Primjene kompleksnih brojeva

Vučičević, Barbara

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Vučičević

Primjene kompleksnih brojeva

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Vučičević

Primjene kompleksnih brojeva

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2022.

Sažetak

U ovome završnom radu bavimo se kompleksnim brojevima i promatramo njihovu primjenu u trigonometriji i geometriji. U prvom poglavlju upoznajemo se sa povijesti kompleksnih brojeva, uvodimo definiciju skupa kompleksnih brojeva i algebarskog zapisa kompleksnog broja, trigonometrijskog zapisa te ga prikazujemo u Gaussovoj ravnini. Navodimo neka svojstva i algebarske operacije kompleksnih brojeva. U drugom poglavlju kroz primjere pokazujemo primjene kompleksnih brojeva u trigonometriji i geometriji.

Ključne riječi: kompleksni brojevi, trigonometrijski zapis kompleksnog broja, trigonometrija, geometrija

Applications of complex numbers
Abstract

In this final work, we deal with complex numbers and observe their application in trigonometry and geometry. In the first chapter, we get acquainted with the history of complex numbers, we introduce the definition of the set of complex numbers and the algebraic notation of a complex number, the trigonometric notation, and we show it in the Gauss plane. Then we list some properties and algebraic operations of complex numbers. In the second chapter, through examples, we show the applications of complex numbers in trigonometry and geometry.

Keywords: complex numbers, trigonometric notation of complex numbers, trigonometry, geometry

Sadržaj

Uvod

U ovom završnom radu bavimo se kompleksnim brojevima i njihovim primjenama.
U prvom poglavlju se upoznajemo sa matematičarima koji su doprinjeli razvoju kompleksnih brojeva. Definiramo skup kompleksnih brojeva, imaginarnu jedinicu i algebarski zapis kompleksnog broja. Za takav zapis definiramo algebarske operacije i neka svojstva. Također definiramo zapis kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku i pokazujemo kompleksni broj u Gaussovoj ravnini.
U drugom poglavlju kroz primjere pokazujemo primjene kompleksnih brojeva u trigonometriji i geometriji.

1 Kompleksni brojevi

1.1 Povijest kompleksnih brojeva

Kako bi svaka kvadratna jednadžba imala rješenje, u matematici se počinju upotrebljavati kompleksni brojevi. Na primjer, vidimo da jednadžba

$$x^2 + 4 = 0$$

nema rješenja u skupu realnih brojeva. Nakon uvođenja kompleksnih brojeva može se vidjeti da jednadžba ima rješenja i da su ta rješenja $x_1 = 2i$ i $x_2 = -2i$.
Kasnije se kroz povijest matematike dolazi do zaključka kako svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja, ima točno n rješenja.
Na primjer, pogledamo li jednadžbu

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = 0$$

koja ima dva različita jednostruka rješenja $x_1 = 3, x_2 = 2$ te dva jednostruka kompleksna rješenja $x_3 = 2i$ i $x_4 = -2i$. To se objašnjava na način da jednadžbu rastavimo na faktore:

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = 0 = (x - 3)(x - 2)(x + 4)^2$$

za svaki x iz skupa realnih, odnosno kompleksnih brojeva, tj. rastavom

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = 0 = (x - 3)(x - 2)(x - 2i)(x + 2i).$$

Važnu ulogu u razvoju kompleksnih brojeva imao je Rene Descartes[1] nakon što je uveo izraz realni i imaginarni dio kompleksnog broja. Razvoju kompleksnih brojeva pridonosi i Girolamo Cardano[2] koji je rješavajući jedan geometrijski problem dobio jednakost

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40$$

iz koje se vidi da je produkt "nerealnih brojeva" realan broj. On kompleksne brojeve počinje zvati "fiktivnima". Casper Wessel[3] je uveo njihov grafički prikaz te je takav prikaz bio objašnjen 1799. u časopisu koji je čitalo jako malo matematičara. Tek nakon 100 godina, za njegovu zamisao, odato mu je priznanje.
Gauss[4] je svojim velikim učinkom ostvario univerzalno prihvaćanje kompleksnih brojeva. Nevezano za Wessela, Gauss je kompleksne brojeve smjestio u ravninu koja se naziva Gaussova ravnina. Za uvođenje slova i, imaginarne jedinice, zaslužan je Leonhard Euler[5].

[1]Rene Descartes, francuski filozof, fizičar, matematičar (1596. - 1650.)
[2]Girolamo Cardano, talijanski fizičar, matematičar, astronom, liječnik i filozof (1501. - 1576.)
[3]Caspar Wessel, dansko-norveški matematičar i kartograf (1745. - 1818.)
[4]Carl Friedrich Gauss, njemački geodet, matematičar, fizičar i astronom (1777. - 1855.)
[5]Leonhard Euler, švicarski matematičar, fizičar i astronom (1707. - 1783.)

1.2 Definicija skupa kompleksnih brojeva

U ovome potpoglavlju definirati ćemo skup kompleksnih brojeva te kompleksni broj. U skupu kompleksnih brojeva definirati ćemo operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, te ćemo kroz primjere pokazati primjenu operacija.

Za definiranje kompleksnih brojeva prvo moramo definirati skup kompleksnih brojeva u idućoj definiciji.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [1].

