Omjer i proporcija

Gudelj, Andrea

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Andrea Gudelj

OMJER I PROPORCIJA

Diplomski rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

SMJER: Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Andrea Gudelj

Diplomski rad

Omjer i proporcija

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

Ovaj diplomski rad posvećujem osobama koje su bezuvjetno vjerovale u mene, mom dečku, mojim roditeljima i mom bratu.

Sadržaj

Uvod

U svom diplomskom radu govorit ću o omjerima i proporcijama zbog toga što mislim da velika većina ljudi nije zapravo svjesna koliko ih upotrebljava u svakodnevnom životu, pa mi se učinilo zanimljivim da i sama, kao budući nastavnik, nešto više naučim o njima.

Djeca se susreću s omjerima već u ranijim razredima osnovne škole iako nisu upoznati sa samim pojmom. Prvi puta se s pojmom „omjera“ susreću u 7. razredu. Zapravo, mnoge nastavne jedinice osnovne i srednje škole u kurikulumu se odnose, izravno ili neizravno, na pojam omjera. Cijena za proizvod, razlomci, postotci, vjerojatnosti, problemi u svakodnevnom životu, mjerenja, proširenje i skraćivanje likova i tijela, i π kao omjer opsega kruga i njegovog promjera, su tek neki od primjera omjera po nastavnom planu i programu za matematiku u osnovnim i srednjim školama.

U strukovnim srednjim školama i gimnazijama, mnogi od fenomena koji se uče mogu se definirati kao omjeri dvije veličine. Naprimjer, u geografiji, pojam „gustoća naseljenosti“ može se definirati kao omjer broja stanovnika i površine koju zauzimaju. Pojam „mjerila“ u kartografiji je zapravo omjer jedinice udaljenosti na karti i jedinice udaljenosti u stvarnosti. U znanosti, osobito u fizici i kemiji, omjer se koristi za definiranje različitih fenomena kao što su brzina, akceleracija (ubrzanje), posebne gravitacije, gravitacijska sila i koncentracija. Omjer se koristi u ekonomiji i statistici za računanje profita i gubitka i vjerojatnosti i u tehnološkim znanostima za izračune u inžinjerstvu, mehanici, robotici, računarstvu i mnogim drugim.

Postoje mnogi slučajevi gdje "omjer" nije eksplicitno očit, i preduvjet znanja zahtjeva da se uoči kako je pojam zapravo baziran na omjeru između dva uvjeta.

Kao i "omjer" pojam "proporcije" se često koristi za rješavanje problema u matematici i ostalim granama. Osim matematike i posebno u egzaktnim znanostima, gotovo da ne postoji tema koja ne uključuje korištenje proporcija na neki način, ne nužno izravno.

Još ću navesti neke strategije koje rezultiraju boljem razumijevanju omjera te proporcionalne formule. Dvije velike kategorije strategija su pred-formalne i formalne strategije.

1 Omjeri i proporcije iz matematičke perspektive

1.1 *Pojam omjera*

Omjer je matematički prikazan kao

$$a : b \quad ili \quad \frac{a}{b},$$

gdje je $b \neq 0$. Definicija se može proširiti na:

$$a : b : c : d : e \quad ili \quad a/b/c/d/e,$$

gdje su $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, e \neq 0$.

Omjer može biti direktno korišten na mnogo načina kao što možemo primijetiti u sljedećim primjerima.

- U buketu cvijeća omjer između tulipana i ruža je 1:3. Za svaka 4 cvijeta u buketu, 1 je tulipan, a 3 su ruže; ili od svih cvjetova u buketu $\frac{1}{4}$ su tulipani i $\frac{3}{4}$ su ruže. Ako su u buketu 3 tulipana, onda će u buketu biti i 9 ruža.
- Omjer između broja dječaka i djevojčica u razredu je 3:4, što znači za svakih 7 učenika u razredu, 3 su dječaka i 4 djevojčice; ili $\frac{3}{7}$ učenika su dječaci i $\frac{4}{7}$ su djevojčice. Ako je 18 dječaka u razredu, onda je ukupan broj učenika 42 od čega su 24 djevojčice.
- Rezultat nogometne utakmice, 2:3, predstavlja omjer između broja golova koje je postigla domaća ekipa (2) i broja golova koje je postigla gostujuća ekipa (3). Drugim riječima, poražena ekipa je postigla 40% ($= \frac{2}{5}$) od ukupnog broja golova, dok je pobjednička ekipa postigla 60% ($= \frac{3}{5}$) golova.
- Omjer između brašna i šećera u receptu je 2:1. Znači, za svake 2 šalice brašna, iskoristi se 1 šalica šećera.
- Omjer između duljine i širine pravokutnika je 2:1.
- Omjer između broja pizza i broja ljudi za stolom u restoranu je 8:10. Ako je desetero djece za stolom i moraju podijeliti 8 pizza između sebe znači da će svako dijete dobiti $\frac{4}{5}$ ili 80% pizze.

Neki primjeri u kojima "omjer" nije eksplicitno očit:

- "Brzina" može biti definirana kao omjer između puta koji automobil prijeđe i vremena koje je potrebno da se prijeđe taj put.
- "Mjerilo" (u kartografiji) može biti definirano kao omjer između jedinice mjere na karti i prave udaljenost (koristeći jednaku jedinicu mjere).
- "Gustoća naseljenosti" je omjer između broja stanovnika i dane površine.

- "Ravnoteža" kod vage s jednakim kracima se postiže kada postoji inverzna veza između duljine krakova i mase utega na svakom kraku. Drugim riječima, produkt svakog para je konstanta.

- "Potrošnja benzina" se mjeri kao omjer između prijeđenih kilometara i iskorištenih litara benzina (km/l). Obrnuto, potrošnja benzina također se može izraziti prema litrama po kilometru (l/km).

U matematici "omjer" je kvantifikacija (određivanje količine) multiplikativnih odnosa koji se izračunavaju dijeljenjem (ili množenjem) jedne količine drugom. Multiplikativni količnik utvrđuje se dijeljenjem (ili množenjem) dvije veličine. Naprimjer, ako je dvostruko više sati nastave u naprednom tečaju u usporedbi s osnovnim tečajem, onda možemo matematički usporediti sate u naprednom i osnovnom tečaju. U ovom slučaju, omjer 2:1 je kvantifikacija multiplikativne veze između dvije jedinice.

Postoje druge veze u matematici koje nisu multiplikativne. Neki primjeri su aditivne (ili subtraktivne) veze, tj. one veze kod kojih razlika između dva mjerenja ostaje konstantna, odnosno jedna veličina je dosljedno veća ili manja nego druga.

1.1.1 Objašnjenja definicije omjera

Načini prikaza omjera.

Omjer može biti opisan na mnoge načine. Naprimjer, možemo napisati da je broj crvenih perlica naspram bijelih perlica u ogrlici kao 3 naspram 5 ili 3:5 ili $\frac{3}{5}$.

Ali, jesu li svi izrazi jednaki?

Na prvi pogled, svaki izraz pokazuje kako za svake 3 crvene perlice imamo 5 bijelih. Dakle, ova tri izraza prikazuju istu situaciju. Međutim, matematički, svaki oblik ima posebni značaj.

- "3 naspram 5" opisuje situaciju riječima, bez matematičke implikacije.

- "3:5" opisuje uzorak koristeći koncept omjera.

- "$\frac{3}{5}$" je razlomak i on implicira da dani odnos u ovom slučaju može biti definiran kao racionalan broj $\frac{3}{5}$.

Zapravo, ako je omjer crvenih i bijelih perlica u ogrlici jednak 3:5, onda je moguće prikazati taj omjer na pet različitih načina:

- Za svake 3 crvene perlice postoji 5 bijelih.

- Za svakih 8 perlica u ogrlici, 3 su crvene i 5 bijelih.

- $\frac{3}{8}$ svih perlica su crvene i $\frac{5}{8}$ su bijele.

- Crvene perlice su $\frac{3}{5}$ od broja bijelih perlica.

- Bijele perlice su $\frac{5}{3}$ od broja crvenih perlica.

Nula kao količina u omjeru.

U prethodnom ulomku, jedna od definicija omjera je dana kao matematička procedura dijeljenja (kvocijenta). Dakle, određena ograničenja će se odnositi na veličine kojima je omjer izražen.

Operacija dijeljenja u matematici (kao sve matematičke operacije) je binarna operacija, tj. dvije komponente (brojnik i nazivnik) su povezane operativnim simbolom. Rezultat ove operacije mora biti jedinstven i definiran unutar domene brojeva.

U matematičkoj notaciji, operacija dijeljenja se piše kao $a : b = c$. Dvije komponente su a i b, operativni simbol je :, i rezultat je c koji mora biti jedinstven i unutar domene brojeva u kojoj se operacija odvija (prirodan, cijeli, racionalan ili realan broj).

Odmah se može zaključiti kako se nula (0), kao jedna od vrijednosti u matematičkom izrazu omjera, može pojaviti samo u brojniku (npr. 0:7). Drugim riječima, jedino u omjeru 0 naspram bilo kojeg drugog broja koji nije nula ($0 : a, a \neq 0$).

Zašto? U skladu s matematičkim pravilima, nula u nazivniku dala bi nedefiniran rezultat. Izraz s nulom u nazivniku ima dvije mogućnosti:

(1) brojnik je bilo koji broj osim nule ($a : 0, a \neq 0$), ili

(2) brojnik je nula (0:0).

U prvom slučaju, rezultat omjera nije definiran na temelju definicije binarne operacije. Naprimjer, za 7:0 ne postoji broj c koji zadovoljava jednadžbu $7 : 0 = c$ zato što ne postoji vrijednost c koja odgovara izrazu $c \cdot 0 = 7$. U drugom slučaju (brojnik je nula), također imamo veličinu koja nije definirana, ali iz drugog razloga: ovdje ne postoji jedinstvena vrijednost za c budući je izraz $0 \cdot c = 0$ (kriterij provjere dijeljenja množenjem) točan za beskonačan broj slučajeva, što je također kontradiktorno s definicijom binarne operacije. Iz tog razloga, omjer uvijek mora biti definiran kao $a : b, b \neq 0$.

Dodatno, jer omjeri općenito uključuju određene veličine i količine, možemo zaključiti da ni komponenta a ni komponenta b neće biti negativni brojevi.

Kako je "omjer" obično pojam koji izražava pojave iz svakodnevnog života, postoje mnogi primjeri gdje se matematička definicija iznad izrečena primjenjuje logično. Također postoje situacije koje se ne mogu definirati matematički. Naprimjer, ako se određena količina a, podijeli između dvoje ljudi tako da prva osoba dobije ništa, a druga sve, njihov omjer možemo lako zapisati kao $0 : a$. Međutim ako prva osoba dobije sve, a druga ništa, onda imamo omjer $a : 0$, što je, kao što je već objašnjeno, matematički bez značenja unatoč činjenici da opisuje svakodnevnu pojavu koja se može izraziti riječima. Naravno, možemo okrenuti odnos i opet zapisati kao $0 : a$ i tako se zateći ponovno u poznatom okruženju. Ako je odnos $a : b$ jednak 2:3, moguće je reći kako je to zapravo odnos između $b : a$ i on je jednak 3:2. Zaključak je da je potrebno napraviti razliku između riječima opisane određene situacije i njezinog matematičkog izraza.

