

# Zlatni rez i primjene

---

**Stojaković, Helena**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:069052>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-22**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij matematike  
Smjer: Financijska matematika i statistika

**Helena Stojaković**

**Zlatni rez i primjene**

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij matematike  
Smjer: Financijska matematika i statistika

**Helena Stojaković**

**Zlatni rez i primjene**

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2022.

# Sadržaj

Uvod	i
<b>1</b> Definiranje zlatnog reza	<b>1</b>
<b>2</b> Svojstva zlatnog reza	<b>2</b>
<b>3</b> Povezanost s Fibonaccijevim nizom	<b>6</b>
<b>4</b> Geometrija zlatnoga reza	<b>14</b>
4.1 Zlatni kut . . . . .	14
4.2 Zlatni pravokutnik . . . . .	15
4.3 Zlatna spirala . . . . .	16
4.4 Zlatni trokut . . . . .	18
4.5 Zlatni peterokut i zlatni pentagram . . . . .	22
<b>5</b> Primjena u optimizaciji	<b>26</b>
<b>6</b> Zanimljive pojave i primjene	<b>31</b>
6.1 Priroda i čovjek . . . . .	31
6.2 Svemir . . . . .	32
6.3 Umjetnost . . . . .	33
<b>Literatura</b>	<b>38</b>
<b>Sažetak</b>	<b>39</b>
<b>Summary</b>	<b>40</b>
<b>Životopis</b>	<b>41</b>

## Uvod

Omjer zlatnoga reza je najpoznatiji omjer bogate povijesti koji je prisutan svugdje oko nas. Njegova prva pojava u civilizaciji nije poznata, no jedna od najstarijih građevina koja se može opisati ovim omjerom je Keopsova piramida. Omjer je bio prisutan i u antičkoj Grčkoj u umjetnosti, ali i u geometriji. Pripadnici Pitagorejaca uočili su već kako se ne radi o racionalnom broju, a poznati matematičar Euklid dao je prvi oblik definicije ovoga omjera kojeg je nazvao ekstremni i srednji omjer. Veliki značaj u povijesti ima ponovno u renesansi koji osim što je vidljiv u umjetnosti, zabilježen je i u knjizi *De Divina Proportione*, talijanskog fratra Luce Paciolia izdane 1509. godine. Knjiga osim objašnjenja zlatnoga reza navodi brojne primjere u povijesti, ali i u Platonovim tijelima. Ilustrator knjige je poznati umjetnik i matematičar Leonardo da Vinci koji je osim primjene zlatnoga reza u svojim djelima, prvi izradio crtež Vitruvijev čovjek na temelju bilješki arhitekta Vitruvija. Taj svjetski poznati crtež prikazuje idealne omjere ljudskoga tijela u skladu sa zlatnim rezom. Zlatni rez se pronašao i u Fibonaccijevim brojevima što je prvi uočio njemački matematičar Johannes Kepler.

U ovome radu, najprije ćemo se upoznati s definiranjem zlatnoga reza i njegovim svojstvima. U trećem poglavlju otkrit ćemo povezanosti koje krije s Fibonaccijevim i Lucasovim brojevima te kako te brojeve možemo lako izračunati koristeći zlatni rez. Četvrto poglavlje opisuje neke slavne geometrijske likove koji su nastali primjenom ovoga omjera. Metoda zlatnoga reza kao jedna od primjena u optimizaciji opisana je u predzadnjem poglavlju. Zadnje poglavlje opisuje neke primjere zlatnoga reza u našoj okolini, svijetu i u svemiru.

## 1 Definiranje zlatnog reza

Prvo poznato definiranje zlatnoga reza dao je grčki matematičar Euklid oko 300 godina prije Krista u svojoj knjizi *Elementi* koristeći dužine. Promotrimo neku dužinu  $\overline{AB}$  kao na Slici 1. Ako bismo tu dužinu podijelili točkom  $C$  tako da se duljina dužine  $\overline{AC}$  odnosi prema  $\overline{CB}$  isto kao duljina dužine  $\overline{AB}$  prema  $\overline{AC}$ , tada možemo reći da smo na taj način podijelili dužinu  $\overline{AB}$  u omjeru zlatnoga reza.



Slika 1: Dužina  $\overline{AB}$  u omjeru zlatnog reza

Općenito, svaki omjer dva pozitivna broja  $a$  i  $b$ , pri čemu je  $a > b$ , nazivamo zlatni rez ako vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}, \quad (1)$$

odnosno ako je omjer većeg broja prema manjem jednak omjeru njihove sume i većeg broja. Zlatni rez obično označavamo s  $\phi$ , pa ukoliko zamijenimo u izrazu (1)  $\frac{a}{b}$  s  $\phi$  imamo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Odnosno, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  i  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Pozitivno rješenje predstavlja numeričku vrijednost zlatnoga reza. Recipročnu vrijednost  $\frac{1}{\phi}$  možemo dobiti i ukoliko negativno rješenje kvadratne jednadžbe pomnožimo s  $-1$  pa iznosi  $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Iz prethodnih izraza vidimo da zlatni rez i njegova recipročna vrijednost osim  $\phi \cdot \frac{1}{\phi} = 1$  zadovoljava i  $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$  te je to jedini broj koji zadovoljava oba izraza. Ostala svojstva broja  $\phi$  proučit ćemo u idućem poglavlju.

Osim oznake  $\phi$ , često se za zlatni rez u brojnim literaturama može pronaći i oznaka  $\tau$ .

## 2 Svojstva zlatnog reza

Proučimo neka svojstva broja  $\phi$  kako bismo se bolje upoznali s ovim brojem i njegovim zanimljivostima. Mogli smo već uočiti kako je  $\phi$  iracionalan broj što lako zaključujemo iz iracionalnosti broja  $\sqrt{5}$ .

Korjenovanjem izraza  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$  slijedi da je  $\phi = \sqrt{1 + \phi}$ . Ukoliko bismo u desnom dijelu jednakosti ponovno primijenili taj izraz dobivamo

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}.$$

Provođenjem ovog postupka još jednom imamo

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}}.$$

Ovaj postupak možemo nastaviti u nedogled, tj.

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}.$$

Njegova recipročna vrijednost može se zapisati u obliku

$$\frac{1}{\phi} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}}}}.$$

Naime, ako bismo izraz

$$x = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}}}}.$$

kvadrirali, dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}}} \\ &= 1 - x. \end{aligned}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe  $x^2 + x - 1 = 0$  su  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  i  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . Vidimo da je pozitivno rješenje  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  recipročna vrijednost zlatnog reza  $\phi$ .

Zlatni rez možemo prikazati i u obliku verižnog razlomka. Kako je  $\phi$  iracionalan, prisjetimo se definicije beskonačnog verižnog razlomka i periodskog verižnog razlomka.

**Definicija 1.** *Neka je  $\alpha$  iracionalan broj. Ako su  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$  za  $i \geq 1$  i ako je  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ , onda ovaj izraz nazivamo razvoj od  $\alpha$  u beskonačni jednostavni verižni razlomak. Broj  $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, \dots, a_i]$  predstavlja  $i$ -tu konvergentu od  $\alpha$ ,  $a_i$  predstavlja  $i$ -ti parcijalni kvocijent, a  $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \dots]$  je  $i$ -ti potpuni kvocijent od  $\alpha$ .*

**Definicija 2.** *Kažemo da je beskonačni verižni razlomak  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  periodski ako postoje cijeli brojevi  $k \geq 0$  i  $m \geq 1$  takvi da je  $a_{m+n} = a_n$  za sve  $n \geq k$ . Verižni razlomak u tom slučaju pišemo u obliku*

$$[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}}],$$

gdje "crta" nad brojevima  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}$  označava ponavljanje tog bloka brojeva unedogled. Broj  $m$  nazivamo duljina perioda. Ako je  $k = 0$ , onda kažemo da je verižni razlomak čisto periodski.

Ako bismo u nazivniku izraza  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ ,  $\phi$  izrazili pomoću upravo tog izraza, dobili bismo

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}.$$

Ovaj postupak možemo nastaviti u nedogled. Tako dobivamo verižni razlomak oblika

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}.$$

Dakle, vrijedi  $\phi = [1; 1, 1, \dots]$ . Vidimo da su svi parcijalni kvocijenti jednaki 1, pa je ovaj verižni razlomak čisto periodski i pišemo  $[1; \overline{1}]$ .

Za daljnu analizu prisjetimo se definicije kvadratne iracionalnosti.



**Definicija 3.** *Iracionalni broj  $\alpha$  nazivamo kvadratna iracionalnost ako je  $\alpha$  korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.*

Kako je broj  $\phi$  jedno rješenje kvadratne jednadžbe  $x^2 - x - 1 = 0$ , on je primjer jedne kvadratne iracionalnosti.

**Definicija 4.** *Kažemo da je kvadratna iracionalnost  $\alpha$  reducirana ako je  $\alpha > 1$  i  $-1 < \alpha' < 0$ , gdje je  $\alpha'$  konjugat od  $\alpha$ .*

Konjugat od broja  $\phi$ , odnosno negativno rješenje kvadratne jednadžbe  $x^2 - x - 1 = 0$  je  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61803 \in (-1, 0)$ , pa je  $\phi$  reducirana kvadratna iracionalnost.

Za  $\frac{1}{\phi}$  verižni razlomak konstruiramo pomoću kvadratne jednadžbe

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (2)$$

za koju je  $\frac{1}{\phi}$  pozitivno rješenje. Jednadžbu (2) možemo zapisati i kao

$$x(x+1) = 1.$$

Dijeljenjem slijedi izraz

$$x = \frac{1}{1+x},$$

u kojem kada bismo za  $x$  u nazivniku uvrštavali upravo taj izraz beskonačno mnogo puta, dobili bismo verižni razlomak za  $\frac{1}{\phi}$  oblika

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

tj.  $\frac{1}{\phi} = [0; 1, 1, \dots] = [0; \bar{1}]$ .