Definicija 1.2.1. *Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je najmanji skup za koji vrijedi:*

1) Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sadržan je u skupu $\mathbb{C}$.

2) Skup $\mathbb{C}$ sadrži rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$.

3) U skupu $\mathbb{C}$ definirane su operacije zbrajanja i množenja i vrijede sva pravila algebarskog računa naslijeđena iz skupa $\mathbb{R}$.

Možemo vidjeti da ne postoji rješenje jednadžbe $x^2+1 = 0$ u skupu realnih brojeva. Rješenje te jednadžbe je $x^2 = -1$. Takvo rješenje nazivamo imaginarnom jedinicom i označavamo ga s i. Iz svojstva 2) slijedi da i pripada skupu $\mathbb{C}$.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [1].

Definicija 1.2.2. *Broj i je takav kompleksan broj za koji vrijedi $i^2+1 = 0$, odnosno, $i^2 = -1$. Takav broj nazivamo imaginarna jedinica.*

Iz svojstava 1) i 3) skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ pripadaju i brojevi koji su oblika 5i, (-2)i,... . Generalno, brojevi oblika yi za svaki $y \in \mathbb{R}$, te takve brojeve zovemo imaginarnim brojevima.
Zbrajanjem brojeva iz skupa kompleksnih brojeva, rezultat mora biti u tom skupu. Također sukladno sa svojstvima 1) i 3), skup $\mathbb{C}$ sadrži brojeve oblika 5+4i, 2-2i,... . Općenito su to brojevi oblika $x + yi$ za $x, y \in \mathbb{R}$.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [1].

Definicija 1.2.3. *Kompleksan broj z je oblika*

$$z = x + yi \tag{1.1}$$

gdje su x i y realni brojevi. Broj x=Re z nazivamo realni dio, a y=Im z imaginarni dio kompleksnog broja z. Prikaz (1.1) naziva se algebarski prikaz kompleksnog broja z.

Za dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ te $z_2 = x_2 + y_2 i$ možemo reći da su ekvivalentna ako i samo ako su im realni i imaginarni dio jednaki, odnosno $z_1 = z_2$ ako i samo ako $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

U idućoj definiciji ćemo definirati skup kompleksnih brojeva na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definicija je preuzeta iz [3].

Definicija 1.2.4. *Skup* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ *u kome je definirano zbrajanje:*

$$(\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2) \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

i množenje:

$$(\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2) \qquad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

zovemo skup kompleksnih brojeva i označavamo s $\mathbb{C}$*, a njegove elemente zovemo kompleksnim brojevima.*

Iz definicije vidimo da skup kompleksnih brojeva možemo definirati kao

$$\mathbb{C} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

a kompleksni broj z se prikazuje kao uređeni par (x, y).
Ako promatramo podskup skupa $\mathbb{C}$ koji sadrži brojeve oblika $(x, 0)$, možemo reći da po Definiciji 1.2.4. vrijedi:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0).$$

Možemo vidjeti da smo kao rezultat zbrajanja i množenja dobili brojeve istoga oblika, čime se čuvaju algebarske operacije zbrajanja i množenja po prvoj komponenti.
To jest, za brojeve oblika $(x, 0)$ možemo reći da su realni brojevi koji su sadržani u $\mathbb{C}$. Takve brojeve označavamo s x i zovemo realnim brojevima.
Nadalje, broj $(0, 1)$ nazivamo imaginarnom jedinicom i označavamo ga s i, te za taj broj vrijedi:

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Po definciji zbrajanja i množenja, dobijemo:

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1).$$

Tu jednakost možemo na kraći način zapisati: $z = x + yi$.

U idućoj definicji definiramo algebarske operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja kompleksnih brojeva. Definicija je preuzeta iz [1]

Definicija 1.2.5. *Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva* $z_1 = x_1 + y_1 i$ *i* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *računaju se po formulama:*

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i,$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

U idućem primjeru ćemo pokazati kako se zbrajaju i množe kompleksni brojevi.

Primjer 1.2.6.

$$\begin{aligned}(5 + 3i) + (6 + 9i) &= 5 + 6 + (3 + 9)i \\ &= 11 + 11i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 + 4i)(2 - 5i) &= 2 - 5i + 8i - 20i^2 \\ &= 2 - 13i - 20 \cdot (-1) \\ &= 2 - 13i + 20 \\ &= 22 - 13i\end{aligned}$$

Skup $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva uz ovako definirane operacije zbrajanja i množenja čini polje. Vrijede sljedeća svojstva:

Aksiomi polja kompleksnih brojeva:
U skupu kompleksnih brojeva operacije zbrajanja i množenja imaju sljedeća svojstva:

$C_1)$ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (komutativnost zbrajanja),

$C_2)$ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (asocijativnost zbrajanja),

$C_3)$ $(\exists 0 \in \mathbb{C})\ z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (neutralnost nule za zbrajanje),

$C_4)$ $(\forall z \in \mathbb{C})(\exists (-z) \in \mathbb{C}) \quad z + (-z) = 0$ (postojanje suprotnog broja),

$C_5)$ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (komutativnost množenja),

$C_6)$ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (asocijativnost množenja),

$C_7)$ $1 \cdot z = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (neutralnost jedinice za množenje),

$C_8)$ $(\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0)(\exists z' \in \mathbb{C}) \quad z \cdot z' = 0$ (postojanje recipročnog broja),

$C_9)$ $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (distributivnost množenja prema zbrajanju)

Uzmimo proizvoljan $z = x + yi$. Sa $\overline{z}$ ćemo označavati broj

$$\overline{z} := x - yi$$

koji nazivamo kompleksno konjugirani broj broja z. Parom kompleksno konjugiranih brojeva nazivamo par $z, \overline{z}$, te za njih vrijedi

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Iz toga vidimo da je umnožak pozitivan realan broj.