Kompleksnost opisa pojma omjera riječima uz svoj matematički izraz (koristeći operaciju dijeljenja) postaje očiglednija u situaciji u kojoj su dvije vrijednosti koje čine odnos omjera raspodijeljene jednako. Naprimjer, ako je određena količina a podijeljena jednako između dvoje ljudi, omjer između njih je

$$\frac{a}{2} : \frac{a}{2},$$

ili općenitije, 1:1.

Postoji beskonačno primjera u svakodnevnom životu koje opisuju takvu situaciju: npr. dvoje ljudi, A i B, svaki imaju 1000000 kuna. Koji je omjer između njih? Naravno, odgovor je 1:1, što pokazuje da je to jednako. Matematički gledano, dokle god oboje imaju jednak iznos (čak i ako se radi o jednoj lipi) omjer je i dalje 1:1. (U tom slučaju, ako su oboje u dugovima koji iznose milijun kuna, omjer je i dalje 1:1.) Ali što se događa kada dvoje pojedinaca nemaju novca (i to je stvarna mogućnost)? Matematički odnos je sada 0:0, što je kao što smo pokazali, matematički bez značenja. Ova situacija se ne može prikazati matematički, unatoč činjenici da je realna i ne razlikuje se toliko od ostalih situacija kada su imali određene iznose novca ili dugovanje.

Druga situacija iz svakodnevnog života, koja je zasigurno poznata mnogima, je rezultat utakmice, odnosno postignutih golova od strane oba tima. Pored rezultata kao što je 3:2, rezultati kao što su 0:0 i 3:0 su također poznati. Međutim, u ovoj situaciji, pojam razlomka (kao što smo objasnili ranije) se ne implicira i bitno je samo objašnjenje riječima. Ovdje nije važno predstaviti nedvosmislenu ili jednostavnu definiciju pojma omjera. Važno je pokazati kako je matematička definicija "omjera" prilično proizvoljna. Stoga, od trenutka kada je izraz definiran matematički, neke posebne situacije su primjerene dok neke nisu.

Postaje jasno da u bilo kojoj situaciji u kojoj je nula jedna od komponenti, nije bitno prikazati odnose matematički kao kvocijent. Zapravo, lako je moguće da je u takvom slučaju odnos aditivan, a cilj je opisati koliko je jedna veličina veća (ili manja) od druge. Kod rezultata 3:0, jasno je da je jedan tim postigao 3 gola više nego drugi (u aditivnom odnosu), a ne koliko je puta jedan tim postigao u usporedbi s drugim (multiplikativni odnos).

Kvantitativni matematički smisao danog omjera.

Pojam "omjera" označava multiplikativni odnos između dvije veličine. Bez dodatnih aditivnih podataka, zapravo je nemoguće zaključiti što su veličine komponenti koje su u omjeru. Ako zadamo da je omjer crvenih i bijelih perlica u ogrlici 3:5 bez ijedne druge informacije, nemoguće je znati koliko je zapravo perlica u ogrlici. Možemo jedino znati da za svakih 8 perlica, 3 su crvene i 5 bijelih; ili na svake 3 crvene perlice, dolazi 5 bijelih. Međutim, jednom kad je kvantitativna vrijednost izrečena, kao broj crvenih ili bijelih perlica, ili razlika između ukupnog broja za svaku, postaje moguće napraviti zaključke s konkretnim brojevima.

U našem primjeru, ako zadamo da je omjer crvenih naspram bijelih perlica 3:5, i također zadamo kako je razlika između broja bijelih i crvenih perlica 6, onda možemo izračunati da je točno 24 perlice u ogrlici. [Za svakih 8 perlica - 3 crvene i 5 bijelih -

postoji 2 više bijelih nego crvenih. Budući je ukupna razlika 6, mora biti 3 skupa po 8 perlica, tako da je ukupan iznos perlica $(3 \cdot 8)$ 24, od kojih je 9 crvenih $(3 \cdot 3)$ i 15 bijelih $(3 \cdot 5)$.]

Aditivno mišljenje dovodi do zbrajanja i oduzimanja za razliku od multiplikativnog mišljenja koje dovodi do množenja i dijeljenja.

U matematici obično susrećemo probleme koji zahtijevaju usporedbu veličine ili količine. Ako je cilj pronaći koliko je određena količina veća ili manja nego druga, koristi se zbrajanje ili oduzimanje. Uspoređivanje zbrajanjem ili oduzimanjem je prva metoda s kojom se susreću učenici u osnovnoj školi i za mnoge ovaj način razmišljanja dominira u bilo kojoj situaciji koja zahtjeva usporedno razmišljanje. Međutim, tipova problema u kojima zbrajanje i oduzimanje nemaju efekta je mnogo i zahtijeva se multiplikativna strategija koja uključuje razumijevanje pojma omjera.

Naprimjer, koja trgovina je povoljnija za kupnju CD-a: trgovina A koja nudi 7 CD-ova za 40 kuna ili trgovina B koja ih nudi 6 za 39 kuna? Omjeri $\frac{40}{7}$ i $\frac{39}{6}$ se lako izračunaju. Međutim, učenici sa samo aditivnim vještinama zaključivanja će misliti kako su ova dva odnosa jednaka budući je vidiljvo kako je razlika između brojnika jednaka razlici između nazivnika. Takva zabluda očigledno dovodi do netočnog rješenja.

Jednostavno oduzimanje nije primjereno u ovoj situaciji. Multiplikativni odnos je potreban za usporedbu dviju trgovina i to se može izračunati na brojne načine:

1. Cijena pojedinog CD-a u svakoj trgovini (5.71 kn u trgovini A i 6.50 kn u trgovini B).

2. Omjeri cijene i broja CD-ova u obliku razlomka - odrediti koji je razlomak veći/manji ($\frac{40}{7}$ u trgovini A i $\frac{39}{6}$ u trgovini B).

3. Broj CD-ova koji se mogu kupiti u svakoj trgovini s danim iznosom novca. Naprimjer, za 78 kn u trgovini A ćemo kupiti 13 CD-ova s ostatkom nekog novca, i 12 CD-ova u trgovini B.

4. Koliko će isti broj CD-ova koštati u svakoj trgovini (42 CD-a u A će koštati 240 kn, a u B će koštati 273 kn).

U svakom slučaju, zaključak će biti da trgovina A ima bolju ponudu.

1.1.2 Tipovi omjera

Od ideja koje su potekle od Hansa Freudenthala uspoređivanje između dvije ili više veličina se može iznijeti pomoću jedne od ove tri metode:

- Uspoređivanje mjerenja različitih količina sa zanimljivom povezanošću, kao što su "kilometar po litri", "ljudi po kvadratnom kilometru", "kilogram po kubnom metru" ili "jedinica cijene". U pravilu, ove usporedbe se ne nazivaju omjeri već brzine ili gustoće.

- Uspoređivanje dva dijela od jednog cijelog, kao što su "omjer djevojčica i dječaka u razredu je 15 naspram 10" ili "segment se dijeli na omjer zlatnog reza".

- Uspoređivanje mjerenja dvaju veličina koje su pojmovno povezane, ali se ne smatraju kao dijelovi zajedničke cjeline, kao što su "omjer stranica dvaju trokuta je 2:1". Takve usporedbe se često odnose kao skaliranje i uključuju probleme rastezanja i skupljanja u sličnim transformacijama.

Ove kategorije prikazuju, u suštini, multiplikativne odnose koji proizvode omjer. Postoji razlika između prve i ostale dvije koju treba primjetiti. Drugim riječima, postoje dva jednaka tipa omjera.

Omjer kao brzina.

Prvi tip omjera definiran od strane Freudenthala je poznat kao brzina i prikazuje usporedbu dvije varijable s različitim jedinicama. Nastaje multiplikativnim odnosom koji prikazuje prirodni fizikalni fenomen ili iz nekog novog proizvoljnog pojma definiranog iz funkcionalne namjene.

Omjer ove vrste proizvodi jedinstven novi pojam s vlastitom osobnošću, i taj novi pojam se obično ne smatra omjerom sam po sebi već brzinom ili gustoćom.

Primjeri omjera koji iznose nove fizikalne pojmove su sljedeći:

- Omjer između prijeđenog puta automobilom i vremena koje je potrebno da se prijeđe taj put
$$\left(v = \frac{s}{t}\right)$$
stvara pojam "brzine".

- Omjer između mase tijela i njegovog volumena daje gustoću materijala i proizvodi fizikalni pojam "posebne gravitacije".

- Omjer između duljine krakova vage i mase utega na kraju krakova je odgovoran za postizanje "ravnoteže" na vagi nejednakih krakova. "Ravnoteža" se postiže kada je omjer između duljine krakova i mase utega na krajevima proporcionalan, odnosno kada postoji konstantan omjer između duljine krakova i mase utega na oba kraka.

Intenzivne i ekstenzivne veličine.

Brzina ili stopa je tip omjera koji ostaje konstantan bez obzira na veličinu sustava ili veličinu varijabli. Naprimjer, "posebna gravitacija" (intenzivna veličina) tijela se ne mijenja iako se njegova dimenzija (masa i volumen - ekstenzivne veličine) povećava ili smanjuje. Slično, ako je dana brzina (intenzivna veličina) konstantna, ona ostaje konstantna tijekom različitih dijelova (put i vrijeme - ekstenzivne veličine) putovanja.

Slijede primjeri funkcionalnih omjera koji se također zovu brzine (intenzivne količine):

- "Cijena po jedinici" je novi pojam stvoren kako bi dopustio usporedbu između cijene i proizvoda i to je omjer ukupne cijene prema broju kupljenih proizvoda.
- Kilometar po litri benzina (km/l) izražava efikasnost automobila. To je omjer kilometara koje automobil prijeđe prema broju litara benzina koje iskoristi.
- Broj pojedinaca po površini je novi pojam koji mjeri gustoću naseljenosti i predstavlja omjer pojedinaca na danom području (npr. $jelen/km^2$).

"Čisti" omjeri.

U drugoj i trećoj kategoriji koju spominje Freudenthal, omjer uspoređuje veličine s jednakim jedinicama (i brojnik i nazivnik se mjere po istoj jedinici) i veličine dvaju količina koje su pojmovno povezane, ali se prirodno ne smatraju kao dijelovi jedne cjeline.

Zbog prikazivanja omjera pomoću razlomaka, u različitim situacijama možemo iskoristiti svojstva skraćivanja i proširivanja razlomaka.

$\pi = \frac{P}{2r} \Rightarrow$ U ovom slučaju, obe veličine imaju jednaku jedinicu (duljina) i opet je njihov omjer iracionalan broj, što znači da ga je nemoguće napisati kao kvocijent dva cijela broja. Nadalje, možemo zaključiti da postoje omjeri koji se ne mogu izraziti pomoću razlomka u kojemu su i brojnik i nazivnik cijeli ili racionalni brojevi, već mora biti zapisan kao iracionalan broj. Zapamtit ćemo da trigonometrijske funkcije opisuju odnose između duljina stranica trokuta, i kako za mnoge kutove, vrijednosti takvih funkcija su iracionalne.