Promotrimo sada potencije od broja  $\phi$ . Raspišimo prvih nekoliko potencija kako

bismo uočili određenu pravilnost:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \phi, \\
 \phi^2 &= \phi + 1, \\
 \phi^3 &= \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1, \\
 \phi^4 &= \phi^2 \cdot \phi^2 = (\phi + 1)(\phi + 1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = 3\phi + 2, \\
 \phi^5 &= \phi^2 \cdot \phi^3 = (\phi + 1)(2\phi + 1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 5\phi + 3, \\
 \phi^6 &= \phi^3 \cdot \phi^3 = (2\phi + 1)(2\phi + 1) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 8\phi + 5, \\
 \phi^7 &= \phi^3 \cdot \phi^4 = (2\phi + 1)(3\phi + 2) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 13\phi + 8, \\
 \phi^8 &= \phi^4 \cdot \phi^4 = (3\phi + 2)(3\phi + 2) = 9\phi^2 + 12\phi + 4 = 21\phi + 13, \\
 \phi^9 &= \phi^4 \cdot \phi^5 = (3\phi + 2)(5\phi + 3) = 15\phi^2 + 19\phi + 6 = 34\phi + 21, \\
 \phi^{10} &= \phi^5 \cdot \phi^5 = (5\phi + 3)(5\phi + 3) = 25\phi^2 + 30\phi + 9 = 55\phi + 34. \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Svaku potenciju broja  $\phi$  uspjeli smo svesti na neki linearan oblik od  $\phi$ . Uočimo kako u tom pojednostavljenom izrazu neke potencije, koeficijent koji se nalazi uz  $\phi$  je zapravo nastao zbrajanjem koeficijenta uz  $\phi$  i konstante iz prethodne potencije od  $\phi$ . Nadalje, ukoliko promotrimo koeficijente uz  $\phi$  u (3), imamo

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Taj niz odgovara Fibonaccijevom nizu kojeg ćemo detaljnije uvesti u idućem poglavlju.

### 3 Povezanost s Fibonaccijevim nizom

Prije navođenja povezanosti zlatnoga reza s Fibonaccijevim i Lucasovim nizom, definirajmo te nizove.

Fibonaccijev niz je jedan od najpoznatijih nizova u matematici. Nazvan je po matematičaru Leonardu od Pise koji je 1202. godine objavio rješenje zagonetke o razmnožavanju zečeva, iako je kasnije utvrđeno da je ovaj niz već bio objašnjen u ranoj indijskoj matematici. Predstavimo slavni Fibonaccijev problem za definiranje niza.

Pretpostavimo da početkom siječnja imamo par mladih zečeva, jedan mužjak i jedna ženka. Zečevi imaju sposobnost razmnožavanja nakon dva mjeseca života, a nakon toga mogu dobiti potomke svaki mjesec. Stoga će ovaj par zečeva u veljači odrasti i tek u ožujku stvoriti potomstvo, tj. novi mladi par zečeva različitoga spola. U travnju odrasli par dobiva još jedan par mladih zečeva, dok prethodni mladi par odrasta te kreće sa stvaranjem potomstva tek u svibnju. Ako dodatno pretpostavimo da promatrani zečevi nikada ne umiru, koliko ukupno zečeva će postojati u siječnju iduće godine? U Tablici 1 se nalazi opisana populacija zečeva za tih 13 mjeseci te u toj tablici pronalazimo odgovor  $F_{13} = 233$ .

Mjesec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Mladi zečevi	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Odrasli zečevi	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Ukupno	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Tablica 1: Broj zečeva za promatrano razdoblje

Vidimo da broj parova zečeva u idućem mjesecu ovisi o broju parova u tekućem i u prethodnom mjesecu, tj. o njihovoj sumi. Ako sa  $F_n$  označimo ukupni broj parova zečeva na početku  $n$ -tog mjeseca, dobivamo rekurzivnu formulu

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (4)$$

Za određivanje ovoga niza, potrebno je zadati početne vrijednosti  $F_1$  i  $F_2$ . U problemu razmnožavanja zečeva na početku imamo jedan par mladih zečeva, pa je  $F_1 = 1$  dok idući mjesec taj par zečeva odrasta, pa i dalje imamo samo taj par zečeva, odnosno  $F_2 = 1$ .

Drugačiji odabir početnih vrijednosti prouzročit će niz s različitim vrijednostima od Fibonaccijevih brojeva. Jedan takav niz je Lucasov niz nazvan po francuskom

matematičaru Edouardu Lucasu. Za prve vrijednosti niza uzeto je  $L_1 = 1$  i  $L_2 = 3$ , a rekurzivna relacija jednaka je Fibonaccijevoj, odnosno  $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ . Takav niz onda izgleda ovako:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364 \dots$$

Lako se može uočiti kako ipak Lucasove brojeve možemo izraziti pomoću Fibonaccijevih brojeva, odnosno da vrijedi

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Tu jednakost možemo pokazati matematičkom indukcijom.

*Dokaz.* (B): Za  $n = 1$  i  $n = 2$  vidimo da tvrdnja vrijedi, tj.

$$\begin{aligned} F_2 + F_0 &= 1 + 0 = 1 = L_1 \\ F_3 + F_1 &= 2 + 1 = 3 = L_3. \end{aligned}$$

(P): Pretpostavimo da jednakost vrijedi i za neke prirodne brojeve  $n$  i  $n + 1$ , tj.  
 $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$  i  $F_n + F_{n+2} = L_{n+1}$ .

(K): Kako bismo pokazali da jednakost vrijedi i za  $n + 2$ , potrebno je samo zbrojiti izraze iz pretpostavke indukcije, odnosno

$$L_{n+2} = L_n + L_{n+1} = F_{n-1} + F_{n+1} + F_n + F_{n+2} = F_{n+3} + F_{n+1}.$$

□

Fibonaccijev niz možemo proširiti i na sve cijele brojeve  $n$ , a da pritom vrijedi relacija (4):

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1, \\ F_{-1} &= F_1 - F_0, \\ F_{-2} &= F_0 - F_{-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

pa za negativne indekse uvodimo formulu

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n \quad n \geq 0,$$

koju također lako možemo pokazati matematičkom indukcijom.

Lucasove brojeve možemo proširiti i na negativne cijele brojeve pomoću formule

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

U prošlom poglavlju ustanovili smo već jednu povezanost s brojem  $\phi$ , odnosno da potencije od  $\phi$  možemo računati korištenjem Fibonaccijevih brojeva, tj. vrijedi

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}, \quad n \geq 0.$$

Još jednu povezanost možemo otkriti ako proučimo omjere Fibonaccijevih brojeva. Pogledajmo u Tablici 2 prvih petnaest omjera susjednih brojeva. Možemo uočiti da povećanjem  $n$ -a, omjer Fibonaccijevih brojeva približava se vrijednosti zlatnoga reza. Zapišimo prvih nekoliko omjera u obliku verižnih razlomaka. Možemo zaključiti kako

$n$	$F_n$	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$
1	0	-
2	1	-
3	1	1
4	2	2
5	3	1.5
6	5	1.66667
7	8	1.60000
8	13	1.62500
9	21	1.61539
10	34	1.61905
11	55	1.61768
12	89	1.61818
13	133	1.61798
14	233	1.61806
15	377	1.61803

Tablica 2: Omjeri susjednih Fibonaccijevih brojeva

ti omjeri predstavljaju konvergente verižnog razlomka od broja  $\phi$ .

$$\begin{aligned}\frac{F_3}{F_2} &= \frac{1}{1} \\ \frac{F_4}{F_3} &= \frac{2}{1} = 2 = 1 + \frac{1}{1} \\ \frac{F_5}{F_4} &= \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \\ \frac{F_6}{F_5} &= \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \\ \frac{F_7}{F_6} &= \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}\end{aligned}$$

Idući teorem tvrdi kako  $p_n$  i  $q_n$  u svim verižnim razlomcima zapravo zadovoljavaju određene rekurzivne formule.

**Teorem 1** (vidjeti [1, Lema 8.13.]). *Za  $k \in \mathbb{N}_0$ , konvergente zadovoljavaju rekurzivne formule*

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

pri čemu je  $p_{-2} = 0$ ,  $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-2} = 1$  i  $q_{-1} = 0$ .

Ovaj teorem pokazuje se matematičkom indukcijom i dokaz se može pronaći u [1]. Vidimo kako konvergente  $\frac{p_n}{q_n}$  razvoja od  $\phi$  u verižni razlomak zadovoljavaju rekurzije

$$\begin{aligned}p_n &= p_{n-1} + p_{n-2}, & p_0 &= 1, & p_1 &= 2, \\ q_n &= q_{n-1} + q_{n-2}, & q_0 &= 1, & q_1 &= 1,\end{aligned}$$

koje određuju Fibonaccijeve brojeve, odnosno vrijedi  $p_n = F_{n+2}$  i  $q_n = F_{n+1}$  za  $n \geq 0$ . Za dokazivanje konvergencije niza  $\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)$  u vrijednost zlatnog reza  $\phi$ , najprije iskažimo i dokažimo rezultat koji tvrdi da je limes konvergenti razvoja iracionalnog broja u obliku verižnog razlomka jednak upravo tom iracionalnom broju.

