, možemo oduzeti $p(x_n)e^{tx_n}$ od $M_X(t)$ i ponavljati gore navedeni postupak rezultirajućom funkcijom te zauzvrat dobiti $x_{n-1}, \ldots, x_1$ i $p(x_{n-1}), \ldots, p(x_1)$. $\square$

Ako zanemarimo pretpostavku da X ima konačnu sliku u Teoremu 1 onda zaključak nije nužno isti.
Problem momenata se svodi na pitanje je li distribucija slučajne varijable jedinstveno određena nizom svojih momenata od kojih bi svi trebali postojati, odnosno trebaju biti konačni. Generalno, momenti proizvoljne distribucije ne moraju jedinstveno određivati pripadnu distribuciju.

2.3 Važni rezultati

Teorem 2 ([4, Teorem 7.14.]). *Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable (ili nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable) s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y, koje su definirane za $|t| < \delta$. Definirajmo $Z := X+Y$. Tada postoji pripadna funkcija izvodnica momenata M_Z, dobro je definirana za $|t| < \delta$ i vrijedi $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ za $|t| < \delta$.*

Dokaz:
Dokaz provodimo za diskretne slučajne varijable X i Y . Iz nezavisnosti od X i Y slijedi nezavisnost od e^{tX} i e^{tY} za sve $t \in \mathbb{R}$. Nadalje neka je f funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) te neka su f_X i f_Y redom funkcije gustoće od Xi Y. Sada za $|t| < \delta$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{tZ}) = \mathbb{E}(e^{tX+tY}) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{tx+ty} f(x,y) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{tx+ty} f_X(x) f_Y(y) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) \sum_{y\in\mathbb{R}} e^{ty} f_y(y) = M_X(t)M_Y(t).\end{aligned}$$

□

Napomenimo da obrat gore navedenog teorema ne vrijedi, tj. iz jednakosti $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t), |t| < \delta$, ne slijedi da su X i Y nezavisne.

Sljedeća dva teorema su primjeri rezultata koji imaju fundamentalno značenje u teoriji vjerojatnosti. Prvi teorem kaže da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju. Drugi teorem daje karakterizaciju konvergencije po distribuciji pomoću konvergencije niza funkcija izvodnica. Dokazi ovih teorema izlaze iz okvira ovog rada.

Teorem 3 (Teorem jedinstvenosti, [4, Teorem 7.15.]). *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom momenata M_X koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada je distribucija od X jedinstveno određena s M_X. Preciznije , ako su X i Y slučajne varijable s funkcijama izvodnicama momenata M_X i M_Y , koje su definirane za $|t| < \delta$, takvima da $M_X(t) = M_Y(t)$ za sve $|t| < \delta$, onda su X i Y jednako distribuirane.*

Primjer 1. *Neka su $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$*
Rješenje:
Po Primjeru 3 i Teoremu 2 imamo

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \left(e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\right)\left(e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\right) = e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$$

što zajedno s Teoremom 3 dokazuje tvrdnju.

Teorem 4 ([4, Teorem 7.17.]). *Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcijama izvodnicama momenata $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koje su definirane za $|t| < \delta$.*

Nadalje, neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F i funkcijom izvodnicom momenata M, koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada, ako $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji prema X, tj. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, za sve x u kojima je funkcija F neprekidna, onda $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ za sve $|t| < \delta$.

3 Funkcije izvodnice momenata poznatih distribucija

U ovom poglavlju ćemo se baviti proučavanjem funkcija izvodnica momenata nekih poznatih parametarski zadanih distribucija kao što su binomna distribucija, geometrijska distribucija i neke druge.

