

# Metode poučavanja statistike u školi

---

**Pavlović, Gordana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:623828>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-12**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Gordana Pavlović

# Metode poučavanja statistike u školi

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Gordana Pavlović

# Metode poučavanja statistike u školi

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Uvod u statistiku</b>	<b>5</b>
2.1	Statistika u nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama . . . . .	5
2.2	Veza statistike i ostalih grana matematike . . . . .	5
2.3	Upoznavanje učenika s osnovnim principima statistike . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Statistička teorija</b>	<b>7</b>
3.1	Formuliranje pitanja . . . . .	7
3.2	Prikupljanje podataka . . . . .	8
3.3	Analiza podataka-klasifikacija . . . . .	9
3.4	Analiza podataka-grafička organizacija . . . . .	10
3.5	Analiza podataka-deskriptivna statistika . . . . .	23
3.6	Interpretacija rezultata . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Eksperimenti i simulacije</b>	<b>33</b>
4.1	Zašto je važno koristiti eksperimente pri poučavanju statistike? . . . . .	33
4.2	Simulacije . . . . .	33
4.3	Statistika uz pomoć tehnologije . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Predmetni kurikulum za matematiku</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Sažetak</b>	<b>38</b>
<b>8</b>	<b>Summary</b>	<b>39</b>
<b>9</b>	<b>Životopis</b>	<b>41</b>

# 1 Uvod

Statistika je grana matematike koja ima veliku primjenu u svakodnevnom životu. Na primjer, napredak učenika u školi, kolika je uobičajena količina snijega na Zavižanu ili koliko su porasli troškovi života u prošloj godini. . . . Okruženi smo raznim informacijama koje dolaze u različitim oblicima poput slika, grafova, pisanom obliku, brojevima i slično. Te informacije vidljivo utječu na naš život – što jedemo, što kupujemo, što mislimo o svijetu oko nas. Zbog toga je važno znati razumjeti takve informacije, znati ih interpretirati te zapisivati na isti način. Upravo to nam omogućuje statistika koja se poučava u osnovnim i srednjim školama. Naglasak pri učenju bi trebao biti na provođenju eksperimenata koji bi učenike navodili na valjane zaključke, a ne isključivo učenje definicija i pravila. Savladavanje osnovnih pojmova statistike daje učenicima dobru podlogu za uspješno razumijevanje apstraktnih zadataka koje će susresti u daljnjem obrazovanju.

## 2 Uvod u statistiku

### 2.1 Statistika u nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama

Učenici se s osnovnim pojmovima statistike prvi put susreću u osnovnoj školi. Nastavni plan i program predviđa učenje statistike u 7. razredu osnovne škole u nastavnoj cjelini "Statistika i vjerojatnost". Obrađuju se dvije jedinice vezane za statistiku, a to su: "Grafičko prikazivanje podataka" i "Analiza podataka". Ključni pojmovi s kojima se učenici upoznaju su: obilježje skupa objekata, frekvencija i relativna frekvencija, tablični prikaz, stupčasti dijagram i histogram. Od učenika se očekuje da zna prepoznati obilježja skupa objekata, odrediti vrijednost tog obilježja i prikazati prikupljene podatke pomoću tablice frekvencija i relativnih frekvencija te grafički prikazati pomoću stupčastog dijagrama i histograma. Trebaju znati izračunati aritmetičku sredinu odnosno srednju vrijednost danog skupa podataka, te interpretirati dobivene podatke.

### 2.2 Veza statistike i ostalih grana matematike

U svakodnevnom životu riječ statistika najčešće povezujemo s broječanim vrijednostima koje opisuju svijet oko nas. Statističke metode istraživanja prikladne su za sva proučavanja koja se temelje na velikom broju promatranja, mjerenja i eksperimentiranja. Gotovo da nema ljudske djelatnosti u kojoj se ne primjenjuje statistika. Kada je u pitanju nastava statistike, učenik bi trebao znati interpretirati dobivene rezultate i primijeniti ih u konkretnoj situaciji. Statistički principi primjenjuju se pri procjeni prosječne količine oborina tijekom ljeta, procjeni broja stanovnika, procjeni financijskih podataka.

Učenici se u osnovnoj i srednjoj školi bave osnovnim statističkim principima koje je moguće povezati i s ostalim matematičkim temama poput:

- **smisla broja** – učenici ih mogu koristiti za stvaranje grafičkih prikaza količine podataka na primjer "Koliko koje vrste voća ima?".
- **algebre** – koristi se za analizu i opisivanje odnosa između varijabli. Može se koristiti na primjer za određivanje visine i dobi učenika.
- **razlomaka, decimalnih brojeva i postotaka** – koriste se za opisivanje podataka.
- **mjerenja** – učenici mogu napraviti mjerenje odgovaranjem na pitanja i tako stvaraju podatke za daljnju analizu.

### 2.3 Upoznavanje učenika s osnovnim principima statistike

Učenicima mlađeg uzrasta za razumijevanje statističke teorije su potrebni neki osnovni pojmovi koje će koristiti prilikom crtanja dijagrama i isčitavanja podataka.

Statistički podaci često se pregledno prikazuju u tablicama.

Vrsta životinje	Broj životinja
Mačka	7
Pas	6
Zec	4
Papiga	2
Kornjača	2
Riba	2
Hrčak	1

TABLICA 1. Prikaz kućnih ljubimaca učenika.

Na temelju ove tablice učenici mogu odgovoriti na pitanja:

- O čemu govore podaci u tablici?
- Koju životinju za kućnog ljubimca ima najviše učenika?
- Koju životinju za kućnog ljubimca ima najmanje učenika?
- Koja bismo još obilježja o kućnim ljubimcima mogli prikupiti?

Podaci u tablici prikazuju koje životinje učenici imaju za kućne ljubimce. Skup svih životinja odnosno ono što se prebroji naziva se skup objekata.

Obilježje skupa objekata zajedničko svojstvo objekata koje nas zanima na promatranom skupu. Obilježja mogu biti prikazana brojevima ili nekim drugim nizom vrijednosti. Brojčana su obilježja primjerice: površina, visina, ocjena, broj cipela, broj bodova na ispitu. Nebrojčana obilježja su: boja kose, mjesto stanovanja, boja cipela. Svako obilježje određeno je skupom vrijednosti koje poprima.

Frekvencija ili učestalost je broj koji kazuje koliko se puta neki podatak pojavljuje u skupu podataka.

Relativna frekvencija jest broj koji kazuje koliki je udio promatranog podatka u odnosu na cijelo.

## 3 Statistička teorija

Činjenice su dosadne. Statistike su puno vjerovatnije.  
(Mark Twain)

Učenici se sa statistikom mogu već susretati u vrtiću. Na primjer, svaki dan vrtić djeci pravi dijagram sa njihovim fotografijama koji pokazuje tko je prisutan, a tko nije. Na taj način, oni prakticiraju osnovne računске vještine. Nismo ni svjesni koliko nas zapravo statistika okružuje zato je jako važna statistička pismenost. U prošlom desetljeću statistika je postala sastavni dio školskih standarda diljem svijeta. Još 1977. godine američki National Council of Supervisors of Mathematics objavio da je čitanje, interpretiranje i crtanje tablica, dijagrama i grafova jedna od 10 osnovnih matematičkih vještina.

Grana matematike koja se bavi načinima prikupljanja i obrade različitih podataka zove se statistika.

Često čujemo na televiziji ili čitamo u novinama različite podatke poput: popularnosti turističkih odredišta, starosti stanovništva, porastu troškova života... Takvi podaci nazivaju se statistički podaci. Oni nam služe za lakše uspoređivanje i većinom su prikazani u tablicama radi preglednosti. U okviru statističke teorije treba se pozabaviti sljedećim metodama:

- metodama prikupljanja podataka.
- metodama opisivanja skupa podataka (deskriptivna statistika).
- metodama statističkog zaključivanja.

### 3.1 Formuliranje pitanja

Statistika je više nego samo izrađivanje dijagrama i analize podataka. To uključuje i pitanja i odgovore o našem svijetu. Prikupljanje podataka trebalo bi imati za svrhu, odgovoriti na pitanje kao u stvarnom svijetu. Tada nam analiza podataka zapravo daje informacije o nekim aspektima našeg svijeta, baš kao o političkim aspektima, reklamnim agencijama, istraživanju tržišta, popisu stanovništva ispitanika, menadžerima, o biljnom i životinjskom svijetu, medicinskim istraživačima i voditeljima te drugim prikupljenim podacima odgovarajući na pitanja.

Učenicima treba dati priliku za generiranje vlastitih pitanja, odlučivanju o odgovarajućim podacima za pomoć odgovoranju na pitanja i određivanju metoda prikupljanja podataka.

Nastavnik treba započeti s dobrim pitanjem ili problem koji će zainteresirati učenika, za koji odgovor nije odmah očit i daje se učenicima kao razlog prikupljanja i analiziranja podataka, a zatim i tumačenje rezultata. Postoji realna mogućnost koju imaju učenici koji identificiraju vlastita pitanja ili problem jer će tako preuzeti pravo ispitivanja i njihova



motivacija će biti visoka (Bohan, Irby i Vogel, 1995. u *Helping Children learn Mathematics*, 2004.).

Na primjer, učenik je želio znati koliko kuća ima u njegovoj ulici ili učitelj može pitati: "Koliko sestra i braće imate?"

Na primjeru kuća, učenici su pitali da li bi trebali uključiti kuće koje još nisu završene i broje li apartmane. U drugom slučaju postoji potreba da se raspravlja o polubraći i polusestrama.

Kada učenici formuliraju pitanja, oni ih žele postavljati i tako prikupljeni podaci postaju više značajni. Ti prikupljeni podaci i tehnike za analizu imaju svoju svrhu.

### 3.2 Prikupljanje podataka

Prikupljanje podataka nije lako za učenike, a posebno za neiskusne učenike. S prikupljanjem podataka se djeca susreću već u vrtiću. Pogledajmo jedan primjer. Učiteljica u vrtiću zamolila djecu da joj pomognu razmisliti o organiziranju prikupljenih podataka od svojih prijatelja po preferenciji okusa sladoleda.



SLIKA 1. Dječji crtež prikupljanja podataka po preferencijama okusa sladoleda.

Dok učenici u prvom razredu, imali su zadatak da prikupe podatke na temu: "Imaš li 6 godina?". U svrhu prikupljanja podataka, 18-tero najmlađih učenika počelo je ispitivati druge učenike da li imaju 6 godina i zapisivati da ili ne odgovore. Problem? Oni nisu imali pojma koga su već pitali ili koga nisu uopće pitali. Ovo je odličan uvjet ulazak u raspravu o tome kako statističari moraju prikupiti podatke. Učenici na različite načine pristupaju prikupljanju podataka.

Kada se jednom utvrde prikladna pitanja, učenici će moći planirati kako prikupiti potrebne podatke. Komunikacijske vještine su vrlo važne za vrijeme ove faze. Da bi bili uspješni, učenici moraju biti u mogućnosti razviti jasna anketna pitanja i logične korake

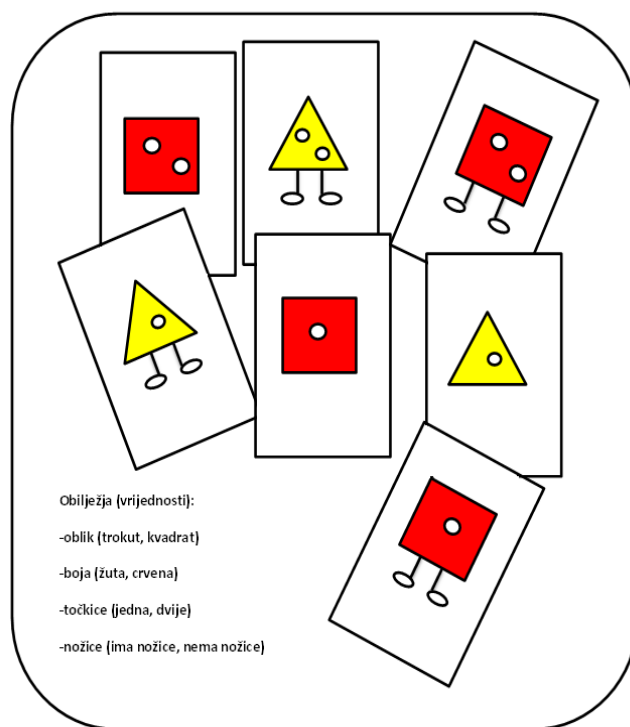
za svoje eksperimente i simulacije. Oni moraju komunicirati s drugima i voditi razgovor. Oni moraju naći jasne i učinkovite metode bilježenja svojih podataka. Učenici mogu prikupljati podatke iz ankete, eksperimenata i simulacije te korištenjem postojećih izvora podataka poput novina, podataka s web stranica, a svi oni obično uključuju brojanje ili mjerenja. Podaci se mogu zabilježiti na različite načine kao što je evidencija pomoću ocjena ili stavljanje podataka u tablicu. Računalne tablice mogu se također koristiti za spremanje podataka.