**Teorem 2** (vidjeti [1, Lema 8.22.]). *Ako je  $\alpha \in \mathbb{I}$ , onda postoje jedinstveni brojevi  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ , takvi da je  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\alpha$  iracionalan broj, a  $\alpha_1$  definirajmo kao  $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ , pri čemu je  $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ , pa iz iracionalnosti broja  $\alpha$  slijedi da je i  $\alpha_1$  isto iracionalan te vrijedi  $\alpha_1 > 1$ . Broj  $\alpha_2$  određujemo sličnim postupkom, tj.  $\alpha_2 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$ , pri čemu je  $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$ . Za  $\alpha_2$  također vrijedi iracionalnost i  $\alpha_2 > 1$ . Općenito, za neki  $i \geq 1$  definiramo  $\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$  pri čemu je  $a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor$  te vrijedi da je  $a_{i+1}$  iracionalan, a  $a_i \geq 1$  i  $\alpha_{i+1} > 1$ .

Pokažimo da je  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  uz oznaku da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Može se pokazati kako vrijedi

$$|q_n \alpha - p_n| = \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}},$$

za  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$ ,  $n \geq 0$ . To se može vidjeti u [1, Lema 8.17.].

Kako je  $(q_n)$  strogo rastući niz prirodnih brojeva, slijedi nejednakost

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n^2 + q_{n-1} q_n} \stackrel{\alpha_n > 1}{<} \frac{1}{q_n^2},$$

koja povlači  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$ .

Nadalje ćemo pokazati jedinstvenost brojeva  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Ako promotrimo izraz  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots]}$ , možemo zaključiti kako je  $0 \leq \alpha - a_0 < 1$ . Dakle,  $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$  te je time jedinstven. Time slijedi da je i  $[a_1, a_2, \dots] = \alpha_1$  jedinstveno određen s  $\alpha$ . Nadalje, promotrimo li sada  $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, \dots]}$  slično zaključujemo da je  $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$  i jedinstvenost broja  $a_1 \geq 1$ . Analogno bi se pokazala jedinstvenost ostalih  $a_i$ .  $\square$

Primjenom Teorema 2 i vrijednosti  $p_n$  i  $q_n$  slijedi da je limes niza  $\left( \frac{F_n}{F_{n-1}} \right)$  jednak broju  $\phi$ , tj.

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Slično se može pokazati da vrijedi i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\phi}$ .

Iz dokaza Teorema 2 vidimo kako vrijednost zlatnoga reza možemo aproksimirati njegovim konvergentama, odnosno nejednakošću  $\left| \phi - \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \right| < \frac{1}{F_{n+1}^2}$ . Međutim, primjetimo kako parcijalne kvocijente  $a_i$  čine samo jedinice, pa je  $\phi$  iracionalan broj koji najsporije konvergira od svih ostalih iracionalnih brojeva, tj. ovaj broj je najteže aproksimirati nekim racionalnim brojem. Upravo zbog toga  $\phi$  je poznat kao najiracionalniji broj. Idući teorem dat će nam još bolju aproksimaciju za broj  $\phi$ .

**Teorem 3** (Hurwitz, vidjeti [1, Teorem 8.9]). *Za svaki  $\alpha \in \mathbb{I}$  postoji beskonačno mnogo različitih racionalnih brojeva  $\frac{p}{q}$  takvih da je*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \quad (5)$$

*Tvrđnja ne vrijedi ako se  $\sqrt{5}$  zamijeni s bilo kojom konstantom  $c > \sqrt{5}$ .*

Hurwitzov teorem tvrdi kako je nejednakost najbolja moguća uz konstantu  $\sqrt{5}$ . Dokaz ovoga teorema može se pronaći u [1].

Kako bismo izračunali željeni Fibonaccijev broj, potrebno je izračunati sve prethodne članove niza što usporava vrijeme izračuna. Stoga, nam je poželjna formula koja bi nam direktno dala vrijednost traženog Fibonaccijevog broja. Francuski matematičar Jacques-Philippe Marie Binet je 1843. godine objavio takvu formulu za direktni izračun pojedinog  $n$ -tog Fibonaccijevog broja bez korištenja prethodnih vrijednosti Fibonaccijevih brojeva koristeći zlatni rez:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \right), \quad (6)$$

odnosno

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

*Dokaz.* Ovu formulu možemo dokazati matematičkom indukcijom.

(B) Za  $n = 0$  imamo  $F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 1) = 0$ , a za  $n = 1$  dobivamo  $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$ .

(P) Pretpostavimo da formula vrijedi za prirodne brojeve  $n$  i  $n + 1$ .

(K) Pokažimo kako formula vrijedi i za prirodni broj  $n + 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^{n+2} - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^{n+2} \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n \phi^2 - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \left( -\frac{1}{\phi} \right)^2 \right) \\ &\stackrel{\phi^2 = \phi + 1}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n (\phi + 1) - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \left( -\frac{1}{\phi} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^{n+1} - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^{n+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \right) = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}. \end{aligned}$$



□

Binetova formula također vrijedi i za negativne indekse Fibonaccijevih brojeva, tj. za  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^{-n} - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^{-n} \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1}{\phi} \right)^n - (-\phi)^n \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \right) \\ &= (-1)^{n-1} F_n = F_{n-1}. \end{aligned}$$

Slično možemo pokazati da za Lucasove brojeve vrijedi

$$L_n = \phi^n + \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n, \quad (7)$$

odnosno

$$L_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

**Primjer 1.** Koristeći Binetovu formulu izračunajmo  $F_{10}$  i  $L_{10}$ .

*Rješenje.* Koristeći računalo dobivamo brojeve

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^{10} - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^{10} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{10} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{10} \right) = 55, \\ L_{10} &= \phi^{10} + \left( -\frac{1}{\phi} \right)^{10} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{10} + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{10} = 123. \end{aligned}$$

Na temelju Binetove formule, Fibonaccijeve brojeve možemo izraziti koristeći samo zlatni rez, odnosno

$$F_n = \frac{\phi^n - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n}{\phi + \frac{1}{\phi}}.$$

Pri korištenju Binetove formule trebamo pripaziti na činjenicu da je  $\phi$  iracionalni broj, a  $F_n$  i  $L_n$  cijeli brojevi, pa se može dogoditi pogreška prilikom zaokruživanja. Također, korištena vrijednost od broja  $\phi$  trebala bi imati što više značajnih znamenki kako bi formula bila preciznija za velike  $n$ . Iz ovih razloga u praksi se koriste i formule

$$\begin{aligned} F_n &= \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n \geq 0, \\ L_n &= \left\lfloor \phi^n + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Zbog jednostavnosti računanja često se koristi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n,$$

$$L_n = \phi^n,$$

s obzirom da za veliki  $n$  izraz  $\frac{1}{\phi}$  u formulama (6) i (7) konvergira prema 0.

**Primjer 2.** *Izračunajmo  $F_{50}$  i  $L_{50}$ .*

*Rješenje.* Korištenjem računala lako dobivamo

$$F_{50} = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{50} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{50} = 12586269025,$$

$$L_{50} = \phi^{50} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{50} = 28143753123.$$

Korištenjem Binetove formule (6), možemo pokazati da niz omjera susjednih Fibonaccijevih brojeva konvergira prema broju  $\phi$  što smo dokazali ranije. Međutim, možemo pokazati da i niz omjera susjednih Lucasovih brojeva također konvergira prema  $\phi$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^{n+1} + \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}}{\phi^n + \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi + (-1)^{n+1} \frac{1}{\phi} \frac{1}{\phi^{2n}}}{1 + (-1)^n \frac{1}{\phi^{2n}}} = \phi,$$

jer je  $\left| \frac{1}{\phi} \right| < 1$ , pa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi^{2n}} = 0$ . Sličnim postupkom možemo pokazati da vrijedi i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \phi^k$  za neki  $k \in \mathbb{N}$ .

## 4 Geometrija zlatnoga reza

Zlatni rez ima istaknuto mjesto u geometriji s obzirom da se geometrijska tijela koja su određena ovim omjerom se smatraju najugodnija ljudskom oku. U ovom poglavlju upoznat ćemo se s nekim važnim zlatnim likovima te ih ukratko analizirati i otkriti nekoliko zanimljivih povezanosti s brojem  $\phi$ . Više primjera zlatnih likova može se pronaći u [5]. Konstrukcije odabranih zlatnih likova izrađene su u programu GeoGebra.

### 4.1 Zlatni kut

Poznati kut u prirodi izražen u terminima zlatnoga reza naziva se zlatni kut. Izračunajmo njegovu vrijednost uz pomoć kružnice.

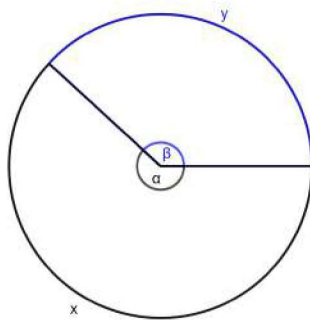
Podijelimo kružnicu na dva kružna luka  $x$  i  $y$ , kao na Slici 2, koja se odnose u omjeru zlatnoga reza  $\phi$ . Središnji kut nad manjim kružnim lukom  $y$  je zlatni kut kojeg označimo s  $\beta$ . S obzirom da se kružni lukovi  $x$  i  $y$  odnose u omjeru zlatnoga reza, imamo

$$\frac{x}{y} = \frac{x + y}{x},$$

onda znamo da se oba središnja kuta nad tim lukovima također odnose u omjeru zlatnoga reza, tj. vrijedi

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{360^\circ}{\alpha} = \phi.$$

Stoga slijedi da je  $\alpha = \frac{360^\circ}{\phi} \approx 222.5^\circ$ , a  $\beta = 360^\circ - \alpha \approx 137.5^\circ$ .



