# Primjena geometrije u nastavi matematike i česte miskoncepcije

**Sataj, Ivana**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primjenjene matematike i infromatike
Diplomski sveučilišni studij matematike i informatike

**Ivana Sataj**

# Primjena geometrije u nastavi matematike i česte miskoncepcije

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primjenjene matematike i infromatike
Diplomski sveučilišni studij matematike i informatike

**Ivana Sataj**

# Primjena geometrije u nastavi matematike i česte miskoncepcije

Diplomski rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2023.

# Sadržaj

# Uvod

Matematika u školama danas glasi kao jedan od najzahtjevnijih i najizazvonijih predmeta. Učenici pri samom spomenu na matematiku, pa tako i geometriju, imaju odbojni stav i zbog toga nedovoljno vježbaju rješavanje zadanih problema, što je ključno za usvajanje vještina koje pruža matematika. Prilikom rješavanja geomatrijskih problema, učenici često imaju krive zaključke i ideje o njihovim rješenjima. Upravo iz tog razloga ću u svom diplomskom radu predstaviti aktivnosti koje mogu poslužiti za fomativnu procjenu znanja učenika kao i elemente pozitivnog okruženja za učenje opisane u modelu koji se sastoji od pet dimenzija. Te aktivnosti se mogu provesti kao dijagnostičko učenje na samom početku obrade nove teme kako bi učenici vidjeli koliko i što znaju, ili kao procjena svog znanja koja bi služila kao povratna informacija učitelju, ali i učenicima na samom kraju obrade neke teme ili sadržaja. Nadalje, navesti ću i česte miskoncepcije koje bi učenici mogli imati tijekom rješavanja navedenih aktivnosti te pitanja koja bi učitelji mogli postaviti učenicima kako bi ih naveli da promisle o svojim ponuđenim odgovorima.

# 1. Pet dimenzija moćne učionice

U ovom odjeljku bit će opisan model koji odgovara na pitanje koji su to elementi pozitivnih okruženja za učenje tj. okruženja u kojima učenici dobivaju potporu i podršku kako bi postali obrazovani, fleksibilni, disciplinirani i snalažljivi mislioci. Model se sastoji od pet dimenzija koje će biti opisane u nastavku.

## 1.1. Prva dimenzija: Sadržaj

Prva dimenzija proučava u kolikoj mjeri aktivnosti u učionici pružaju mogućnost učenicima da postanu obrazovani, fleksibilni, snalažljivi i disciplinirani. Razmatraju se rasprave učenika, te se pruža prilika za učenje tehnika koje potiču stvaranje produktivnih navika uma. Iskustva i situacije iz učionica utječu na učeničko shvaćanje što se očekuje od njih. Ako je, na primjer, sat čitanja usmjeren na iščitavanje teksta, sat povijesti na pamćenje datuma velikih događaja ili sat matematike na pamćenje postupaka računanja, male su šanse da će učenici shvatiti bit vještina i zašto su im one potrebne. Naučiti „razmišljati kao povjesničar" ili „kao znanstvenik" znači suočiti se i razvijati kroz razne koncepte i prakse vještina. Ako aktivnosti u učionici ne zahtijevaju od učenika razvijanje tih vještina, teško je zamisliti da će kada izađu iz učionice znati primijeniti te vještine ili biti u stanju učinkovito koristiti svoje znanje.

## 1.2. Druga dimenzija: Kognitivni zahtjevi

Izazov je pronaći zadatke i aktivnosti koje učenicima pružaju priliku za smisleno učenje i koji podupiru njihov rast i razvoj kroz aktivno bavljenje sadržajem. Ukoliko učenici dobiju zadatak koji im je previše lagan, na taj način će malo naučiti i vrlo vjerojatno će im biti dosadno na nastavi zbog nedovoljnog izazova. Ako pak dobiju zadatak koji im je previše težak i nedostižan njihovom trenutnom znanju, u toj će situaciji učenicima nastava također biti dosadna, ali i frustrirajuća jer ne mogu odraditi zadani zadatak. Upravo se nalaženjem balansa tih dviju krajnosti bavi ova druga dimenzija modela. Cilj učitelja trebao bi biti pronaći srednje teške zadatke kako bi učenici imali priliku nadograđivati prethodno stečeno znanje i proširiti trenutno razumijevanje. Postoji okvir koji objašnjava „dubine" znanja. On se sastoji od četiri razine: prisjećanje i reprodukcija, vještine i koncepti, strateško razmišljanje i rasuđivanje te prošireno razmišljanje. Kada učenici rješavaju probleme koji su im zadani, oni ponekad trebaju koristiti sve prethodno navedene razine. Ovdje nastaje izazov kod poučavanja: učenicima treba pružiti pojašnjenje i podrška u obliku heurističkog razgovora, postavljanje pitanja i potpitanja ili predlaganje pristupa, ali pritom ne govoreći učenicima što bi točno trebali učiniti. Često se dogodi da učitelji smanjuju kognitivna očekivanja od učenika zbog poteškoća na koje učenici mogu naići kada rješavaju kompleksnije zadatke, ali time im se uskraćuje prilika za produktivnim razmišljanjem i pronalaženjem smislenih rješenja. Zato postoji mnogo načina na koje učitelji mogu potaknuti razmišljanje kod učenika, a da im se ne uskrati prilika za daljnji kognitivni razvoj. To su primjerice:

- u osmišljanju i odabiru zadataka, učitelji mogu izbjeći davanje detaljnih uputa za rješavanje problema tj. zadatke koji se ne ponavljaju te upute koje ne dopuštaju učenicima da samostalno nadograđuju svoja trenutna razumijevanja;

- učitelji mogu aktivno podržati učenike u individualnom radu, grupnom radu te poticati rasprave u kojima bi se uključili učenici cijelog razreda, postavljajući pitanja i potpitanja koja ne bi pretjerano sugerirala specifične načine obavljanja zadanih problema;

- učitelji mogu upotrijebiti niz tehnika kako bi pomogli učenicima u iskazivanju njihovih ideja;

- učitelji mogu poticati raspravu koja potiče razvoj zaključivanja kod učenika.