- Odnos između duljina stranica pravokutnog trokuta i hipotenuze je $\frac{2}{3}$. Relacija je prikazana pomoću razlomka bez jedinice. Ovo je uspoređivanje između dva elementa koja su povezana pojmovno (u istom trokutu), ali se ne smatraju kao dijelovi zajedničke cjeline.
- Proširivanje i skraćivanje se koristi u omjerima kako bi proporcija stavki ostala konstantna. Naprimjer, ako sliku koja je široka 2 cm i duga 2.4 cm treba proširiti tako da joj duljina bude 7.2 cm, koja je nova širina slike kako se ona ne bi uništila? Odnos između širine i duljine slike neće promijeniti nakon proširivanja, ostat će 2:2.4. Ovo je omjer koji je izražen pomoću razlomka i moguće ga je proširivati i smanjivati po želji. Skraćivanjem za faktor 2 rezultat je 1:1.2 i povećanjem za faktor 3 rezultat je 6:7.2. (Ovaj omjer se također može zapisati pomoću cijelih brojeva, kao što je 5:6 ili 30:36.) Ova vrsta omjera se koristi u geometriji (sličnost) i geografiji (mjerilo) i poznata je u stručnoj literaturi kao skaliranje.

Znanstvenici su proučavali pojam omjera među djecom u situaciji koja opisuje intenzivnu veličinu, brzinu ($V = S : T$). Kao što je navedeno, intenzivna veličina je brzina izvedena iz dvije ekstenzivne veličine: put koji tijelo prijeđe (S) i vrijeme koje je potrebno da se taj put prijeđe (T). Znanstvenici razlikuju različite razine gledanja omjera, gdje najviša razina uključuje dječje shvaćanje matematičke veličine kao multiplikativnog odnosa. Na višoj razini, dijete razumije da brzina kojom objekt putuje određeni dio puta (intenzivna veličina) je mjerljiva kao veličina i ne mijenja se na različitim dijelovima rute bez obzira na duljinu tih dijelova (što su ekstenzivne veličine koje se mijenjaju konstantno) ili njihov položaj. Takav način razumijevanja omogućuje učenicima uspoređivanje odnosa u različitim dijelovima po duljini rute kako bi pronašli matematičko rješenje za veličinu koja nedostaje, koristeći proporcionalni odnos.

Drugim riječima, ako osoba nije sposobna razumijeti odnos kao intenzivnu veličinu, odnosit će se prema tome kao prema ekstenzivnim veličinama i pojam će zamisliti kao omjer. U kasnijoj dobi, kada je osoba sposobna razumijeti odnos kao intenzivnu veličinu, onda će pojam smatrati brzinom.

1.2 Pojam proporcije

1.2.1 Matematička definicija "proporcije"

Proporcionalni problemi uključuju situacije u kojima su matematički odnosi u prirodi multiplikativni (suprotno od aditivnih) i dopuštaju formiranje dvaju jednakih omjera između njih. Sposobnost rješavanja ovakvih problema zahtijeva postojanje proporcionalnog mišljenja što dovodi do apstraktnog razmišljanja.

U matematici, učenici već u osnovnoj školi počinju koristiti proporcije kako bi riješili širok raspon problema, iako to nije uvijek izričito navedeno kao takvo. Nauče riješavati algebarske probleme (kao to su podjela količine u nejednakim dijelovima, određivanje cijena, zarade i ulaganja, postoci, itd). U 8. razredu susreću se s jednadžbama izraženim kao proporcije (naprimjer: $\frac{20}{4} = \frac{x}{7} \rightarrow x = 35$) i koriste proporcije izravno u geometriji, kao što je slučaj Talesovog teorema i sličnosti trokuta. U višim razredima srednje škole, proporcije se koriste u skoro svim dijelovima, ali opet ne uvijek izravno. Proporcije se impliciraju u trigonometriji u poučku o sinusima:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$

u algebri (problemi određivanja cijene, postotaka, brzine, snage, rada, koncentracije), u ekonomiji, u matematičkoj analizi i u definiciji i izračunavanju funkcija (kao što je linearna funkcija $y = kx$, gdje je k, nagib, definiran kao omjer između $\triangle y$ i $\triangle x$).

U osnovnoškolskoj prirodi, mnogi fenomeni u prirodi i tehnologiji, čak i jednostavnoj mehanici (kotač, jednostavna dizalica, nakošeni avion) zahtijevaju razumijevanje osnova pojma proporcije. U geografiji, proporcija se koristi kako bi se izračunala udaljenost prema mjerilu. U srednjim školama, mnogi od fenomena koje učimo u fizici, kemiji, biologiji, geografiji i ekonomiji se mogu definirati koristeći proporcije. Pravila i svojstva proporcija se često koriste za izračunavanje vjerojatnosti, ubrzanja i ravnoteže;

imaju ulogu u statističkim izračunima, kartografiji (karta se crta u mjerilu), zaradi i gubitcima.

U matematičkoj notaciji, četiri varijable a, b, c i d $(a, b, c, d \neq 0)$ formiraju proporcionalnu relaciju u sljedećim dvijema situacijama:

1. Kada je $a/b = c/d$. Ovo je direktna proporcija: kvocijent od a i b je konstantno jednak kvocijentu od c i d.

2. Kada je $a \cdot b = c \cdot d$. Ovo je obrnuta proporcija: produkt od a i b je konstantno jednak produktu od c i d.

1.2.2 Objašnjenja i komentari definicije proporcije

Drugi pogled na pojam proporcije.

Collinsov matematički rječnik je dao drugačiji pogled na definiciju proporcije. Tamo stoji kako je proporcija direktan ili indirektan linearan odnos između dvije varijable. To znači da su odgovarajući elementi dva skupa proporcionalni kada postoji konstantan omjer (direktan ili indirektan) između njih. Naprimjer, u skladu sa zakonom plina, pritisak je direktno proporcionalan temperaturi: kvocijent izveden iz pritiska (brojnik) i temperature (nazivnik) će biti konstantan. Međutim, pritisak je obrnuto proporcionalan volumenu, što znači da je produkt između volumena i pritiska konstantan.

Primjeri direktnih i obrnutih proporcija.

Primjer direktne proporcije je kvocijent dobiven kada automobil prijeđe put (s) u određenom vremenu (t), što nam daje odnos s/t koji definira brzinu (v) automobila. Zaključujemo, mi definiramo omjer. Međutim, ako smo odredili da ovaj omjer ostaje konstantan cijelo vrijeme (tj. kvocijent - brzina - je konstantan) onda će povećanje ili smanjivanje puta, dati povećavanje ili smanjivanje vremena za isti faktor (promjena je u istom smjeru). Tako su, prijeđeni put i vrijeme koje je potrebno da se prijeđe put direktno proporcionalni i brzina je konstantna $(\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2})$.

Primjer obrnute proporcije je multiplikativan odnos između brzine automobila i vremena koje je potrebno da se prijeđe put. Ovo je omjer ako put ostane konstantan, što znači da je produkt brzine i vremena konstantan. Međutim, ovdje imamo indirektan odnos, jer ako se brzina povećava za određeni faktor, onda će se vrijeme smanjiti za isti faktor i obrnuto. Promjena je u suprotnom smjeru, i takva veza između brzine i vremena $(v_1/v_2 = t_2/t_1)$ je obrnuto ili indirektno proporcionalna. U ovom slučaju, konstantna veličina je put i $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$.

Kako učenici mogu prepoznati proporcionalne odnose.

Učenici će moći prepoznati da se radi o proporcionalnoj vezi između dvije ili više varijabli u problemu ako su sposobni uočiti problem kao jedan od proporcija. Jednom kada su u stanju to napraviti, moći će otkriti rješenje koje je bazirano na proporcionalnom mišljenju. Slijede dva kriterija:

1. Mora postojati multiplikativni odnos (omjer) između dvije veličine. Drugim riječima, odnos se matematički može izraziti kao produkt ili kvocijent (omjer) između dvije ili više veličina. Naprimjer, u problemima brzine, postoji multiplikativni odnos između brzine i vremena ($v \cdot t$ - množenje) ili puta i vremena (s/t - dijeljenje).

2. Multiplikativni odnos mora biti konstantan, ili u istom (direktna proporcija), ili u suprotnom (obrnuta proporcija) smjeru.

Jednom kad se prepozna multiplikativni odnos, učenik također mora razumijeti da veza zahtijeva konstantnost cijelo vrijeme. U slučaju direktne proporcije, gdje je multiplikativni odnos izražen kao konstantni kvocijent između dvije veličine, konstanta se nikada ne mijenja. (Drugim riječima, ako se brojnik povećava, onda će se povećati i nazivnik za isti iznos. Slično, ako se smanjuje brojnik to vodi do smanjenja nazivnika. Promjena je u istom smjeru.) U slučaju obrnute proporcije (indirektne proporcije), multiplikativni odnos je izražen kao konstantan produkt između dvije veličine, koji ostaje konstantan. (U slučaju pozitivnih varijabli, ako se jedna od veličina poveća, druga će se smanjiti, i obrnuto. Promjene se događaju u suprotnom smjeru.)

Za učenika koji može prepoznati takve multiplikativne odnose kaže se da posjeduje vještine proporcionalnog mišljenja i sposobnost da točno riješi takve probleme. Djeca manjeg uzrasta, koja su još na razini aditivnog mišljenja, generalno neće prepoznati multiplikativni pogled na problem. Oni će se prije osloniti razlici između količina, što ih dovodi do netočnog rješenja.

1.2.3 Daljnji uvid u direktnu i obrnutu proporciju

Direktna proporcija.

Primjeri:

1. Ako karta s mjerilom 1:100000 pokazuje cestu dugu 5 cm, stvarna duljina ceste je 5 km. (Primjetimo da jedinica mora biti jednaka, što znači da mjerilo prikazuje 1 cm naspram 100000 cm, ili 1 cm naspram 1 km.) Zbog toga što je multiplikativan odnos između duljine ceste na karti i stvarne duljine ceste direktna proporcija, ako je druga cesta na mapi duža ili kraća za faktor m (recimo, 2), stvarna cesta će također biti duža ili kraća za faktor m od 5 kilometara duge ceste. Drugim riječima, ako je nova cesta na karti sada dulja za 10 cm (faktor je 10/5=2) stvarna cesta će također biti dvostruko dulja, tj. 10 km.

2. Automobil putuje 60 km na sat (km/h) konstantnom brzinom. Proporcionalna veza između prijeđenog puta i potrebnog vremena da automobil prijeđe put je direktna. Ako se prijeđeni put poveća za faktor m, onda se vrijeme koje je potrebno da se prijeđe taj put (bez mijenjanja brzine) također mora povećati za faktor m. Posebno, ako se prijeđeni put poveća za, recimo, $m = 5$ (tj. na 300

km) onda će vrijeme koje je potrebno da se prijeđe $300km$ biti 1 sat puta 5, odnosno bit će potrebno 5 sati da se prijeđe 300 km istom brzinom.

Obrnuta (indirektna) proporcija.

Primjeri:

1. Ravnoteža kod vage jednakih krakova se javlja kada su produkti duljine krakova (p) i mase utega u odgovarajućoj točki krajeva krakova jednaki. Kako bi zadržali ravnotežu, povećavanje mase utega na jednom kraku faktorom m mora popratiti smanjenje duljine kraka za faktor m. Obrnuto, ako se smanji masa utega za faktor m, moramo povećati duljinu kraka za faktor m. Ravnoteža je obrnuto proporcionalna veza između duljine krakova (p) i mase utega na njima (w). Matematički ovo možemo zapisati: $w_1/w_2 = p_2/p_1$ ili $w_1 \cdot p_1 = w_2 \cdot p_2$ (zakon poluge).