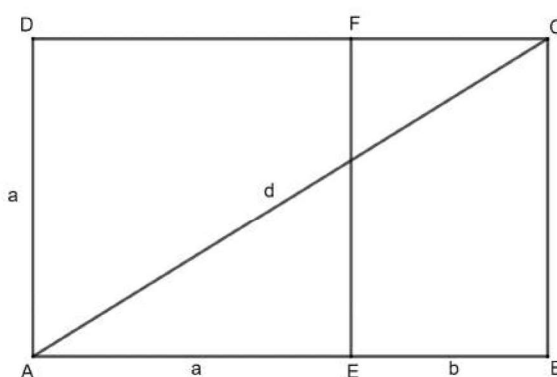
Slika 2: Zlatni kut

## 4.2 Zlatni pravokutnik

Zlatni pravokutnik je pravokutnik čije se stranice odnose u omjeru zlatnoga reza te se često može pronaći u umjetnosti. Pogledajmo jedan takav pravokutnik stranice duljine  $u$  i visine  $v$  za koji vrijedi

$$\frac{u}{v} = \frac{u+v}{u} = \phi. \quad (8)$$

Neka je  $u = a + b$  i  $v = a$ , zbog daljnjeg analiziranja.



Slika 3: Zlatni pravokutnik

Kako vrijedi (8) slijedi da je  $\frac{a}{b} = \phi$ . Pogledajmo kako se odnose duljine stranica s duljinom dijagonala u ovom pravokutniku. Duljinu dijagonale  $d$  možemo odrediti iz pravokutnog trokuta  $\triangle ACD$  korištenjem Pitagorina teorema. Dobivamo:

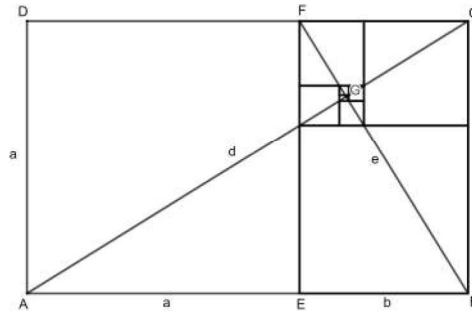
$$\begin{aligned} d^2 &= (a+b)^2 + a^2 = 2a^2 + 2ab + b^2, \\ \frac{d^2}{(a+b)^2} &= \frac{(a+b)^2 + a^2}{(a+b)^2} = 1 + \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{\phi^2 + 1}{\phi^2}, \\ \frac{d^2}{a^2} &= 2 + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2} = 2 + \frac{2}{\phi} + \frac{2}{\phi^2} = 2 + 2(\phi - 1) + 2(\phi - 1)^2 = \phi^2 + 1. \end{aligned}$$

Dakle, omjer duljina dijagonala i duljina stranica je  $d : (a+b) : a = \sqrt{\phi^2 + 1} : \phi : 1$ . Ako bismo tom pravokutniku “odrezali” kvadrat  $AEFD$  čija je stranica duljine  $a$  kao na Slici 3, ostao bi nam pravokutnik  $EBCF$  koji je također zlatni pravokutnik jer za njegove stranice vrijedi  $\frac{a}{b} = \phi$ . Možemo uočiti kako je taj pravokutnik sličan

početnom pravokutniku te su duljine stranica umanjene za faktor  $\phi$ . Omjer površina ta dva pravokutnika iznosi

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{EBCF}} = \frac{a(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{b} \stackrel{\frac{a}{b}=\phi}{=} \frac{a+b}{\frac{a}{\phi}} = \phi^2.$$

Nastavimo li proces podjele sa novim pravokutnikom, dobivali bismo sve manje i manje zlatne pravokutnike. Te podjele možemo raditi u smjeru kazaljke na satu kao na Slici 4. Vidimo da bi niz zlatnih pravokutnika konvergirao k sjecištu dijagonala  $d$  i  $e$  koje te dijagonale dijeli u omjeru zlatnoga reza.



Slika 4: Niz zlatnih pravokutnika

### 4.3 Zlatna spirala

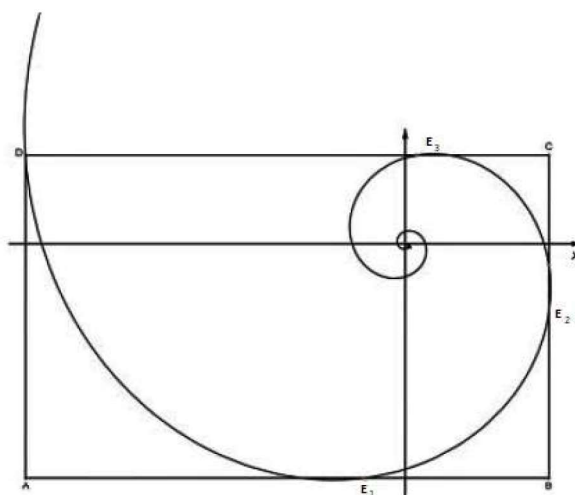
Zlatna spirala je zapravo specijalan slučaj logaritamske spirale. Radijus logaritamske spirale iskazan u polarnim koordinatama  $(r, \theta)$  iznosi

$$r(\theta) = ae^{b\theta},$$

pri čemu su  $a, b$  pozitivni realni brojevi, a  $\theta$  mjera kuta koji radijus zatvara s osi  $x$ . Stoga radijus ove spirale raste eksponencijalno s kutom  $\theta$ . Za svaku logaritamsku spiralu vrijedi da svaka njena tangenta zatvara jednak kut s radijusom spirale  $r$ . Radijus zlatne spirale raste s obzirom na  $\phi$  za svako povećanje kuta  $\theta$  za  $\frac{\pi}{2}$ , pa glasi

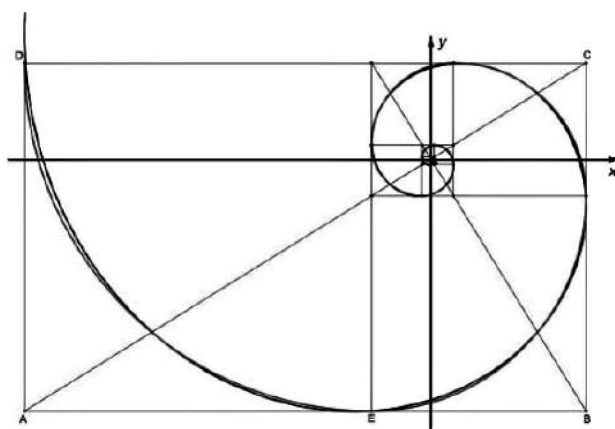
$$r(\theta) = a\phi^{\frac{2\theta}{\pi}}.$$

Ako bismo središnju točku spirale stavili u sjecište dijagonala zlatnoga pravokutnika i  $a$  odredimo tako da spirala prolazi nasuprotnim vrhovima kvadrata, dobit ćemo upisanu zlatnu spiralu u zlatni pravokutnik kao na Slici 5.



Slika 5: Zlatna spirala, [5], Figure 4-28

Ukoliko bismo u kvadrata upisali četvrtine kružnica koje bi povezivale nasprotnne vrhove tih kvadrata kao na Slici 6, dobili bismo spiralu koja konvergira u zlatnu spiralu. Pravci na kojima leže stranice zlatnog pravokutnika su tangente ove aproksimacijske spirale, ali ne i zlatne spirale jer svaka stranica siječe zlatnu spiralu u dvije točke.

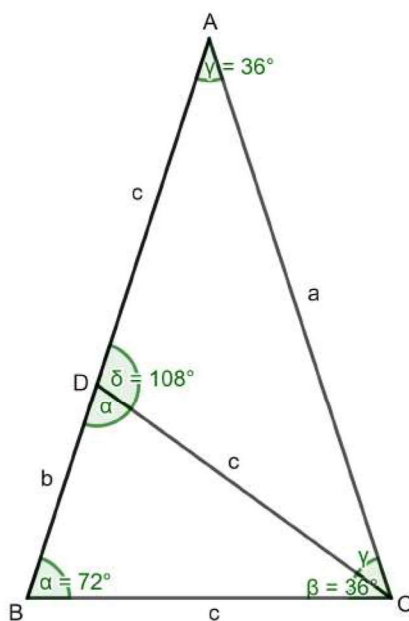


Slika 6: Zlatna spirala i aproksimacija, [5], Figure 4-27

#### 4.4 Zlatni trokut

Jednakokrani trokut  $\triangle ABC$  čiji je kut nasprot osnovice jednak  $36^\circ$  i kutovi uz osnovicu  $72^\circ$  povezat ćemo s brojem  $\phi$ .

Ukoliko iz kuta  $\angle ACB$  povučemo simetralu, kao na Slici 7, dobivamo dva zlatna



Slika 7: Zlatni trokut

trokuta  $\triangle CDB$  i  $\triangle ACD$ . Trokut  $\triangle CDB$  je sličan  $\triangle ABC$ , pa zbog sličnosti vrijedi

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b},$$

tj.

$$\frac{b+c}{c} = \frac{c}{b} = \phi, \quad (9)$$

pa je  $AB$  podijeljena zapravo u omjeru zlatnoga reza. Također, vidimo da omjer duljine osnovice i kraka trokuta  $\triangle ABC$  iznosi  $1 : \phi$ , a vrijedi i za duljinu kraka i osnovice trokuta  $\triangle CDB$ . Za trokut  $\triangle ACD$  s tupim vršnim kutom, je omjer duljine osnovice i kraka jednak  $\phi : 1$ . Za razmatranje stranica, najprije ćemo izraziti stranice

$a$  i  $c$  koristeći stranicu  $b$ . Iz (9) slijedi da je

$$\begin{aligned}c &= \phi b, \\ a &= \phi c = \phi^2 b = (\phi + 1)b.\end{aligned}$$