Sada ćemo pokazati kako se dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dijele, te ćemo to primijeniti na primjeru.

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.
\end{aligned}$$

Formula se ne pamti nego se na primjeru samo primjenjuje postupak.

Primjer 1.2.7.

$$\begin{aligned}\frac{1-2i}{7+6i} &= \frac{1-2i}{7+6i}\cdot\frac{7-6i}{7-6i}\\ &= \frac{7-6i-14i+12i^2}{7^2+6^2}\\ &= \frac{7-20i-12}{49+36}\\ &= \frac{-5-20i}{385}\\ &= -\frac{1}{17}-\frac{4}{17}i\end{aligned}$$

Nakon što smo definirali kompleksno konjugirani broj $\overline{z}$, sada možemo definirati modul kompleksnog broja.
Iduća definicija je preuzeta iz [1].

Definicija 1.2.8. *Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + yi$ je realan nenegativan broj*

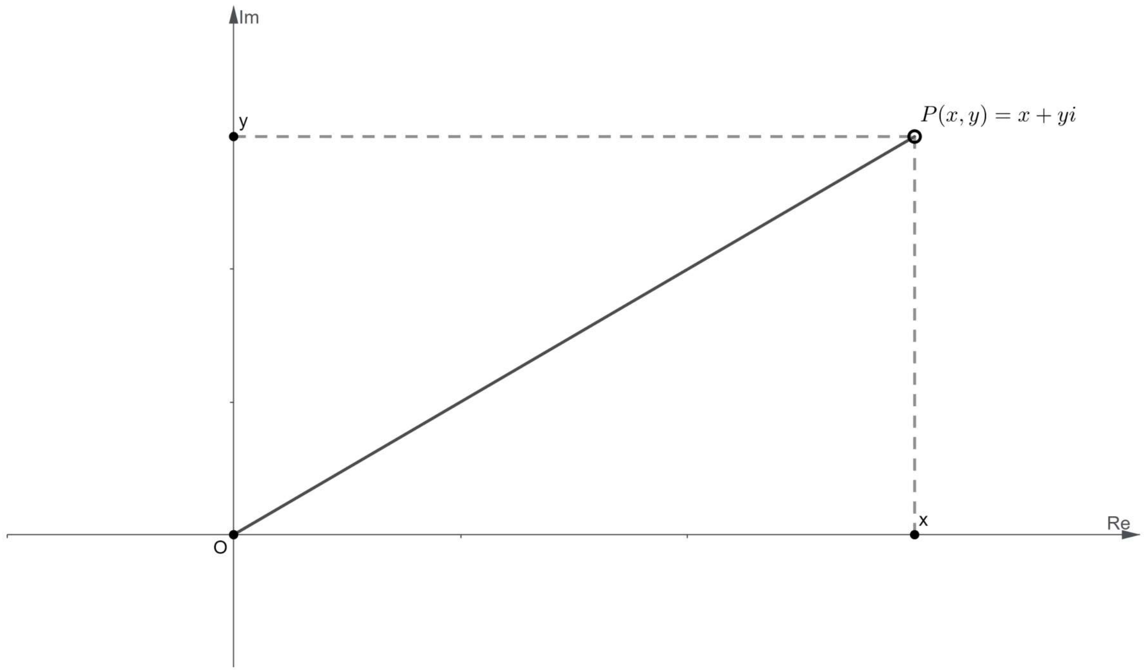
$$|z| := \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Vrijedi z=0 ako i samo ako $|z| = 0$. Ako je $z \neq 0$, onda je njegov modul pozitivan realan broj.

Sada ćemo navesti neka svojstva kompleksnih brojeva.
Za sve $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
6. $|z| = |\overline{z}|$
7. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