2. Automobil koji prelazi određenu udaljenost prikazuje obrnuta proporcija između brzine (v) i vremena (t). Ako se automobil ubrza za faktor m, onda će se vrijeme koje je potrebno da se prijeđe put smanjiti za faktor m, i obrnuto. Drugim riječima, produkt brzine i vremena ostaje konstantan ($s = v \cdot t$). Matematički: $v_1/v_2 = t_2/t_1$ ili $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$.

3. U svakom poslu, postoje obrnute proporcije između broja radnika (n) i broja dana koji su potrebni da se obavi posao (t). Ako broj radnika povećamo za faktor m, broj dana potrebnih da se obavi posao će se smanjiti za faktor m; ako broj zaposlenih smanjimo za faktor m, potrebno vrijeme će se povećati za faktor m. Drugim riječima, produkt broja radnika i broja radnih dana je konstantan. Matematički: $n_1/n_2 = t_2/t_1$ ili $n_1 \cdot t_1 = n_2 \cdot t_2$.

1.3 Strategije koje se koriste za rješavanje problema s omjerima i proporcijama

Studije koje su istraživale strategije koje se koriste za rješavanje problema s omjerima i proporcijama su otkrili širok raspon strategija. U skladu s razvojnim procesom proporcionalnog mišljenja, pojedinac, više razine sofisticiranosti izabrane strategije, napreduje od pred-formalnih (dajući kvalitativna rješenja) do onih formalnih strategija (iznošenje matematičko-kvantitativnih rješenja).

Važno je naglasiti kako bi se točno riješio problem s omjerom i proporcijom, odabrana strategija mora imati multiplikativnu orijentaciju jer aditivna strategija generalno dovodi do netočnih rješenja (osim za one slučajeve gdje je moguće podijeliti totalni iznos u jednake grupe s cijelim brojem proizvoda).

Kao što smo naveli prije, strategije se mogu podijeliti u pred-formalne i formalne strategije (pomoću proporcionalnih jednadžbi). Analizirat ćemo nekoliko primjera kako bi prikazali različite strategije i različita strateška razmišljanja koja se mogu iskoristiti u posebnim problemima te rješenja koja proizlaze na taj način.

Pred-formalne strategije

Pred-formalne strategije za rješavanje omjera i proporcija su karakteristične za djecu u osnovnoj školi.

Koristit ćemo sljedeći problem:

Primjer 1. *35 proizvoda će se podijeliti između dvije osobe A i B u omjeru 3:4. Koliko proizvoda će dobiti svaka osoba?*
ODGOVOR: A će dobiti 15, a B 20 proizvoda.

1. ***Intuitivne strategije.*** One su pogodne za jako jednostavne probleme proporcije i pokazuju intuitivno shvaćanje multiplikativnih veza. Djeca će možda doći do točnog rješenja koristeći direktno eksperimentiranje bez da su svjesni jednakosti koja postoji između dva omjera. U našem primjeru, učenici će pogoditi broj proizvoda koji svaka osoba dobije. Postoji mogućnost da nakon nekoliko pokušaja nađu točan odgovor.

2. ***Aditivne strategije.*** Aditivne strategije su karakteristične za mlađi uzrast s aditivnim vještinama mišljenja (općenito u nižim razredima osnovne škole). Ovdje je fokus na kvantitativne razlike između veličina u problemu više nego na omjer između njih. Kada je nemoguće podijeliti ukupan broj proizvoda u problemu na jednake skupine s jednakim cijelim brojevima ili ako je ukupan broj jako velik broj, ova strategija nije efikasna i djeca će gotovo sigurno pogriješiti.

   U našem slučaju, rješenje će biti opipljivo. Djeca će okupiti 35 proizvoda (npr. 35 kuglica ili dijagram od 35 kuglica). Uzet će 7 proizvoda s gomile, i podijeliti ih na način - A dobije 3 i B dobije 4. Zatim će uzeti još 7 proizvoda i ponovno ih podijeliti, 3 za A i 4 za B. Nastavit će proces dokle god ne nestanu bez "kuglica". U našem primjeru, moguće je izdvojiti točno 5 grupa po 7 proizvoda. Često se koristi tablični zapis na sljedeći način:

Skupina	**A**	**B**	**Ukupno**
1	3	4	7
2	3	4	7
3	3	4	7
4	3	4	7
5	3	4	7
Ukupno	*15*	*20*	*35*

Slika 1: Korištenje aditivne strategije

Zbrajanje proizvoda koji se dobiju u svakoj skupini daje broj proizvoda koji dobije svaka osoba.

3. ***Dijeljenje omjerom.*** Ova strategija zahtijeva da učenik bude svjestan zadanog omjera i da poštuje multiplikativnu vezu koja postoji između veličina zadanih u problemu.

   U našem slučaju, učenik razumije da omjer 3:4 opisuje situaciju u kojoj će skupina sadržavati 7 proizvoda (tj. 3 proizvoda za A i 4 za B). Učenik također razumije kako će se ovaj omjer, 3:4, odnositi za čitav iznos i za bilo koju skupinu unutar cjeline. Učenik će izračunati koliko je skupina u cjelini i doći do rezultata 5 (35:7).

   A će dobiti 5 skupina, svaku s 3 proizvoda, tj. A $\rightarrow 3 \cdot 5 = 15$ proizvoda, dok će B dobiti isto 5 skupina, svaku s 4 proizvoda, tj. B $\rightarrow 4 \cdot 5 = 20$ proizvoda.

   Nadalje, ovaj problem se može prikazati na sljedeći način. Pred nama je 35 proizvoda i ladice. Svaka ladica se dijeli u odjeljak za A i odjeljak za B. U prvu ladicu stavljamo 3 proizvoda u A odjeljak i 4 u B odjeljak. Nastavljamo s popunjavanjem ladica dok ne podijelimo sve proizvode. Rezultat je 5 ladica, svaka je popunjena s 3 proizvoda za A i 4 proizvoda za B.

   U suštini, ova strategija je generalizacija aditivne, imajući u vidu da su množenje i dijeljenje zapravo generalizacije zbrajanja i oduzimanja. Međutim, ovdje je ulogu dijeljenja zamijenilo ponavljanje oduzimanja koje se koristi u aditivnoj strategiji, a nakon toga množenje je zamijenjeno ponavljanjem zbrajanja iz aditivne strategije.

4. ***Pronalazak jedinične veličine.*** Učenik definira omjer kao jediničnu veličinu ili kao dio cjeline kako bi izračunao čitav iznos ili iznos svakog dijela i onda izgradio rješenje na temelju toga.

   Ovdje je učenik svjestan činjenice da 35 proizvoda čine cjelinu. Učenik dijeli cjelinu u 7 jediničnih veličina (3+4) i onda zaključuje da će u svakoj jediničnoj veličini biti 5 (35/7) proizvoda.

   Nastavljajući na ovaj način, učenik računa dio koji svatko od njih dobiva:
   A će dobiti 3 jedinice od 7, tj. A $\rightarrow 5 \cdot 3 = 15$ proizvoda,
   B će dobiti 4 jedinice od 7, tj. B $\rightarrow 5 \cdot 4 = 20$ proizvoda.

   Ili, koristeći odgovarajuću tablicu za pronalazak jediničnih veličina
   35——————7
   ?———————1 (jedinica)
   daje: $? = (35 \cdot 1)/7 = 5$ proizvoda.

   U svakoj jedinci je 5 proizvoda i do rješenja dolazimo kao što je gore navedeno.

   Da bismo razumjeli razliku između ove strategije i prethodne (dijeljenje omjerom) vratit ćemo se ponovno na model koji je predstavljen iznad.

Ponovno, imamo 35 proizvoda, ali ovaj puta smo odabrali 7 ladica (3+4) budući je dani omjer 3:4. Nakon što smo ladice jednako ispunili, A će dobiti proizvode iz 3 ladice, a B će dobiti one iz preostalih 4. I dok obje strategije (i ova i prethodna) koriste istu matematičku operaciju (35:7), razumijevanje je različito za svaku: u prethodnoj strategiji rezultat je proizašao iz broja skupina od 7 proizvoda, svaka skupina je sadržavala 3 proizvoda za A i 4 za B. Ovdje se podjela koristi kako bi se pronašao iznos koji mora biti jednak u svim grupama.

Razlika između te dvije podjele je izražena u dvije metode o kojima se raspravljalo: podjela po uključivanju (relativna podjela) i podjela raspoređivanjem (utvrđivanjem osnovne jedinice).

5. ***Utvrđivanje dijelova cjeline.*** U našem primjeru je 7/7 dijelova (3+4) u cjelini i 35 proizvoda, stoga:
A dobiva 3/7 od ukupnog broja (35) proizvoda, tj. A $\rightarrow 35 \cdot 3/7 = 15$ proizvoda
B dobiva 4/7 od ukupnog broja proizvoda, tj. B $\rightarrow 35 \cdot 4/7 = 20$ proizvoda.

6. ***Problemi nedostatka vrijednosti.*** Problemi nedostatka vrijednosti su često učinkoviti. Poteškoće proizlaze kada učenici pokušavaju riješiti probleme obrnute proporcije koristeći istu metodu kao za direktnu proporciju.

   3 ———— x
   4 ———— $35 - x$
   Stoga: $4x = 3 \cdot (35 - x)$
   A $\rightarrow x = 15$ proizvoda
   B $\rightarrow 35 - x = 20$ proizvoda.

Formalne strategije - Formula proprocije

Koristeći formalnu strategiju zapravo koristimo formulu proporcija

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, (a, b, c, d \neq 0).$$

To je karakteristično za adolescente i odrasle i uključuje postojanje proporcionalnog i apstraktnog mišljenja. Na ovoj razini učenik će biti sposoban koristiti algebarske simbole kako bi prikazao proporciju i biti će uspješan u pronalasku točnog kvantitativnog odgovora zadanog problema koristeći algebarska pravila i svojstva.

U našem primjeru,

$$x = broj \quad proizvoda \quad od \quad A$$

$$35 - x = broj \quad proizvoda \quad od \quad B.$$

Omjer između njih je 3:4. Drugim riječima, oni su proporcionalno vezani. U cilju da pronađemo broj proizvoda koji svaki od njih dobije, iskoristit ćemo činjenicu da se proporcionalnost između brojeva proizvoda za svakog može zapisati pomoću formule proporcije na sljedeći način:

$$\frac{x}{35 - x} = \frac{3}{4}.$$

Rješavajući algebarsku jednadžbu, dobivamo:

$$A \to 4x = 3 \cdot (35 - x) \to 15 \quad proizvoda.$$

$$B \to 35 - x = 20 \quad proizvoda.$$

2 Matematička svojstva pojma omjera i proporcije

2.1 Primjenjivanje pravila za razlomake na omjere

Omjer između dvije veličine se može prikazati kao razlomak, pa se pravila razlomaka mogu primjeniti na omjere.