3.1 Gama distribucija

Definicija 14. *Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima Gama distribuciju s parametrima $\alpha, \lambda > 0$ ako je njezina funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Ako slučajna varijabla X ima Gama distribuciju s parametrima α i λ, koristimo oznaku $\Gamma \sim (\alpha, \lambda)$

Primjer 2. *Za $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$,pripadna funkcija izvodnica momenata je:*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tX} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - t)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda - t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda - t)x} dx \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \text{ za } t < \lambda. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \alpha\lambda^\alpha(\lambda - t)^{-(\alpha+1)} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = M_X'(0) = \frac{\alpha}{\lambda} \\ M_X''(t) &= \alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha(\lambda - t)^{-(\alpha+2)} \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = M_X''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \\ VarX &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

3.2 Normalna distribucija

Definicija 15. *Za neprekidnu slučajnu varijablu kažemo da ima Gaussovu ili normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je njezina funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R},$$

gdje su μ i σ realni brojevi i $\sigma > 0$. Ako slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2, koristimo oznaku $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Primjer 3. *Odredimo funkciju izvodnicu momenata za $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Za $t \in \mathbb{R}$ imamo*

$$
\begin{aligned}
M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma x+\mu)} e^{-\frac{x^2}{x}dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t\sigma)^2}{2}} dx \\
&= e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Odredimo sada $\mathbb{E}(X)$ i Var(X).Imamo $\mathbb{E}(X) = M'_X(0)$, $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M''_X(0) - M'_X(0)^2$ i

$$
\begin{aligned}
M'_X(t) &= (\sigma^2 t + \mu) e^{t^2\sigma^2/2 + t\mu} \\
M''_X(t) &= (\sigma^2 t + \mu)^2 e^{t^2\sigma^2/2 + t\mu} + \sigma^2 e^{t^2\sigma^2/2 + t\mu} \\
M'_X(0) &= \mu \\
M''_X(0) &= \mu^2 + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = \mu$ i $Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$, iz čega se ponovno vidi značenje parametara μ i σ. Specijalno je za standardiziranu slučajnu varijablu $Z = (X - \mu)/\sigma$, $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$. Razvojem te funkcije u Taylorov red oko $t = 0$

$$
M_Z(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \cdots,
$$

Zaključujemo da je

$$
\mathbb{E}(Z^{2k+1}) = 0, \mathbb{E}(Z^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \text{ za } k = 0, 1, 2, \ldots
$$

Specijalno je

$$
\mathbb{E}(Z) = 0, \mathbb{E}(Z^2) = 1, \mathbb{E}(Z^3) = 0, \mathbb{E}(Z^4) = 3.
$$

Odavde slijedi da su prva tri momenta od X :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mu + \sigma Z) = \mu, \\
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}((\mu + \sigma Z)^2) = \mu^2 + \sigma^2, \\
\mathbb{E}(X^3) &= \mathbb{E}((\mu + \sigma Z)^3) = \mu^3 + 3\sigma^2\mu,
\end{aligned}
$$

a treći i četvrti centralni momenti :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((X - \mu)^3) &= \mathbb{E}((\sigma Z)^3) = 0, \\
\mathbb{E}((X - \mu)^4) &= \mathbb{E}((\sigma Z)^4) = 3\sigma^4.
\end{aligned}
$$

3.3 Bernoullijeva distribucija

Definicija 16. *Neka je X slučajna varijabla koja poprima točno 2 vrijednosti ,odnosno $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Njena pripadna tablica distribucije je*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, p \in \langle 0, 1 \rangle .$$

Za takvu slučajnu varijablu kažemo da ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom p, pri čemu parametar p predstavlja vjerojatnost da X poprimi vrijednost 1.

Vrijednost p predstavlja vjerojatnost uspjeha, a $1-p$ vjerojatnost neuspjeha.
Sada ćemo izvesti funkciju izvodnicu momenata za Bernoullijevu distribuciju.

Primjer 4. *Odredimo funkciju izvodnicu vjerojatnosti momenata Bernoullijeve distribucije slučajne varijable s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$.*
Koristeći formulu iz (3) vrlo lako možemo izvesti funkciju izvodnicu momenata za Bernoullijevu distribuciju. Vrijedi:

$$M_X(t) = P(X = 0)e^0 + P(X = 1)e^t = (1 - p) + pe^t = 1 - p(1 - e^t).$$

Pomoću funkcije izvodnice momenata Bernoullijeve distribucije izračunajmo očekivanje i varijancu. Naime, po (1) i (2), za računanje očekivanja i varijance nama treba prva i druga derivacija funkcije izvodnice momenata. Deriviranjem jednom dobivamo

$$M'_X(t) = pe^t,$$

a deriviranjem gore navedene relacije dobivamo

$$M''_X(t) = pe^t.$$

Nakon što smo izračunali prvu i drugu derivaciju funkcije izvodnice momenata, izračunajmo sada pripadno očekivanje i varijancu. Vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X) = M'_X(0) = pe^0 = p \\ &VarX = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M''_X(0) - M'_X(0)^2 = pe^0 - (pe^0)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned}$$