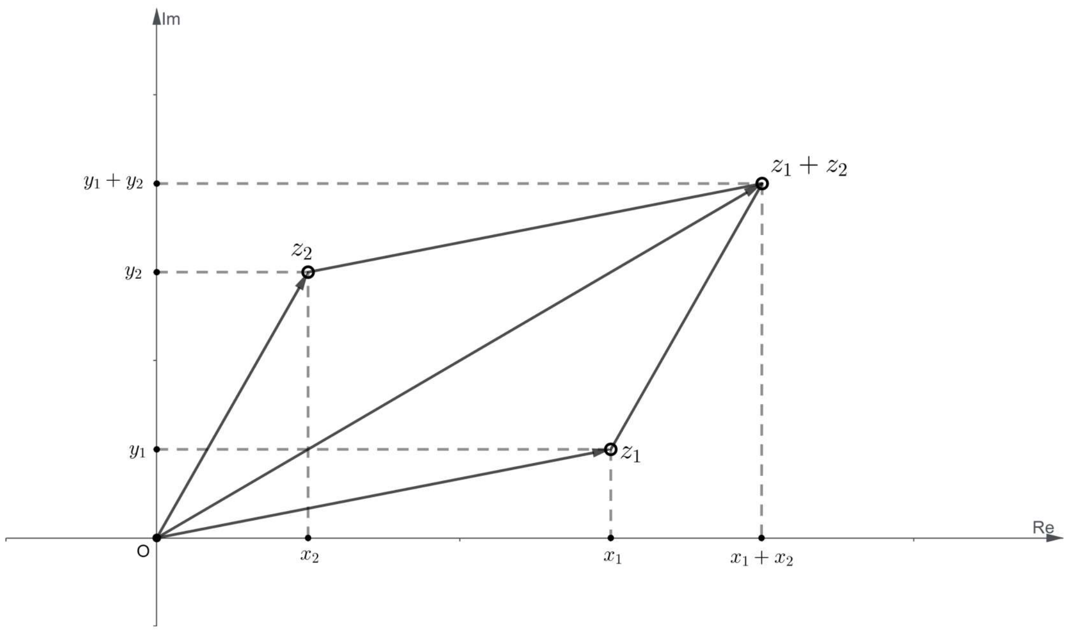
Svaki kompleksni broj se može prikazati u kompleksnoj ravnini ili Gaussovoj ravnini.
U Gaussovoj ravnini os Ox Kartezijevog sustava se zove realna os, a os Oy se zove imaginarna os.
Kao što smo vidjeli iz Definicije 1.2.4., svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ pripada uređeni par (x, y). Možemo reći da kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara točka $P(x, y)$.



Slika 1: Prikaz kompleksnog broja $z = x + yi$ u Gaussovoj ravnini

Kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara vektor s početkom u ishodištu i završetkom u točki $P(x, y)$.

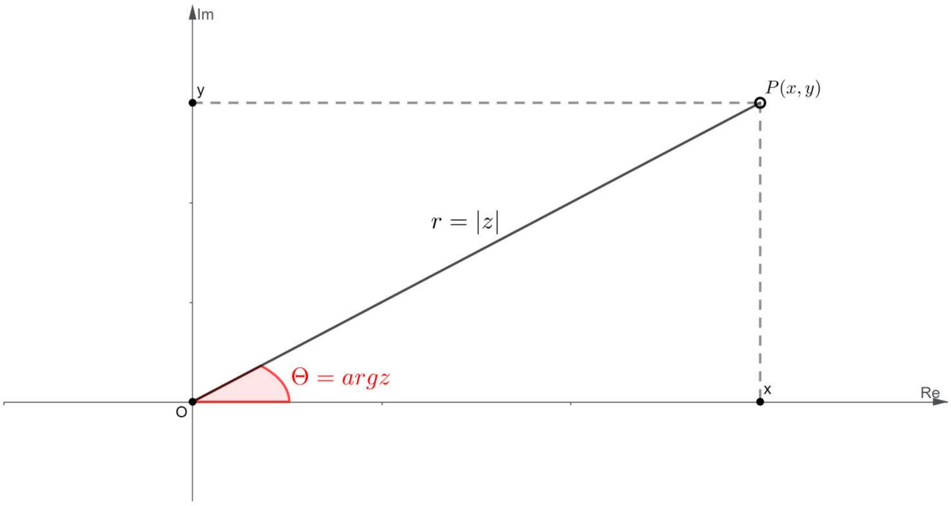
Za dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$, zbroj $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ u Gaussovoj ravnini se dobije 'pravilom paralelograma'.



Slika 2: Prikaz zbroja dva kompleksna broja u Gaussovoj ravnini

1.3 Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara jedinstvena točka $P(x, y)$ ravnine i obrnuto, svakoj točki $P(x, y)$ ravnine odgovara jedinstveni kompleksan broj $z = x + yi$. Sa Slike 3 vidimo da je Θ kut što ga spojnica od ishodišta O do točke $P(x, y)$ u Gaussovoj ravnini zatvara s pozitivnim smjerom realne osi.



Slika 3: Prikaz kompleksnog broja z u Gaussovoj ravnini

Iz Slike 3 možemo vidjeti da je:

$$\cos\Theta = \frac{x}{r}$$
$$\sin\Theta = \frac{y}{r}$$

to jest:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\Theta \\ y &= r\sin\Theta. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nakon uvrštavanja x i y u algebarski zapis kompleksnog broja $z = x + yi$ dobijemo:

$$z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta).$$

Takav zapis kompleksnog broja se naziva trigonometrijski zapis.

Ukoliko kvadriramo i zbrojimo izraz (1.2) dobit ćemo:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta)$$

iz čega slijedi da je:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vidimo da je r modul kompleksnog broja. Ukoliko točka P padne u ishodište tada je $r = 0$,a kut Θ nije određen.

S $arg(z)$ označavmo argument kompleksnog broja koji je mjera kuta Θ na intervalu $[0, 2\pi\rangle$. Podijelimo li jednadžbe (1.2) ili jednostavno isčitavanjem iz slike 3, za $x \neq 0$, dobijemo:

$$\tan\Theta = \frac{y}{x}.$$

Iz toga izraza se izračuna kut Θ. Prilikom računanja potrebno je pripaziti u kojem se kvadrantu nalazi kompleksni broj z.