Skraćivanje i proširivanje omjera $(a, b, m \neq 0)$*.*

Zadani omjer $\frac{a}{b}$ moguće je proširiti faktorom m čime dobivamo $\frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{m \cdot b}$ ili skratiti za faktor m i dobiti $\frac{a}{b} = \frac{m : a}{m : b}$. Skraćivanje ili proširivanje razlomaka (omjera) u procesu rješavanja problema s omjerima i proporcijama je uobičajeno: naprimjer, ako se omjer može skratiti (pojednostaviti) kako bi dobili jednostavniji omjer, izračuni s manjim brojevima su dozvoljeni. Alternativno, ako zadane varijable nisu cijeli brojevi, omjer se može proširiti kako bi brojnik i nazivnik bili cijeli brojevi.

Zbrajanje i oduzimanje omjera $(a, b, c, d \neq 0)$*.*

Za dane omjere $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ moguće je kreirati nove omjere s

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$$

zbrajanjem i oduzimanjem veličina.

Naprimjer, zbrajanje dva omjera zahtijeva sljedeće: Učenici u razredu su podijeljeni u skupine ovisno o njihovim postignućima. U prvoj skupini su učenici koji su uspješni na višoj razini, u drugoj skupini su učenici na srednjoj razini i u trećoj skupini su učenici sa slabom uspješnosti. Omjer između broja učenika slabije uspješnosti i ukupnog broja učenika je 1:3, a omjer između broja srednje uspješnih učenika i ukupnog broja učenika je 1:4. Koji je omjer između broja učenika s visokom uspješnošću i ukupnog broja učenika?

Kako bi došli do rješenja, omjere

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

moramo prvo zbrojiti i rezultat oduzeti od 1, tj.

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

Ako je omjer broja učenika sa slabom i srednjom uspješnosti naspram ukupnog broja učenika 7:12 i omjer samo broja učenika sa slabom uspješnošću naspram ukupnog broja učenika 1:3, onda ćemo oduzimanje iskoristiti na sljedeći način:

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{3}.$$

Množenje omjera $(a, b, c, d \neq 0)$.

Ako je dan omjer $\frac{a}{b}$i omjer $\frac{c}{d}$ moguće je formirati novi omjer množenjem:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Ovo svojstvo bi se moglo iskoristiti u problemu u kojemu se dva omjera moraju uzeti u obzir istovremeno. Naprimjer, restoran ima dva tipa stolova: velike stolove s 10 mjesta i male stolove s 8. Vlasnik želi da omjer između velikih i malih stolova bude 9:5 i da ima prostoriju s točno 390 mjesta. Koliko stolova od svakog mora biti?

U ovom slučaju, moramo izvesti "zajednički omjer" između dva dana omjera. Prvi omjer, 10:8, predstavlja broj mjesta na svakom tipu stola (10 mjesta na velikim stolovima i 8 na malim). Drugi omjer, 9:5, predstavlja omjer ukupnog broja stolova (9 velikih stolova za svakih 5 malih). Zajednički omjer je onda:

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{9}{5} = \frac{90}{40}$$

što je zapravo omjer broja mjesta u grupi od 9 velikih stolova $(10 \cdot 9)$ i 5 malih stolova $(8 \cdot 5)$ - ukupno 130 mjesta u grupi. Budući vlasnik želi 390 mjesta sveukupno, imamo 390:130 $=$ 3 grupe od 9 (velikih) $+$ 5 (malih) stolova, tj. on zahtijeva 27 $(9 \cdot 3)$ velikih stolova i 15 $(5 \cdot 3)$ malih stolova.

Dijeljenje omjera $(a, b, c, d \neq 0)$.

Za zadane omjere $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ moguće je formirati novi omjer dijeljenjem omjera:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Ovo svojstvo se koristi kada je cilj zadatka naći koliko je jedan omjer veći (ili manji) od drugog.

2.2 Pravila i svojstva proporcije

Dana je proporcija

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a, b, c, d \neq 0,$$

tako da je $a \cdot d = b \cdot c$.

Ovo se može dokazati algebarski unakrsnim množenjem. Slično, moguće je zamijeniti komponente omjera u proporciji i dobiti

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Iz prvog pravila, zaključujemo važno svojstvo: smijemo zamijeniti varijable b i c (unutarnje članove) i varijable a i d (vanjske članove). Odnosno, ako je dana proporcija

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a, b, c, d \neq 0,$$

onda su proporcije

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad i \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

također točne.

Ovo svojstvo pokazuje kako je proporciju moguće prikazati na 4 različita načina. Važno je primjetiti da postoje 24 moguće kombinacije slaganjem 4 varijable.

Drugo pravilo se primjenjuje u slučajevima gdje je dan broj omjera. Pravilo nalaže da omjer koji nastaje zbrajanjem ili oduzimanjem brojnika i zbrajanjem ili oduzimanjem nazivnika je jednak za svaki dani omjer.

Primjer 2. *Vrijednost od x u danoj proporciji je sljedeća:*

$$\frac{x-2}{x} = \frac{x+4}{15}.$$

Koristeći unakrsno množenje

$$15 \cdot (x-2) = x(x+4) \Rightarrow x^2 - 11x + 30 \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = 6.$$

Naravno, u ovom slučaju, važno je znati kako riješiti kvadratnu jednadžbu.

Problemi nedostatka vrijednosti - pronalaženje četvrte proporcije u proporcionalnom problemu.

Dana je proporcija između 4 varijable, gdje je vrijednost tri varijable poznata, a četvrta je nepoznata. Kako bi riješili ovaj problem moramo usporediti omjere.

Na tečaju u školi 12 učenika živi izvan grada i 20 u gradu. Ovaj omjer je jednak i na drugom tečaju koji se odvija istovremeno. Koliko sjedala mora biti rezervirano u autobusu ako 25 učenika s drugog tečaja žive u gradu?

Neka je x broj učenika na drugom tečaju koji žive izvan grada. Prema tome, omjer $\frac{12}{20}$ je jednak omjeru $\frac{x}{25}(\frac{x}{25} = \frac{12}{20})$. Jednadžba proporcije je riješena, a rezultat je 15 učenika na drugom tečaju koji žive izvan grada. Dakle, potrebno je 27 (12+15) sjedala u autobusu.

Freudenthal iznosi kako problemi nedostatka vrijednosti u proporcijama i problemi uspoređivanja vrijednosti mogu biti riješeni na 3 različita pristupa:

- Uspoređivanje omjera iste vrijednosti ili uvjeta, npr. dvije dužine, dva puta. On naziva ovaj pristup korištenje "unutarnjih omjera" ili "skalarna metoda".

- Uspoređivanje omjera dvaju različitih varijabli ili uvjeta, kao naprimjer, puta i vremena. On naziva ovaj pristup "vanjskim omjerima" ili korištenje "funkcionalne metode".

- Suzdržavati se od računanja dok rezultat nije formalno utvrđen ili postaviti odnos koji uključuje sve zadane podatke. Namjera je iskoristiti algebarsku notaciju za sve veličine kako bi formalno izolirali vrijednost koja nedostaje i tek onda "unijeli" stvarne vrijednosti i izračunali.

Primjeri direktne proporcije:

1. Automobil prijeđe 135 km u 3 sata. Koju udaljenost će automobil prijeći za 12 sati (jednakom brzinom)?

   Rješenje: Ovdje kvocijent udaljenosti i vremena mora ostati konstantan.

   Matematički: $\frac{x}{12} = \frac{134}{3} \Rightarrow x = 540 \quad km.$

2. Knjižara nudi 5 udžbenika za 135 kn. Koliko će učitelj platiti 32 udžbenika koja su mu potrebna za razred?

   Rješenje: Ovdje kvocijent cijene i broja udžbenika mora ostati konstantan, tj. odnos između cijene i broja udžbenika je direktno proporcionalan.

   Matematički: $\frac{x}{32} = \frac{135}{5} \Rightarrow x = 864 \quad kn.$

Primjeri indirektne (obrnute) proporcije:

Automobil putuje 540 km prosječnom brzinom od 108 km/h. Koliko dugo će putovati kamion jednaku udaljenost ako je njegova brzina $\frac{1}{3}$ brzine automobila?

Rješenje: Postoji konstantan produkt (udaljenost) između brzine i vremena, tj. postoji obrnuto proporcionalan odnos između brzine i vremena.

Matematički: Brzina kamiona je $\frac{1}{3}$ brzine automobila te ona iznosi 36 km/h. Automobil prijeđe 540 km za 5 sati ($\frac{540}{108}$=5). Neka je x vrijeme koje je potrebno da kamion prijeđe isti put. Slijedi: $\frac{x}{5} = \frac{108}{36} \Rightarrow x = 15$ sati.

Uspoređivanje dva omjera.

Korištenje pravila koje omogućuje proširivanje i skraćivanje omjera dopušta usporedbu dva omjera.

Primjer 3. *Koji razlomak je veći,* $\frac{3}{14}$ *ili* $\frac{4}{15}$*?*

Ovo je moguće riješiti uspoređivanjem dva razlomka tako što ćemo ih proširiti kako bismo pronašli njihov zajednički nazivnik.

$$\frac{3}{14} = \frac{3 \cdot 15}{14 \cdot 15} = \frac{45}{210} < \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 14}{15 \cdot 14} = \frac{56}{210}$$

tj.,

$$\frac{3}{14} < \frac{4}{15}.$$

Međutim, moguće je usporediti razlomke drugim metodama. Naprimjer, zajednički brojnik može biti uspoređen:

$$\frac{3}{14} = \frac{3 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{12}{56} < \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{12}{45}.$$

U ovom slučaju, brojnici u oba razlomka su jednaki (12) i budući je razlomak s manjim nazivnikom veći u vrijednosti, $\frac{12}{45}(\frac{4}{15})$ je veći razlomak.

U problemima uspoređivanja koriste se ista svojstva za skraćivanje i proširivanje.

Primjer 4. *Automobil A prijeđe 180 km za 3 sata, a automobil B prijeđe 400 km za 5 sati. Koji je automobil brži?*

Rješenje: Omjer automobila A (između udaljenosti i vremena) je $\frac{180}{3}$. Omjer automobila B je $\frac{400}{5}$. Uspoređivanjem omjera dobivamo:

$$\frac{400}{5} = 80 \quad km/h > \frac{180}{3} = 60 \quad km/h.$$

Automobil B je brži.

Druge primjene proporcije.

Proporcionalnost između veličina je zastupljena u mnogo područja. Pravila proporcija se mogu upotrijebiti u rješavanju mnogih problema. Naprimjer, u Euklidskoj geometriji, odnos među proporcionalnim dužinama prema Talesovom teoremu može pomoći u pronalasku svojstava sličnosti trokuta. U osnovnoškolskoj geometriji, proporcionalni odnos između opsega kruga i njegovog promjera ili između duljine stranice kvadrata i njegovog opsega omogućava otkrivanje nepoznate vrijednosti, kao što je polumjer kruga ili duljina stranice kvadrata.

U tehnologiji, obrnuta proporcionalnost između duljine krakova vage u ravnoteži i mase utega se koristi u pronalaženju središta gravitacije. U fizici, multiplikativni odnosi između udaljenosti i vremena te definiranje brzine omogućava izračunavanje jedne od vrijednosti (brzina, vrijeme ili udaljenost) kada su poznate samo dvije od njih. U zakonima plina, postoji direktna proporcija između pritiska i temperature, i obrnuta proporcija između pritiska i obujma. U geografiji, omjer između udaljenosti na karti i stvarne udaljenosti daje mjerilo i naposljetku omogućuje ljudima koji koriste tu kartu da se orijentiraju u prostoru.