### 3.3 Analiza podataka-klasifikacija

Klasifikacija uključuje donošenje odluke kako napraviti kategorizaciju stvari, osnovna aktivnost koja je temeljna za analizu podataka. Kako bi se formulirala pitanja i odlučilo kako predstavljati podatke koji su prikupljeni, odluke moraju biti o tome kako se stvari mogu kategorizirati. Mala djeca mogu grupirati domaće životinje, na primjer, po broju nogu; prema vrsti proizvoda koji oni pružaju; kako oni funkcioniraju ili za kućne ljubimce; po veličini ili boji; po vrsti hrane koju jedu i tako dalje. Svaka od tih grupacija je zasnovana na različitom obilježju životinje.

Učenici trebaju imati iskustva s kategorizacijom stvari na različite načine kako bi naučili kako dati smisao podacima u stvarnom svijetu.

Kako bi se učenici upoznali s klasifikacijom podataka, nastavnik može napraviti kartice i pitati učenike kako će ih razvrstati.



SLIKA 2. Kartice s više obilježja.

Svaki oblik na kartici može imati na primjer, četiri obilježja: boja (crvena, žuta, plava),

oblik (krug, trokut, pravokutnik, kvadrat, šesterokut), veličina (velika, mala) i debljina (debeo, tanak).

Organiziranje podataka u kategorije treba započeti razvrstavanjem koje ovisi o prethodnom iskustvu. Učenici u drugom razredu trebaju moći razvrstati i klasificirati predmete korištenjem više obilježja.

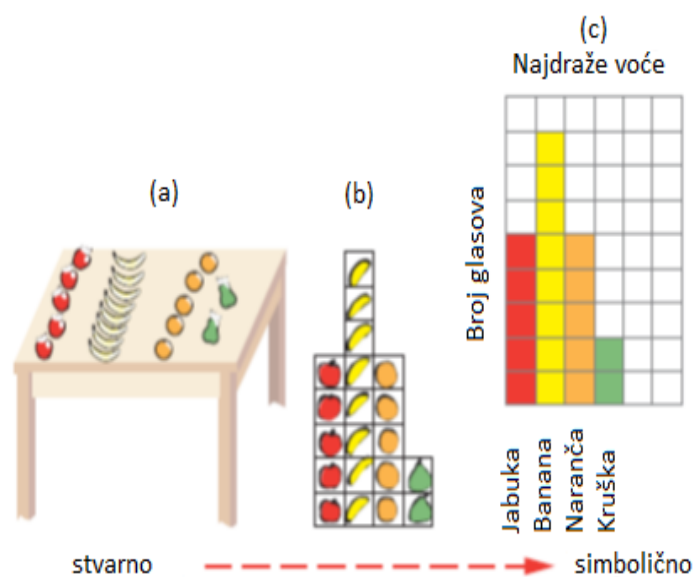
### 3.4 Analiza podataka-grafička organizacija

Nakon što su prikupljeni podaci, prvi korak analize je organizirati informacije tako da se rezultati mogu tumačiti. Graf ili dijagram je crtež koji može biti koristan za vizualno prikazivanje ili organiziranje podataka. U osnovnoj i srednjoj školi, učenici se često susreću i stvaraju si predočenje, slikovne, stupčaste i kružne grafove. Kako se kreću kroz školovanje broj grafova koje nauče tumačiti i crtati raste i postaje složeniji.

Početni rad s podacima za učenike znači da počinju raditi s konkretnim predmetima u svom okruženju. Prikupljanje i brojanje objekata, razvrstavanja u kategorije, a zatim ih prikazuju na organiziran način je dobro uvođenje. Na primjer, učenici mogu donijeti svoju omiljenu knjigu i potom ih organizirati. Stvaran graf pravi se tako da se knjige slože u redove. Budući da učenici rade s podacima tako razvijaju i vještinu brojanja. Mogu raditi s većim brojem predmeta i grupirati predmete u skupine po 10. Također moramo pronaći način da pomognemo učenicima pomaknuti se od prezentacije konkretnih stvarnih grafova ka simboličkoj prezentaciji.

Jedan od načina kako od stvarnog grafa napraviti simboličku prezentaciju je primjer sortiranja voća.

Prvo, pitajte svakog učenika da odabere svoje omiljeno voće iz košare i položi voće na stol kao što je prikazano na slici 3a. Redovi odnosno stupci voća prezentiraju učeničke preferencije voća kao stvaran graf. Zatim recite djeci da nacrtaju voće na kartici, a zatim će učenici koristiti kartice za konstrukciju slikovnog-stupčastog graf kao što je prikazano na slici 3b. Iako ovaj graf na manje konkretan način prikazuje podatke, većina učenika još uvijek će naći smisla da predstavi ono što više vole. Na kraju, te iste informacije mogu se izraziti više simbolično na stupčastom grafu kao na slici 3c. Na kraju, učenicima možemo dati prazan papir i potaknuti ih da organiziraju i zapišu podatke na papir na način na koji to njima ima smisla. Na ovaj način, djeca uče da prezentiraju svoje podatke na smislen način i da ih razumiju oni sami i drugi (Folkson, 1996. u *Helping Children learn Mathematics*, 2004.).



SLIKA 3. Jedan način za uvođenje grafova.

Bez obzira na koji način su prezentirani podaci, bitna su pitanja za poticanje smislene interpretaciju grafova. Takva pitanja mogu uključivati sljedeće:

- Što predstavlja graf?
- Koliko učenika voli jabuke?
- Koje je omiljeno voće?
- Koliko vrsta voća je prikazano?
- Koliko učenika je doprinijelo grafu?

Nakon što je napravljen prikaz podataka potrebno je diskutirati s učenicima. Moramo im pokazati što prikazuje koji dio u grafu jer se inače mogu izgubiti. Cilj je da učenici nauče da se različite stvari za iste podatke mogu prikazati na različite načine.

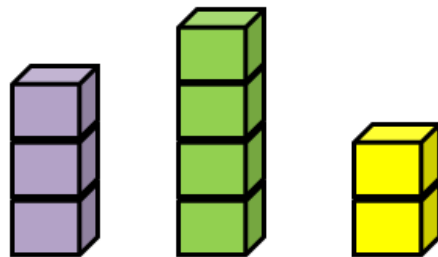
### Brze i jednostavne grafičke metode

Za učenike osnovnih škola, proces crtanja grafa im pomaže učiti o svim kritičnim svojstvima te je vrijedna aktivnost. Međutim, neke grafove je teže nacrtati od drugih, a crtanje može biti dugotrajan proces. Prilikom crtanja grafova ne smijemo tražiti svaki sitni detalj jer postoji tehnologija koja izrađuje grafove.

Glavna svrha vizualnog prikazivanja podataka je da bismo više saznali o podacima i da bismo ispitali rezultate nekoliko alternativa koje postoje. Slika 4. prikazuje da se neki prikupljeni podaci mogu odmah prikazati. Ovi brzi grafovi, pod nazivom "skica grafovi" ili "radni grafovi" mogu se stvoriti brzo i osiguravaju vizualni prikaz oblika podataka. Oni trebaju biti jasni. Skica graf ne zahtijeva obilježja ili naslove i crtanje nije dugotrajan

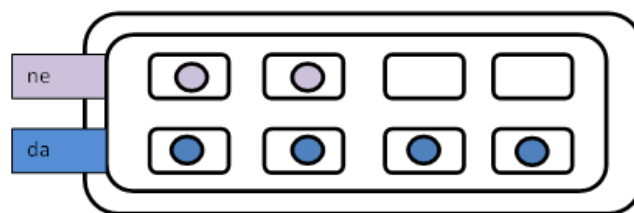
proces. Skica graf može biti napravljen od konkretnog materijala ili pomoću papira i olovke.

### Omiljena boja



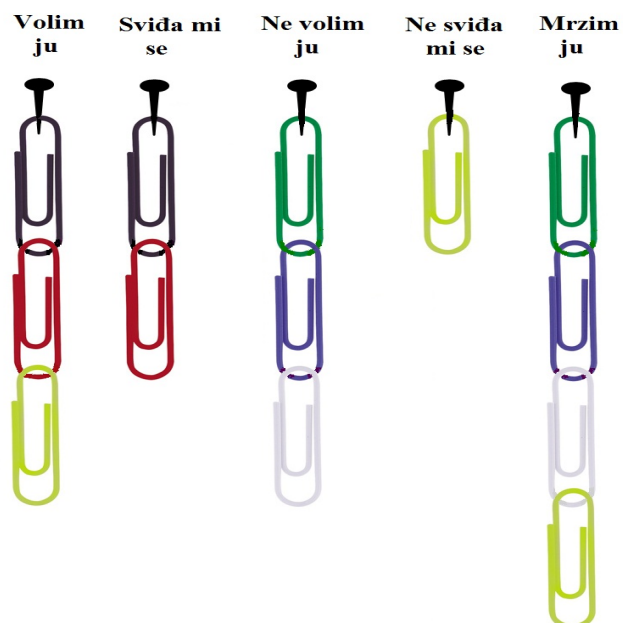
a) Povezivanje kockica

### Jeste li gledali sinoć televizor?

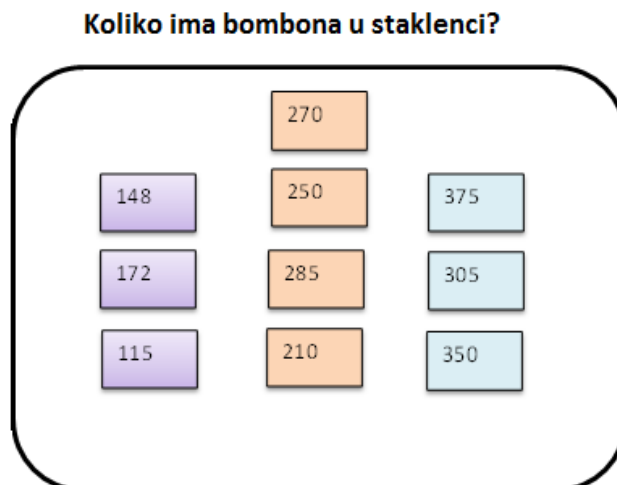


b) Brojač da/ne odgovora

### Koliko vam se sviđa zima?



c) Plastične spajalice



**d) Samoljepljivi listići**

SLIKA 4. Brzi i jednostavni grafički materijali.

**Površinski grafovi**

Površinski graf je još jedna vrsta grafa koja se koristi za vizualni prikaz podataka. U posljednjih nekoliko godina, površinski grafovi se često koriste u časopisima i novinama jer oni pružaju učinkovit način prikazivanja podataka kao i uspoređivanje različitih skupa podataka. Neki površinski grafovi kao što su linijski grafovi i dijagram peteljka-list se brzo i lako mogu napraviti.

**Linijski grafovi**

Linijski graf se može koristiti za brzi prikaz brojčanih podataka s malim opsegom. Raspon i distribucija podataka jasno se vidi na zaslonu. Linijski graf se može uspješno koristiti na svim razinama. Mlađi učenici mogu lakše stvoriti linijski graf od stupčastog grafa i stariji učenici će moći dobiti brzu povratnu informaciju kada skiciraju linijski graf. Prilikom stvaranja linijskog grafa, podaci trebaju biti nacrtani s istom mjerom. To omogućuje brzu vizualnu interpretaciju podataka prilikom pokušaja da se prepozna kretanje podataka.