U idućem teoremu ćemo opisati kada su dva kompleksna broja u trigonometrijskom zapisu jednaka.
Sljedeći teorem je preuzet iz [3].

Teorem 1.3.1. *Dva kompleksna broja z_1, z_2 zadana u trigonometrijskom obliku*

$$z_1 = r_1(\cos\Theta_1 + i\sin\Theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2)$$

jednaka su onda i samo onda ako je

$$r_1 = r_2 \qquad i \qquad \Theta_1 = \Theta_2 + 2k\pi$$

gdje je k neki cijeli broj.

Uz pomoć adicijskih formula iz trigonometrije:

$$\cos(\Theta_1 \pm \Theta_2) = \cos\Theta_1\cos\Theta_2 \mp \sin\Theta_1\sin\Theta_2$$

$$\sin(\Theta_1 \pm \Theta_2) = \sin\Theta_1\cos\Theta_2 \pm \cos\Theta_1\sin\Theta_2$$

provjeravamo pravila za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku.

Idući teorem govori o množenju i dijeljenju dva kompleksna broja dana u trigonometrijskom obliku. Sljedeći teoremi, korolar i definicija su preuzeti iz [3].

Teorem 1.3.2. *Neka je*

$$z_1 = r_1(\cos\Theta_1 + i\sin\Theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2).$$

Tada vrijedi:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + i\sin(\Theta_1 + \Theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\Theta_1 - \Theta_2) + i\sin(\Theta_1 - \Theta_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

Korolar 1.3.3. *Neka je $z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$z^n = r^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta).$$

Specijalno za $r = 1$ vrijedi Moivreova formula:

$$(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n = \cos n\Theta + i\sin n\Theta.$$

Definicija 1.3.4. *Za kompleksan broj z kažemo da je n-ti korijen iz kompleksnog broja w ako je $z^n = w$.*

Teorem 1.3.5. *Neka je* $w = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$, $r \neq 0$, *kompleksan broj zapisan u trigonometrijskom obliku. Tada jednadžba* $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, *ima točko n različitih rješenja*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\Theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\Theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Teorem 1.3.5. se naziva Moivreov teorem. Dokaz se može vidjeti u [3, str.21].
Uočimo da argumenti korijena

$$\frac{\Theta}{n}, \frac{\Theta + 2\pi}{n}, \frac{\Theta + 4\pi}{n}, ..., \frac{\Theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

čine aritmetički niz s razlikom $\frac{2\pi}{n}$ te je modul svakog korijena jednak $\sqrt[n]{r}$. Znači da korijeni $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ čine vrhove pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu sa središtem u ishodištu i polumjerom $\sqrt[n]{r}$.

2 Primjene kompleksnih brojeva

2.1 Primjene kompleksnih brojeva u trigonometriji

U ovome potpoglavlju ćemo kroz neke primjere pokazati primjenu kompleksnih brojeva danih u trigonometrijskom zapisu za dokazivanje identiteta. Idući primjeri su preuzeti iz [1].

Primjer 2.1.1. *Dokažimo identitet*

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

koristeći trigonometrijski zapis kompleksnog broja.

Polinom $P(x) = x^n - 1$ ima n nultočaka i sve su oblika

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, ..., n-1. \tag{2.1}$$

Vidimo da je $z_0 = 1$ pa vrijedi $x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x - z_k)$.

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{k=1}^{n-1}(x - z_k),$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}(x - z_k) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}. \tag{2.2}$$

Ukoliko uvrstimo $x = 1$ u (2.2) dobijemo

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - z_k) = n. \tag{2.3}$$

Uvrstimo (2.1) u (2.3):

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-z_k) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{2.4}$$

Formula za sinus dvostrukog kuta glasi:

$$\sin 2\Theta = 2\sin\Theta\cos\Theta, \tag{2.5}$$

a formula za kosinus dvostrukog kuta je:

$$\cos 2\Theta = \cos^2\Theta - \sin^2\Theta. \tag{2.6}$$

Uzmemo li za $\Theta = \frac{k\pi}{n}$ i uvrstimo u (2.5) i (2.6) dobijemo:

$$\sin 2\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}, \tag{2.7}$$

$$\cos 2\frac{k\pi}{n} = \cos^2\frac{k\pi}{n} - \sin^2\frac{k\pi}{n}. \tag{2.8}$$

Uvrštavanjem (2.7) i (2.8) u izraz (2.1) i korištenjem identiteta $1 = \sin^2\frac{k\pi}{n} + \cos^2\frac{k\pi}{n}$, dobijemo:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}(1-z_k) &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin^2\frac{k\pi}{n} + \cos^2\frac{k\pi}{n} - \cos^2\frac{k\pi}{n} + \sin^2\frac{k\pi}{n} - 2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}i\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}i\right)\\ &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}i\right).\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivene jednakosti u (2.3), dobivamo:

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}i\right) = n.$$

Uzmimo apsolutnu vrijednost obiju strana. Kako je n prirodan broj, znamo da je apsolutna vrijednost prirodnog broja jednaka samom prirodnom broju. Vidimo da je $\sin\frac{k\pi}{n}$ pozitivan za $k = 1, .., n-1$ te možemo maknuti apsolutnu vrijednost, pa je:

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\left|\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}i\right| = n.$$

Koristeći definiciju za modul kompleksnog broja te osnovni identitet $1 = \sin^2\Theta + \cos^2\Theta$, uzmimo za $\Theta = \frac{k\pi}{n}$ i sredimo do kraja:

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{n} + \cos^2\frac{k\pi}{n}} = n$$

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = n.$$

Podijelimo li cijeli izraz s 2^{n-1} dobivamo traženi identitet

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Primjer 2.1.2. *Dokažimo*

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + ... + \sin^2 (2n-1)x = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}.$$

Označimo

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sin^2((2k-1)x). \tag{2.9}$$

Pomoću formule za kosinus dvostrukog kuta i osnovnog identiteta $1 = \sin^2\Theta + \cos^2\Theta$ izrazimo $\sin^2\Theta$:

$$\begin{aligned}
\cos 2\Theta &= \cos^2\Theta - \sin^2\Theta \\
\cos 2\Theta &= 1 - \sin^2\Theta - \sin^2\Theta \\
\cos 2\Theta &= 1 - 2\sin^2\Theta \\
2\sin^2\Theta &= 1 - \cos 2\Theta \\
\sin^2\Theta &= \frac{1-\cos 2\Theta}{2}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Za Θ uzmimo $(2k-1)x$ i uvrstimo u prethodnu jednakost:

$$\sin^2(2k-1)x = \frac{1-\cos 2(2k-1)x}{2}. \tag{2.11}$$

Uvrstimo (2.11) u izraz (2.9)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin^2((2k-1)x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1-\cos(2(2k-1)x)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \cos(2(2k-1)x) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n - \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)2x) \right).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Označimo s $\alpha = 2x$ i odredimo

$$A = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\alpha) = \cos\alpha + \cos 3\alpha + ... + \cos(2n-1)\alpha.$$

Neka je

$$B = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)\alpha) = \sin\alpha + \sin 3\alpha + ... + \sin(2n-1)\alpha.$$

Promatramo uz oznake $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ i pravila za potenciranje:

$$\begin{aligned}
A + Bi &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + ... + (\cos(2n-1)\alpha + i\sin(2n-1)\alpha) \\
&= z + z^3 + z^5 + ... + z^{2n-1} \\
&= z(1 + z^2 + (z^2)^2 + ... + (z^2)^{n-1})
\end{aligned}$$

Koristeći sljedeću formulu za sumu prvih n članova geometrijskog niza

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

i (2.10), dobijemo:

$$\begin{aligned}
A + Bi &= z \cdot \frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot \frac{1 - \cos(2n)\alpha - i\sin(2n)\alpha}{1 - \cos 2\alpha - i\sin 2\alpha} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot \frac{2\sin^2(n\alpha) - 2\sin(n\alpha)\cos(n\alpha)i}{2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha i} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot \frac{2\sin(n\alpha)(-i)(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))}{2\sin\alpha(-i)(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \\
&= \frac{\sin(n\alpha)(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))}{\sin\alpha} \\
&= \frac{\sin(n\alpha)\cos(n\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{\sin^2(n\alpha)}{\sin\alpha} i.
\end{aligned}$$

Vidimo da je realni dio jednak A i izjednačimo ih:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sin(n\alpha)\cos(n\alpha)}{\sin\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2n\alpha)}{\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Uvrstimo li $\alpha = 2x$ u (2.13) i (2.13) u (2.12), dobijemo:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(4nx)}{2\sin(2x)} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{\sin(4nx)}{4\sin(2x)}.
\end{aligned}$$

Dobili smo traženi identitet.

Primjer 2.1.3. *Dokažimo da je polinom* $P(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos(n\alpha) - x\sin(n\alpha)$ *djeljiv s polinomom* $Q(x) = x^2 + 1$.

Znamo da je polinom $P(x)$ djeljiv s polinomom $Q(x)$ ako postoji polinom $R(x)$ takav da je $P(x) = Q(x)R(x)$. Kako je polinom $Q(x)$ drugog stupnja znamo da on ima dvije nultočke. Polinom $P(x)$ je djeljiv s polinomom $Q(x)$ ako su nultočke od $Q(x)$ također nultočke od $P(x)$. Polinom $Q(x)$ možemo rastaviti na sljedeći način:

$$Q(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Vidimo da su nultočke polinoma $Q(x)$ $x_1 = i$ i $x_2 = -i$.
Trebamo provjeriti da li su $x_1 = i$ i $x_2 = -i$ nultočke polinoma $P(x)$. To provjeravamo na način da uvrstimo nultočke u polinom $P(x)$ i koristimo pravilo za potenciranje kompleksnog broja u trigonometrijskom zapisu.

$$\begin{aligned}
P(i) &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha) \\
&= \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) - \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Kako je $P(i) = 0$, slijedi da je i nultočka od $P(x)$.
Provjerimo da li je $P(-i) = 0$.

$$\begin{aligned} P(-i) &= (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n - \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \\ &= (\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))^n - \cos(-n\alpha) - i\sin(-n\alpha) \\ &= \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha) - \cos(-n\alpha) - i\sin(-n\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi da je $-i$ nultočka od $P(x)$.
Iz toga možemo zaključiti da je polinom $P(x)$ djeljiv s $Q(x)$.