## 1.3. Treća dimenzija: Dostupnost sadržaja

Treća dimenzija posvećena je tome u kolikoj mjeri aktivnosti u razredu utječu i podržavaju aktivno sudjelovanje svih učenika u učionici tijekom obrade sadržaja. Satovi na kojima veliki broj učenika ne prati nastavu i ima vremena ne raditi ono što je učitelj zadao nisu produktivni, bez obzira na bogatstvo sadržaja koji se na tom satu obrađuje. Svi učenici trebaju biti uključeni i produktivni na satu shodno svojim mogućnostima.
Ova dimenzija bazira se na pitanju postoje li različiti pristupi sadržaju koji se obrađuje na satu. Mogu se provoditi rasprave ili drugi načini diskutiranja o sadržaju, no pitanje je tko sudjeluje u tim raspravama. Jedno od pitanja s kojima se bavi ova dimenzija je imaju li svi učenici često prilike raspravljati o rješenjima i iskazivati svoje ideje.
Postoje mnogi načini na koje se učenici mogu potaknuti da sudjeluju na nastavi:

- učenicima se mogu podijeliti zadaci kojima se može pristupiti na više različitih načina tj. zadaci u kojima postoji više različitih postupaka koji svi dovode do točnog rješenja. Takvi zadaci omogućavaju diskusiju kroz koju učenici mogu uspoređivati postupke i točnost rješenja. Učenici mogu uočiti poveznicu između različitih pristupa kojim su se koristili;

- učitelji mogu poticati stvaranje i usavršavanje ideja umjesto da kritiziraju ili ignoriraju komentare učenika koji su samo djelomično točni;

- učitelji mogu podržati korištenje stručnih izraza prilikom izražavanja. Na primjer, mogu reći učeniku da ponovi ono što je rekao drugi učenik, ali da se koristi preciznijim terminima;

- tijekom rasprava, učitelji mogu koristiti različite strategije za poticanje komunikacije što većeg broja učenika. Primjerice, učitelj može prozivati one učenike koji još nisu govorili;

- učitelj može koristiti zadatke koji su vezani za probleme iz svakodnevnog života i na taj način omogućiti učeniku da spozna primjenu matematike u svakodnevici.

## 1.4. Četvrta dimenzija: Djelovanje i samosvjesnost

Četvrta dimenzija gleda u kolikoj mjeri učenici imaju priliku stvarati i dijeliti ideje, kako u cijelom razredu tako i u malim grupama; i u kojoj mjeri su učenički zaključci priznati, podržani i koliko napreduju. Mnogi učenici razvijaju negativna uvjerenja o njima samima, poput predodžbi da su loši u matematici i da samo geniji mogu razumjeti matematiku. Kako bi razmišljali pozitivnije, učenike treba potaknuti da rade na svojim vještinama tako da kroz razne zadatke vježbaju ispravan način razmišljanja. Učenici intelektualno napreduju onda kada imaju vremena promisliti i podijeliti svoje mišljenje o određenom problemu umjesto da u kratkom vremenskom periodu moraju smisliti odgovor na neko pitanje oko kojeg su i oni sami sumnjičavi. Zato je važno da okruženje u kojem se učenici nalaze pruža mogućnost razvoja njihovih ideja i mišljenja.
Zadaća učitelja je prepoznati jake strane učenika i navoditi ga da rješava navedene probleme. Bitno je da atmosfera u razredu bude ugodna i da se svaki učenik osjeća ugodno podijeliti svoje mišljenje i zaključke s ostatkom razreda. Kako bi učitelj uspio ostvariti takvu diskusiju u kojoj je svima ugodno, može se poslužiti idućim rečenicama koje sami učenici trebaju nadopuniti:

- ne slažem se (ili slažem se) jer ...;
- još uvijek imam nejasnoća vezano za ...;
- zbunjen sam jer ...;
- trebao bi dodatno objašnjenje vezano za ...

## 1.5. Peta dimenzija: Formativno vrednovanje

Posljednja dimenzija bavi se formativnim ocjenjivanjem koje otkriva koliko dobro učenici razumiju sadržaj koji se trenutno obrađuje. Otkrivanje problema koji utječu na netočno zaključivanje stvara učiteljima i učenicima priliku za poboljšanjem razumijevanja i olakšava uočavanje pogrešnih pretpostavka. Formativno se učenje može provoditi uz pomoć kvizova, testova ili nekih drugih oblika ispitivanja. Često uključuje neformalno prikupljanje informacija kao što su postavljanje pitanja koja mogu navoditi učenike da promisle o svojim odgovorima ili tvrdnje koje učenici trebaju dokazati ili opovrgnuti. Na taj način ih učitelj potiče da promišljaju o problemu i svim mogućim slučajevima tog rješenja. Formativno ocjenjivanje, za razliku od sumativnog, služi kao povratna informacija učiteljima, kao i samim učenicima, kako bi osvijestili koje gradivo im nije jasno i što trebaju više učiti kako bi napredovali u vještinama koje pruža matematika.

# 2. Aktivnosti predviđene za 5. i 6. razred osnovne škole

U ovom djelu rada predstavljene su i opisane aktivnosti koje su podržane modelom iz prethodnog poglavlja, a prilagođene su sa (1).

## 2.1. Punjenje kamiona

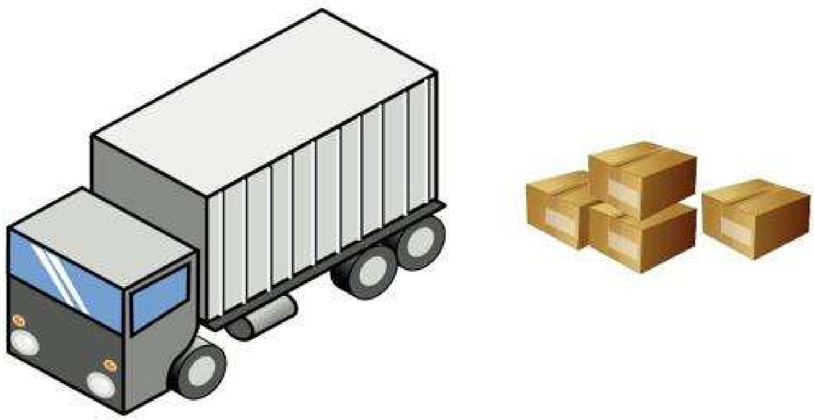
Ova aktivnost ima za cilj pomoći procijeniti učiteljima koliko dobro učenici mogu:

- precizno iskazati i objasniti svoje zaključke;
- koristiti matematičke zakonitosti u problemima vezanim za volumen.