3 Autentične istraživačke aktivnosti

Ovo poglavlje predstavlja širok raspon autentičnih istraživačkih aktivnosti za omjer i proporciju koje prikazuju stvarne situacije bitne za svakodnevni život učenika.

3.1 Aktivnosti s brzinom ili stopom

Aktivnosti u ovoj skupini se odnose na probleme stope i gustoće. Formiranje pojma stope se postiže kroz probleme u kojima su vrijednosti različitih varijabli povezane na zanimljiv način kao što su kilometar po satu, cijena po proizvodu, kilometar po litri, zrna po volumenu, gustoća (pojedinaca po kvadratnom kilometru) i slično.

Matematički, aktivnosti u ovoj skupini pomažu u razvoju pojma stope u različitim izrazima i omogućuju mjerenje u kvantitativnim usporedbama i pronalaženje vrijednosti koja nedostaje u danoj proporciji koristeći pravila i svojstva omjera i proporcije. Dodatno, služe za poboljšanje sposobnosti pronalaska kvalitativnih odgovora za probleme koji ne zahtijevaju kvantitavna rješenja.

Tko je u pravu?

Ova aktivnost je važna za nastavnike, a usredotočena je na utvrđivanje automobila koji koristi najmanje benzina po prijeđenom kilometru. Zahtijeva razumijevanje omjera kao stope. U didaktičkim komentarima i objašnjenjima dani su prijedlozi koji mogu povećati težinu aktivnosti, uključujući povezivanje s naprednim temama funkcija i načinima prikazivanja istih.

3.2 Aktivnosti s omjerima

U ovoj skupini postoji pet autentičnih istraživačkih aktivnosti koje koriste omjer kako bi definirali nekakav odnos. Svi odnosi uključuju uspoređivanje vrijednosti ili iznosa (u brojniku i nazivniku razlomka) koji imaju istu jedinicu ili mjeru. Takve usporedbe mogu biti kao dva dijela jedne cjeline ili dva iznosa koja su povezana pojmovno, ali nisu dijelovi iste cjeline. Aktivnosti uključuju analiziranje omjera uspoređujući iznose.

Svatko rješava drugačije.

Ova istraživačka aktivnost je izuzeto pogodna za djecu, ali glavna svrha je upoznati učitelje sa širokim rasponom strategija koje mogu biti korištene za dijeljenje količina zadanim omjerom.

Što je u hrđi?

Ova istraživačka aktivnost je važna za odrasle i adolescente koji se pitaju što uzrokuje pucanje metala bez očitog razloga. Često, krivac je hrđa. U ovoj aktivnosti istražuje se komponenta u hrđi koja uzrokuje propadanje metala. Ubrzo postaje jasno da korištenje omjera u proizvodnji metala može pomoći. Aktivnost čak vodi do otkrića metode za pronalaženje količine željeza i kisika u bilo kojoj količini hrđe.

3.3 Aktivnosti s obrnutom (indirektnom) proporcijom

U ovoj skupini su tri autentične aktivnosti koje prikazuju situacije u kojima je proporcionalni odnos obrnut (indirektan). Ukratko, obrnuta proporcija između dvije pozitivne varijable se pojavljuje kada je njihov produkt konstantan. Drugim riječima, ako se jedna od varijabli mijenja u jednom smjeru (npr. povećava), onda se druga mora mijenjati u suprotnom smjeru (mora se smanjiti). Naprimjer, ravnoteža vage s jednakim kracima, ako se masa utega na kraju kraka poveća za m, duljina kraka se smanjuje za m i obrnuto; ako se masa utega povećava za m, onda se duljina kraka mora smanjiti za m.

Cilj ovakvih aktivnosti je završiti razvoj pojma proporcije. Iako literatura pokazuje da su problemi obrnute (indirektne) proporcije teški, završavanje koncepta proporcije zahtijeva iskustvo s tim vrstama problema i ne bi smjeli biti zanemareni.

Koliko je težak meteorit?

Ova aktivnost je važna za učitelje i djecu. Prezentirana je kao zagonetka i njezina svrha je da izazove učenike događajem iz svemira. Svemir je misteriozan i intrigantan i različita stajališta o njemu mogu se čuti u svim medijima. Didaktički komentari pojašnjavaju detaljne načine kojima problem može biti riješen koristeći obrnutu proporciju, prvo intuitivno, a kasnije formalno.

3.4 Aktivnost: Tko je u pravu?

Radni listić

Opis

Ana i Barbara su učiteljice. Upoznale su se na učiteljskom skupu. Obje su nedavno kupile novi automobil i počele su uspoređivati karakteristike automobila.

Obje su rekle da je njihov automobil ekonomičan u potrošnji goriva.

Ana kaže da je vozila 100 km do križanja i onda 190 km do grada gdje se održava skup i potrošila samo 19 litara benzina.

Barbara kaže da je vozila 36 km i onda poput Ane, 190 km do skupa. Njezin automobil je potrošio samo 15.5 litara benzina.

Barbara tvrdi da je njezin automobil ekonomičniji, ali Ana se ne slaže.

Tko je u pravu? Objasni svoj odgovor.

Didaktički komentari i objašnjenja za radni listić

- **Tema/Predmet:** Omjer kao stopa ili brzina.
- **Koncepti:** Omjeri, proprocije.
- **Cilj aktivnosti:** Upoznavanje s konceptom stope koji stvara nove jedinice kao što su km/l ili l/km.
- **Povezanost s drugim temama:** Razlomci, uspoređivanje jednostavnih razlomaka i decimalnih brojeva.

Komentari i objašnjenja za zadatke: Zadatak: Tko je u pravu? Objasni svoj odgovor.

Cilj je pronaći kriterij kako bi odlučili koja učiteljica je u pravu. Matematički, problem uključuje uspoređivanje razlomaka. Postoje dva načina rješavanja problema: uspoređujući udaljenosti koje se mogu prijeći za svaku litru benzina (km/l) ili uspoređujući koliko benzina je potrebno za određenu udaljenost (l/km).

1. Uspoređujući km/l:
   Anin automobil: $\frac{290km}{19l} = 15.26 \quad km/l$
   Barbarin automobil: $\frac{226km}{15.5l} = 14.58 \quad km/l$
   Anin automobil prijeđe veću udaljenost za jednu litru benzina.

2. Uspoređujući l/km:
   Anin automobil: $\frac{19l}{290km} = 0.0655$ litara po kilometru
   Barbarin automobil: $\frac{15.5l}{226km} = 0.0685$ litara po kilometru

   Što je manja potrošnja goriva to je automobil ekonomičniji.

   U ovom slučaju, Anin automobil potroši manje benzina po kilometru i on je i dalje ekonomičniji.

Oba načina računanja dovode do jednakog odgovora koji kaže da je Anin automobil ekonomičniji. U stvarnosti, ekonomičnost automobila je uobičajeno gledati koristeći kilometre po litri, a ne obrnuto.

Dodatni bodovi za raspravu.

1. *Zašto se usporedbe moraju napraviti za 100, 200, ili 300 km, a ne naprimjer za 10, 20 ili 30 km?*

   Može se održati praktična rasprava: ako putuju samo 10, 20 ili 30 km, razlike nisu precizno vidljive, budući tahometar (brzinomjer) automobila nije dovoljno osjetljiv i potrošnja plina će biti skoro jednaka za sve slučajeve.

2. *Kako uvjeti na cesti mogu utjecati na odgovore?*

   Zbog toga što uvjeti na cesti (nagibi, udubljenja, gužva u prometu, itd.) mogu imati utjecaj na brzinu i potrošnju benzina automobila, prilikom usporedbe efikasnosti automobila moramo ih uzeti u obzir te očekivati različite rezultate u različitim uvjetima. Naprimjer, putovanje određene udaljenosti između gradova će dati različite rezultate nego putovanje iste udaljenosti izvan grada. Ili, dva automobila koriste istu količinu benzina da bi prešli neku udaljenost, ali kada voze uzbrdo nisu jednako učinkoviti.

Prilagođavanje aktivnosti za razred

Učenici mogu prikupljati podatke koji se odnose na automobil njihovih roditelja, unijeti ih u tablicu i usporediti.

Aktivnost: Tko je u pravu? - Prošireni radni listić

Nakon prethodne raspave, Ana i Barbara nisu mogle odlučiti tko je u pravu pa su odlučile napraviti još testova. Kako bi usporedile potrošnju benzina njihovih automobila, provjerile su potrošnju pod drugim okolnostima.

Otkrile su sljedeće:

1. Anin automobil prijeđe 373 km i potroši 24 litre benzina.
2. Barbarinom automobilu je potrebno 32 litre benzina da prijeđe 464 km.

Zadatci:

1) Prema novim podacima, koji automobil je ekonomičniji u potrošnji goriva?
2) Pod pretpostavkom da su uvjeti na cesti jednaki za oba automobila, pronađi broj kilometara koje svaki automobil može prijeći s jednom litrom benzina.
3) Koristeći rezultate iz 2) popuni tablicu ispod zadataka.
4) Za svaki automobil, izvedi generalno "pravilo" (matematički izraz) koji povezuje broj litara (N) i kilometara (km).
5) Nacrtaj graf koji prikazuje "pravilo" za svaki automobil. Što nagib na svakom grafu označava?
6) Koristeći "pravilo", pronađi broj kilometara koje svaki automobil prijeđe koristeći 9.5 litara, 23.8 litara, 100 litara, 125 litara i 150 litara benzina.

Broj litara benzina	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Udaljenost koju Ana može voziti									
Udaljenost koju Barbara može voziti									

Didaktički komentari i objašnjenja za prošireni radni listić

Ova aktivnost je nastavak na osnovnu aktivnost i uvodi funkcije i različite načine prikazivanja podataka, koristeći matematičke izraze, grafove ili tablice. Naprimjer, graf može prikazivati potrošnju plina kao omjer između broja kilometara i broja litara benzina. Za Anin automobil ($\frac{373}{24} = 15.5 \quad km/l$) linearna funkcija je $K = 15.5 \cdot N$ (N = litre benzina, K = prijeđeni kilometri), i općenito $K = aN$ je pravac ili linearna funkcija.

Dodatni bodovi za raspravu.

Prikazuje li pravac precizno prijeđenu udaljenost K za N litara?

Linearna funkcija predstavlja konstantan omjer između broja kilometara i količine benzina koja se potroši. U stvarnosti, potrošnja benzina nije nužno konstantna i zavisi od uvjeta na cesti kao što su nagibi, udubljenja, zaustavljanje na raskrižjima, gužva u prometu i slično. Matematičari zapravo optimiziraju podatke i ne prikazuju stvarnost u jednostavnijem izrazu, već predstavljaju optimizirani model dane situacije. Također, u različitim uvjetima, dobivat će se različiti rezultati (npr. različita konstanta).

I dok u ovom slučaju nagib funkcije $K = 15.5N$ definira potrošnju benzina Aninog automobila, njezina potrošnja benzina ne može biti konstantna čitavim putem, pa nagib 15.5 zapravo prikazuje srednju potrošnju benzina.