2.2 Primjene kompleksnih brojeva u geometriji

U ovome potpoglavlju ćemo kroz primjere pokazati primjenu kompleksnih brojeva u geometriji.

Primjer 2.2.1. *Neka je $K_1(3,2)$ vrh kvadrata čije se središte nalazi u ishodištu. Odredite koordinate točaka preostalih vrhova kvadrata.*

Vrhu K_1 pripada kompleksan broj $z_1 = 3 + 2i$. Znamo da se dijagonale u kvadratu sijeku pod pravim kutom, što znači da ćemo drugi vrh kvadrata dobiti rotacijom točke K_1 za kut $\frac{\pi}{2}$ oko ishodišta.

Rotaciju oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$ možemo definirati kao množenje kompleksnim brojem:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Tada koordinate točke K_2 možemo dobiti kao:

$$z_2 = i \cdot z_1 = i \cdot (3 + 2i) = -2 + 3i,$$

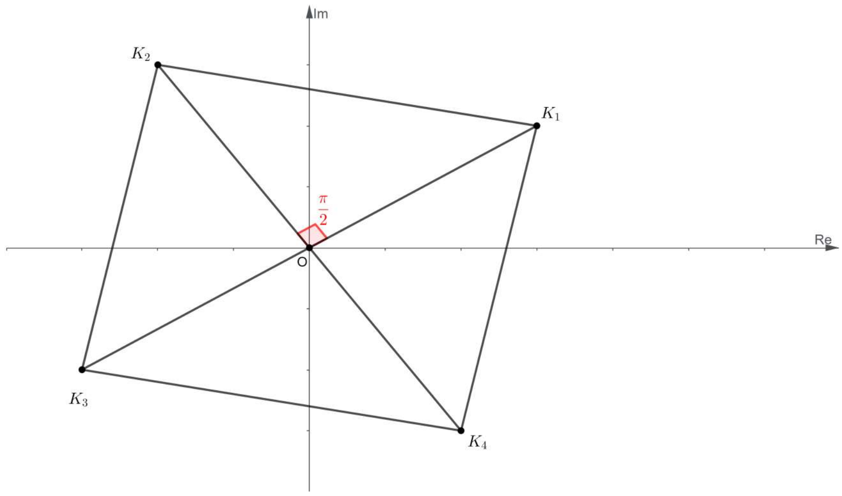
odnosno $K_2(-2, 3)$.
Koordinate točke K_3 možemo dobiti kao:

$$z_3 = i \cdot z_2 = i \cdot (-2 + 3i) = -3 - 2i,$$

odnosno $K_3(-3, -2)$.
Koordinate točke K_4 možemo dobiti kao:

$$z_4 = i \cdot z_3 = i \cdot (-3 - 2i) = 2 - 3i,$$

odnosno $K_4(2, -3)$.



Slika 4: Kvadrat kojeg smo dobili rotacijom točaka oko ishodišta

Primjer 2.2.2. *Neka su $M(6,2)$ i $P(2,4)$ dva nasuprotna vrha kvadrata. Odredite koordinate preostalih vrhova.*

Prvo trebamo odrediti središte kvadrata jer nije zadano. Središte kvadrata možemo dobiti kao polovište dužine $\overline{MP}$ jer su M i P dva nasuprotna vrha kvadrata. Koordinate polovišta $S(x_S, y_S)$ su:

$$x_S = \frac{6+2}{2} = 4, \qquad y_S = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Koordinata točke središta kvadrata je $S(4,3)$.

Središte S dijeli dijagonalu kvadrata na dva jednaka dijela,odnosno dužine, na $\overline{MS}$ i $\overline{SP}$. Dijagonale kvadrata se sijeku pod pravim kutom pa ćemo vrh R, to jest dužinu $\overline{SR}$, dobiti rotacijom točke P, to jest dužine $\overline{SP}$, za kut $\frac{\pi}{2}$ oko središta S.
Kao što smo u prethodnom primjeru pokazali, rotacija oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$ može se definirait kao množenje kompleksnim brojem

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Tada dužinu $\overline{SR}$ možemo dobiti kao:

$$z_R - z_S = i \cdot (z_P - z_S).$$

Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} z_R &= z_S + i \cdot (z_P - z_S) \\ &= 4 + 3i + i \cdot (2 + 4i - 4 - 3i) \\ &= 4 + 3i + i \cdot (-2 + i) \\ &= 4 + 3i - 2i - 1 \\ &= 3 + i. \end{aligned}$$