Učitelj na samom početku sata dijeli svakom učeniku listić (Slika 1.) i prazan papir na kojem učenik može bilježiti svoje izračune i zaključke. Učitelj postavljanjem pitanja provjerava razumiju li učenici što se od njih traži: „Je li itko od vas ikada punio kamion kutijama? Kada i kojom prigodom?” Nakon što učenici odgovore na pitanja, učitelj bi trebao dodatno pojasniti što se od njih traži u zadatku: „Pažljivo pročitaj zadatak i ponudi Ivanu nekoliko savjeta kako napuniti kamion. Tvoje upute trebaju biti jasne i lako primjenjive. Ne zaboravi napisati koliko će kutija stati u kamion ako Ivan slijedi tvoje upute.” Učenici prilikom rješavanja ovog zadatka mogu koristiti kalkulator. Bitno je da učenici samostalno rješavaju zadatke tj. bez pomoći učitelja.

**Punjenje kamiona**

Ivan se seli u drugi grad i poslagao je svoje stvari u kutije. Nakon što je došao kamion koji će preseliti stvari, Ivan je krenuo puniti kamion svojim kutijama. Dio kamiona u koji Ivan može slagati svoje kutije je širine 250 cm, duljine 900 cm i visine 270 cm. Sve kutije su istih dimenzija tj. široke su 40 cm, dugačke 90 cm, a visoke 55 cm. Kutije se mogu okretati prilikom slaganja jer u njima nema ništa lomljivo.



Pomozi Ivanu i daj mu savjet kako da slaže kutije u kamion tako da u njega stane što više kutija. Prilikom davanja uputa trebaš navesti koliko će kutija stati u kamion ako Ivan odluči poslušati tvoj savjet.

Slika 1: Listić za provođenje aktivnosti

Pogrešne pretpostavke i zaključci koji se mogu pojaviti prilikom rješavanja ove aktivnosti, kao i pogodna pitanja koja bi učitelj mogao postaviti učenicima da ih potakne na promišljanje predstavljena su u Tablici 1.

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik izostavlja upute.**<br>Na primjer: Učenik tvrdi da Ivan može staviti 20 · 11 = 220 kutija u kamion bez ikakvih objašnjenja. | • Možeš li objasniti kako si izračunao koliki je broj kutija koji stane u kamion?<br>• Na koji način bi Ivan trebao poslagati kutije u kamion da bi ih stalo 220?<br>• Koje upute bi dao Ivanu? |
| **Učenik ne uzima u obzir dimenzije kutija.**<br>Na primjer: Učenik dijeli volumen kamiona s volumenom kutije i dobiva 306 kutija. | • Utječu li dimenzije kutija na to koliko će njih stati u kamion?<br>• Kako bi poslagao kutije u kamion da ih stane 306? Možeš li dati Ivanu upute kako da posloži 306 kutija u kamion? |
| **Učenik određuje vrijednost koja nije cijeli broj kako bi iskazao broj kutija.**<br>Na primjer: Učenik zaključuje da u kamion stane 306,82 kutije. | • Je li moguće utovariti pola, četvrtinu ili 82% kutije?<br>• Možeš li zaokružiti dobiveni broj tako da rješenje ima smisla? |
| **Učenik zaokružuje rješenje netočno.**<br>Na primjer: Učenik dobiva iz računa da 306,82 kutije stanu u kamion pa on zaokružuje rezultat i zaključuje da zapravo stane 307 kutija u kamion. | • Jesi li siguran da način na koji si zaokružio rješenje ima smisla s obzirom na problem iz zadatka? |
| **Učenik nije do kraja „napunio kamion".**<br>Na primjer: Učenik računa koliko kutija stane samo u prvom retku, a ne u cijelom kamionu. | • Je li moguće stavljati kutije jednu na drugu?<br>• Kako bi poslagao kutije da popuniš prazan prostor u kamionu? |
| **Učenik sve kutije okreće jednako.**<br>Na primjer: Učenik uzima u obzir samo omjere širine kamiona i kutije, duljine kamiona i kutije i visine kamiona i kutije ne uzimajući u obzir i druge mogućnosti. | • Razmisli li da li bi mogao napuniti kamion sa više kutija ako neke od njih staviš na drugačiji način? |
| **Učenik razmatra samo jedan način slaganja.**<br>Na primjer: Učenik tvrdi da Ivan može napuniti kamion s 306 kutija. | • Kako znaš da ne postoji neki drugi način slaganja koji bi omogućio da se u kamion stavi veći broj kutija?<br>• Možeš li provjeriti da je ovo najveći broj kutija koji stane u kamion? |

Tablica 1: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 2.2. Sigurnosna kamera

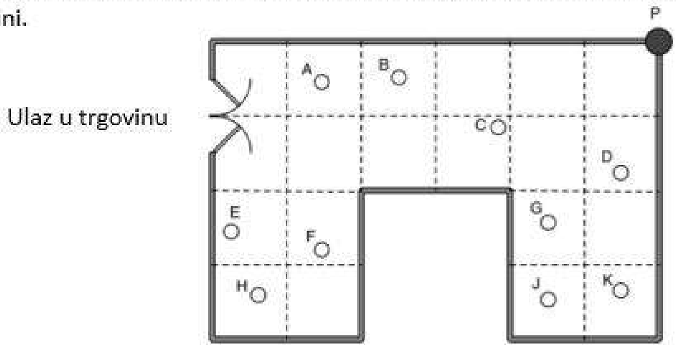
Cilj ove aktivnosti je pomoći učitelju procijeniti koliko dobro učenici mogu:

- sagledati situaciju iz stvarnog života iz matematičke perspektive;
- izračunati i usporediti površine trokuta i četverokuta;
- izračunati i usporediti postotke tj. udjele površina.