Prisjetimo li se očekivanja i varijance Bernoullijeve distribucije, vidimo da smo dobili upravo istu stvar,tj. pomoću funkcije izvodnice momenata izračunali smo dvije osnovne karakteristike Bernoullijeve distribucije.

3.4 Binomna distribucija

Binomna distribucija vezana je uz nezavisno ponavljanje uvijek istog pokusa. Ako nas pri svakom izvođenju pokusa zanima samo je li se dogodio neki događaj ili ne(uspjeh ili neuspjeh), onda svako izvođenje pokusa možemo modelirati istom Bernoullijevom distribucijom

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, p \in \langle 0, 1 \rangle ,$$

gdje p predstavlja vjerojatnost uspjeha.
Pretpostavimo da pokus ponavljamo nezavisno n puta i pri tome nas zanima broj uspjeha. Za slučajnu varijablu X koja opisuje broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa modeliranog Bernoullijevom slučajnom varijablom Y kažemo da ima binomnu distribuciju s parametrima n i p.

Definicija 17. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1\rangle$. Za slučajnu varijablu koja prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i}$$

kažemo da ima binomnu distribuciju s parametrima n i p i pišemo: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Vrijednost p predstavlja vjerojatnost uspjeha u jednom izvođenju pokusa, a n broj nezavisnih ponavljanja pokusa.
Sada ćemo izračunati funkciju izvodnicu momenata binomne distribucije te ćemo izračunati osnovne numeričke karakteristike.

Primjer 5. *Odredimo funkciju izvodnicu momenata binomne distribucije s paramterima $p \in \langle 0, 1\rangle$ i $n \in \mathbb{N}$.*
Znamo da vrijedi

$$P\{X = i\} = \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Koristeći formulu (3) dobivamo

$$\begin{aligned}
g_X(t) &= P(X=0)e^0 + P(X=1)e^t + P(X=2)e^{2t} + \cdots + P(X=n)e^{nt} \\
g_X(t) &= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} e^0 + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} e^t + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} e^{2t} + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} e^{nt} \\
g_X(t) &= \binom{n}{0} (pe^t)^0 (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} (pe^t)^1 (1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} (pe^t)^2 (1-p)^{n-2} + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n} (pe^t)^n (1-p)^{n-n}.
\end{aligned}$$

Sada možemo prepoznati da je ovo prema binomnoj distrubiciji jednako

$$g_X(t) = (1 - p + pe^t)^n = (1 - p(1 + e^t))^n.$$

Sada ćemo izračunati očekivanje i varijancu za pripadnu distribuciju.

Primjer 6. *Koristeći funkciju izvodnicu momenata binomne distribucije izračunajmo očekivanje i varijancu.*
Izračunajmo prvu i drugu derivacije funkcije izvodnice momenata. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= n(1 - p + pe^t)^{n-1} pe^t \\
M_X''(t) &= npe^t (1 - p + pe^t)^{n-1} + npe^t (n-1)(1 - p + pe^t)^{n-2} pe^t
\end{aligned}$$

Izračunajmo sada pripadno očekivanje i varijancu koristeći (1) i (2). Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= M'_X(0)\\ &= n(1-p+pe^0)^{n-1}p\\ &= np(1-p+p)^{n-1}\\ &= np(1)^{n-1}\\ &= np,\end{aligned}$$

što je upravo očekivanje binomne distribucije.
Također vrijedi:

$$\begin{aligned}VarX = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M''_X(0) - M_X(0)^2&\\ = npe^0(1-p+pe^0)^{n-1} + np^2e^{2\cdot 0}(n-1)(1-p+pe^0)^{n-2} - (npe^0(1-p+pe^9)^{n-1})^2&\\ = np + np^2(n-1) - (np)^2&\\ = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2&\\ = np - np^2&\\ = np(1-p),&\end{aligned}$$

što je upravo varijanca binomne distribucije.