Kada bismo izrazili  $a$  i  $b$  pomoću  $c$ , imamo

$$\begin{aligned}a &= \phi c, \\ b &= \frac{1}{\phi} c.\end{aligned}\tag{10}$$

Ako bismo preostale stranice izrazili korištenjem  $a$ , tada bi vrijedilo

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{\phi} a, \\ b &= \frac{1}{\phi} c = \frac{1}{\phi^2} a,\end{aligned}$$

pa vidimo da su odnosi među stranicama opisani pomoću broja  $\phi$ . Kada bismo iz sva ova tri zlatna kuta povukli visinu iz vrha vršnoga kuta, dobili bismo različite pravokutne trokute. Ako na te pravokutne trokute primijenimo Pitagorin poučak i trigonometrijske formule, dobivamo zanimljive veze trigonometrijskih vrijednosti kutova zlatnih trokuta i vrijednosti zlatnoga reza  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ &= \cos 72^\circ = \frac{1}{2\phi}, \\ \sin 36^\circ &= \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{2\phi}, \\ \sin 54^\circ &= \cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}, \\ \sin 72^\circ &= \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{2}, \\ \operatorname{tg} 18^\circ &= \operatorname{ctg} 72^\circ = \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{3\phi + 1}, \\ \operatorname{tg} 36^\circ &= \operatorname{ctg} 54^\circ = \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{\phi^2}, \\ \operatorname{tg} 54^\circ &= \operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2 + 1}}, \\ \operatorname{tg} 72^\circ &= \operatorname{ctg} 18^\circ = \phi\sqrt{\phi^2 + 1},\end{aligned}$$



koje ćemo iskoristiti za izračun površine ova tri zlatna trokuta. Koristit ćemo formulu

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

pri čemu su  $a$  i  $b$  stranice promatranog trokuta, a  $\gamma$  veličina kuta između stranica  $a$  i  $b$ . Dobivamo:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \gamma = \frac{1}{2}a^2 \sin 36^\circ = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{2\phi}, \quad (11)$$

$$P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|BC||CD| \sin \beta = \frac{1}{2}c^2 \sin 36^\circ = \frac{1}{2}c^2 \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{2\phi}, \quad (12)$$

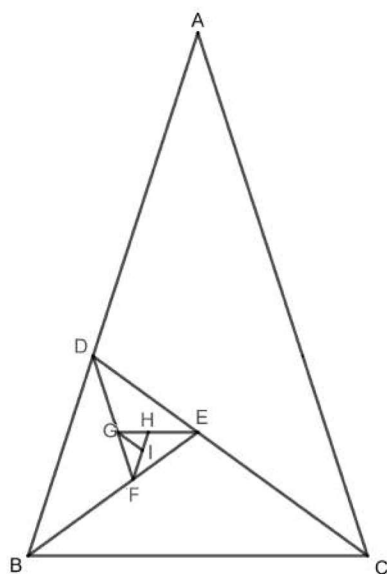
$$P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}|AD||CD| \sin \delta = \frac{1}{2}c^2 \sin 108^\circ = \frac{1}{2}c^2 2 \sin 54^\circ \cos 54^\circ = \frac{1}{2}c^2 \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{2}. \quad (13)$$

Međusobni omjeri ovih površina iznose:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle BCD}} &= \frac{\frac{1}{2}a^2 \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2\phi}}{\frac{1}{2}c^2 \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2\phi}} = \frac{a^2}{c^2} \stackrel{(10)}{=} \frac{\phi^2 c^2}{c^2} = \phi^2, \\ \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ACD}} &= \frac{\frac{1}{2}a^2 \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2\phi}}{\frac{1}{2}c^2 \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2}} = \frac{a^2}{c^2 \phi} \stackrel{(10)}{=} \frac{\phi^2 c^2}{c^2 \phi} = \phi, \\ \frac{P_{\triangle BCD}}{P_{\triangle ACD}} &= \frac{\frac{1}{2}c^2 \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2\phi}}{\frac{1}{2}c^2 \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2}} = \phi, \end{aligned}$$

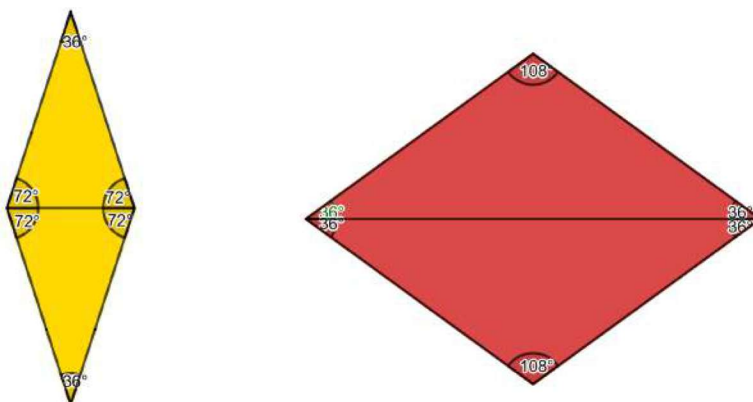
odnosno  $P_{\triangle ACD} : P_{\triangle BCD} : P_{\triangle ABC} = 1 : \frac{1}{\phi} : \phi$ .

Uočimo još jednu zanimljivost zlatnih trokuta. Komentirali smo da zlatni pravokutnik možemo dijeliti na sve manje i manje zlatne pravokutnike. To svojstvo ima i zlatni trokut. Kada bismo u zlatnom trokutu  $\triangle CDB$  povukli simetralu iz vršnoga kuta, tada bismo ga podijelili također na dva zlatna trokuta, jedan sa šiljastim vršnim kutom kao i  $\triangle CDB$  i jedan s tupim vršnim kutom. Ako bismo nastavili taj postupak, dobili bismo niz sve manjih i manjih zlatnih trokuta, što možemo vidjeti i na Slici 8.

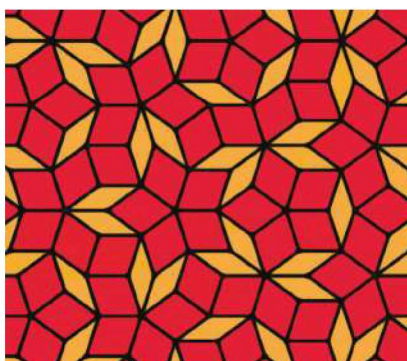


Slika 8: Niz zlatnih trokuta

1970-ih godina britanski matematičar i fizičar Roger Penrose otkrio je kako parovi zlatnih trokuta mogu u potpunosti aperiodično popuniti dvodimenzionalni prostor, odnosno bez prisutnosti translacijske simetrije. Primjerice, spajanjem dva šiljasta zlatna trokuta, dobivamo romb kao na Slici 9 lijevo, dok spajanjem dva tupa zlatna trokuta imamo romb oblika na Slici 9 desno. Tada kombiniranjem ova dva romba možemo popločiti prostor primjerice kao na Slici 10. Proširivanjem ovog popločavanja, omjer broja pojavljivanja ovih rombova konvergira upravo prema broju  $\phi$ . Ovo popločenje ima veliku ulogu u promatranju kvazikristala. Detaljnije o Penrosovom popločenju može se pronaći u [2].



Slika 9: Rombovi nastali zlatnim trokutima



Slika 10: Penroseovo popločenje, [4] figure d.

## 4.5 Zlatni peterokut i zlatni pentagram

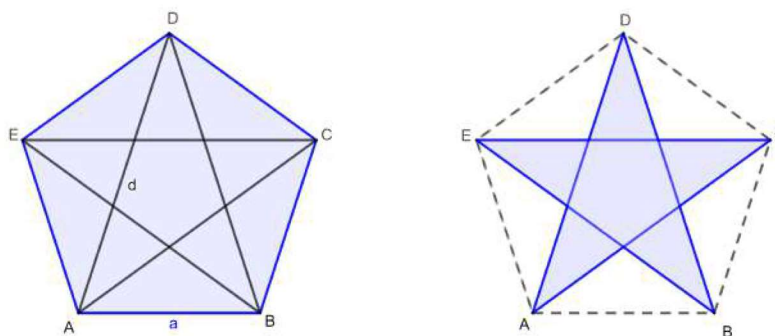
Pravilni peterokut također spada među zlatne likove jer se u njegovoj analizi može otkriti brojne povezanosti s brojem  $\phi$ . Mi ćemo ovdje navesti samo neke poveznice. Takav peterokut ima sve stranice, dijagonale i kutove jednake veličine. Znamo da za unutrašnje kutove  $\alpha$  pravilnih  $n$  – terokuta vrijedi

$$\alpha = \frac{(n - 2)180^\circ}{n},$$

pa slijedi da je za pravilni peterokut svaki unutrašnji kut veličine  $108^\circ$ .







Kada bismo povukli sve dijagonale, dobili bismo “zvijezdu” poznatiju kao pentagram u kojem također pronalazimo povezanost s brojem  $\phi$ . Pentagram je bio simbol sljedbenika Pitagore, među kojima je bio i Hipas iz Metaponta. On je navodno

prvi otkrio kako se omjer duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta ne može izmjeriti te uveo koncept iracionalnih brojeva.



Slika 11: Zlatni peterokut i zlatni pentagram

Povlačenjem svih dijagonala lako možemo uočiti kako su dijagonale paralelne s nasuprotnim stranicama te da dijagonale dijele kut na tri jednaka dijela, odnosno kut od  $108^\circ$  na tri kuta veličine  $36^\circ$ . Stoga zlatni peterokut sadrži zlatne trokute i to njih čak 35 u 6 različitih varijacija kao u Tablici 3. Trokuti tipa 4 i 5 su sukladni, trokuti tipa 1, 3 i 6 su slični kao i trokuti tipa 2 i 4. Iz zlatnih trokuta čije su stranice zapravo dijagonale peterokuta slijedi da je omjer duljine stranice peterokuta i duljine dijagonale jednak  $1 : \phi$ . Dijagonale se također međusobno sijeku u omjeru zlatnoga reza.