Na početku sata učitelj bi svakom učeniku trebao podijeliti listić sa zadacima (Slika 2.). Nakon što je svaki učenik dobio svoj listić, učitelj bi trebao ukratko predstaviti zadatak i što se od učenika očekuje prilikom rješavanja predstavljenog problema: „Jeste li ikada vidjeli sigurnosnu kameru? Kako ona izgleda? Neke kamere uopće ne izgledaju kao kamere već kao male hemisfere. Kamere iz zadatka se mogu okretati oko svoje osi za 360°. Na slici je prikazan tlocrt trgovine. Mali kružići predstavljaju ljude u trgovini. Sada pročitajte zadatak i samostalno ga rješavajte." Bitno je da učenici samostalno rješavaju zadatak bez pomoći učitelja ili prijatelja iz razreda.

### Sigurnosna kamera

Vlasnik trgovine želi spriječiti krađu pod svaku cijenu. Odlučio je postaviti sigurnosnu kameru na strop svoje trgovine. Kamera se može okretati udesno za 360° u svim smjerovima. Vlasnik ju je postavio u točki P, u kutu trgovine. Na slici su kružićima prikazani kupci koji stoje u trgovini.




1. Koje kupce ne može uočiti kamera u točki P?

   Objasni svoje odgovore i na slici označi svoja opažanja.

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________.

2. Vlasnik trgovine tvrdi da kamera ne može uočiti samo 15 % trgovine.

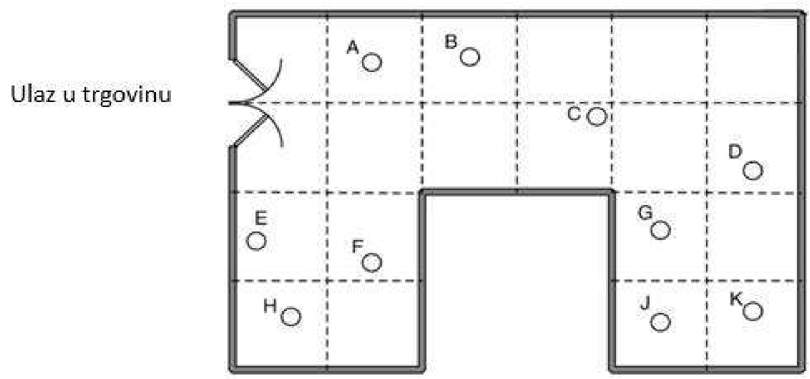
   Utvrdi i objasni zašto je vlasnik trgovine u pravu.

   ______________________________________________

   ______________________________________________.

3. Vlasnik trgovine je odlučio premjesti kameru na drugo mjesto kako bi ona mogla uočiti što veći prostor u trgovini.

a) Na slici je prikazan tlocrt trgovine. Označi najpogodnije mjesto na koje bi trebalo postaviti kameru kako bi ona mogla uočiti što veći dio trgovine.




b) Objasni kako znaš da je to najbolje mjesto za postaviti kameru. Koliki postotak trgovine nije vidljiv kameri ako bi ju vlasnik postavio na tu poziciju?

Slika 2: Listić za provođenje aktivnosti

Tijekom rješavanja navedenog listića mogu se pojaviti pogrešne ideje tj. miskoncepcije koje učenike navode na pogrešno rješavanje zadatka. U idućoj tablici navedene su moguće zablude i pogodna pitanja koja bi učitelj mogao postaviti učenicima kako bi ih usmjerio i potaknuo na razmišljanje o ispravnijem pristupu (Tablica 2.).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik netočno označava kupce koje kamera ne može uočiti.**<br>Na primjer: Učenik izjavljuje da kupac E nije vidljiv kameri koja se nalazi na poziciji P. | • Kako znaš koje dijelove trgovine kamera ne može uočiti? Možeš li osjenčati to područje? |
| **Učenik uzima u obzir samo cijele kvadrate sa tlocrta.**<br>Na primjer: Učenik misli da cijeli kvadrat na kojem se nalaze kupci F i H kamera ne može uočiti. | • Koje kvadrate ili dijelove kvadrata kamera ne može uočiti? Označi na slici koji su to dijelovi tlocrta. |
| **Učenik se bazira na kupce, a ne na područja koja kamera ne može uočiti.**<br>Na primjer: Učenik crta linije koje označavaju pogled na kupce, a ne na područje u trgovini. | • Što to znači da kamera ne može uočiti 15 % područja trgovine?<br>• Odredio si koje kupce kamera ne može vidjeli. Sada odredi koje područje trgovine je skriveno od kamere. |
| **Učenik ne crta linije niti pokazuje ijednu drugu metodu kojom bi riješio zadatak.** | • Na koji način bi na slici označio područje koje kamera ne može uočiti? |
| **Učenik razmatra problem samo u dvodimenzionalnom, a ne u trodimenzionalnom prostoru.**<br>Na primjer: Učenik smatra da se neki kupci ne mogu uočiti od drugih kupaca koji stoje ispred njih. | • Hoće li visina na kojoj je postavljena kamera utjecati na područje vidljivosti? Zašto?<br>• Ako se jedan kupac nalazi odmah iza drugog, hoće li kamera svejedno moći uočiti oba kupca? Zašto? |
| **Učenik ne daje potpuno objašnjenje.**<br>Na primjer:<br>• Učenik daje nepotpuno objašnjenje zašto je vlasnik trgovine upravu.<br>• Učenik pronalazi novu poziciju za kameru, ali ne dokazuje objašnjenjem zašto je to najbolja pozicija niti izračunava postotak tlocrta trgovine koji kamere ne može uočiti. | • Zašto si siguran da je to najpogodnije mjesto za postaviti kameru? Postoje li neke druge pozicije sa kojih bi kamera imala jednaki postotak vidnog polja?<br>• Koji postotak tlocrta trgovine kamera ne može uočiti? |
| **Učenik pronalazi novu poziciju za kameru, no međutim s te pozicije kamera može uočiti manji postotak tlocrta trgovine neko iz pozicije P.**<br>Na primjer: Učenik tvrdi da je najbolja pozicija za kameru u centru trgovine. | • Možeš li osjenčati dio trgovine koji kamera ne može uočiti ako se nalazi u centru trgovine? Koliki je to dio trgovine? |
| **Učenik ima krive pretpostavke.**<br>Na primjer: Učenik smatra da kamera ne može uočiti područje koje se nalazi ispod nje. | • Kamera se može okretati udesno za 360° u svim smjerovima. Utječe li to na mogućnost povećanja vidnog polja kamere? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno i objašnjava svoje zaključke.** | • Ima nekoliko različitih pozicija na kojima može biti postavljena kamera kako bi imala isti postotak tlocrta trgovine koji ne može uočiti. Pokušaj pronaći sve te pozicije. Možeš li objasniti zašto sve te pozicije mogu biti točna rješenja? |