Dakle, pomoću funkcije izvodnice momenata binomne distribucije izračunali smo osnovne numeričke karakteristike te distribucije.
Pogledajmo sada na primjeru što bi dobili kada bismo gledali funkciju izvodnicu zbroja n nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom p.

Primjer 7. *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$. Pronađimo funkciju izvodnicu momenata sume $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.*
Prema Teoremu 2 vrijedi:

$$\begin{aligned}M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t)\\ &= (1-p+pe^t)(1-p+pe^t)\cdots(1-p+pe^t)\\ &= (1-p+pe^t)^n.\end{aligned}$$

Možemo primjetiti da smo dobili upravo funkciju izvodnicu momenata binomne distribucije. Dakle, zbroj n nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli nam daje binomnu slučajnu varijablu s parametrima n i p.

3.5 Poissonova distribucija

Poissonova distribucija, slično kao i binomna, može se primjeniti kao distribucija slučajne varijable koja broji uspjehe, ali ne pri nezavisnom ponavljanju pokusa konačno mnogo puta, nego u jediničnom vremenskom intervalu ili intervalu volumena, mase, itd. ako pokus zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu dogoditi,

(ii) broj uspjeha u intervalu neovisan je o broju uspjeha u nekom drugom intervalu,

(iii) očekivani broj uspjeha isti je za sve jedinične intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ.

Definicija 18. *Slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \dots\}$ s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Tada pišemo $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Sada ćemo izračunati funkciju izvodnicu momenata Poissonove distribucije.

Primjer 8. *Odredimo funkciju izvodnicu momenata Poissonove slučajne varijable s parametrom $\lambda > 0$. Znamo da vrijedi*

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Korištenjem formule (3) dobivamo:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= P(X = 0)e^0 + P(X = 1)e^t + P(X = 2)e^{2t} + \dots + P(X = n)e^{nt} + \cdots \\
&= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}e^0 + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}e^t + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}e^{2t} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}e^{nt} + \cdots \\
&= \left(\frac{(\lambda e^t)^0}{0!} + \frac{(\lambda e^t)^1}{1!} + \dots + \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} + \cdots\right)e^{-\lambda} \\
&= e^{\lambda e^t}e^{-\lambda} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}.
\end{aligned}$$

Napomena 3. *Primjetimo da je u četvrtoj jednakosti eksponencijalna funkcija razvijena u Taylorov red.*

Izračunajmo sada osnovne numeričke karakteristike pomoću funkcije izvodnice momenata Poissonove distribucije.

Primjer 9. *Izračunajmo očekivanje i varijancu pomoću funkcije izvodnice momenata Poissonove distribucije.*
Računamo prvu i drugu derivaciju funkcije izvodnice momenata Poissonove distribucije. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t \\
M_X''(t) &= \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)}
\end{aligned}$$

Izračunajmo sada očekivanje koristeći (1). Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= M_X'(0)\\ &= e^{\lambda(e^0-1)}\lambda e^0\\ &= e^{\lambda(1-1)}\lambda e^0\\ &= e^0\lambda e^0\\ &= \lambda\end{aligned}$$

te možemo primjetiti da smo upravo dobili očekivanje Poissonove distribucije.
Sada računamo varijancu koristeći (2) i vrijedi

$$\begin{aligned}VarX &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\\ &= M_X''(0) - M_X'(0)^2\\ &= \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} + \lambda^2 e^{2*0} e^{\lambda(e^0-1)} - (e^{\lambda(e^0-1)}\lambda e^0)^2\\ &= \lambda e^{\lambda(1-1)} + \lambda^2 e^0 e^{\lambda(1-1)} - (e^{\lambda(1-1)}\lambda e^0)^2\\ &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2\\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Također možemo primjetiti da naš rezultat odgovara upravo varijanci Poissonove distribucije.
U idućem primjeru ćemo vidjeti kako bi izgledala distribucija zbroja dvije nezavisne Poissonove slučajne varijable.