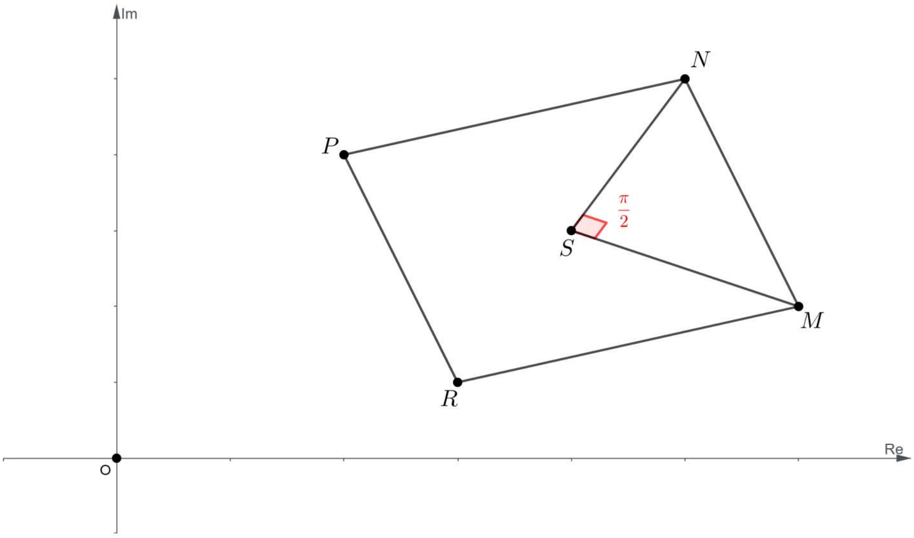
Vidimo da je koordinata vrha $R(3,1)$.
Vrh N, to jest dužinu $\overline{SN}$, dobit ćemo rotacijom točke M, to jest dužine $\overline{SM}$, za kut $\frac{\pi}{2}$ oko središta S. Kao i za točku N, vrijedi

$$z_N - z_S = i \cdot (z_M - z_S).$$

Te iz toga dobivamo:

$$\begin{aligned} z_N &= z_S + i \cdot (z_M - z_S) \\ &= 4 + 3i + i \cdot (6 + 2i - 4 - 3i) \\ &= 4 + 3i + 2i + 1 \\ &= 5 + 5i. \end{aligned}$$

Koordinata vrha N je $N(5,5)$.



Slika 5: Kvadrat kojeg smo dobili rotacijom točaka oko središta

Idući primjer je preuzet iz [1].

Primjer 2.2.3. *U kružnicu polumjera R upisan je pravilni mnogokut $A_1, ..., A_n$. Dokažite da za svaku točku T s kružnice vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{n} |TA_k|^2 = 2nR^2.$$

B.S.O. pretpostavimo da je središte kružnice u ishodištu. Tada točke A_i predstavljaju kompleksni brojevi z_i, $i = 1, .., n$, koji su rješenja jednadžbe $z^n - R^n = 0$.

Vieteove formule za jednadžbe n-tog stupnja glase:

$$\begin{aligned} x_1 + ... + x_n &= \frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1 \cdot ... \cdot x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Prema Vieteovim formulama vidimo da vrijedi $z_1 + ... + z_n = 0$.

Neka točka T predstavlja kompleksni broj z. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |TA_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (|z|^2 - z \cdot \overline{z_k} - z_k \cdot \overline{z} + |z_k|^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z|^2 - z \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} - \overline{z} \sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2.
\end{aligned}$$

Iz Vieteovih formula vidimo da su sume $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ i $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ jednake 0 te to uvrstimo u prethodni raspis i dobijemo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |TA_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |z|^2 + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \\
&= nR^2 + nR^2 \\
&= 2nR^2.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali zadanu jednakost.

Primjer 2.2.4. *Dokažimo da je trokut s vrhovima u točkama O, z_1, z_2 pravokutan s pravim kutom u točki O ako i samo ako vrijedi*

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0.$$

Neka je $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$.
Znamo da je kompleksno konjugari broj kompleksnog broja $z = x + yi$ jednak $\overline{z} = x - yi$ i to primjenimo u nastavku. Uvrsimo z_1 i z_2 u jednakost koju moramo dokazati:

$$\begin{aligned}
(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) &= 0 \\
x_1x_2 - x_1y_2 i + x_2y_1 i - y_1y_2 i^2 + x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i - y_1y_2 i^2 &= 0 \\
2x_1x_2 + 2y_1y_2 &= 0 \\
2(x_1x_2 + y_1y_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Vidimo da će izraz s lijeve strane biti jednak 0 ako i samo ako je

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \tag{2.14}$$

Označimo sa $\overrightarrow{OA_1}$ vektor s početkom u O i krajem u točki (x_1, y_1) i $\overrightarrow{OA_2}$ vektor s početkom u O i krajem u točki (x_2, y_2).

$\Rightarrow$ Neka je trokut pravokutan s pravim kutom u točki O. Kut između vektora $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{OA_2}$ mora biti pravi kut, a to znači da su vektori okomiti. Za dva vektora kažemo da su okomita ako i samo ako im je skalarni umnožak jednak nuli. Iz toga slijedi prvi smjer.
$\Leftarrow$ Neka vrijedi (2.14). Kako je produkt jednak 0, slijedi da su vektori $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{OA_2}$ okomiti. Kut između okomitih vektora je pravi kut. Stoga, pravi kut se nalazi u točki O, te je trokut pravokutan.

Početna tvrdnja je dokazana.

Literatura

[1] N. Elezović, *Kompleksni brojevi*, Element, Zagreb, 2000.

[2] I. Gusić *Zašto su uvedeni kompleksni brojevi* `http://e.math.hr/old/povmat/pov1.html#TOP`

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Sveučilište J.J.Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.