Pretpostavimo da je u razredu zabava, učenici trećih razreda dobivaju slatkiše u paketu. Učenici otvaraju pakete i netko predloži da će izračunati koliko bombona svatko od njih ima. Razred započinje brojati i uskoro svako dijete izgovara svoju sumu. Nastavnik zapisuje sume na ploču kako ih učenici izgovaraju:

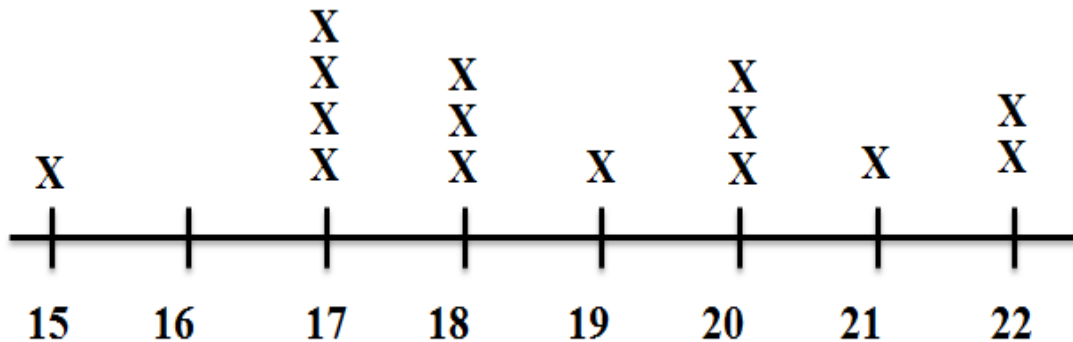
17, 19, 21, 20, 15, 18, 22, 17, 20, 18, 17, 18, 22, 17, 20.

Rasprava se nastavlja kada učenici pokušaju izvući zaključke iz podataka. Nastavnik predloži stavljanje podataka u linijski graf jer će se tako lakše vidjeti i razumjeti. Učenici će primjetiti da je najmanja vrijednost 15, a najveća 22.

Za izradu linijskog grafa potrebna je linija sa brojčanim vrijednostima koja započinje s 15, a završava sa 22. Stavljajući X iznad svakog broja prilikom pojavljivanja tog broja

u skupu podataka.

Slika 5. prikazuje cijeli linijski graf. Učenici lako mogu vidjeti da se 17 najčešće pojavio, nakon čega slijede 18 i 20. Učenik koji je imao samo 15 bombona u paketu osjećao se prevarenim, a oni koji su imali 22 osjećaju se sretno. Razred razgovara o tome zašto svi nemaju jednako bombona u paketu.

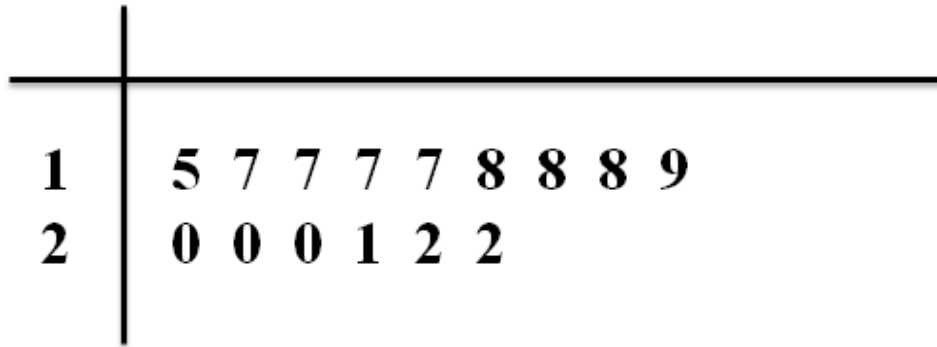


SLIKA 5. Linijski graf broja bombona u paketu.

### Dijagram peteljka-list

Dijagram peteljka-list je još jedan brz način za prikaz podataka i pruža sasvim drugačiji prikaz nego kad su podaci poredani u linijskom ili stupčastom grafu. Ovaj prikaz je malo više apstraktan nego linijski graf, ali se može uspješno koristiti s učenicima srednjih škola.

Često je koristan za prikaz podataka u više od jednog načina. Razmatranje podataka bombona smo prikazali u linijskom grafu i organizirali ga u dijagram peteljka-list (slika 6.). Za početak, podijeliti svaku vrijednost u desetice i jedinice. Desetice postaju "peteljke", a jedinice će biti "listovi". Uočite da svi podaci spadaju u dvije desetice, odnosno između desetice i dvadesetice. Vertikalna linija je nacrtana s vrijednostima desetica (1 i 2) na lijevo od linije. One vrijednosti koje se nalaze na desnoj strani, ravnomjerno raspoređene u brojanom redoslijedu od najniže do najviše za svaku su "listovi". Promatrajući graf, lako se vidi da se 17 najviše puta pojavio u ovom skupu podataka. Iz ovog razmještaja također se može lako vidjeti da više pakiranja bombona odnosi na desetice nego na dvadesetice.



SLIKA 6. Dijagram peteljka-list bombona u paketu.

Peteljka-list dijagrami nisu ograničeni na dvoznamenkaste podatke. Na primjer, ako su podaci u rasponu od 600 do 1300, peteljke mogu biti brojevi od 6 do 13, a listovi izrađeni od dvoznamenkastih brojeva odvojenih zarezom.

Dijagram peteljka-list također se može koristiti za usporedbu dva skupa podataka na istom grafu. U srednjoj školi, učenici uspješno može usporediti više od jednog skupa podataka.

Pretpostavimo da ste htjeli istražiti neka pitanja vezana za visina učenika četvrtog razreda. Uspoređujući visine dječaka i djevojčica će izazvati zanimljivu raspravu. Poput pitanja: "Koja grupa je najviša?" i "Koja grupa ima najviše varijabilnost odnosno promjenjivosti?". Nakon što su napravljene neke pretpostavke, vrijeme je da učenici izmjere svoje visine i počnu analizirati podatke. Ovdje su koraci koji dovode do dijagrama peteljka-list. Visine 27 učenika četvrtog razreda (15 djevojčica i 12 dječaka) su prikazani u centimetrima u sljedećoj tablici:

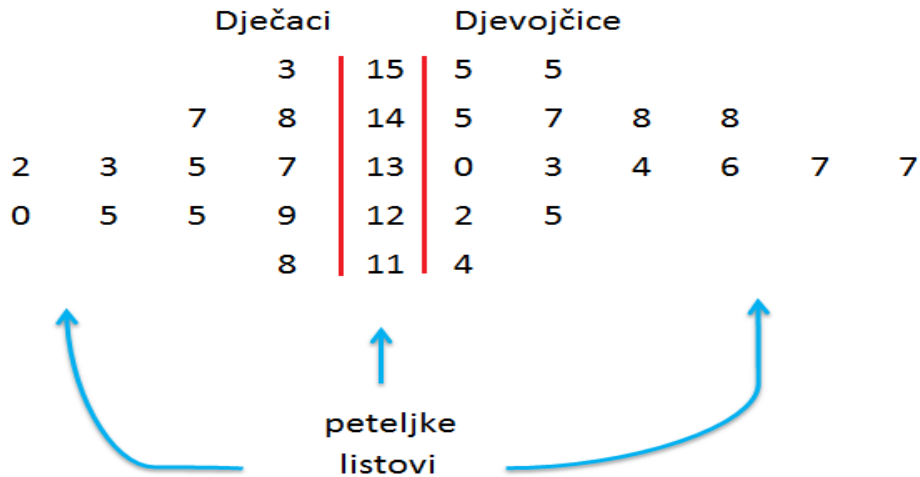
Dječaci				Djevojčice			
118	132	135	137	122	155	114	125
120	125	147	129	155	137	136	137
133	148	153	125	134	130	133	145
				148	148	147	

TABLICA 2. Visina dječaka i djevojčica u centimetrima.

Te vrijednosti su organizirane u dijagram peteljka-list kao na slici 7. Peteljke predstavljaju mjesto stotica i desetice s podacima o visini učenika, a listovi predstavljaju mjesto jedinica.

U donjem redu na slici 7. se nalaze vrijednosti  $8|11|4$  i prikazuje srednju visinu jedne djevojke 114 cm i jednog dječaka 118 cm. Dijagram peteljka-list čuva pojedine mjere iako otkriva opći oblik organiziranih podataka. Dakle, predstavlja sve informacije u ovom slučaju za obje skupine te daje jasnu vizualnu sliku.





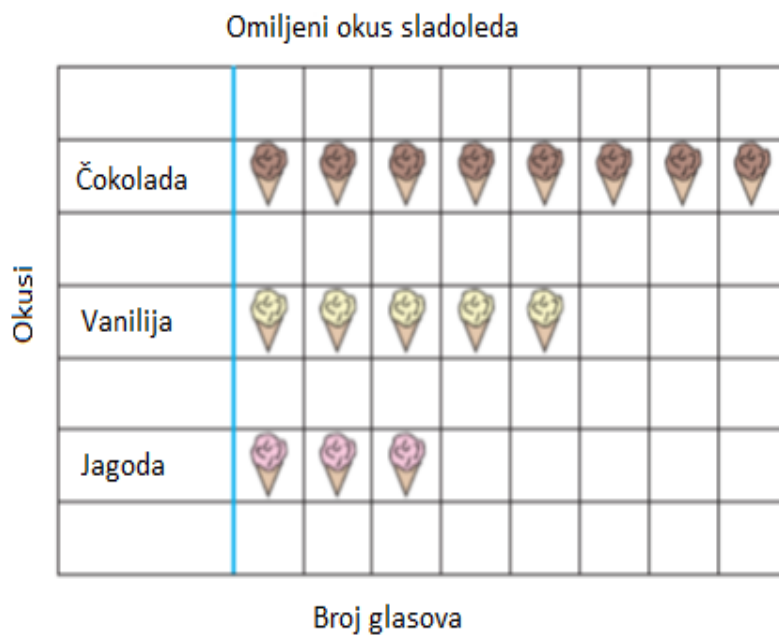
SLIKA 7. Dijagram peteljka-list visine djevojčica i dječaka.

Uočite da dijagram peteljka-list jasno pokazuje oblik podataka te možemo promatrati širenje podataka i kako su grupirani.

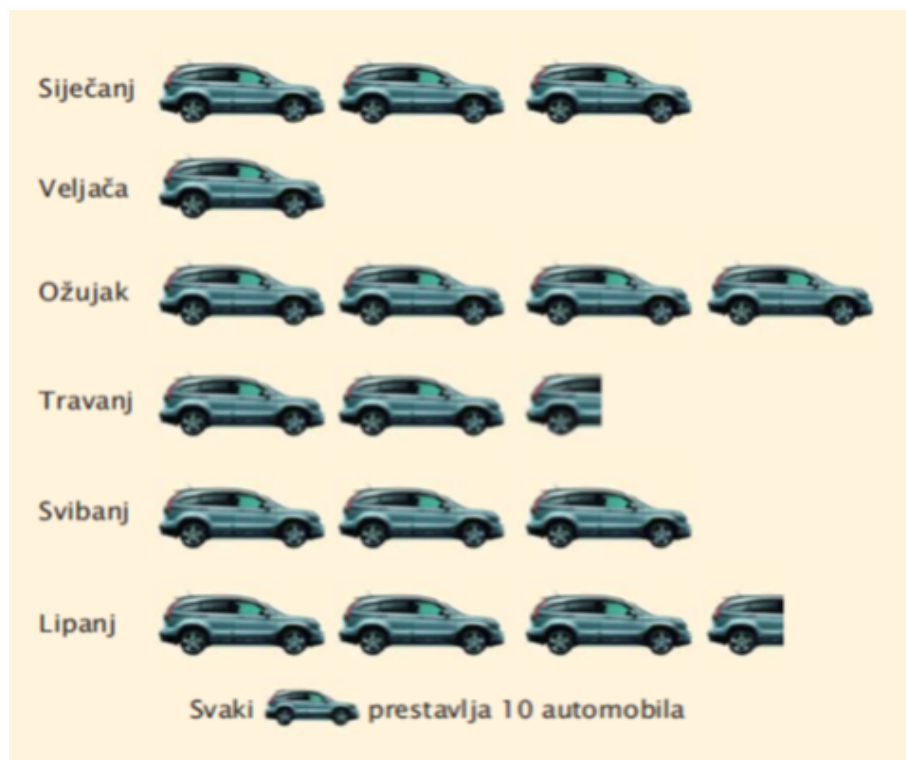
Osim brzih i površinskih grafova koji su već spomenuti, učenici bi također trebali biti upoznati i s grafovima koji zahtijevaju više vremena i truda pri crtanju.