Tablica 2: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 2.3. Iščitavanje iz grafa

Ova aktivnost pomaže utvrditi koliko su učenici sposobni, koristeći se grafičkim prikazom podataka, rješavati probleme iz svakodnevnog života. Ovakav tip vježbe namijenjen je učenicima koji imaju poteškoća prilikom interpretacije i iščitavanja podataka iz grafa kako bi im se pripomoglo bolje savladali te matematičke vještine.
Na početku provođenja aktivnosti, učitelj bi svakom učeniku trebao podijeliti listić (Slika 3.) sa zadacima. Pri dijeljenju ih upozorava da pažljivo čitaju pitanja i tamo gdje se od njih to traži, objasne svoje tvrdnje. Učenici bi trebali samostalno rješavati zadatke bez ičije dodatne pomoći.

**Iščitavanje iz grafa**

Neobična životinja imena Riki promatran je od svoga rođenja pa sve do svoje 15-te godine. Promjena njegove težine s obzirom na starost zabilježena je u grafikonu ispod.

1. Kada je Riki imao 50 kg?

_______________________

2. Koliko je Riki bio težak kada je imao 5 i pol godina?

______________________________

3. Koliko je Riki bio star kada mu je kilaža porasla na 20 kg?

______________________________

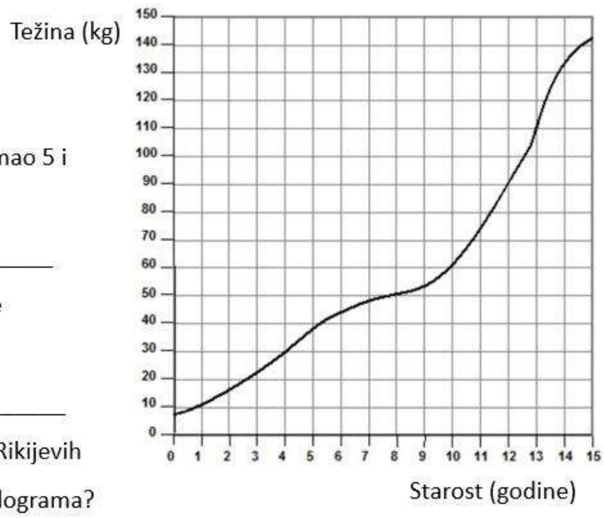
4. U kojem od navedenih perioda Rikijevih godina je Riki dobio najmanje kilograma?

   a) 0 - 5 b) 5 – 10 c) 10 – 15

   Obrazloži svoj odgovor.

__________________________________

__________________________________________________.




5. Tijekom kojeg perioda od dvije godine je Riki dobio najviše kilograma? Objasni odgovor.

______________________________________________________________________.

6. Otkrivena je još jedna neobična životinja koja se zove Ema. Istraživači su također pratili i promjenu Emine kilaže tijekom prvih 15 godina njenog života. Iskoristi informacije u nastavku kako bi uz pomoć grafa koji je zabilježio promjenu Rikijeve kilaže nacrtao graf koji opisuje promjenu Emine kilaže s obzirom na njene godine.

- Tijekom prve 4 godine Emina kilaža se mijenjala isto kao i Rikijeva. U periodu od 11 do 15 godine, promjerna Emine kilaže je također bila ista kao Rikijeva.
- Kada je Ema napunila 13 godina, bila je 20 kg teža od Rikija. Razlika u njihovoj kilaži je tada bila najveća.
- U periodu između 9 i 13 godina, Ema svake godine dobiva na kilaži više nego Riki.

Slika 3: Listić za provođenje aktivnosti

Tijekom rješavanja zadataka iz ove aktivnosti, učenici mogu imati mnoge pogrešne pretpostavke i metode kojima bi pristupili problemu s listića. Upravo te miskoncepcije kao i pogodna pitanja kojima bi učitelj mogao potaknuti učenike na promišljanje navedena su u idućoj tablici (Tablica 3.).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik pogrešno iščitava vrijednosti s koordinatnih osi.** | • Provjeri svoj odgovor. |
| **Učenik brka vrijednost u točki s duljinom intervala.**<br>Na primjer:<br>• Učenik u trećem zadatku shvaća da godina u kojoj Riki teži 20 kg, nije ista godina u kojoj je Rikijeva kilaža porasla za 20 kg.<br>• Učenik pretpostavlja da je Rikijeva kilaža najviše porasla onda kada je on bio najteži. | • Kada je Riki imao najviše kilograma?<br>• Za koliko je porasla Rikijeva kilaža kada je napunio 14, 13 i 12 godina? |
| **Učenik ima poteškoća prilikom uspoređivanja duljine dvaju intervala.**<br>Na primjer: Učenik u četvrtom zadatku pretpostavlja da je Riki dobio najmanje kilograma u svojih prvih 5 godina života. | • Koji podaci su ti potrebni da bi odgovorio na pitanje?<br>• Koliko kilograma je imao Riki kada je napunio 5, 10 i 15 godina? Možeš li iskoristiti te podatke kako bi odgovorio na pitanje? |
| **Učenik ne uzima u obzir ograničenja**<br>Na primjer: Učenik crta krivulju koja opisuje Emin porast kilaže s obzirom na starost koja ima pogrešan nagib. | • Možeš li objasniti zašto nacrtana krivulja ima baš takav nagib? |