Primjer 10. *Neka su X_1 i X_2 dvije nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima $\lambda, \mu > 0$. Izračunajte distribuciju zbroja slučajnih varijabli X_1 i X_2.*
Rješenje:
Funkcija izvodnica momenata za X_1 je oblika $M_{X_1}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ te funkcija izvodnica momenata za X_2 je oblika $M_{X_2}(t) = e^{\mu(e^t-1)}$.
Prema Teoremu 2 vrijedi:

$$\begin{aligned}M_{X_1+X_2}(t) &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\\ &= e^{\lambda(e^t-1)}e^{\mu(e^t-1)}\\ &= e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}.\end{aligned}$$

Dakle, možemo zaključiti da je zbroj Poissonovih nezavisnih slučajnih varijabli opet Poissonova slučajna varijabla s parametrima jednakim zbroju parametara slučajnih varijabli X_1i X_2. U idućem primjeru ćemo iskoristiti funkciju izvodnicu momenata kako bi izračunali vjerojatnost nekog događaja.

Primjer 11. *Pretpostavimo da broj nogometnih igrača koji pređu centar nogometnog terena u minuti u nogometnoj utakmici možemo modelirati Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda = 5$. Izračunajmo vjerojatnost da će u bilo kojoj minuti proći preko centra:*

a) točno jedan igrač

b) barem 2 igrača.

Broj igrača koji pređu centar u minuti ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda = 5$. *Koristeći formulu (3) raspisat ćemo funkciju izvodnicu momenata za naš slučaj. Dakle, imamo*

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\
&= P(X=0)e^0 + P(X=1)e^t + P(X=2)e^{2t} + \cdots + P(X=n)e^{nt} + \cdots \\
&= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}e^{t^0} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}e^{t^1} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}e^{t^2} + \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}e^{t^3} + \cdots \\
&= \frac{5^0}{0!}e^{-5}e^{t^0} + \frac{5^1}{1!}e^{-5}e^{t^1} + \frac{5^2}{2!}e^{-5}e^{t^2} + \frac{5^3}{3!}e^{-5}e^{t^3}.
\end{aligned}$$

a)
Zanima nas kolika je vjerojatnost da u minuti točno jedan igrač pređe centar. Gledamo što nam stoji uz e^{t^1} *u ovom razvoju. Vjerojatnost da u minuti točno jedan igrač pređe centar jednaka je* $\frac{5^1}{1!}e^{-5} = 0.03369$.
b)
Zanima nas kolika je vjerojatnost da u minuti barem 2 igrača pređu centar. Tu ćemo koristiti jedno od svojstava vjerojatnosti(vjerojatnost suprotnog događaja) jer nam je lakše izračunati vjerojatnost da u minuti kroz centar prođu manje od 2 igrača. Vrijedi

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - \left(\frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} \right) \\
&= 1 - (0.000673 + 0.03368) \\
&= 0.9656.
\end{aligned}$$

3.6 Geometrijska distribucija

Geometrijska distribucija je također vezana uz nezavisno ponavljanje istog pokusa s ishodima "uspjeh" i "neuspjeh". Međutim, ona se koristi za opisivanje broja ponavljanja do prvog uspjeha. Dakle, geometrijskom distribucijom opisana je slučajna varijabla koja daje broj potrebnih pokusa do realizacije nekog događaja.

Definicija 19. *Slučajna varijabla* X *ima geometrijsku distribuciju s parametrom* $p \in \langle 0, 1\rangle$ *ukoliko prima vrijednosti iz skupa* $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_k = P(X = k) = p(1-p)^k.$$

Na idućem primjeru ćemo pokazati kako izgleda funkcija izvodnica momenata geometrijske distribucije.

Primjer 12. *Znamo da vrijedi*

$$p_k = P(X = k) = p(1-p)^k.$$

Koristeći formulu (3) dobivamo

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= P(X=0)e^0 + P(X=1)e^t + P(X=2)e^{2t} + \cdots + P(X=n)e^{nt} + \cdots \\
&= p(1-p)e^0 + p(1-p)e^t + p(1-p)e^{2t} + \cdots + p(1-p)e^{nt} + \cdots \\
&= p(((1-p)e^t)^0 + ((1-p)e^t)^1 + ((1-p)e^t)^2 + \cdots + ((1-p)e^t)^n + \cdots) \\
&= \frac{p}{1-e^t(1-p)}.
\end{aligned}$$

Sada ćemo izračunati očekivanje i varijancu.