### Slikovni dijagram

Na slikovnom dijagramu podaci su prikazani slikama. Na primjer, djeca u nižim razredima osnovne škole mogu napraviti slikovni dijagram svojih omiljenih jela odnosno koje kućne ljubimce imaju. Slika može predstavljati jedan objekt (slika 8.) ili više (slika 9.). Za ispravno tumačenje slikovnih dijagrama, učenici moraju znati koliko svaki predmet predstavlja. Istraživanja pokazuju da učenici često ignoriraju takve informacije prilikom tumačenja grafova (Bright i Hoeffner, 1993. Curcio i Bright, 2001. Friel, Bright i Curcio, 1997. u *Helping Children learn Mathematics*, 2004.).



SLIKA 8. Slikovni dijagram u kojem svaki sladoled predstavlja jedan objekt.

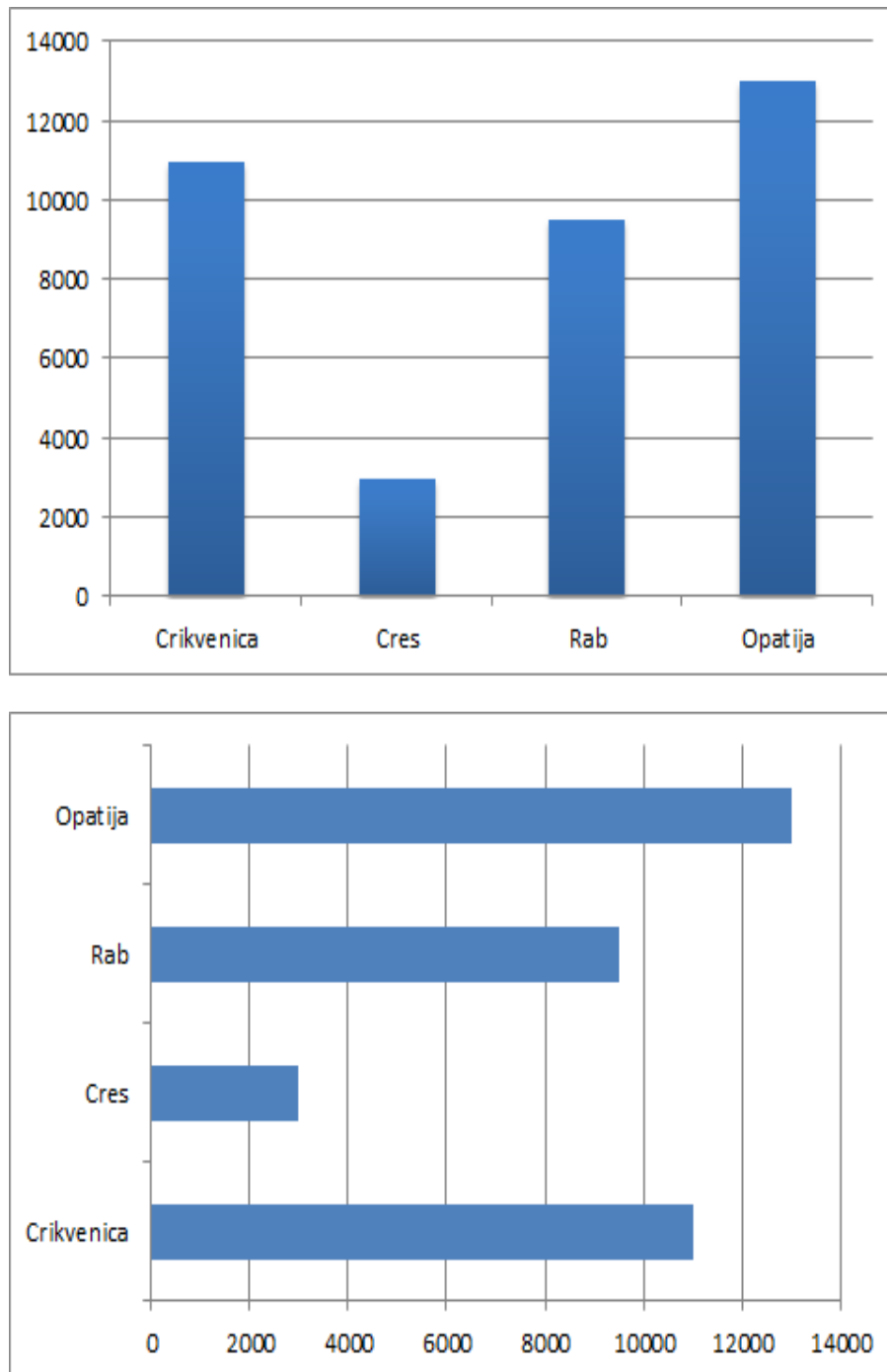


SLIKA 9. Slikovni dijagram u kojem svaki automobil predstavlja deset automobila.

### Stupčasti grafovi i histogrami

Stupčasti dijagram se uglavnom koriste za diskretne ili odvojene podatke. Na primjer, tim grafom se može prikazati broj dječjih rođendana u svakom mjesecu ili broj učenika koji u školu putuju autobusom, automobilom ili pješice. U stupčastom dijagramu podaci su prikazani pomoću pravokutnika čija visina odnosno duljina ovisi o veličini podataka

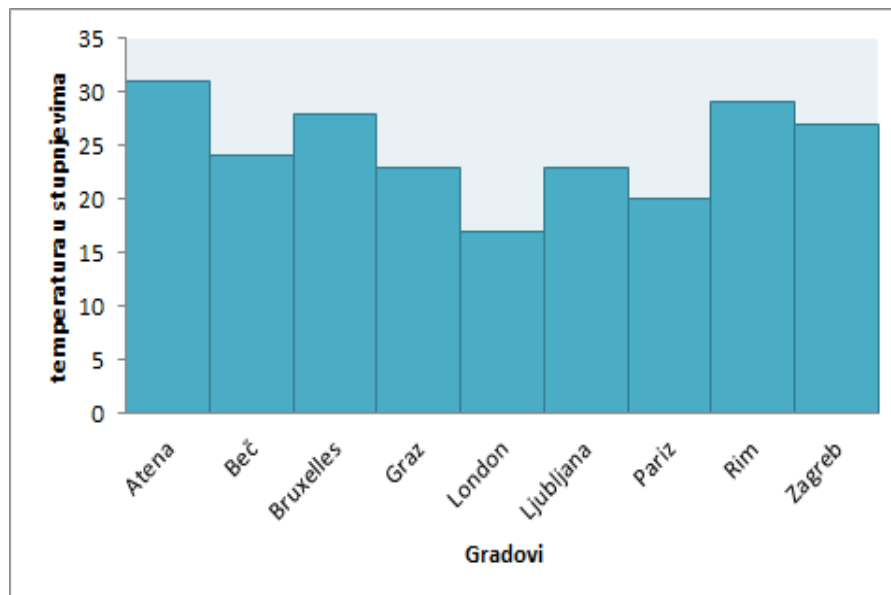
koji se prikazuju i uspoređuju, a širine odnosno osnovice su im sukladne. Stupčasti dijagram može bit položen okomito ili vodoravno. Stupčasti grafikoni često se koriste za brze vizualne usporedbe grupiranih podataka te su prikladni za sve uzraste.



SLIKA 10. Stupčasti graf broja stanovnika u nekim gradovima u Primorsko-goranskoj županiji.

Iako histogram izgleda kao stupčasti graf, postoje neke ključne razlike koje razlikuju ta dva prikaza. Histogram koristi kontinuirane podatke, a ne diskretne podatke. Stoga su podaci prezentirani spojenim stupčastim dijagramom, svaki prezentira interval. Visinu ili dužinu stupca određuje interval u kojem se podatak nalazi. Ako učenik koristi internet

22 sata njegov podatak se nalazi između 20 i 29,99 sati. Interval sadrži sve brojeve do i ne sadrži maksimalnu vrijednost tj. otvoreni interval. Stoga pojedine podatke može biti nemoguće pročitati iz histograma kao što bi ga mogli pročitati iz stupčastog dijagrama. Histogrami su prikladni za učenike srednjih škola.



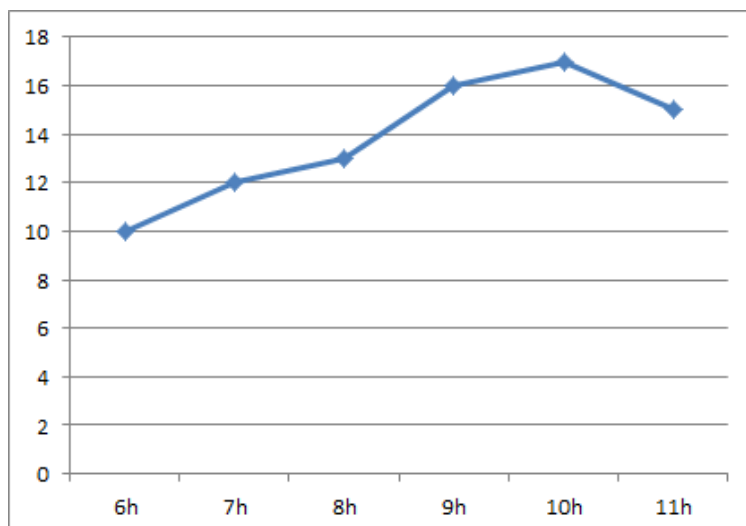
SLIKA 11. Histogram visine temperature u gradovima Europe.

### Linijski dijagram

Linijski dijagrami su djelotvorni za prikazivanje trendova tijekom vremena. Prikazuju promjene iste veličine. Na linijskim dijagramima, točke u koordinatnom sustavu se koriste za predstavljanje kontinuiranih podataka. Svaka os jasno je označena tako da se prikazani podatak može ispravno tumačiti. Širok izbor linijskih grafova postoji i koristi se, ali tri osnovne pretpostavke su im svojstvene:

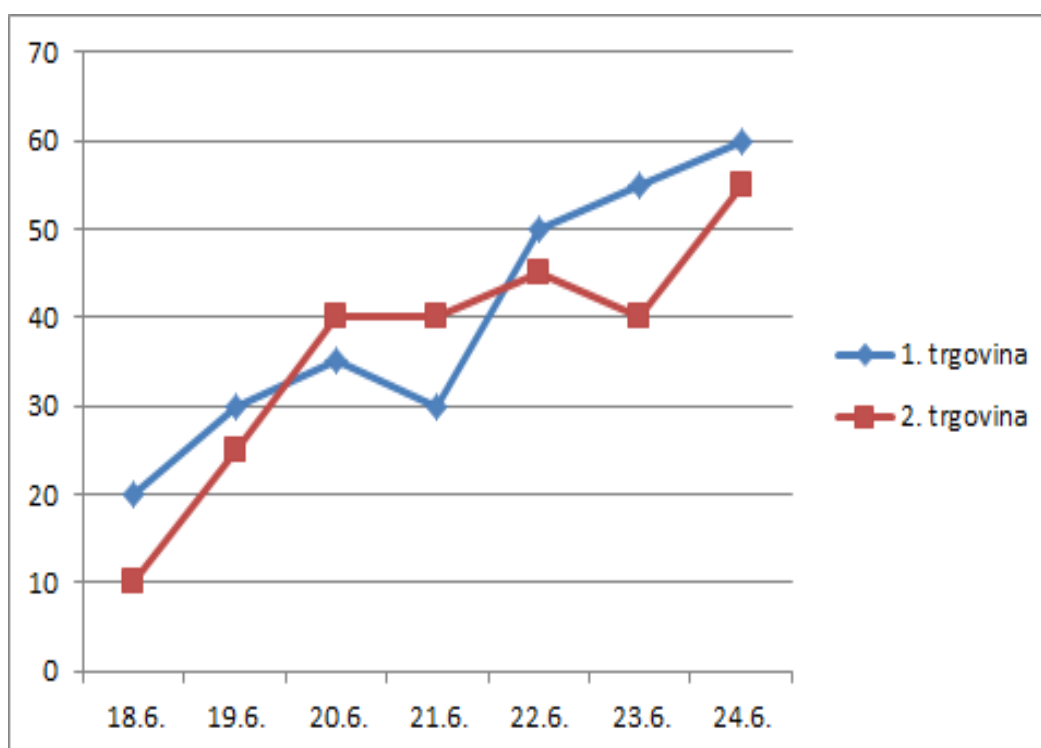
- Podaci su kontinuirani umjesto diskretni. To znači da su podaci grupirani u kontinuiranoj ljestvici i ne možemo ih prebrojati.
- Podaci se mogu pojaviti između točaka kontinuiranih podataka. Zbog toga, se crte također mogu koristiti za tumačenje vrijednosti između nacrtanih podataka.
- Promjene su točno prikazane s linearnim funkcijama (tj. linijama), a ne s nekim drugim krivuljama.