Tablica 3: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

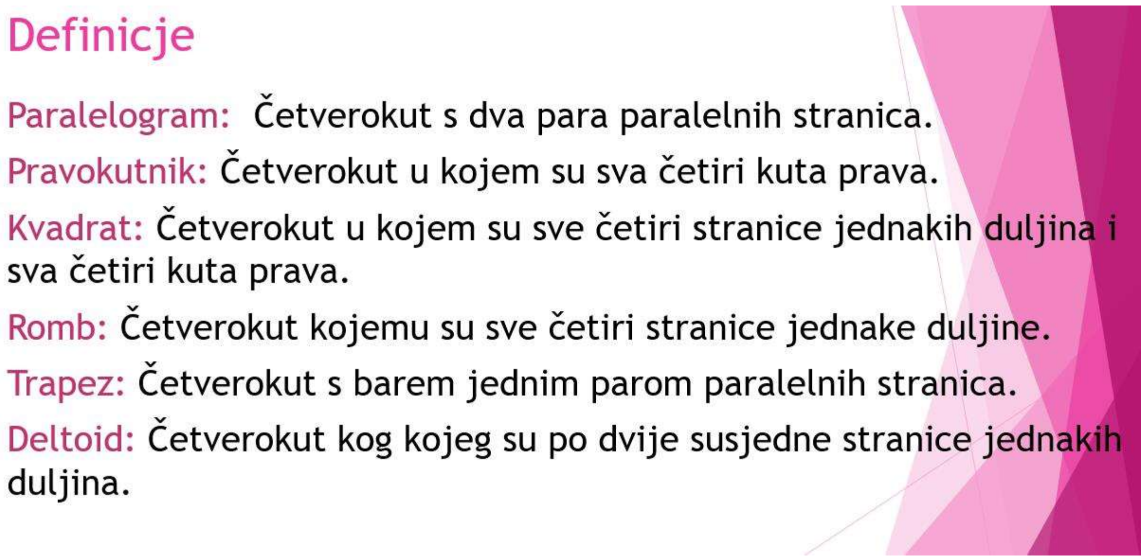
# 3. Aktivnosti predviđene za 7. razred osnovne škole

## 3.1. Klasifikacija četverokuta

Aktivnost klasifikacija četverokuta ima za cilj pomoći procijeniti koliko dobro učenici mogu:

- imenovati i klasificirati četverokute prema njihovim svojstvima;
- identificirajti osnovna svojstva koja su potrebna za definiranje četverokuta;
- skicirati četverokute ako su zadani određeni uvjeti.

Ova aktivnost pomaže otkriti poteškoće koje učenici imaju tijekom razvrstavanja, tj. klasifikacije četverokuta. Na početku se učenicima treba objasniti što se od njih očekuje tj. traži prilikom rješavanja ove aktivnosti. Prije nego što se učenicima podijele listići(Slika 5.), bilo bi im dobro na slajdu prikazati definicije četverokuta (Slika 4.) kako bi se učenici lakše snalazili tjekom rješavanja aktivnosti. Učitelj naglašava učenicma da pažljivo pročitaju pitanja s listića i pokušaju odgovoriti što točnije i preciznije. Učenici trebaju napisati i objašnjenja svojih odgovora. Trebalo bi inzistirati da odgovaraju bez pomoći učitelja. Na taj način učenici dobivaju više vremena da samostalno promisle o dobivenom zadatku.




Slika 4: Definicije četverokuta

# Klasifikacija četverokuta

**1.** Popunite prazna polja s riječima „Svi“, „Neki“ ili „Nijedan“ kako bi dana izjava o četverokutima bila točna. Na prazne crtice napišite objašnjenje zašto ste odabrali tu riječ. Objašnjenja možete napisati i u obliku dijagrama.

a) ☐ pravokutnik/ci su/nije kvadrat/ti.

Obrazloži svoj izbor riječi:

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________.

b) ☐ romb/ovi nije/su paralelogram/i.

Obrazloži svoj izbor riječi:

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________.

c) ☐ trapez/i nije/su pravokutnik/ci.

Obrazloži svoj izbor riječi:

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________.

d) ☐ deltoid/i nije/su romb/ovi.

Obrazloži svoj izbor riječi:

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________.

**2.** Koji od navedenih četverokuta mora imati barem jedan par paralelnih stranica.

Zaokružite sve točne odgovore.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Pravokutnik** | **Deltoid** | **Trapez** | **Kvadrat** | **Paralelogram** | **Romb** |

Obrazloži svoj izbor:

______________________________

______________________________

______________________________.

**3.** U kojim se od navedenih četverokuta dijagonale međusobno raspolavljaju?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Pravokutnik** | **Deltoid** | **Trapez** | **Kvadrat** | **Paralelogram** | **Romb** |

Obrazloži svoj izbor:

______________________________

______________________________

______________________________.

Slika 5: Listić za provođenje aktivnosti

U ovoj aktivnosti mogu se pojaviti poteškoće tj. miskoncepcije kao rezultat nerazumijevanja ili nepoznavanja odgovarajućih sadržaja. Te miskoncepcije, kao i pogodna pitanja koja bi potaknula učenike na promišljanje navedena su u idućoj tablici ( Tablica 4).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
| --- | --- |
| **Učenik prepoznaje različite vrste četverokuta kao različite oblike, a ne prepoznaje da su neki četverokuti podskupovi drugih četverokuta.**<br><br>Na primjer: Učenik izjavljuje da niti jedan pravokutnik nije kvadrat. | • Koja svojstva ima pravokutnik/kvadrat?<br>• Ima li pravokutnik/kvadrat sva svojstva kvadrata/pravokutnika?<br>• Je li moguće da jedna vrsta četverokuta bude posebni slučaj neke druge vrste četverokuta? Ako je to moguće, možemo li to povezati sa svojstvima tih četverokuta i kako? |
| **Učenik pretpostavlja da suprotne stranice romba nisu paralelne.**<br>Na primjer:<br>• Učenik izjavljuje da niti jedan romb nije paralelogram.<br>• Učenik navodi da su neki deltoidi rombovi.<br>• Učenik ne uspijeva označiti romb kao četverokut koji ima jedan par paralelnih stranica. | • Što znaš o kutovima romba? |
| **Učenik pretpostavlja da deltoid ima paralelne stranice.**<br>Na primjer: Učenik označava deltoid kao četverokut koji ima barem jedan par paralelnih stranica. | • Ima li deltoid stranice koje se podudaraju tj. leže na paralelnim pravcima?<br>• Koje stranice su sukladne u deltoidu? |
| **Učenik pretpostavlja da se dijagonale koje se međusobno raspolavljaju moraju sjeći pod kutom od 90°.**<br>Na primjer: Učenik u trećem zadatku s listića zaokružuje samo kvadrat. | • Što znači da se dijagonale međusobno raspolavljaju? |
| **Učenik pretpostavlja da se dijagonale u jednakokračnom trapezu međusobno raspolavljaju.**<br>Na primjer: Učenik objašnjava da se dijagonale jednakokračnog trapeza međusobno raspolavljaju, dok kod trapeza koji nije jednakokračan se ne raspolavljaju. | • Koja je razlika između trapeza koji nije jednakokračan i jednakokračnog trapeza?<br>• Nacrtaj dijagonale jednakokračnog trapeza. Koja svojstva bi imala dva trokuta koja su nastala crtanjem dijagonala, ako bi se te dijagonale međusobno raspolavljale? |
| **Učenik malo ili nimalo objašnjava svoja rješenja.**<br>Na primjer: Učenik ne daje objašnjenje za svoj izbor riječi u prvom zadatku sa listića ili ne uspijeva obrazložiti svoje odgovore. | • Koja svojstva ima pravokutnik, a da ne vrijede za trapez?<br>• Možete li pokazati da romb zadovoljava sva svojstva koja ima kvadrat?<br>• Koja dodatna svojstva ima kvadrat? |