3.5 Aktivnost: Svatko rješava drugačije.

Didaktički komentari i objašnjenja

- **Tema/Predmet:** Strategije za rješavanje problema s omjerom i proporcijom.
- **Koncepti:** Pred-formalne strategije, formalne strategije - proporcionalna formula.
- **Cilj aktivnosti:** Razumijevanje raznih strategija i njihove karakteristike, uključujući
  - i) pred-formalne strategije (intuitivne strategije, aditivne strategije, dijeljenje omjerom, pronalaženje jedinične veličine uz odgovarajuću tablicu, pronalaženje cjeline iz dijela, problemi nedostatka vrijednosti); i
  - ii) formalne strategije koristeći proporcionalnu formulu.
- **Povezanost s drugim temama:** Psihološko-didaktičke perspektive podučavanja teme.

Komentari i objašnjenja zadataka

1) *Koristi različite metode pri rješavanju problema. Koristi sve strategije koje poznaješ, uključujući sve strategije za koje misliš da bi iskoristili učenici u osnovnoj i srednjoj školi prilikom rješavanja problema.*

   Nakon što su učitelji imali priliku istražiti broj danih aktivnosti dosad, ova aktivnost predstavlja izvrsnu priliku za raspravu o strategijama i metodama u razredu, koristeći širok raspon strategija kojih se mogu sjetiti prilikom rješavanja problema s omjerom i proporcijom. Također može biti baza teorijske rasprave o razvoju proporcionalnog mišljenja kod djece.

2) *U skupinama raspravite o različitim strategijama i zapišite što ih karakterizira, za koji uzrast bi mogla biti prikladna i kakve se poteškoće mogu pojaviti prilikom traženja rješenja problema ovom metodom.*

   Radeći u skupinama, učenici mogu razmjenjivati različite strategije za rješavanje problema i onda svaku posebno detaljno ispitati kako je navedeno gore.

3) *Sumirajte prednosti i nedostatke svake strategije.*

   Nakon toga, trebala bi se održati rasprava u razredu u kojoj bi se predstavile razne strategije i prednosti i nedostaci za svaku.

Ovo su neki od primjera strategija koje bi se mogle koristiti prilikom rješavanja problema s omjerom i proporcijom. Strategije su skupljene tijekom istraživanja provedenih u različitim ustanovama poučavanja. Primjećujemo širok izbor strategija koje su ponuđene, a dovode do točnog rješenja zadatka. Za svaku strategiju je ponuđeno kratko objašnjenje s didaktičkim komentarima uključujući načine predstavljanja aktivnosti djeci ovisno o uzrastu, poteškoće s kojima se mogu susresti i slično.

Iskustvo stečeno proučavanjem pokazuje kako znanje različitih strategija i njihovo povezivanje s teorijom puno pridonosi jačanju i produbljivanju učiteljevog matematičkog i psihološko-didaktičkog znanja.

3.6 Aktivnost: Što je u hrđi?

Radni listić

Opis

Kemičarka provjerava komponente hrđe i doznaje da je sastavljena od željeza i kisika. Istraživanja napravljena na različitoj masi uzorka dala su sljedeće rezultate.

Masa uzorka hrđe (grami)	**Masa željeza u uzorku (grami)**	**Masa kisika u uzorku (grami)**
50	35	15
100	70	30
135	94.5	40.5
150	105	45

Slika 2: Komponente u hrđi

Zadaci

1) Ako kemičarka analizira uzorak od 400 grama, koliko grama željeza i kisika treba očekivati? Detaljno obrazloži svoj odgovor.

1. Je li omjer između mase željeza i kisika konstantan? Ako je, koliki je? Objasni svoj odgovor.

2. Kako se omjer može iskoristiti kako bi se pronašla količina željeza i kisika u 500 grama hrđe? U 1 kilogramu? Detaljno obrazloži svoj odgovor.

3. Predloži općenitu metodu za pronalazak količine željeza i kisika u bilo kojem uzorku hrđe.

Didaktički komentari i objašnjenja

- **Tema/Predmet:** Vrsta aktivnosti s omjerom.
- **Koncepti:** Pronalaženje omjera, korištenje omjera za pronalazak količina, proširivanje i skraćivanje omjera, uspoređivanje omjera.
- **Cilj aktivnosti:** Produbiti razumijevanje pojma omjera kao bi se pripremili za učenje pojma proporcije.
- **Povezanost s drugim temama:** Razlomci - uspoređivanje jednostavnih razlomaka, proširivanje i skraćivanje razlomaka, razlomak kao operator dijeljenja.

3.7 Aktivnost: Koliko je težak meteorit?

Radni listić

Opis

Metoda za određivanje mase objekta koristeći omjer.

Znanstvenici na sveučilištu su došli do malog meteorita koji je donesen s mjeseca. Kada su ga došli izvagati u laboratorij, razočarali su se saznanjem da posebna ljestvica za vaganje malih objekata nije baždarena. U želji da izvažu svoj meteorit, potražili su drugi način.

Otkrili su vagu nejednakih krakova u laboratoriju (tj. duljine krakova $a \neq b$). Nakon rasprave, smislili su jednostavan način kako otkriti masu meteorita (W).

Učinili su sljedeće: Stavili su meteorit na jednu od posuda i otkrili kako se može balansirati s utegom od 10 grama na drugoj posudi. Onda su stavili meteorit na drugu posudu i otkrili da se može balansirati s utegom od 40 grama na prvoj posudi. Nakon izračunavanja, došli su do mase meteorita.

Zadaci

1) Objasni kako su znanstvenici dobili masu meteorita i kolika je njegova masa.

1. Zapiši obrazloženje kako ste došli do rješenja.

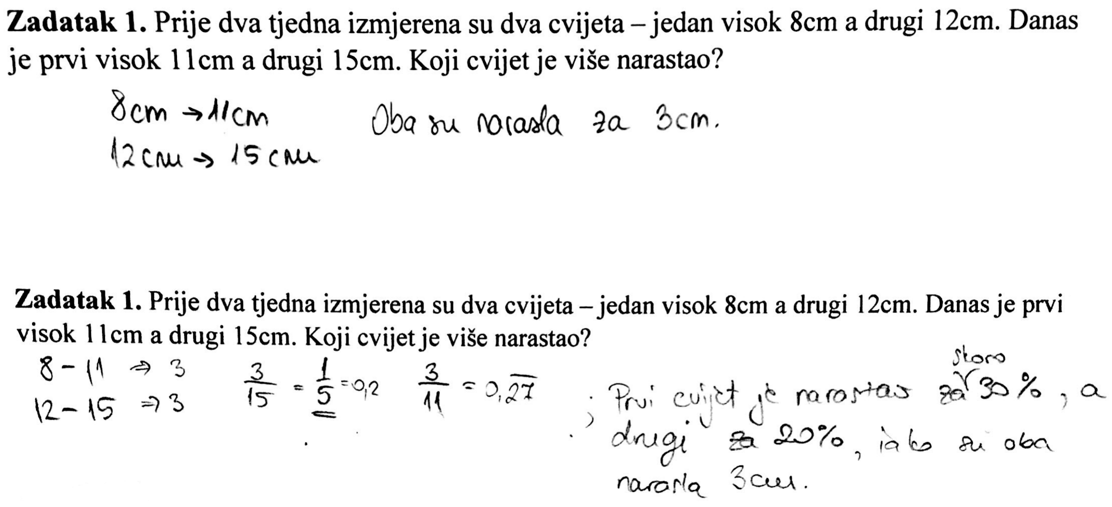
2. Predložite način objašnjavanja značenja pojma "balans" ili "ravnoteža" ljestvice ili značenja pojma "balansirana ljestvica" učenicima u osnovnoj školi.

4 Istraživanje provedeno među kolegama na fakultetu

Budući nastavnici nemaju razvijeno proporcionalno mišljenje u nastavi bi trebalo više pažnje posvetiti pred-formalnim strategijama i zadatcima (primjerice, prethodno navedeni istraživački zadatci), a ne samom uvrštavanju u formulu. Kako bi ispitala razvijenost proporcionalnog mišljenja svojih kolega, studenti na završnim godinama Odjela za matematiku su riješili par zadataka vezanih uz primjenu proporcionalnog mišljenja. Navest ću zadatke i načine na koje se zadatak mogao riješiti.

Zadatak 1. *Prije dva tjedna izmjerena su dva cvijeta - jedan visok 8 cm, a drugi 12 cm. Danas je prvi visok 11 cm, a drugi 15 cm. Koji cvijet je više narastao?*

Ovaj zadatak se mogao riješiti i aditivnim i multiplikativnim zaključivanjem, stoga ukoliko je student odgovorio da je prvi cvijet više narastao jednako je točno kao da je i odgovorio da su oba jednako narasla. Prvi odgovor se dobije aditivnim zaključivanjem dok se drugi dobije multiplikativnim. Prikazat ću neke od odgovora:



Zadatak 1. Prije dva tjedna izmjerena su dva cvijeta – jedan visok 8cm a drugi 12cm. Danas je prvi visok 11cm a drugi 15cm. Koji cvijet je više narastao?

8cm → 11cm
12cm → 15cm
Oba su narasla za 3cm.

Zadatak 1. Prije dva tjedna izmjerena su dva cvijeta – jedan visok 8cm a drugi 12cm. Danas je prvi visok 11cm a drugi 15cm. Koji cvijet je više narastao?

8 - 11 ⇒ 3
12 - 15 ⇒ 3
$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ $\frac{3}{11} = 0{,}\overline{27}$
; Prvi cvijet je narastao ~~za~~ skoro 30%, a drugi ~~za~~ 20%, iako su oba narasla 3cm.

Slika 3: Neka od rješenja studenata

Zadatak	Točno	Netočno	Aditivno zaključivanje	Multiplikativno zaključivanje
1.	26/42	16/42	19/26	7/26

Slika 4: Statistika rješenja 1. zadatka

Zadatak 2. *Gospođa Alenka je napravila fotografiju svjetionika Mrkog zeca dimenzije 10 cm s 15 cm te ju uvećala na fotokopirnom uređaju koristeći uvećanje od 200%. Što je više kvadratnog oblika, originalna fotografija ili uvećana kopija?*

a) Originalna fotografija je više kvadratnog oblika.

b) Uvećana kopija je više kvadratnog oblika.

c) Originalna fotografija i uvećana kopija su jednako kvadratnog oblika.

d) Ne raspolažemo s dovoljno informacija da bi mogli zaključiti što od ponuđenog je više kvadratnog oblika.

Jedino multiplikativnim zaključivanjem smo mogli doći do rješenja ovoga zadatka. Velika većina studenta je točno riješila zadatak, a ovdje je statistika rješenja:

Zadatak	**Odgovor a)**	**Odgovor b)**	**Odgovor c)**	**Odgovor d)**
2.	6/42	6/42	29/42	1/42

Slika 5: Statistika rješenja 2. zadatka

Zadatak 3. *Klub zelenih znanstvenika ima na raspolaganju četiri pravokutne gredice na kojima vrše pokuse s biljkama. Dimenzije gredica su redom:*

a) 30 cm sa 120 cm,

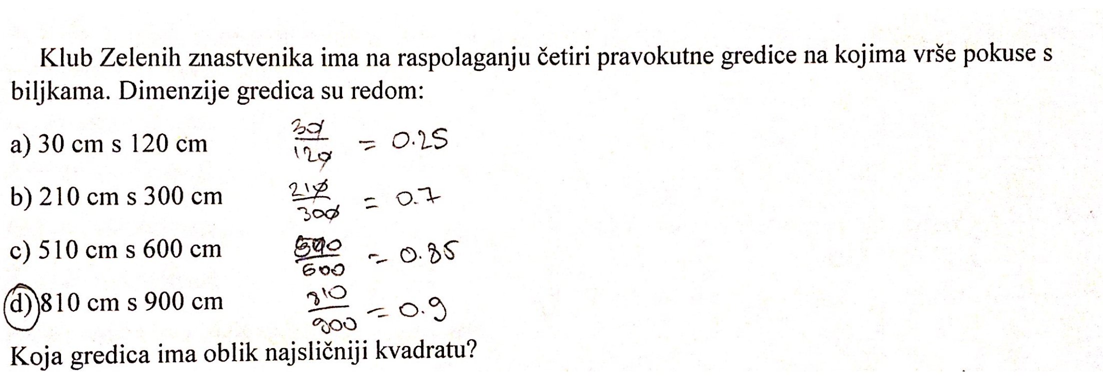
b) 210 cm s 300 cm,

c) 510 cm sa 600 cm,

d) 810 cm s 900 cm.