Slika 12. prikazuje linijski dijagram, a oni su posebno dobri za prikazivanje varijacije i promjene tijekom vremena kao što su sati dnevnog svjetla, temperature, oborina i tako dalje. Na primjer, učenici mogu prikazati grafom rast biljaka u znanstvenim pokusima.



SLIKA 12. Linijski dijagram dnevne temperature zraka.

Linijski grafovi su također učinkoviti za vizualni način usporedbe nekoliko skupova podataka kao što je prikazano na slici 13.

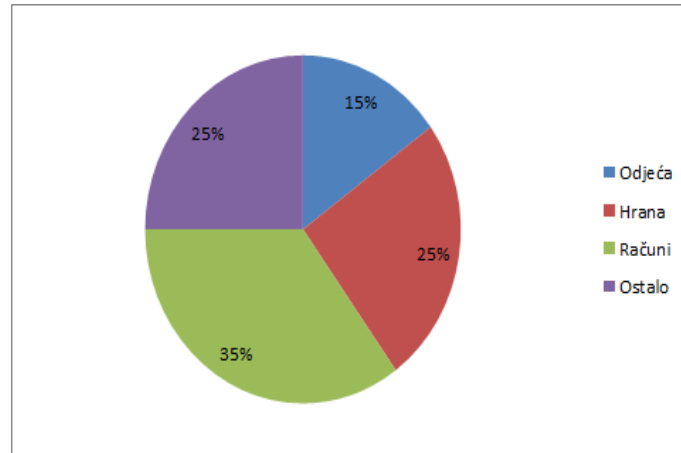


SLIKA 13. Usporedba broja prodanih dječjih igračaka u dvije trgovine.

Konstruiranje i interpretiranje linijskog grafa zahtjeva od učenika proučavanje vertikalne i horizontalne osi što je dobra priprema za uvođenje koordinatnog sustava. Linijski grafovi se koriste najčešće u višim razredima osnovne škole i srednjoj školi.

## Kružni dijagram

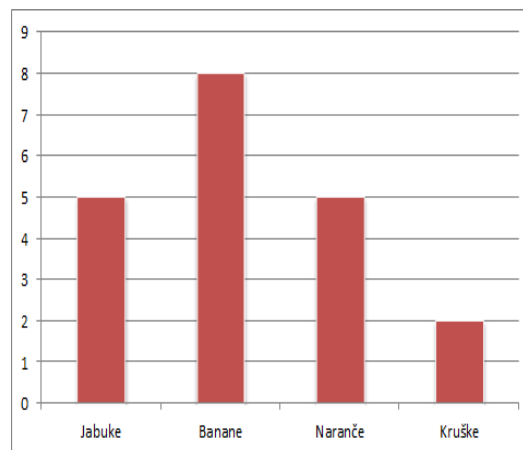
Kružni dijagram prikazuje odnos dijelova neke cjeline prema toj cjelini, a izražava se u postocima. On uvijek pokazuje samo jedan skup podataka i koristan je kada želimo naglasiti neki dio cjeline.



SLIKA 14. Kružni dijagram postotka potrošnje u kućanstvu.

Kružni dijagram je popularan zato što ga je lako interpretirati, također ima određena ograničenja, a to je prezentacija samo određenog dijela i ne može biti veće od 100%. Na primjer, učenici mogu napraviti graf kako oni troše svoj tjedni džeparac ili koje su omiljene boje razreda. Dok učenici viših razreda osnovne škole mogu čitati i interpretirati kružne grafove, efikasno konstruirati korištenjem razlomaka, postotaka, proporcija i mjerenjem kutova.

Kružni dijagram prikladan je za osnovnu i srednju školu i postoji konkretna metoda povezivanja kružnog dijagrama sa stupčastim dijagramom, koju učenici mogu uspješno savladati u osnovnoj školi. Na primjer, podaci prikazani u stupčastom dijagramu mogu se lako pokazati u kružnom grafu.

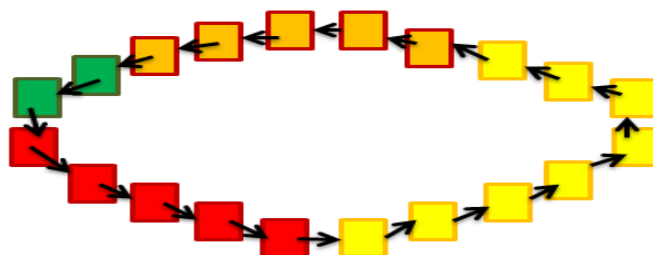


SLIKA 15. Stupčasti dijagram učeničke preferencije voća.

Kvadrati različitih boja mogu predstavljati voće zajedno kao što je prikazano ovdje na istoj udaljenosti:



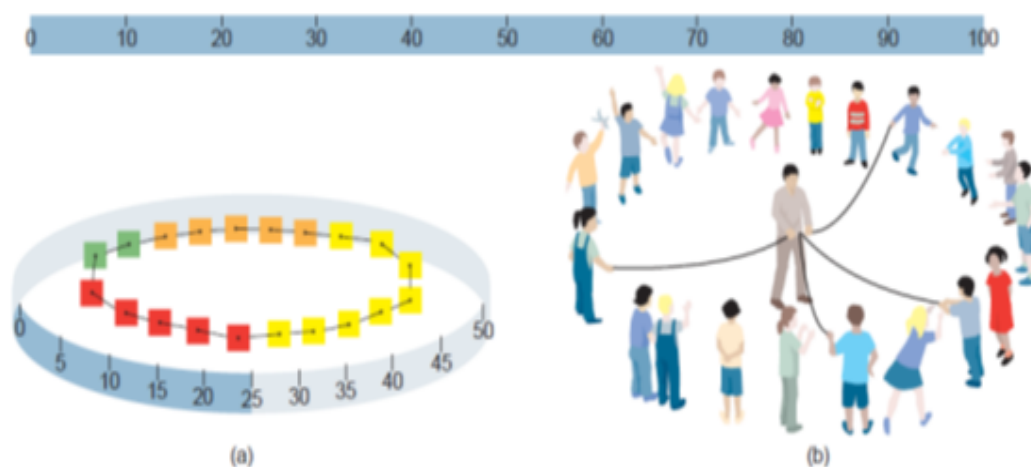
Tada se niz može staviti u krug:



To upravo predstavlja vezu između stupčastih i kružnih dijagrama. Ona također pruža prirodni kontekst za razlomke i postotke. Na primjer, kružni dijagram sugerira da jedna četvrtina voća su naranče.

Ovaj model se može proširiti stavljanjem brojčane trake ili 100 centimetara papirnate trake označene sa sličnim jedinicama u obliku koncentričnih krugova kao što je prikazano na slici 16a. Uspoređujući obojene dijelove trake s oznakama na drugoj traci učenici će lako odrediti postotke.

Kao konkretniju vizualizaciju, 20-tero djece može biti raspoređeno u krug i "povezano užetom" gdje počinje druga preferencija voća kao na slici 16b. Oba modela na slici 16. olakšavaju procijeniti ili čitati postotak i zaključiti na primjer, da je više od 50% djece izabralo jabuke ili banane.



SLIKA 16. Model za tumačenje kružnog dijagrama.

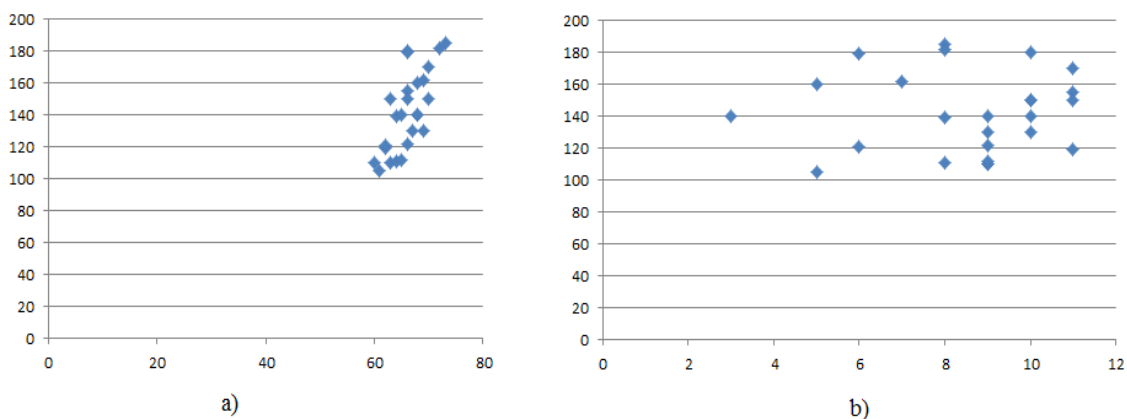
Tehnologija kao što su tablični prikazi, također su korisni alati koji omogućuju učenicima stvaranje stupčastih i kružnih grafova podataka. Proces prelaska sa stupčastog grafa na kružni graf pruža različite perspektive na istom skupu podataka, te istraživanja pokazuju da razvoj takve višestruke perspektive pomaže u promicanju boljeg razumijevanja (Shughnessy, 2007. u Helping Children learn Mathematics, 2004.).

### Dijagram raspršenosti

Dijagramom raspršenosti se često analiziraju podaci koji prikazuju odnose između dva skupa podataka. Na primjer, odnos između vremena provedenog gledajući televiziju i ocjena. Postoje razni primjeri iz svakodnevnog života i podaci se prikupljaju pomoću eksperimenta. Podaci se prikupljaju u parovima primjerice broj sati gledanja televizora i uz to ocjena, onda se pretvore u jednu vrijednost koja se unosi u graf.

Podaci uključuju dvije varijable koje mogu biti nacrtane na dijagramu raspršenosti. Graf predstavlja točke u koordinatnom sustavu, a svaka os predstavlja jednu od dvije varijable. Svaki par brojeva od ta dva skupa podataka tako nacrtan stvara vizualnu sliku podataka kao i odnos između varijabli ako je moguć.

Pretpostavimo da su sljedeće informacije prikupljene od 25 učenika osmih razreda: visine u centimetrima, težine u kilogramima te broj slova u njihovim prezimenima. Dva grafa na slici 17. pokazuju dvije mogućnosti. Graf (a) je dijagram raspršenosti visine u odnosu na težinu i dijagram (b) je dijagram visine u odnosu na broj slova u prezimenu.



SLIKA 17. Dijagram raspršenosti pokazuje potencijalne odnose i nedostatke odnosa.

Kao što je i očekivano povećanjem težine dječaka povećava se i visina. Međutim, odnos je daleko od savršenog. Nema razloga očekivati bilo kakvu vezu između duljine prezimena i visine.

### 3.5 Analiza podataka-deskriptivna statistika

Drugi način za analizu podataka je korištenje deskriptivne statistike. Puno informacija postoji danas pa često moraju biti pojednostavljene ili smanjene drukčije nego na dija-



gramima. Organizacija i sažimanje podataka naziva se deskriptivna statistika. Uvedena u osnovnoj školi kroz prikupljanje podataka i grafove, a kasnije proširena s daljnjim istraživanjem i praksom u srednjoj školi. Ovdje su neki poznati primjeri:

- "Većina djece u petom razredu ima 10 godina."
- "Medijan obiteljskog prihoda je 45.250 \$."
- "Prosječna temperatura je danas 29° C."

Svaka od ovih izjava koristi sažeti niz onog što je tipično za trenutnu situaciju ili stanje. Dva najčešća tipa deskriptivne statistike uključuju mjere raspršenosti i mjere centralne tendencije.

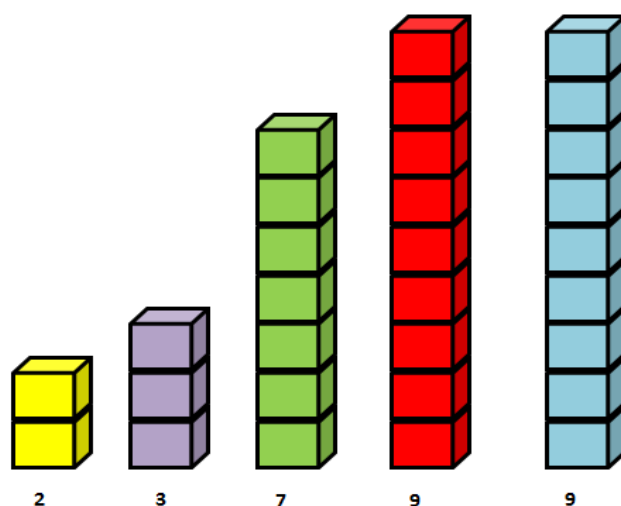
### Prosjek ili mjere centralne tendencije

Riječ prosjek je popularan statistički pojam za koji su čula mnoga djeca. Koristi se pri izvještavanju raznih stvari kao što je prosječna temperatura, prosječni obiteljski prihod, ispitivanje prosjeka i prosječni životni vijek.