Tablica 4: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 3.2. Trokuti ili ne?

Ova aktivnost ima za cilj pomoći procijeniti koliko dobro učenici mogu:

- prisjetiti se i primjeniti svojstva trokuta;
- skicirati i konstuirati trokute ako su im zadana određena svojstva;
- utvrditi može li se opisati jedinstveni trokut, više trokuta ili niti jedan trokut uz pomoć danih uvjeta tj. svojstava za mjere kuta i/ili duljina stranica trokuta.

Učitelj svakom učeniku treba podijeliti bijeli papir dimenzija A4 te listić (Slika 6.) sa zadacima za ovu aktivnost. Nakon toga, učenicima treba ukratko predstaviti zadatak: "U ovom zadatku od vas se traži da razmislite može li se iz danih informacija: nacrtati samo jedan trokut, više od jednog trokuta ili nije moguće nacrtati niti jedan trokut. Ako se može nacrtati više od jednog trokuta, onda promislite koliko. Običan bijeli A4 papir koji ste dobili možete koristiti prilikom rješavanja prvog zadatka. Svoje odgovore potkrijepi objašnjenjima. Vaša objašnjenja mogu uključivati crteže i riječi". Važno je ako je to moguće, da učenici odgovaraju na pitanja bez pomoći učitelja.

### Trokuti ili ne?

**1.** Na temelju danih informacija odlučite je li:

- moguće konstruirati jedinstveni trokut ABC.
- moguće konstruirati više od jednog trokuta ABC.
- moguće konstruirati ijedan trokut ABC.

Obrazložite svoje odgovore (ne traži se konstrukcija već objašnjenje).

| Informacije | Mogućnost konstrukcije trokuta. Ako smatraš da se može konstruirati takav trokut, stavi ✓. | | Objašnjenje |
|---|---|---|---|
| a) $\beta = 60^\circ$, $\overline{AC} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm | Jedinstveni trokut | | |
| | Više od jednog trokuta | | |
| | Niti jedan trokut | | |
| b) $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 13$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm | Jedinstveni trokut | | |
| | Više od jednog trokuta | | |
| | Niti jedan trokut | | |
| c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ | Jedinstveni trokut | | |
| | Više od jednog trokuta | | |
| | Niti jedan trokut | | |
| d) $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, $\beta = 30^\circ$ | Jedinstveni trokut | | |
| | Više od jednog trokuta | | |
| | Niti jedan trokut | | |

**2.** Trokut ABC je jednakokračan s stranicom $\overline{AB}$ = 8 cm i kutom u vrhu B koji je jednak 58°.
Trokut DEF je jednakokračan s stranicom $\overline{DE}$ = 8 cm i kutom u vrhu E koji iznosi 58°.
Objasnite zašto ova dva trokuta mogu biti različita.

Slika 6: Listić za provođenje aktivnosti

Miskoncepcije koje se mogu pojaviti u razumijevanju navedene aktivnosti su u idućoj tablici. Također predstavljamo i pitanja kojima se učenik može potaknuti na razmišljanje.

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik ima poteškoća uopće započeti rješavati zadatak.** | • Možeš li skicirati trokut s danim podacima? Misliš li da bi bilo moguće konstruirati takav trokut? Kako znaš?<br>• Pokušaj konstruirati trokut s danim informacijama. Što primjećuješ? |
| **Učenik se oslanja isključivo na skicu bez razmatranja održivosti danih dimenzija.**<br>Na primjer:<br>• Učenik skicira trokut bez provjere je li s danim podacima to uopće moguće. | • Tvoja skica izgleda kao mogući trokut. Možeš li provjeriti može li trokut s ovim mjerama zapravo biti konstruiran? |
| **Učenik stvara netočne pretpostavke.**<br>Na primjer:<br>• Učenik pretpostavlja, ako su dane duljine svih triju stranica trokuta kao npr. u zadatku 1.b), da je tad moguće konstruirati više trokuta, jer kutovi tada mogu biti proizvoljno odaberemo.<br>• Učenik pretpostavlja, ako su dane mjere sva tri kuta unutar trokuta kao npr. u zadatku 1.c), da je tad moguće konstruirati samo jedan trokut, jer bi drugi trokuti imali drugačije mjere kutova. | • Kako bi korak po korak konstruirao ovaj trokut?<br>• Je li moguće konstruirati drugačiji trokut koji ima sve tri stranice istih duljina ili čiji su svi kutovi istih mjera? |
| **Učenik ne objašnjava svoje tvrdnje.**<br>Na primjer: Učenik točno određuje može li se konstruirati jedan, nijedan ili više od jednog trokuta, ali ne daje obrazloženje svojih tvrdnji. | • Što ako netko ne vjeruje tvome odgovoru. Kako ih možeš uvjeriti da je odgovor točan? |
| **Učenik daje netočne razloge za tvrdnje.**<br>Na primjer: Učenik objašnjava da nije moguće utvrditi može li se konstruirati jedan, nijedan ili više trokuta, jer je zadano premalo informacija kako bi se to utvrdilo, tj. da nema informacije o duljinama svih stranica i mjerama svih kutova. | • Koliko najmanje informacija trebamo da bismo znali konstruirati trokut? |
| **Učenik se oslanja na samo jedan oblik zaključivanja.**<br>Na primjer: Učenik navodi da nikada neće biti moguće konstruirati više od jednog trokuta iz zadanih podataka jer bi drugi trokut imao drugačije duljine stranica i drugačije mjere kutova. | • Postoje li odluke koje treba donijeti prilikom konstrukcije nekih od zadanih trokuta?<br>• Bi li netko drugi nužno donio iste odluke? |
| **Učenik ne uspijeva primijeniti svojstva trokuta.**<br>Na primjer: Učenik skicira dva trokuta s mjerama iz zadatka 1.b) te dobiva trokute koji nisu jednakokračni. | • Koja svojstva ima jednakokračan trokut?<br>• Jesu li trokuti koje si skicirao jednakokračni?<br>• Možeš li skicirati dva različita jednakokračna trokuta sa stranicom duljine 8 cm i kutom od 58$^\circ$? |