Primjer 13. *Pomoću funkcije izvodnice momenata geometrijske distribucije izračunajmo očekivanje i varijancu.*
Kao i kod prethodnih primjera, što se tiče računanja očekivanja i varijance, prvo tražimo prvu i drugu derivaciju funkcije izvodnice momenata. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{-p(-e^t(1-p))}{(1-e^t(1-p))^2} \\
&= \frac{pe^t(1-p)}{(1-e^t(1-p))^2} \\
M_X''(t) &= \frac{pe^t(1-p)((1-e^t(1-p))^2) - pe^t(1-p)\cdot 2(1-e^t(1-p))\cdot(-e^t(1-p))}{(1-e^t(1-p))^4} \\
&= \frac{pe^t(1-p)((1-e^t(1-p))^2) + 2pe^{2t}(1-p)(1-e^t(1-p))(1-p)}{(1-e^t(1-p))^4}.
\end{aligned}$$

Sada iskoristimo (1) i (2) kako bi došli do očekivanja i varijance. Dobivamo sljedeće,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= M_X'(0) \\
&= \frac{pe^0(1-p)}{(1-e^0(1-p))^2} \\
&= \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} \\
&= \frac{p(1-p)}{(1-1+p)^2} \\
&= \frac{p(1-p)}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p},
\end{aligned}$$

čime smo upravo dobili očekivanje geometrijske distribucije.
Sada još izračunajmo varijancu. Vrijedi

$$\begin{aligned}
VarX &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= M_X''(0) - M_X'(0)^2 \\
&= \frac{pe^0(1-p)((1-e^0(1-p))^2) + 2pe^0(1-p)(1-e^0(1-p))(1-p)}{(1-e^0(1-p))^4} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\
&= \frac{p(1-p)(1-1+p)^2 + 2p(1-p)^2(1-1+p)^2}{(1-1+p)^4} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{p^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2}{p^4} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{p^2(p(1-p) + 2(1-p)^2)}{p^4} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)(p+2(1-p))}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)(2-p) - (1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)(2-p-(1-p)}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)(2-p-1+p)}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

Možemo primjetiti da smo dobili upravo varijancu geometrijske distribucije.

Pomoću funkcije izvodnice momenata geometrijske distribucije smo izračunali osnovne numeričke karakteristike.

3.7 Negativna binomna distribucija

Negativna binomna distribucija je poopćenje geometrijske distribucije. Negativna binomna slučajna varijabla X je slučajna varijabla koja modelira vrijeme do n-tog uspjeha, pri čemu vjerojatnost uspjeha iznosi p. Negativnu binomnu distribuciju još ponekad zovemo i Pascalova distribucija.Pretpostavimo da se $n-$ti uspjeh dogodio u $k-$tom ponavljanju. Vjerojatnost tog događaja iznosi

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

za $k \geq n, n \in \mathbb{N}$ te $p \in \langle 0,1 \rangle$.

Kroz idući primjer ćemo pokazati kako bi izgledala funkcija izvodnica momenata negativne binomne distribucije.

Primjer 14. *Odredimo funkciju izvodnicu negativne binomne distribucije s paramterima n i $p, p \in \langle 0,1 \rangle$.*

Znamo da vrijedi

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

te koristeći (3) dobivamo

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} e^t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k e^{tk+n} \\
&= p^n e^{t^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} (1-p)^k e^{t^k} \\
&= p^n e^{t^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (-1)^k (1-p)^k (-e^t)^k \\
&= p^n e^{t^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (1-p)^k (-e^t)^k \\
&= p^n e^{t^n} (1-(1-p)e^t)^{-n} \\
&= \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^n,
\end{aligned}$$

pri čemu je u četvrtoj jednakosti korišten identitet

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

a u petoj jednakosti

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Izračunajmo sada očekivanje i varijancu u idućem primjeru.