Bilo koji broj koji se koristi za opisivanje srednje vrijednosti niza naziva se prosjekom tih vrijednosti. Postoje mnogi različiti prosjeci, ali tri su najpoznatija- mod, medijan i srednja vrijednost se obično susreću u osnovnoj i srednjoj školi. Jednim imenom ih nazivamo mjere centralne tendencije ili centralna mjerenja.

### Mod

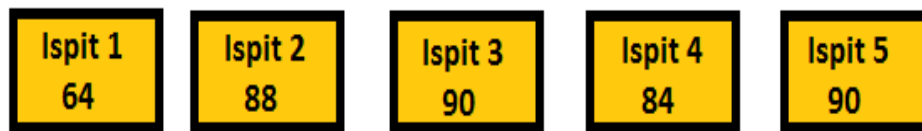
Mod je vrijednost iz niza izmjerenih vrijednosti koja je najviše puta izmjerena. Učenicima se može pokazati na konkretnom primjeru. Koristeći konkretne materijale kao što su kocke, mod se lako identificira kao visina kocaka koja se najčešće javlja.



SLIKA 18. Dječja dob.

Na slici 18. lako se vidi da je 9 mod jer se javlja dva puta dok se druge vrijednosti javljaju samo jednom. U grafičkom smislu to je također najviši stupac na stupčastom grafu.

Na slici 19. najčešće se javlja rezultat ispita 90 (jer se pojavio dva puta) tako da je mod 90.



SLIKA 19. Traženje moda unutar pet ispitnih rezultata.

Mod je svestran prosjek koji može koristiti numeričke i ne numeričke podatke, koji se nazivaju i kategorički podaci. Mod je vrlo lako za pronaći i utječe vrlo malo na ekstremne rezultate. Učenike često zanima koja je stavka na grafu dobila najviše glasova. Dakle, njihovo početno iskustvo s prosjekom počinje s modom.

Dob učenika unutar razreda pružaju izvrsnu primjenu moda jer u određenom razredu, veliki broj djece su "iste" dobi. Tvrtke također često se oslanjaju na mod za odabir robe. Na primjer, vlasnik trgovine obucom. Srednja vrijednost ili medijan za prodaju veličine cipela nema praktičnu vrijednost za određivanje zaliha, ali mod veličine cipela ima jasne implikacije zato što želimo zalihe veličine cipela koje većina ljudi nosi. U nekim slučajevima, skup podataka će imati višestruke vrijednosti koje se pojavljuju najčešće.

Na primjer, ako tražimo starost učenika u razredu, a to su 9 učenika ima 10 godina i 9 učenika ima 11 godina, znači da skup podataka ima dva moda. U slučaju dva moda, skup se smatra dvomodalnim; tri moda se zove trimodalnim i tako dalje.

Ukoliko su izmjerene sljedeće vrijednosti:

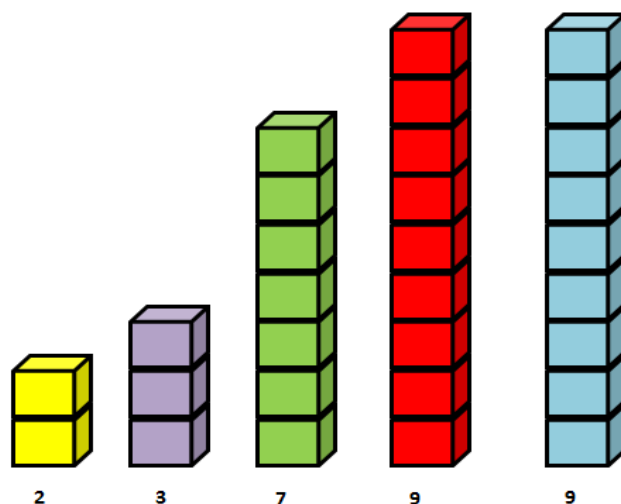
1, 2, 5, 6, 5, 3, 1, 2, 7, 2, 2, 3, 3.

Vidimo da su najviše puta izmjerene dvije vrijednosti: 2 i 3 izmjerene su točno 4 puta. Mod tog skupa podataka nije jedinstven.

## Medijan

Medijan je još jedna vrsta prosjeka koji se može lako identificirati bez potrebe za izračunavanjem. On koristi samo numeričke podatke te je srednja vrijednost u skupu podataka. Medijan dijeli podatke u dvije jednake podskupine. Tako je isti broj vrijednosti iznad kao i ispod medijana. Način njegovog izračuna ovisi o tome imamo li paran ili neparan broj izmjerenih podataka. Medijan je lako ilustrirati.

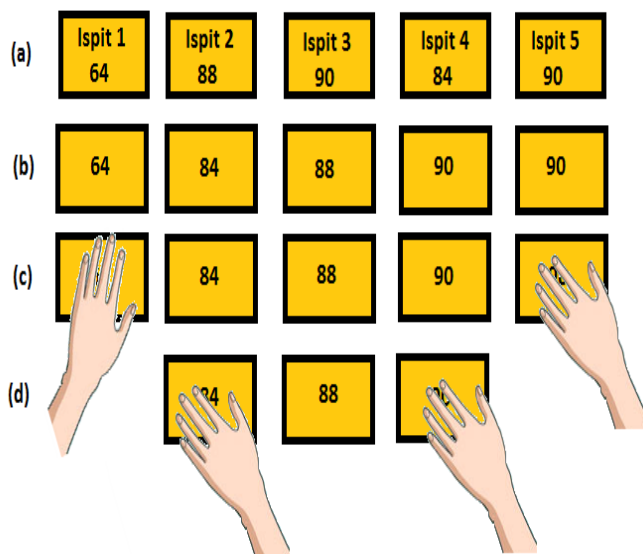
Ukoliko imamo neparan broj izmjerenih podataka, onda postoji vrijednost koja je na srednjoj poziciji u skupu podataka pa nju definiramo kao medijan. Pogledajte još jednom dječju dob na slici 20. Prije traženja medijana podaci moraju biti sortirani. Na primjer, kockice su složene od najmanje do najveće. Lako je vidjeti da je srednja vrijednost ili medijan kockica je 7.



SLIKA 20. Dječja dob.

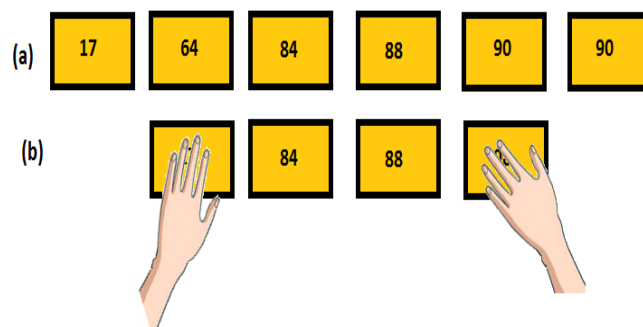
Jedan način vizualne prezentacije medijana jest da djeci damo papir s kvadratićima koji ima točno onoliko kvadratića koliko imamo podataka. Trebaju u svaki kvadratić staviti točkicu koja će prezentirati podatak i presavinuti taj papir na pola. Presavinuta linija predstavlja medijan. U primjeru godina djece medijan nam govori da ima podjednako djece u grupi od 2-7 godina kao i u grupi od 7-9 godina.

Medijan se također može modelirati s brojevima. Na primjer, promatramo pet rezultate ispita kao što je prikazano na karticama na slici 21a. Redajući ih od najmanjeg do najvećeg kao što je prikazano na slici 21b. Pruža vježbu u korištenju veće od, manje od i vještine poretka elemenata. Da biste pronašli srednji rezultat ili medijan, jednostavno izvadite najviše i najniže kartice istovremeno kao što je prikazano na slikama 21c i 21d. Nastavljajući ovaj proces sve dok ne dođete do srednje kartice. Ovdje je to rezultat 88 i on predstavlja medijan.



SLIKA 21. Pronalaženje medijana unutar pet ispitnih rezultata.

Postoji pet bodova na slici 21. Pretpostavimo da smo ostvarili još jedan rezultat od 17. Redosljed šest ispitnih rezultata kao što je prikazano na slici 22a te možemo napraviti novi razmjestaž. Opet, izvadite najveću i najnižu karticu istovremeno sve dok dvije kartice ne ostanu u sredini. U tom slučaju kao što je prikazano na slici 22b medijan je srednja točka između ta dva rezultata i iznosi 86. Ako zbrojite te dvije preostale kartice i podijelite sa 2, dobit ćete medijan kao  $\frac{84+88}{2} = 86$ . Preporuka je da se prvo učenici upoznaju s medijanom neparnim brojem izmjerenih podataka, a zatim s parnim.

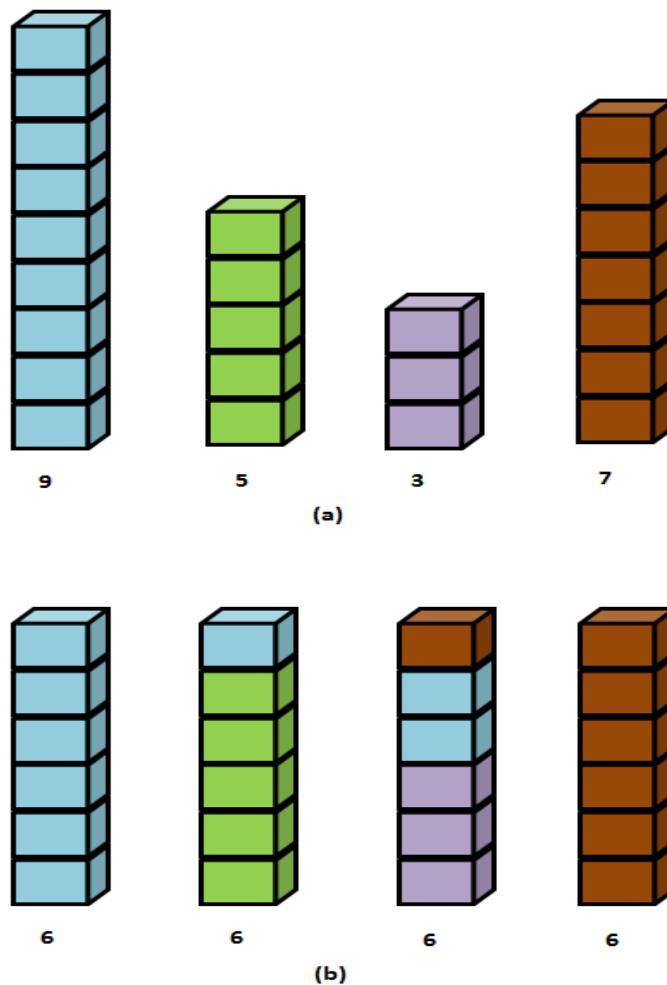


SLIKA 22. Pronalaženje medijana unutar šest ispitnih rezultata.

### Srednja vrijednost

Srednja vrijednost se zove aritmetički prosjek jer je određena zbrajanjem svih vrijednosti i dijeljenjem s brojem koliko ima podataka. Srednju vrijednost je najteže izračunati iako to može biti shvaćeno od strane učenika već u višim razredima osnovne škole. Ona koristi samo brođane podatke. Kada ljudi govore o pronalaženju prosjeka u skupu podataka, često se izračunava srednja vrijednost. Važno je da učenici shvate što je srednja vrijednost i da nije jedina vrsta prosjeka.

Pružanje konceptualne interpretacije za srednju vrijednost pomaže razviti razumijevanje prosjeka. Recimo da četiri učenika imaju 9, 5, 3 i 7 trgovačkih kartica. Slika 23a prikazuje broj kartica koje ima svako dijete. Prva interpretacija uključuje koncept jednake raspodjele ili dijeljenje i ideja je vrlo poznata učenicima. U ovoj interpretaciji, srednja vrijednost je definira kao broj koji opisuje podatak kao da je svaki podatak u ravnoteži s ostalima ili je isti kao i svi ostali. Ako zamolimo učenike da podijele kartice, tako da svaki učenik ima jednak broj kartica, ovaj proces podrazumijeva 6 kartica po učeniku (slika 23b).