Tip	Broj	Primjer
1	5	
2	5	
3	10	
4	5	
5	5	
6	5	

Tablica 3: Zlatni trokuti u peterokutu

Površinu peterokuta i pentagrama možemo izračunati koristeći zlatne trokute iz Tablice 3. Ako bismo duljinu stranice peterokuta označili s  $a$  te koristili formule za računanje površine (11) mogli bismo izračunati površinu kao zbroj površina trokuta tipa 4 i trokuta tipa 6. Dakle,

$$\begin{aligned}
 P_{peterokut} &= 2P_{\Delta tip4} + P_{\Delta tip6} = \frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\phi^2 a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}}{2\phi} \\
 &= \frac{2a^2 \sqrt{\phi^2 + 1} + \phi a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}(2 + \phi)}{4}.
 \end{aligned}$$

Površinu pentagrama dobijemo kao razliku površine peterokuta i pet trokuta tipa 2

$$\begin{aligned}
 P_{pentagram} &= P_{peterokut} - 5P_{\Delta tip2} = \frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}(2 + \phi)}{4} - 5 \frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}}{4\phi^2} \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1}(\phi^3 + 2\phi^2 - 5)}{4\phi^2}.
 \end{aligned}$$

Sada možemo izračunati omjer površine peterokuta i površinu pripadnog penta-

grama. Imamo

$$\frac{P_{peterokut}}{P_{pentagram}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1} (2 + \phi)}{4}}{\frac{a^2 \sqrt{\phi^2 + 1} (\phi^3 + 2\phi^2 - 5)}{4\phi^2}} = \frac{\phi^3 + 2\phi^2}{\phi^3 + 2\phi^2 - 5} = \frac{4\phi + 3}{4\phi - 2} = \phi + \frac{1}{2}.$$

Vidimo da su dijagonale stvorile novi pravilni peterokut čiji su vrhovi zapravo sjecišta dijagonala. Kada bismo u tom novom manjem peterokutu označili dijagonale, one bi također kreirale još manji pravilni peterokut. Ponavljajući ovaj proces u beskonačno, dobili bismo sve manje i manje pravilne peterokute.

## 5 Primjena u optimizaciji

Uz pomoć zlatnoga reza možemo pronaći aproksimaciju ekstrema strogo kvazikonveksne funkcije dijeleći interval u omjeru zlatnoga reza na sve manje i manje podintervale u kojima se nalazi točka ekstrema. Metoda zlatnoga reza pokazala se iznimno efikasnom i preciznijom naspram nekih drugih metoda jednodimenzionalne minimizacije. Ovdje ćemo konstruirati postupak za pronalazak aproksimacije točke minimuma.

Najprije se upoznajmo sa strogo kvazikonveksnim funkcijama s kojima ćemo raditi u ovoj metodi.

**Definicija 5.** Za funkciju  $f : \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je strogo kvazikonveksna na  $\mathcal{C}$  ako vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve  $x, y \in \mathcal{C}$ ,  $x \neq y$  i svako  $\lambda \in (0, 1)$ .

Za ovakve funkcije nećemo proučavati ni derivabilnost niti neprekidnost. Lako se može pokazati da je točka lokalnog minimuma strogo kvazikonveksnih funkcija definiranih na nekom konveksnom skupu ujedno i točka globalnog minimuma. Kako je u ovom slučaju domena segment  $[a, b]$ , znamo da će točka minimuma biti i točka globalnog minimuma.

Neka je zadana strogo kvazikonveksna funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  s nepoznatim globalnim minimizatorom  $x^*$ . Za početni segment uzmimo  $[a_0, b_0] := [a, b]$  te definiramo dvije točke  $y_1$  i  $z_1$ ,  $y_1 < z_1$ ,  $y_1, z_1 \in [a_0, b_0]$  u cilju određivanja idućeg segmenta  $[a_1, b_1]$  i prve aproksimacije točke globalnog minimuma  $x_1^*$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + (1 - \alpha)(b_0 - a_0), \\ z_1 &= a_0 + \alpha(b_0 - a_0), \end{aligned}$$

pri čemu je  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Već znamo kako bismo primjenom zlatnoga reza jediničnu dužinu podijelili na dva dijela, jedan duljine  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$ , a drugi duljine  $1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38197$ . Stoga bismo za vrijednost  $\alpha$  mogli uzeti  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , pa imamo

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0), \\ z_1 &= a_0 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b_0 - a_0). \end{aligned}$$

Ove točke sada dijele interval  $[a_0, b_0]$  u omjeru zlatnoga reza

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_1} = \frac{b_0 - y_1}{x_1 - a_0}, \quad \frac{b_0 - a_0}{z_1 - a_0} = \frac{z_1 - a_0}{b_0 - z_1}.$$

Za najbolji odabir novog podintervala  $[a_1, b_1]$  i prve aproksimacije  $x_1^*$  analizirajmo sve moguće situacije:

1.  $f(y_1) \leq f(z_1)$ : minimum će se nalaziti u intervalu određenim s  $a_1 = a_0$  i  $b_1 = z_1$  te za  $x_1^*$  uzimamo  $y_1$ ;
2.  $f(y_1) > f(z_1)$ : minimum će se nalaziti u intervalu za koji je  $a_1 = y_1$  i  $b_1 = b_0$ , a za  $x_1^*$  uzimamo  $z_1$ .

Dakle,

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, z_1], & \text{ako je } f(y_1) \leq f(z_1), & x_1^* = y_1 \\ [y_1, b_0], & \text{ako je } f(y_1) > f(z_1), & x_1^* = z_1, \end{cases}$$

a njegova duljina onda je dana s

$$b_1 - a_1 = \begin{cases} z_1 - a_0 & = a_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0) - a_0 \\ b_0 - y_1 & = b_0 - a_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) \end{cases} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0).$$

Ocjena apsolutne pogreške aproksimacije  $x_1^*$  iznosi

$$\Delta x_1^* = |x_1^* - x^*| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b_0 - a_0).$$

Za iduću iteraciju definiramo nove točke

$$y_2 = a_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1),$$

$$z_2 = a_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1),$$

koje također imaju svojstvo da dijele interval u omjeru zlatnoga reza. Na temelju tih točaka, interval  $[a_2, b_2]$  i aproksimaciju  $x_2^*$  dobivamo iz

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, z_2], & \text{ako je } f(y_2) \leq f(z_2), & x_1^* = y_2 \\ [y_2, b_1], & \text{ako je } f(y_2) > f(z_2), & x_1^* = z_2. \end{cases}$$



Duljinu intervala i ocjenu pogreške računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} b_2 - a_2 &= \begin{cases} z_2 - a_1 &= a_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) - a_1 \\ b_1 - y_2 &= b_1 - a_1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1) \end{cases} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b_0 - a_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2^* = |x_2^* - x^*| &\leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_2 - a_2) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b_1 - a_1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 (b_0 - a_0). \end{aligned}$$

U općenitom slučaju, odnosno u nekoj  $n$ -toj iteraciji ove metode, definiramo točke

$$\begin{aligned} y_k &= a_{n-1} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), \\ z_k &= a_{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), \end{aligned}$$

pri čemu je poznat interval  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$  kojeg ove točke dijele u omjeru zlatnoga reza. Uz ove točke novi podinterval  $[a_n, b_n]$  i  $n$ -ta aproksimacija  $x_n^*$  glase

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [a_{n-1}, z_n], & \text{ako je } f(y_n) \leq f(z_n), & x_n^* = y_n \\ [y_n, b_{n-1}], & \text{ako je } f(y_n) > f(z_n), & x_n^* = z_n, \end{cases}$$

gdje duljina intervala  $[a_n, b_n]$  iznosi

$$b_n - a_n = \dots = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b_0 - a_0).$$

Apsolutna pogreška  $n$ -te aproksimacije iznosi

$$\begin{aligned} \Delta x_n^* = |x_n^* - x^*| &\leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b_{n-2} - a_{n-2}) \\ &= \dots = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} (b_0 - a_0) \end{aligned}$$

i konvergira prema 0 za  $n \rightarrow +\infty$ . Niz razlika  $z_1 - y_1, z_2 - y_2, \dots, z_k - y_k, \dots$ , također će konvergirati k 0. Dakle, ovom metodom možemo ostvariti proizvoljnu točnost aproksimacije. Koraci metode mogu se pronaći i u Algoritmu 1.

**Input** : funkcija  $f$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\delta > 0$   
**Output**:  $x^*$   
 $n \leftarrow 0$ ;  
**while**  $b - a \geq \delta$  **do**  
     $n \leftarrow n + 1$ ;  
     $y_1 \leftarrow a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b - a)$ ;  
     $z_1 \leftarrow a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b - a)$ ;  
    **if**  $f(y_1) \leq f(z_1)$  **then**  
         $b \leftarrow z_1$ ;  
         $x^* \leftarrow y_1$ ;  
    **else**  
         $a \leftarrow y_1$ ;  
         $x^* \leftarrow z_1$ ;  
    **end**  
**end**

**Algoritam 1:** Metoda zlatnoga reza

Razmotrimo sada koliko iteracija ove metode je potrebno napraviti da bi duljina intervala  $[a_n, b_n]$  bila manja od proizvoljnog realnog broja  $\delta > 0$ , odnosno da bismo odredili aproksimaciju  $x^*$  s točnošću  $\delta$ :

$$b_n - a_n = \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b_0 - a_0) < \delta$$

$$n \ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \ln (b_0 - a_0) < \ln \delta$$

$$n \ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \ln \delta - \ln (b_0 - a_0)$$

$$n > \frac{\ln \delta - \ln (b_0 - a_0)}{\ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2}},$$

odnosno najmanje

$$N = \left\lceil \frac{\ln \delta - \ln (b_0 - a_0)}{\ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} - 1 \right\rceil.$$

**Primjer 3.** *Odredimo prve četiri aproksimacije točke minimuma za funkciju  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |2x - 1| + 3$  te odredimo i ocijenimo pogrešku dobivene aproksimacije. Nadalje, odredimo koliko je koraka metode potrebno za točnost 0.01.*

*Rješenje.* Dobivene rezultate zaokružene na pet decimalnih mjesta naveli smo u Tablici 4.