Primjer 15. *Izračunajmo očekivanje i varijancu funkcije izvodnice momenata negativne binomne distribucije.*
Znamo da funkcija izvodnica momenata negativne binomne distribucije izgleda ovako

$$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^n$$

Izračunajmo sada prvu i drugu derivaciju. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= n \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^{n-1} \left(\frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2} \right) \\
M_X''(t) &= n(n-1) \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^{n-2} \left(\frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2} \right)^2 + \\
&\quad + n \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^{n-1} \left(\frac{pe^t(1-(1-p)e^t)^2 + 2pe^t(1-(1-p)e^t)(e^t(1-p))}{(1-(1-p)e^t)^4} \right).
\end{aligned}$$

Sada ćemo izračunati $M'_X(0)$ *i* $M''_X(0)$. *Vrijedi*

$$
\begin{aligned}
M'_X(0) &= n\left(\frac{p}{p}\right)^{n-1}\left(\frac{p}{p^2}\right)\\
&= \frac{n}{p}\\
M''_X(0) &= n(n-1)\left(\frac{p}{p}\right)^{n-2}\left(\frac{p}{p^2}\right)^2 + n\left(\frac{p}{p}\right)^{n-1}\left(\frac{p\cdot p^2 + 2p\cdot p(1-p)}{p^4}\right)\\
&= n(n-1)\frac{1}{p^2} + n\left(\frac{p^2(p+2(1-p))}{p^4}\right)\\
&= \frac{n(n-1)}{p^2} + n\left(\frac{2-p}{p^2}\right)\\
&= \frac{n^2 - n + 2n - np}{p^2}\\
&= \frac{n^2 + n - np}{p^2}.
\end{aligned}
$$

Koristeći (1) i (2) vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= M'_X(0)\\
&= \frac{n}{p}\\
VarX &= M''_X(0) - M'_X(0)^2\\
&= \frac{n^2 + n - np}{p^2} - \left(\frac{n}{p}\right)^2\\
&= \frac{n^2 + n - np - n^2}{p^2}\\
&= \frac{n(1-p)}{p^2}.
\end{aligned}
$$

Dakle, pomoću funkcije izvodnice momenata negativne binomne distribucije izračunali smo očekivanje i varijancu negativne binomne distribucije.
Na idućem primjeru ćemo pokazati računanje bilo kojeg momenta.

Primjer 16. *Izračunajte treći i četvrti moment:*

a) binomne distribucije

b) Poissonove distribucije

Rješenje:
Znamo da vrijedi $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X_k+1)] = M_X^{(k)}(0)$ *(Propozicija 1, svojstvo (iii)), te također znamo da vrijedi* $M'_X(0) = \mathbb{E}X$. *Sada ćemo izračunati ostale momente*

$$
\begin{aligned}
M_X^{(2)}(0) &= \mathbb{E}[X(X-1)]\\
M_X^{(2)}(0) &= \mathbb{E}[X^2 - X]\\
M_X^{(2)}(0) &= \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X.
\end{aligned}
$$

Sada $\mathbb{E}X^2$ *ostavimo na jednoj strani,a ostalo prebacimo na drugu stranu jednakosti kako bi pronašli drugi moment. Vrijedi*

$$\mathbb{E}X^2 = M_X^{(2)}(0) + \mathbb{E}X = M_X^{(2)}(0) + M_X^{(1)}(0).$$

Pronađimo sada treći moment. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M_X^{(3)}(0) &= \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] \\
M_X^{(3)}(0) &= \mathbb{E}[X^3 - 3X^2 + 2X] \\
M_X^{(3)}(0) &= \mathbb{E}X^3 - 3\mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}X.
\end{aligned}$$

Ponavljamo isti postupak kao kod pronalaženja drugog momenta, $\mathbb{E}X^3$ *ostaje na jednoj strani jednakosti, a ostale vrijednosti idu na drugu stranu jednakosti te dobivamo*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^3 &= M_X^{(3)}(0) + 3\mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X \\
&= M_X^{(3)}(0) + 3(M_X^{(2)}(0) + M_X^{(1)}(0)) - 2M_X^{(1)}(0) \\
&= M_X^{(3)}(0) + 3M_X^{(2)}(0) + M_X^{(1)}(0).
\end{aligned}$$