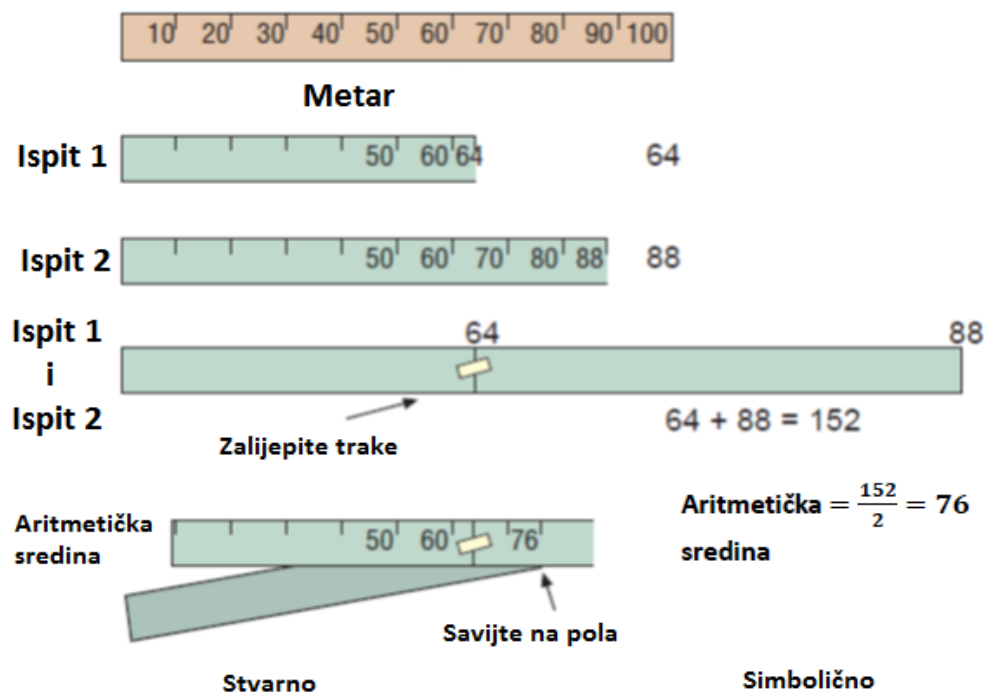


SLIKA 23. Model djeljenje na jednake djelove.

Kad učenici steknu iskustvo i dovoljno se upoznaju također mogu shvatiti za veliku količinu podataka kao što je cijeli razred. Pokušaj podjele postaje otežan. Učenici često sami otkriju zbroji-pa-podjeli algoritam ili ih možete upoznati sa konkretnim materijalima. Srednja vrijednost se također može odrediti računanjem:

$$\text{Srednja vrijednost} = \frac{9 + 5 + 3 + 7}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Slika 24. pokazuje put za modeliranje zbroji-pa-podjeli algoritam za srednju vrijednost. Rezultate ispita učenici dobivaju na dijelovima trake i svaka dužina trake određena je rezultatom (npr. rezultat 88 dužina trake 88 cm, a rezultat 64 je 64 cm trake). Rezultati se mogu usporediti koristeći trake. Za predstavljanje srednjeg rezultata spojimo dvije trake zajedno i potom tu traku podjelimo na pola. To također ilustrira efekt rezultata ispita od 0 bodova kada se rezultat trake povećava za 1. Koristeći ovaj primjer, za tri rezultata ispita od 88, 64 te 0 bodova. Duljina trake je još uvijek 152 cm. No, ako smo vrpce presavili na trećine, a ne na pola, duljina trake je malo više od 50 cm. Dakle, srednji rezultat ispita se spustio za više od 25 bodova! Ova tehnika je jako privlačna.



SLIKA 24. Traženje srednje vrijednosti pomoću duljine trake za označavanje ispitnih rezultata.

Kada uoče da su svi podaci podjeljeni jednako i kada učenici postanu dovoljno vješti s tim konceptom izjednačavanja, mogu raspravljati što učiniti s ostacima, što daje prirodnu povezanost s decimalnim brojevima.

Oni također mogu razgovarati o tome kako se neki podaci ne mogu podijeliti i kako neki prosjeci koji se izračunavaju nisu realni. Na primjer, jedan podatak navodi da je srednja vrijednost u obitelji prosječan broj djece je 2,5. Učenici će brzo uočiti da ne možemo imati pola djeteta ili  $\frac{5}{10}$  djeteta.

### Mjere varijacije

Kada učenici istražuju mjere centralne tendencije, oni bi trebali raditi s više skupova podataka koja imaju isti medijan i mod.

Igrači	Broj koševa u posljednjih 10 utakmica	Srednja vrijednost	Medijan	Mod
Igrač 1	16, 20, 20, 18, 22, 24, 20, 20, 20, 20	20	20	20
Igrač 2	10, 2, 20, 36, 4, 20, 38, 0, 30, 40	20	20	20

TABLICA 3. Broj koševa koje su zabila dva košarkaša u posljednjih deset utakmica.

Prilikom usporedbe podataka, treba napomenuti da je aritmetička sredina, medijan i mod ne mogu razlikovati između dva igrača. U ovom slučaju, mjerom varijabilnosti može se razlikovati njihova izvedba, što ilustrira razliku u dosljednosti dva igrača.

Mjere varijabilnosti se koriste za opisivanje raspršenosti podataka. Jedna mjera varijabilnosti je raspon. Raspon je jednostavna mjera koja nam govori razliku između maksimalne i minimalne vrijednosti u skupu podataka. Raspon za prvog igrača je rezultat koji se može postići oduzimanjem 16 od 24, što je rezultiralo u rasponu 8; za drugog igrača je rezultiralo oduzimanjem 0 od 40, što je rezultiralo rasponom od 40. Razlika u rasponima pokazuje da drugi igrač ima mnogo više varijabilnost u svojim rezultatima.

Još jedna mjera varijabilnosti koju mogu istražiti učenici osnovnih škola je srednja apsolutna devijacija ili odstupanje. Apsolutna devijacija srednje vrijednosti u vezi je sa udaljenosti (uvijek pozitivna) za svaki unos podataka od srednje vrijednosti. Udaljenost možemo odrediti uzimajući apsolutnu vrijednost razlike između srednje vrijednosti i odabrane vrijednosti.

Igrač 1		Igrač 2	
16	$ 16 - 20 =4$	10	$ 10 - 20 =10$
20	$ 20 - 20 =0$	2	$ 2 - 20 =18$
20	$ 20 - 20 =0$	20	$ 20 - 20 =0$
18	$ 18 - 20 =2$	36	$ 36 - 20 =16$
22	$ 22 - 20 =2$	4	$ 4 - 20 =16$
24	$ 24 - 20 =4$	20	$ 20 - 20 =0$
20	$ 20 - 20 =0$	38	$ 38 - 20 =18$
20	$ 20 - 20 =0$	0	$ 0 - 20 =20$
20	$ 20 - 20 =0$	30	$ 30 - 20 =10$
20	$ 20 - 20 =0$	40	$ 40 - 20 =20$
Zbroj	12	Zbroj	128
Prosjek	$12/10=1.2$	Prosjek	$128/10=12.8$

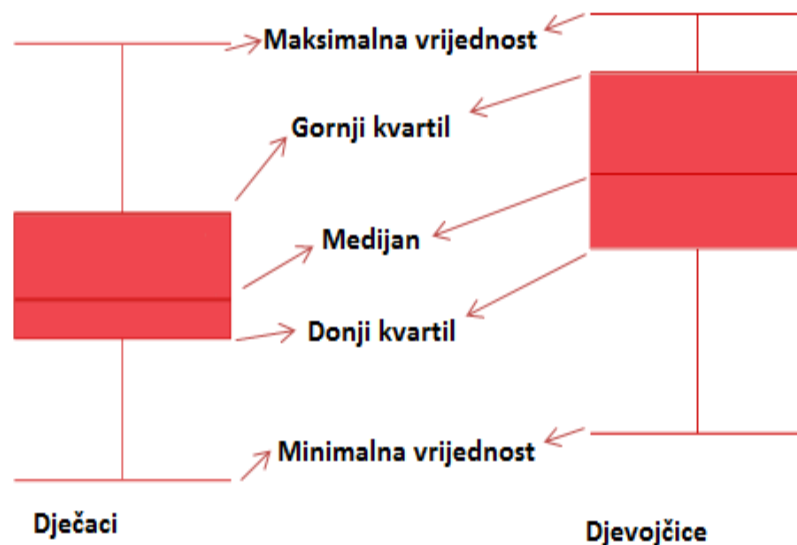
TABLICA 4. Izračun srednje vrijednosti apsolutnog odstupanja.

Tablica 4. pokazuje izračun srednje vrijednosti apsolutnog odstupanja rezultata za podatke košarkaških rezultata iz tablice 3. Srednja apsolutna devijacija pokazuje da je prvi igrač bio je mnogo dosljednije od drugog igrača.

Uvođenje raspon i srednje apsolutne devijacije za mjerenje varijabilnosti su važni za osnovnu školu da pripremi učenike za proučavanje varijance i standardne devijacije u srednjoj školi.

### Kutijasti dijagram

Kutijasti dijagram sumira podatke i pruža vizualni prikaz srednje vrijednosti varijabilnost odnosno širenja podataka. Kutijasti dijagram je prikazan na slici 25. uspoređuje visinu dječaka i djevojčica.



SLIKA 25. Kutijasti dijagram za visinu dječaka i djevojčica.

Prikazuje odnos pet numeričkih karakteristika skupa izmjerenih vrijednosti: minimalnu vrijednost, donji kvartil, medijan, gornji kvartil i maksimalnu vrijednost.

Medijan je ključna točka jer odgovara 50% vrijednosti s obzirom da je barem 50% podataka manje ili jednako medijanu i barem 50% podataka veće ili jednako medijanu. Donji kvartil je medijan donje polovice podataka odnosno dvadeset pet postotna vrijednost, a gornji kvartil je medijan gornje polovice podataka odnosno sedamdeset pet postotna vrijednost. Oni su pronađeni proučavanjem medijana podataka u gornjoj i donjoj polovici. Raspon između kvartila je mjera varijabilnosti i razlika između gornjeg i donjeg kvartila. Na slici 25. je raspon za dječake je 17 ( $142 - 125$ ) te za djevojčice je 18 ( $148 - 130$ ). Najmanja i najveća visina predstavlja minimum i maksimum. Linije (koje se nazivaju „brkovi“) protežu se od vrha gornjeg kvartila do maksimalne vrijednosti i onda od dna donjeg kvartila do minimalne vrijednosti što daje dodatni vizualni oblik varijabilnosti.

Kutijasti dijagram prikazuje mnoge stvari. Na primjer, pokazuje da je medijan visine za djevojčice veći od onoga za dječake. Iako skupine imaju približno isti raspon, dječaci su malo više ravnomjerno raspoređeni tijekom cijelog kutijastog dijagrama od onog za djevojčice. (Zašto? Zato što medijana dječaka je bliže sredini kutijastog dijagrama nego što je medijan od djevojčica.)

Kutijasti dijagram proizlazi prirodno iz dijagrama peteljka-list ili linijskog grafa. Kutijasti dijagram pokazuje koliko su važne vizualne karakteristike grupe te omogućuje laku usporedbu dvije ili više skupina koje su prikazane na istom grafu.

Kutijasti dijagram je prikladan način prikaza podataka za učenike osnovne škole. Osim toga, mnogi standardizirani rezultati ispitivanja su prikazani kao kutijasti dijagrami tako da je ovo važna vrsta grafa za razumijevanje.



### 3.6 Interpretacija rezultata

Interpretacija je posljednjih korak u procesu izrade statističke analize, ali ne manje važan. Nekad se pitanja fokusiraju više na matematičke, nego statističke ideje. Iako su matematička pitanja korisna, ključna su statistička pitanja. To znači da se pitanja fokusiraju na kontekst situacije i na to što se može zaključiti iz toga. Dodatno treba uključiti varijabilnost, srednji podatak i oblik podataka.