$n$	$a_n$	$b_n$	$y_n$	$z_n$	$f(y_n)$	$f(z_n)$	$x_n^*$
0	0	2	0.76394	1.23606	3.52788	4.47212	0.76394
1	0	1.23606	0.47214	0.76392	3.05572	3.52784	0.47214
2	0	0.76392	0.29179	0.47213	3.41642	3.05574	0.47213
3	0.29179	0.76392	0.47213	0.58358	3.05573	3.16717	0.47213
4	0.29179	0.58358	0.40325	0.47213	3.1935	3.05574	0.47213

Tablica 4: Prvih nekoliko iteracija metode zlatnoga reza

Iz funkcije vidimo da je točka minimuma jednaka 0.5, pa je apsolutna pogreška

$$|x^* - x_4| = 0.02787$$

te ocjena pogreške iznosi

$$|x^* - x_4| \geq \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) (2 - 0) = 0.18033.$$

Za točnost 0.01, potrebno nam je minimalno

$$N = \left\lceil \frac{\ln 0.01 - \ln (2 - 0)}{\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}} - 1 \right\rceil = 11$$

iteracija algoritma kako bismo dobili što precizniju aproksimaciju.

Uočimo kako u ovoj metodi ne treba u svakom koraku računati obje točke  $y_n$  i  $z_n$ , već samo jednu ovisno o ispunjenim uvjetima, što smanjuje potrebno računanje u algoritmu.

## 6 Zanimljive pojave i primjene

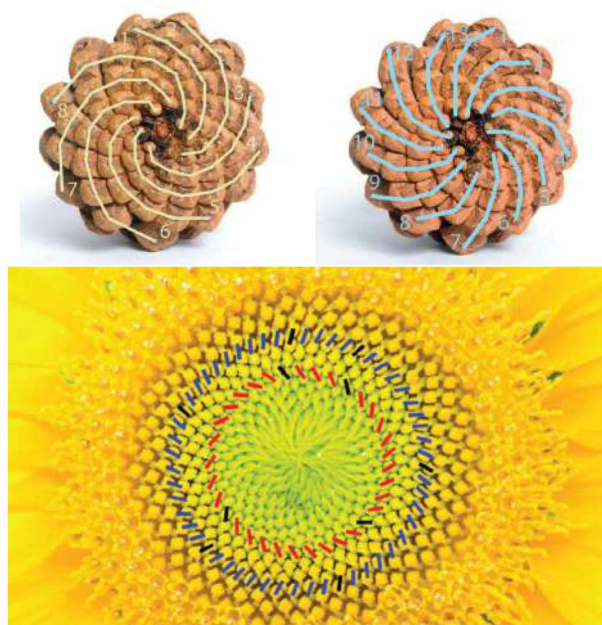
Zlatni rez pojavljuje se u svijetu oko nas, ali i izvan naše planete. Svoju veliku primjenu ima u umjetnosti s obzirom da je ovaj omjer očarao brojne slikare, arhitekte i kipare. Izražen je i u odnosima u prirodi, građi biljaka, životinja i ljudi te se čak krije i u najsitnijim detaljima. Navest ćemo neke zanimljive primjere pojave i primjene zlatnog reza u prirodi, svemiru i umjetnosti koji će potvrditi da je zlatni rez prisutan svugdje oko nas i predstavlja težnju ka skladu.

### 6.1 Priroda i čovjek

Priroda je prepuna primjera zlatnoga reza. Najčešću pojavu u prirodi ima zlatna spirala koja je prisutna u mnogim biljkama. Ako razmotrimo češer, vidimo na Slici 12 da ima 8 spirala u smjeru kazaljke na satu i 13 u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a također znamo kako su 8 i 13 susjedni Fibonaccijevi brojevi. Slično možemo primijetiti kod suncokreta koji ima 55 spiralnih redova u smjeru kazaljke na satu i 34 u suprotnom smjeru. Nova sjemenka suncokreta naraste dalje od prethodne upravo za zlatni kut. Zlatni kut također određuje položaj nove latice u odnosu na prethodnu u cvjetovima te položaj listova na stabljici kako bi što bolje primali svjetlost.

Pojavu pentagrama možemo vidjeti u cvjetovima s pet latica te u voću i povrću. Primjerice, ako bismo jabuku prerezali na pola kao na Slici 13, mogli bismo uočiti da raspored sjemenaka čini formaciju pentagrama. U životinjskom svijetu, zvjezdače su također primjer pentagrama.

Zlatni rez je prisutan u građi mnogih životinja npr. dupini, leptiri, ose, ptice, mačke i mnoge druge životinje, no prisutan je čak i u građi čovjeka. Naše kosti odnose se u omjeru zlatnoga reza što možemo uočiti iz odnosa podlaktice naspram šake i naspram prstiju. Uho u ranom razdoblju našeg života prati oblik zlatne spirale. Položaj srca u našem tijelu naginje k lijevoj strani prsnoga koša, upravo dijeleći udaljenost od desne i lijeve strane u omjeru zlatnoga reza. Zlatni rez može se pronaći u najmanjim našim strukturama, primjerice u građi DNK-a.



Slika 12: Spiralni redovi češera i suncokreta, [4]



Slika 13: Sjemenke jabuke u pentagramu, [4]

## 6.2 Svemir

Utjecaj zlatnoga reza prisutan je čak i izvan našeg planeta. Većina galaksija, kao i naša Mliječna staza, su spiralnog karaktera. To su plosnate galaksije koje se sastoje od diska u kojem se nalazi jezgra i spiralnih krakova koji su zapravo oblika zlatne spirale. Mnogi znanstvenici otkrili su da se broj  $\phi$  pojavljuje i u formulama za opisivanje svojstava crnih rupa. U našem solarnom sustavu, zlatni rez može se iskoristiti za opisivanje odnosa dimenzija između Zemlje i Mjeseca. Njihovi radijusi

na temelju NASA-inih podataka iznose:

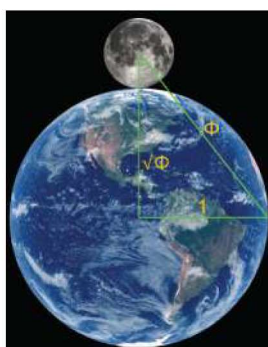
$$\text{Zemlja: } r_1 = 6371 \text{ km}$$

$$\text{Mjesec: } r_2 = 1737.40 \text{ km.}$$

Označimo radijus, koji povezuje središte Zemlje s najistočnijom točkom Zemlje, kao stranicu trokuta koju ćemo uspoređivati s ostalima. Zamislimo li da se Mjesec nalazi točno iznad Zemlje kao na Slici 14, možemo povući dužinu koja je određena točkom središta Mjeseca i točkom središta Zemlje. Ova dužina predstavljat će nam drugu katetu pravokutnog trokuta čija je duljina zbroj radijusa. Odnos kateta ovog pravokutnog trokuta je

$$\frac{6371 + 1737.40}{6371} = \frac{8108.40}{6371} = 1.27202 \approx \sqrt{\phi}.$$

Iz Pitagorinog teorema slijedi da je duljina hipotenuze jednaka 10311.92 km te se odnosi prema početnoj kateti u omjeru  $\phi : 1$ . Pravokutni trokut čije su katete i hipotenuza u omjeru  $1 : \sqrt{\phi} : \phi$  poznat je kao Keplerov trokut.



Slika 14: Keplerov trokut za usporedbu dimenzija Zemlje i Mjeseca, [4]

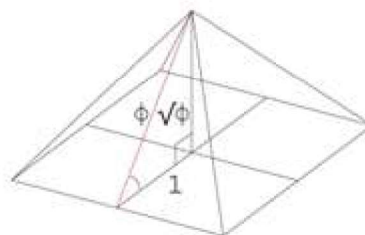
Zlatni rez pojavljuje se i u odnosu Zemlje s njenim najbližim susjednim planetom Venerom. Za vrijeme 13 obilazaka Venere oko Sunca, Zemlja napravi 8 obilazaka. Brojevi 13 i 8 pripadaju Fibonaccijevom nizu i njihov omjer je približno jednak  $\phi$ .

### 6.3 Umjetnost

Čovjekova težnja k savršenstvu realizira se i u umjetničkim granama, primjerice u arhitekturi, slikarstvu, kiparstvu i glazbi. Umjetnici su oduvijek nastojali izraditi

skladna dijela, pa je zlatni rez pronašao svoje mjesto i u slavnim umjetničkim djelima u povijesti te i u današnjoj umjetnosti.

U arhitekturi zlatni rez može se pronaći još u egipatskoj povijesti, primjerice u slavnoj Keopsovoj piramidi. Ona je najstarija i najveća piramida u Gizi koja je jedino preostalo svjetsko čudo antike. Za jednostavnije opisivanje veze između visine i duljine četiri brida baze piramide iskoristit ćemo Keplerov trokut sa duljinama stranica 1,  $\sqrt{\phi}$  i  $\phi$  kao na Slici 15. Takva piramida imat će duljinu brida baze 2 i visinu  $\sqrt{2}$ . Omjer visine piramide i širine ove piramide je 0.636. Keopsova piramida je visine 146.59 m i širine baze 230.33 m te je omjer ovih dimenzija također 0.636. Vidimo da se Keplerov trokut može iskoristiti za opisivanje ove piramide, no nije poznato je li zlatni rez bio temeljni element ideje njene izgradnje.