Još trebamo pronaći četvrti moment. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M_X^{(4)}(0) &= \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)(X-3)] \\
M_X^{(4)}(0) &= \mathbb{E}[(X^3 - 3X^2 + 2X)(X-3)] \\
M_X^{(4)}(0) &= \mathbb{E}[X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X] \\
M_X^{(4)}(0) &= \mathbb{E}X^4 - 6\mathbb{E}X^3 + 11\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X.
\end{aligned}$$

Sada je četvrti moment oblika

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^4 &= M_X^{(4)}(0) + 6\mathbb{E}X^3 - 11\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}X \\
&= M_X^{(4)}(0) + 6(M_X^{(3)}(0) + 3M_X^{(2)}(0) + M_X^{(1)}(0)) - 11(M_X^{(2)}(0) + M_X^{(1)}(0)) + \mathbb{E}X \\
&= M_X^{(4)}(0) + 6M_X^{(3)}(0) + 7M_X^{(2)}(0) + M_X^{(1)}(0).
\end{aligned}$$

a)

Trebamo izračunati treći i četvrti moment binomne distribucije s parametrima n *i* p*. Funkcija izvodnica momenata binomne distribucije je oblika* $M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$ *te trebamo izračunati prve četiri derivacije funkcije izvodnice momenata kako bi dobili treći i četvrti moment.Dakle, vrijedi*

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= n(1-p+pe^t)^{n-1}pe^t \\
M_X''(t) &= n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}p^2e^{2t} + pe^t n(1-p+pe^t)^{n-1} \\
M_X'''(t) &= n(n-1)(n-2)(1-p+pe^t)^{n-3}p^3e^{3t} + 2p^2e^{2t}n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2} + M_X''(t) \\
M_X^{(4)}(t) &= n(n-1)(n-2)(n-3)(1-p+pe^t)^{n-4}p^4e^{4t} + \\
&\quad 3p^3e^{3t}n(n-1)(n-2)(1-p+pe^t)^{n-3} + 2n(n-1)(n-2)(1-p+pe^t)^{n-3}p^2e^{2t} + \\
&\quad 4p^2e^{2t}n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2} + M_X'''(t).
\end{aligned}$$

Umjesto t uvrštavamo 0 te za treći i četvrti moment binomne slučajne varijable s parametrima n i p dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^3 &= p^3n(n-1)(n-2) + 6p^2n(n-1) + 5np \\
\mathbb{E}X^4 &= p^4n(n-1)(n-2)(n-3) + 17p^3n(n-1)(n-2)+ \\
&\quad 2p^2n(n-1)(n-2) + 46p^2n(n-1) + 15np.
\end{aligned}$$

b)
Trebamo izračunati treći četvrti moment Poissonova slučajne varijable s parametrom λ. Funkcija izvodnica momenata Poissonove slučajne varijable je $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Ponovno moramo izračunati prve četiri derivacije ove funkcije izvodnice. Vrijedi

$$\begin{aligned}
M'_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t \\
M''_X(t) &= M'_X(t) + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)} \\
M'''_X(t) &= M''_X(t) + 2\lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^3 e^{3t} e^{\lambda(e^t-1)} \\
M_X^{(4)} &= M'''_X(t) + 4\lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)} + 5\lambda^3 e^{3t} e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^4 e^{4t} e^{\lambda(e^t-1)}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem 0 umjesto t dobit ćemo rezultate koji su nam potrebni za pronalazak trećeg i četvrtog momenta. Treći i četvrti moment Poissonove slučajne varijable s parametrom λ je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^3 &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda \\
\mathbb{E}X^4 &= \lambda^4 + 12\lambda^3 + 32\lambda^2 + 15\lambda.
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da nam za računanje $k-$tog momenta neke slučajne varijable treba funkcija izvodnica momenata te slučajne varijable i njene derivacije.

Literatura

[1] M. Benšić,N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[2] C. M. Grinestad,J. Laurie Snell, *Introduction to probability*, United states of America, 2006.

[3] M. Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2006.

[4] S. Lubura Strunjak,Z. Vondraček, *Funkcije izvodnice*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2021.

[5] Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera (NASTAVNI MATERIJALI), $http://www.mathos.unios.hr/vjerojatnost/Materijali/materijali8.pdf$, Osijek, Odjel za matematiku (pristupljeno 15.9.2022.)