Važno je da učenici nauče priopćiti svoje rezultate drugima. Njihova konačna prezentacija može uključivati usmenu i pisanu komunikaciju ili oboje. Oni moraju naučiti jasno izložiti odgovore na svoja izvorna pitanja i hipoteze i odabrati najprikladniji način prenošenja svojih zaključaka u grafičkom obliku ili pomoću drugih statističkih mjera. Oni trebaju biti u stanju pročitati i procijeniti statističke podatke koje su predstavili kao što je materijal predstavljen u medijima. Cilj je da učenici razviju i procesno znanje (kako konstruirati dijagram ili izračunaju deskriptivne statistike) i konceptualna znanja (razumijevanje što je to graf i statističko komuniciranje) (Friel, 1998. u *Helping Children learn Mathematics*, 2004.).

Interpretacija podataka treba ići u krajnju fazu iako neka pitanja mogu biti integrirana i u srednjoj fazi. Bitno je pripremiti učenike da budu pismeni pri interpretaciji podataka i da vide što se ne može interpretirati iz podataka odnosno da vide razliku između dobrih i loših statistika. To je važno za uspjeh u školi, kao i za biti matematički pismen građanin.

Neke učeničke projekte može biti zanimljivo podijeliti s lokalnim medijima. Prezentacija može biti i za ostale kolege u razredu. Međutim, prezentacija nekome izvan učionice može biti osobito značajna.

## 4 Eksperimenti i simulacije

### 4.1 Zašto je važno koristiti eksperimente pri poučavanju statistike?

Postoji mnogo razloga zbog kojih je važno pri poučavanju statistike s učenicima koristiti eksperimente. Kada učenici provode eksperiment, koriste metode promatranja i stečene vještine često uklapaju znanstvene metode. Na primjer, učenici mogu kreirati eksperiment izmjeriti učinak primjene različite vrste gnojiva na rast biljaka ili usporediti vrijeme leta različitih papirnatih zrakoplova. Učenicima je učenje pomoću eksperimenata zanimljivije i zabavnije.

Pokušajte koristiti eksperimentalnu metodu u razredu kad god je to moguće. Kreirajući zanimljive probleme koje je potrebno proučiti. Ukoliko je moguće, dobro je i teoretski analizirati eksperiment.

Provođenje eksperimenta: započinje s problemom, dizajniranjem i implementacijom načina rješavanja problema i naravno završava analiziranjem dobivenih rezultata.

### 4.2 Simulacije

Iako je simulacija slična eksperimentu. To je tehnika koja se često koristi pri rješavanju kompleksnih problema. Često se simulacije provode zbog toga što su promatrane realne situacije previše komplicirane, opasne ili skupe.

Uzimanje uzorka je još jedna metoda prikupljanja podataka koju učenici mogu koristiti. U statistici cijela grupa koju ste proučavali naziva se populacija. U stvarnom životu ponekad nije moguće ili je nepraktično prikupiti podatke cijele populacije. Uzorak je podskup populacije. Uzorci se često prikupljaju kako bi naučili više o zdravstvenim problemima ili kupnovnim navikama ili predviđanju rezultata izbora. Važno je da učenici shvate da korištenje pojedinog uzorka može uzrokovati pristranost potrage i rasprave o načinima za smanjivanje predrasuda.

### 4.3 Statistika uz pomoć tehnologije

Budući je prije nekoliko godina u osnovnu školu uvedeno poglavlje vezano za statistiku, toj cjelini više od ostalih područja matematike je potrebna upotreba računala. Korištenjem računala je moguća brza i pouzdana obrada velikog broja podataka, kvalitetna statistička analiza i prezentacija rezultata. U današnje vrijeme je normalno posegnuti za računalom u takvim situacija. Naravno, učenike treba upoznati i s klasičnim pristupom pri obradi i analizi podataka. Prije uporabe računala, moraju biti jasni pojmovi poput obilježja skupa podataka, mjere tendencije i mjere raspršenosti podataka. Ove mjere ne bi trebao biti problem odrediti učenicima na manjem skupu podataka ili uz pomoć kalkulatora, ali se problem javlja kada imamo veliki skup podataka i tada se može koristiti računalo.

Postoje različiti programi za statističku obradu podataka. Većinom u svim školama je instaliran Microsoft Office s programom za tablični proračun Excel. Također, ima i drugih programa poput GeoGebre koja je vrlo moćan program za statističku analizu.

Nastavnicima tehnologija štedi vrijeme jer ne moraju izrađivati materijale pomoću kojih bi izvodili eksperimente. Učenicima je pomoću tehnologije lakše grafički prikazati svojstva i rezultate eksperimenta.

## 5 Predmetni kurikulum za matematiku

Budući je ove godine izrađen prijedlog promjena u nastavom planu i programu za osnovno i srednjoškolsko obrazovanje, u ovom poglavlju će biti navedeno što je to kurikulum te što se obrađuje iz statistike u pojedinom razredu.

Nacionalni okvirni kurikulum predstavlja osnovne sastavnice predškolskog, općega i srednjoškolskoga odgoja i obrazovanja te uključuje odgoj i obrazovanje djece s posebnim potrebama. To je temeljni dokument koji definira svrhu, ciljeve, područja, cikluse, načela obrazovanja i što opće obrazovani učenik mora postići.

U matematici neke sadržaje treba poznavati i razumjeti, ali ih treba moći i primijeniti u životu. Postoje dvije istaknute dimenzije matematičkog obrazovanja: matematički procesi i matematički koncepti ili sadržaji.

Važno je usvojiti te koncepte kako bismo razumjeli svijet oko nas. Koncepti su grupirani u nekoliko domena: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje i Podaci, statistika i vjerojatnost. Domene se postepeno razvijaju i nadograđuju i prilagođene su razvojnim mogućnostima učenika. Domene povezuju srodne koncepte i važno ih je usvojiti. Usvajanje koncepta jedne domena je često pretpostavka usvajanja konceptata druge domene. Usvajanjem svih konceptata domena stječu se matematička znanja i vještine i razvijaju matematičke kompetencije. Treba naglasiti da je i odabir primjerenih strategija poučavanja te kreativnost izvedbe nastavnog procesa može utjecati na razinu usvojenosti znanja i stjecanje vještina.

Budući se ovaj rad temelji na poučavanju statistike u školama. Obratit ćemo pozornost na domenu vezanu za statistiku, a to su: Podaci, statistika i vjerojatnost. Ova domena se bavi prikupljanjem, ravnostavljanjem, obradom, analizom i prikazivanjem podataka u prigodnom obliku. Podatke koji su grafički prikazani ili u nekom drugom obliku treba znati čitati i ispravno tumačiti i upotrijebiti, a to se postiže koristeći statistiku. Statistika podrazumijeva upotrebe matematičkih alata kojim se računaju mjere srednje vrijednosti, mjere raspršenosti, mjere položaja i korelacije podataka te usvojenosti prepoznavanja veza među podacima i promatranja frekvencija.

Pogledajmo prijedlog za ovu domenu:

U petom razredu osnovne škole se učenici susreću sa statistikom baratajući podacima prikazanim na različite načine. Povezuju, uspoređuju i tumače podatke prikazane u tablicama, slikama, listama te različitim grafovima i dijagramima prikazanim u prvom kvadrantu u koordinatnom sustavu u ravnini. Na vodoravnu os nanose obilježja skupa podataka, a na okomitu broj elemenata skupa s danim obilježjem. Odgovaraju na pitanja koja nadilaze izravno čitanje podataka. Iz zadanog prikaza određuju skup objekata, obilježja skupa, broj elemenata skupa s danim obilježjem. Ovaj ishod se može ostvariti sa stvarnim istraživanjem u nekom razdoblju poput: nataliteta, zdrave prehrane, potrošnje energije. . .

U šestom razredu nadograđuju svoje znanje prikazujući podatke tablično te linijskim i

stupčastim dijagramom frekvencije. Prikupljaju i razvrstavaju podatke te određuju frekvencije razvrstanih podataka.

U sedmom razredu učenici mogu prikupljati, razvrstavati podatke i određivati frekvencije i relativne frekvencije razvrstanih podataka. Prikazuju podatke tablično, stupčastim dijagramom relativnih frekvencija. Analiziraju rezultate i raspravljaju o njima i donose odluke na osnovu prikazanih i analiziranih podataka.

U trogodišnjim srednjim školama učenici nauče računati aritmetičku sredinu statističkih podataka prikazanih na različite načine. Prepoznavanje obilježja skupa objekata, prikupljaju podatke o njima, organiziraju ih tablično, određuju frekvencije i relativne frekvencije podataka. Određuju srednje vrijednosti prikupljenih podataka. Crtaju linijske i stupčaste dijagrame frekvencija i relativnih frekvencija, te kružne dijagrame relativnih frekvencija. Analiziraju rezultate i diskutiraju o njima.

U četverogodišnjim školama učenici nauče sve što i učenici u trogodišnjim srednjim školama i još neke stvari kao što je prikazivanje podataka tablično, stupčastim dijagramom, histogramom, dijagramom peteljka-list, linijskim dijagramom itd. Određuju srednje vrijednosti kao što su mod, medijan, donji i gonji kvartil te standardnu devijaciju te crtaju kutijasti dijagram.

## 6 Zaključak

Statistika je grana matematike sa širokom primjenom u stvarnom svijetu. Zato svakodnevno raste potreba za statistikom, a time raste i potreba za njezinim poznavanjem. Učenicima se treba predstaviti na zanimljiv i razumljiv način. Kroz osmišljene, zanimljive primjere nastavnik bi trebao motivirati učenike za rad i pobuditi želju za stjecanje novog znanja. Važno je proučavati i pronalaziti zanimljive načine kojima bi se zainteresirali učenici. Provođenjem eksperimenata i korištenjem tehnologije u nastavi matematike potičemo radoznalost učenika. Iako statistika postaje nužno potrebna u svakodnevnoj praksi, uvijek treba imati na umu da je statistika samo alat, a nije zamjena za zdrav razum.

## 7 Sažetak

Tema ovog rada su metode poučavanja statistike u nastavi matematike. U radu smo se najprije upoznali s osnovnim pojmovima iz statistike i samom defincijom statistike, a zatim načinom rada statistike. U radu su navedeni mnogi primjeri koji su prigodni za obradu te nastavne cjeline. Primjeri su prilagođeni interesima učenika. Na posljetku je naglašena važnost korištenja eksperimenata i simulacija pri poučavanju statistike u školama te upotreba tehnologije.

## 8 Summary

Topic of my work are methods of teaching the statistics in mathematics. First of all, we were introduced to the basic concepts of statistics and the definitions of statistics, and then statistics mode. Many examples suitable for this teaching unit are adduced in this work and adapted to the students interests. Ultimately, the importance of using experiments and simulations while teaching statistics in schools were emphasized and the use of technology.



## Literatura

- [1] S. BANIĆ, S. JANEŠ, J. KLIČINOVIĆ, I. LOVIĆ ŠTENC, I. MIŠURAC, A. OSTOJIĆ, G. PAIĆ, S. ŠIŠIĆ, E. ŠPALJ, Đ. TRUPINIĆ, *Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta matematika-prijedlog*, Zagreb, 2016.
- [2] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.
- [3] L. KRALJ, D. GLASNOVIĆ GRACIN, Z. ČURKOVIĆ, M. STEPIĆ, S. BANIĆ, *Petica 7, udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole*, SysPrint, Zagreb, 2007.
- [4] L. KRALJ, D. GLASNOVIĆ GRACIN, *Nastava statistike u osnovnoj školi*, Matematika i škola, **31**(2005), 11–15.
- [5] L. KRALJ, D. GLASNOVIĆ GRACIN, *Nastava statistike u osnovnoj školi (2)*, Matematika i škola, **32**(2005), 64–68.
- [6] R. E. REYS, M. M. LINDQUIST, D. V. LAMBDIN, N. L. SMITH, *Helping Children learn Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., United States, 2004.
- [7] Š. ŠULJIĆ, *GeoGebra 3.2 otvara širom vrata statistici i vjerojatnosti*, Matematika i škola, **48**(2009), 134–139.
- [8] Š. ŠULJIĆ, *Statistika uz pomoć programa GeoGebra 4.0*, Matematika i škola, **61**(2011), 39–43.
- [9] J. A. VAN DE WALLE, K. S. KARP, J. M. BAY-WILLIAMS, *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally.-7th ed.*, Allyn & Bacon, Boston, 2010.

## 9 Životopis

Gordana Pavlović je rođena 20. travnja 1990. godine u Đakovu. Pohađala je Osnovnu školu Josipa Antuna Čolnića u Đakovu, a nakon završetka osnovne škole upisala je Srednju strukovnu školu Braće Radića Đakovo u Đakovu. Godine 2009. upisala je Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.