Koja od gredica ima oblik najsličniji kvadratu?

Vođeni multiplikativnom logikom rješavanja ovoga zadatka studenti nisu imali problema prilikom pronalaska točnog rješenja. Trebalo je provjeriti omjere za svaku od gredica i omjer koji je bliži jednici je najviše kvadratnog oblika.


Klub Zelenih znastvenika ima na raspolaganju četiri pravokutne gredice na kojima vrše pokuse s biljkama. Dimenzije gredica su redom:

a) 30 cm s 120 cm $\frac{30}{120} = 0.25$

b) 210 cm s 300 cm $\frac{210}{300} = 0.7$

c) 510 cm s 600 cm $\frac{510}{600} \approx 0.85$

d) 810 cm s 900 cm $\frac{810}{900} = 0.9$

Koja gredica ima oblik najsličniji kvadratu?

Slika 6: Prikaz rješenja jednog studenta

Zadatak	Odgovor a)	Odgovor b)	Odgovor c)	Odgovor d)
3.	2/42	4/42	2/42	34/42

Slika 7: Statistika rješenja 3. zadatka

Zadatak 4. *Tena i Iva trče po atletskoj stazi jednakom brzinom. Tena je krenula prva. Dok je ona otrčala 9 krugova, Iva je otrčala 3 kruga. Kada je Iva završila 15. krug, koliko je krugova otrčala Tena?*

a) 45 krugova

b) 24 kruga

c) 21 krug

d) 6 krugova

Kod ovog zadatka su se pojavile male poteškoće, budući je velika većina studenata zanemarila uvjet da se Tena i Iva kreću jednakom brzinom, što ih je dovelo do pogrešnog rješenja. Zbog toga su koristili formulu proporcije i tako došli do netočnog odgovora.

Zadatak	Odgovor a)	Odgovor b)	Odgovor c)	Odgovor d)
4.	32/42	0/42	10/42	0/42

Slika 8: Statistika rješenja 4. zadatka

Zadatak 5. *Usred košarkaške sezone, običaj je proglasiti najboljeg strijelca slobodnog bacanja na utakmicama. Dana je statistika četiri igrača:*

a) Novak: 8 od 11 bacanja

b) Williams: 15 od 19 bacanja

c) Peterson: 22 od 29 bacanja

d) Reynolds: 33 od 41 bacanja

Koji je igrač najbolji strijelac slobodnog bacanja?

Ovaj zadatak nas opet vraća na aditivan način zaključivanja, zbog čega su studenti mogli odgovoriti i da je najbolji strijelac onaj koji je imao najmanju razliku između broja pokušaja i broja postignutih bacanja. Stoga imamo sljedeću tablicu:

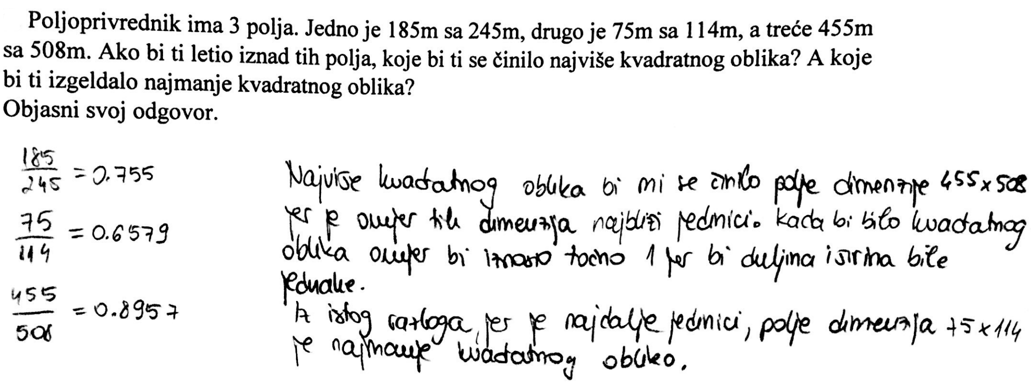
Zadatak	Točno	Netočno	Aditivno zaključivanje	Multiplikativno zaključivanje
5.	40/42	2/42	6/40	34/40

Slika 9: Statistika rješenja 5. zadatka

Tek dva studenta su pogriješila prilikom rješavanja ovog zadatka.

Zadatak 6. *Poljoprivrednik ima 3 polja. Jedno je 185 m s 245 m, drugo je 75 m sa 114 m, a treće 455 m sa 508 m. Ako bi ti letio iznad tih polja, koje bi ti se činilo najviše kvadratnog oblika? A koje bi ti izgledalo najmanje kvadratnog oblika? Objasni svoj odgovor.*

Slično kako kod 3. zadatka, provjeravanjem omjera svakog od navedenog zemljišta dolazimo do točnog odgovora. Izdvojila sam jedan odgovor na kojem je dobro objašnjeno kako su došli do rješenja:



Poljoprivrednik ima 3 polja. Jedno je 185m sa 245m, drugo je 75m sa 114m, a treće 455m sa 508m. Ako bi ti letio iznad tih polja, koje bi ti se činilo najviše kvadratnog oblika? A koje bi ti izgeldalo najmanje kvadratnog oblika?
Objasni svoj odgovor.

$\frac{185}{245} = 0.755$

$\frac{75}{114} = 0.6579$

$\frac{455}{508} = 0.8957$

Najviše kvadatnog oblika bi mi se činilo polje dimenzije 455x508 jer je omjer tih dimenzija najbliži jedinici. Kada bi bilo kvadatnog oblika omjer bi iznosio točno 1 jer bi duljina i širina bile jednake.
A istog razloga, jer je najdalje jedinici, polje dimenzija 75x114 je najmanje kvadatnog obliko.

Slika 10: Prikaz rješenja jednog studenta

Zadatak	Točno	Netočno
6.	30/42	12/42

Slika 11. Statistika rješenja 6. zadatka

5 Zaključak

Smatram da bi u današnjoj nastavi matematike trebalo posvetiti više pažnje na zadatke s omjerima i proporcijama, baš iz razloga što razvija proporcionalno mišljenje kojeg koristimo kao početni alat u rješavanju nekog problema. Nedostatak zainteresiranosti učitelja rezultira da većina učenika ostaje na aditivnom načinu razmišljanja što uvelike otežava daljni razvoj učenikove ideje, maštovitosti i samostalnosti prilikom rješavanja zadataka. Također važnost treba pridodati tome što omjer možemo prikazati kao razlomak, pa pravila i svojstva razlomaka omogućuju pojednostavljivanje omjera. Zanimljiva je raznolikost strategija kojom učenik može pristupiti zadacima i na taj način realizirati svoju ideju, a ne isključivo uvrštavati u već zadanu formulu. Nama budućim nastavnicima to dosta olakšava posao budući samim time postoje razno razne aktivnosti kojima možemo zainteresirati učenike za rad. Budući se omjeri i proporcije koriste i u drugim znanostima (fizika, biologija, geografija i slično) moguće je povezivati zadane zadatke s temama iz drugih predmeta.

Sažetak

Omjer je kvantifikacija multiplikativnih odnosa koji se izračunavaju dijeljenjem (ili množenjem) jedne količine drugom. Proporcionalni problemi uključuju situacije u kojima su matematički odnosi multiplikativni u prirodi i dopuštaju formiranje dvaju jednakih omjera između njih. Prilikom rješavanja zadataka s omjerom koristimo aditivan ili multiplikativan način mišljenja. Prvi tip omjera je poznat kao brzina i prikazuje usporedbu dvije varijable s različitim jedinicama. Tzv. "čisti omjeri" su omjeri koji uspoređuju veličine s jednakim jedinicama i veličine dvaju količina koje su pojmovno povezane, ali se prirodno ne smatraju kao dijelovi jedne cjeline. Također proporcija se shvaća kao direktan ili indirektan linearan odnos između dvije varijable što znači da su odgovarajući elementi dva skupa proporcionalni kada postoji konstantan omjer. U skladu s razvojnim procesom proporcionalnog mišljenja, pojedinac napreduje od predformalnih do onih formalnih strategija. Omjer između dvije veličine se može prikazati kao razlomak, pa se pravila razlomaka mogu primjeniti na omjere.

Summary

Ratio is the quantification of a multiplicative relationship that is calculated by dividing (or multiplying) one quantity by another. Proportional problem involve situations in which the mathematical relationships are multiplicative in nature and allow the formation of two equal ratios between them. When solving ratio problems we use additive or multiplicative way of thinking. The first type is known as rate and illustrates a comparison between two variables with different units. "Pure ratios" are ratios that compare sizes of quantities with identical units or sizes of two quantities which are conceptually connected, but are not naturally considered as parts of a whole. Also proportion is considered to be direct or indirect linear relationship between two quantities and that means that corresponding elements of two sets are in proportion when there is a constant ratio. In keeping with the developmental process of the proportional scheme the individual is progressing from pre-formal strategies up to formal ones. A ratio between two quantities can be represented by a fraction, and thus the laws of fractions can be applied to ratios, as is explained below.

Literatura

[1] Barbour, R.; *Ratios and Proportions in the Common Core*, Public Schools of North Carolina
URL: http://maccss.ncdpi.wikispaces.net/file/view/Ratio+and+Proportion.pdf

[2] Ben-Chaim, D.; Keret, Y.; Bat-Sheva, I.; *Ratio and Proportion: Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education*, Boston : Sense Publishers, 2012.

[3] *Omjeri, razmjeri i razmjernost veličina*,
URL: https://element.hr/artikli/file/1204

[4] *Ratio and proportion*, Chapter 12,
URL: http://ncert.nic.in/NCERTS/l/femh112.pdf

[5] Van de Walle, J. A.; Karp, K. S.; Bay-Williams, J. M.; *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (8th Edition)*, UK : Pearson, 2012.

Životopis

Zovem se Andrea Gudelj i rođena sam 31. svibnja 1992. godine u Đakovu. Živim u obiteljskoj zajednici s ocem Mladenom, majkom Blaženkom i tri godine mlađim bratom Marinom. Osnovnu školu Josipa Antuna Ćolnića u Đakovu sam upisala 1999. godine. Tijekom osnovnoškolskog, a kasnije i srednjoškolskog obrazovanja, sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike i biologije. Osim toga aktivno se bavim rukometom već 11 godina. Budući sam osnovnu školu završila izvrsnim uspjehom, 2007. godine upisujem opću gimnaziju u Gimnaziji Antuna Gustava Matoša u Đakovu. 2011. godine upisala sam integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.