Slika 15: Keopsova piramida, [4]

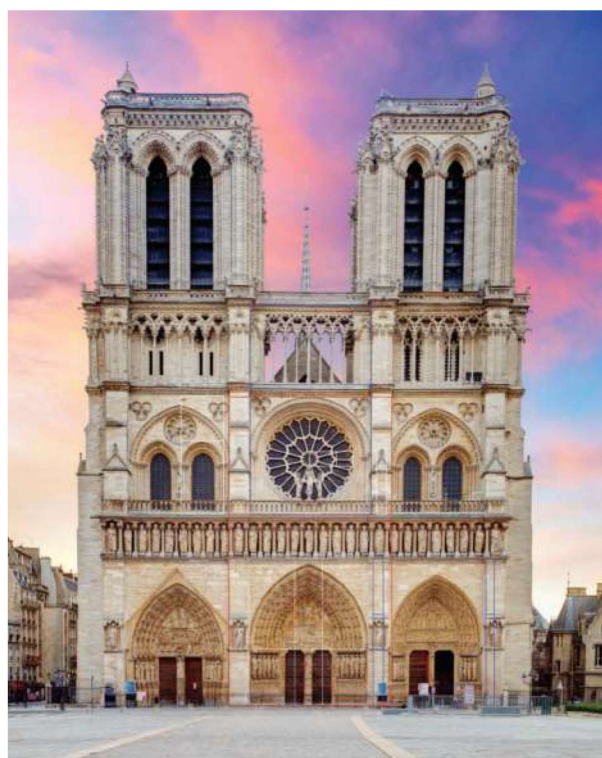
Zlatni rez bio je česti element antičke grčke arhitekute, pa se pojavljuje i u poznatom antičkom hramu Partenonu posvećen božici Ateni. Iako je Partenon danas djelomično urušen, može se pretpostaviti kako je pročelje zadovoljilo zlatni pravokutnik. Krov s gredom u približnom je omjeru zlatnoga reza s visinom hrama (stupovi i postolje) kao i triglifi i reljefi (metope) na frizu što možemo vidjeti i na Slici 16. Jedan od arhitekata Partenona bio je kipar i arhitekt Fidijs te se smatra da se zlatni rez zapravo označava sa  $\phi$  zbog prvog slova njegova imena.

Ovaj omjer dominira također u gotici i renesansi. Gotičke katedrale težile su skladu i ljepoti kako bi se odrazilo što veće poštovanje Bogu i vjeri. Najpoznatiji primjer zlatnoga reza u gotici je pročelje katedrale Norte Dame (Slika 17). Osim u Europi, primjena se može pronaći i u istočnoj kulturi, primjerice na Taj Mahalu.

Ni moderna arhitektura nije izostavila ovaj omjer što možemo uočiti na zgradi Ujedinjenih naroda (Slika 18). Širina zgrade je u omjeru zlatnoga reza sa svakih deset katova zgrade, a i sami prozori izrađeni su u skladu s ovim omjerom.



Slika 16: Partenon, [4]



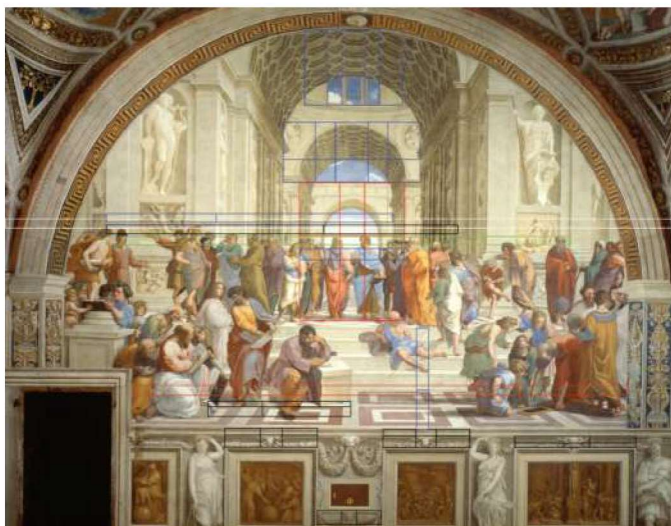
Slika 17: Katedrala Norte Dame, [4]





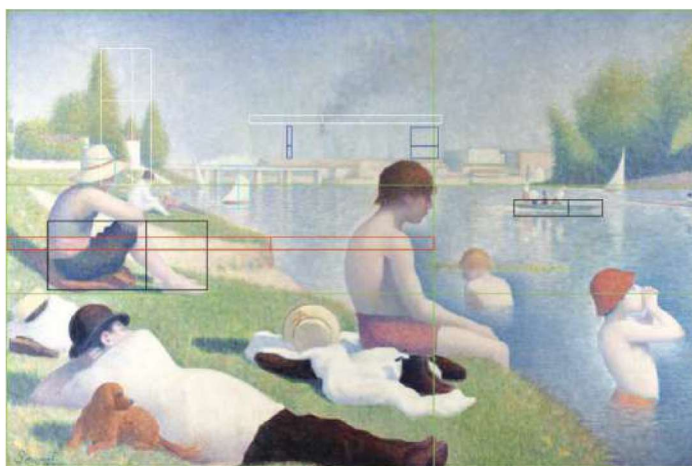
Slika 18: Zgrada UN-a, [4]

U slikarstvu, zlatni rez bio je najviše zastupljen u renesansi i omiljen među velikim slikarima toga razdoblja kao Leonardo da Vinci, Piero della Francesca, Botticelli, Rafael i Michelangelo. Brojne njihove slike sadrže ovaj omjer i zlatne pravokutnike. Primjerice, na Rafaelovoj slici Atenska škola možemo uočiti da se zlatni rez iskoristio u kompoziciji, položajima likova te čak i u detaljima (Slika 19).



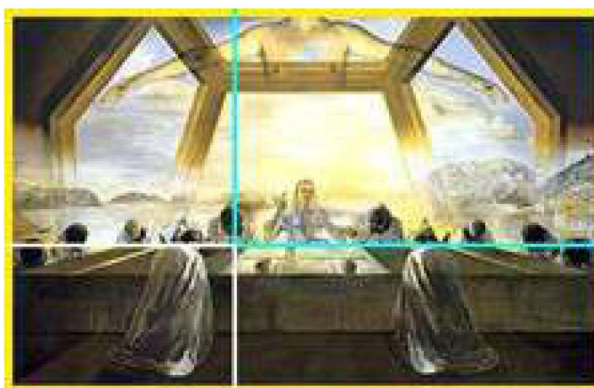
Slika 19: Rafael: Atenska škola, [4]

Zlatni rez može se otkriti i u modernom slikarstvu, pa navedimo nekoliko primjera. Francuski slikar impresionizma Georges Seurat poznat je po korištenju zlatnoga reza u svojim djelima. Kupači kod Asnièresa (Slika 20) je jedna od najpoznatijih njegovih slika koja je kompozicijski ostvarena korištenjem zlatnih pravokutnika.



Slika 20: Seurat: Kupači kod Asnièresa, [4]

Dimenzije slike Salvadora Dalíja Posljednja večera (Slika 21) već su u omjeru zlatnoga reza, no može se uočiti i dodekaedar koji je omeđen pravilnim peterokutima. Također, odnos stola i cjeline opisan je zlatnim rezom.



Slika 21: Dalí: Posljednja večera, [7]

Više primjera ovoga omjera u umjetnosti može se pogledati u [3, 4].

## Literatura

- [1] A. DUJELLA, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
- [2] R. A. DUNLAP, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, Singapore, 1997.
- [3] M. LIVIO, *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Numbers*, Broadway Books, New York, 2002.
- [4] G. B. MEISNER, *The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics*, Race Point Publishing, New York, 2018.
- [5] A. S. POSAMENTIER, I. LEHMANN, *The Glorious Golden Ratio*, Prometheus Books, New York, 2012.
- [6] R. SCITOVSKI, K. SABO, D. GRAHOVAC, *Globalna optimizacija*, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2017.
- [7] Web izvor dostupan na  
`\https://www.goldennumber.net/art-composition-design/`.

## Sažetak

Omjer dva različita broja jednak je zlatnom rezu ako je omjer većeg broja prema manjem jednak omjeru njihove sume i većeg broja. Zlatni rez je iracionalan broj koji iznosi  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  te je usko vezan uz Fibonaccijeve brojeve. U geometriji su poznati brojni geometrijski likovi koji su određeni ovim omjerom od kojih su neki navedeni u ovom radu. Metoda zlatnoga reza jedna je od učinkovitih optimizacijskih metodi za pronalazak točke ekstrema strogo kvazikonveksnih funkcija definiranih na intervalu. Broj  $\phi$  jedan je od najpoznatijih brojeva u povijesti koji se može pronaći u prirodi, čovjeku, svemiru, umjetnosti, itd.

## Ključne riječi

zlatni rez, Fibonaccijevi brojevi, zlatni pravokutnik, zlatna spirala, zlatni trokut, metoda zlatnoga reza

# The golden ratio and its applications

## Summary

The ratio of two different numbers is equal to the golden ratio if the ratio of the larger number to the smaller number is equal to the ratio of their sum to the larger number. The golden ratio is an irrational number that is equal to  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  and is closely related to Fibonacci numbers. In geometry, there are many geometric figures that are determined by this ratio some of which are specified in this thesis. The golden section search method is one of the effective optimization methods for finding the extreme point of strictly quasiconvex functions defined on an interval. The number  $\phi$  is one of the most famous numbers in history that can be found in nature, people, space, art, etc.

## Keywords

golden ratio, Fibonacci numbers, golden rectangle, golden spiral, golden triangle, golden section search method

## Životopis

Rođena sam 27. veljače 1999. u Osijeku. Nakon završetka osnovne škole 2013. godine, upisujem Gimnaziju u Belom Manastiru, općega smjera. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja, 2017. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku koji završavam 2020. godine sa završnim radom s temom *Neki kriptosustavi zasnovani na problemu faktorizacije* pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Ivana Solde. Iste godine na Odjelu za matematiku u Osijeku upisujem diplomski studij, smjer Financijska matematika i statistika.