Tablica 5: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 3.3. Gladna ovca

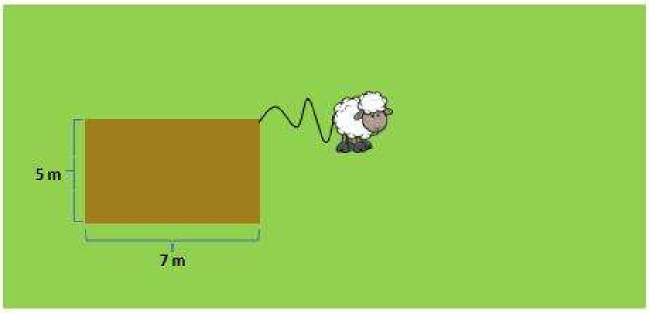
Cilj aktivnosti „Gladna ovca“ je pomoći učenicima primijeniti znanje o odnosu između površine i polumjera kruga. Pomoću ovih pitanja moguće je procijeniti koliko dobro učenici mogu:

- skicirati i konstruirati skup svih točaka koje uključuju lukove kružnice;
- izračunati površinu kruga s obzirom na njegov polumjer;
- izračunati polumjer kruga s obzirom na njegovu površinu.

Učitelj svakom učeniku treba podijeliti listić (Slika 7.). Tijekom rješavanja ove aktivnosti učenici ne bi trebali koristiti niti kalkulatore niti šestare. Prije nego učenici krenu s rješavanjem listića, učitelj bi trebao ukratko predstaviti zadatak i pomoći razredu u razumijevanju onoga što se od njih traži. Svojim sugestijama i pitanjima poput: „Možete li vidjeti što prikazuje dijagram? Morate odrediti do kuda ovca može doseći i zatim izračunati površinu na kojoj se nalazi trava koju može pojesti. Ako trebate više mjesta za računanje, to možete učiniti na poleđini listića.”; učitelj ih navodi na točne zaključke. Važno je da učenici na postavljena pitanja odgovaraju bez dodatne pomoći učitelja. Na taj način učenici imaju više vremena za samostalno promišljanje i stvaranje zaključaka.

**Gladna ovca**

Ovca je privezana za ugao pravokutne nastambe na velikom polju punom trave. Uže kojim je ovca privezana duljine je 4 m. Dimenzije nastambe možete vidjeti na slici ispod.




1. Označite koliku površinu trave bi ovca mogla pojesti. Skica ne mora biti precizna.

2. Izračunajte površinu trave koju ovca može pojesti. Obrazloži svoj odgovor.

________________________________________

________________________________________

_______________________________________.

3. Koja bi bila duljina užeta koja bi omogućila ovci da pojede 10 $m^2$ trave?

   Obrazloži svoj odgovor.

________________________________________

________________________________________

_______________________________________.

Slika 7: Listić za provođenje aktivnosti

Miskoncepcije koje se mogu pojaviti prilikom rješavanja prethodno navedene aktivnosti navedene su u tablici koja slijedi (Tablica 6.).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik ne skicira kružni isječak kao dio polja koji ovca može dosegnuti.**<br><br>Na primjer: Učenik crta kvadrat, pravokutnik ili trokut. | • Ako bi ovca bila privezana za stup, koliko bi daleko mogla ići u bilo kojem smjeru?<br>• Gdje bi ovca mogla hodati ako bi uže cijelo vrijeme bilo napeto?<br>• Koji oblik najbolje opisuje površinu trave koju ovca može dosegnuti? |
| **Učenik pogrešno skicira kružni isječak kao dio polja koji ovca može dosegnuti.**<br>Na primjer: Učenik crta kružni luk s radijusom većim od 4 m. | • Koliko je dugo uže na tvojem crtežu? |
| **Učenik zanemaruje ograničenja koja uzrokuje nastamba.**<br>Na primjer: Učenik izračunava površinu kruga polumjera 4 m. | • Koliki dio kruga sadrži travu? |
| **Učenik u izračun uključuje površinu cijele nastambe.**<br>Na primjer: Učenik izračunava površinu kruga čiji je polumjer 4 m i zatim oduzima površinu koju zauzima cijela nastamba. | • Možeš li objasniti zašto si oduzeo površinu cijele nastambe? |
| **Učenik ne uspijeva izračunati polumjer kruga ako je zadana površina kružnog isječka kao što se traži u trećem zadatku sa listića.**<br>Na primjer: Učenik izračunava površinu kruga polumjera 10 m, umjesto da računa polumjer dijela kruga na kojem ovca može dohvatiti 10 $m^2$ trave. | • Ponovno pažljivo pročitaj zadatak. Što se od tebe traži da izračunaš? |
| **Učenik koristi metodu koja nije učinkovita.**<br>Na primjer: Učenik koristi duži i kompliciraniji pristup prilikom rješavanja zadatka. | • Možeš li smisliti način na koji bi izračunao duljinu užeta na brži način?<br>• Koje si matematičke operacije koristio prilikom izračunavanja površine koju zauzima trava ako si znao duljinu užeta?<br>• Ako znaš kakvog je oblika površina na kojoj se nalazi trava koju ovca može dohvatit, možeš li korištenjem suprotnih operacija izračunati duljinu užeta? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno sa potpunim objašnjenjem.** | • Možeš li izračunati kolika bi bila duljina užeta koja bi ovci omogućila da pojede 50 $m^2$ trave? |

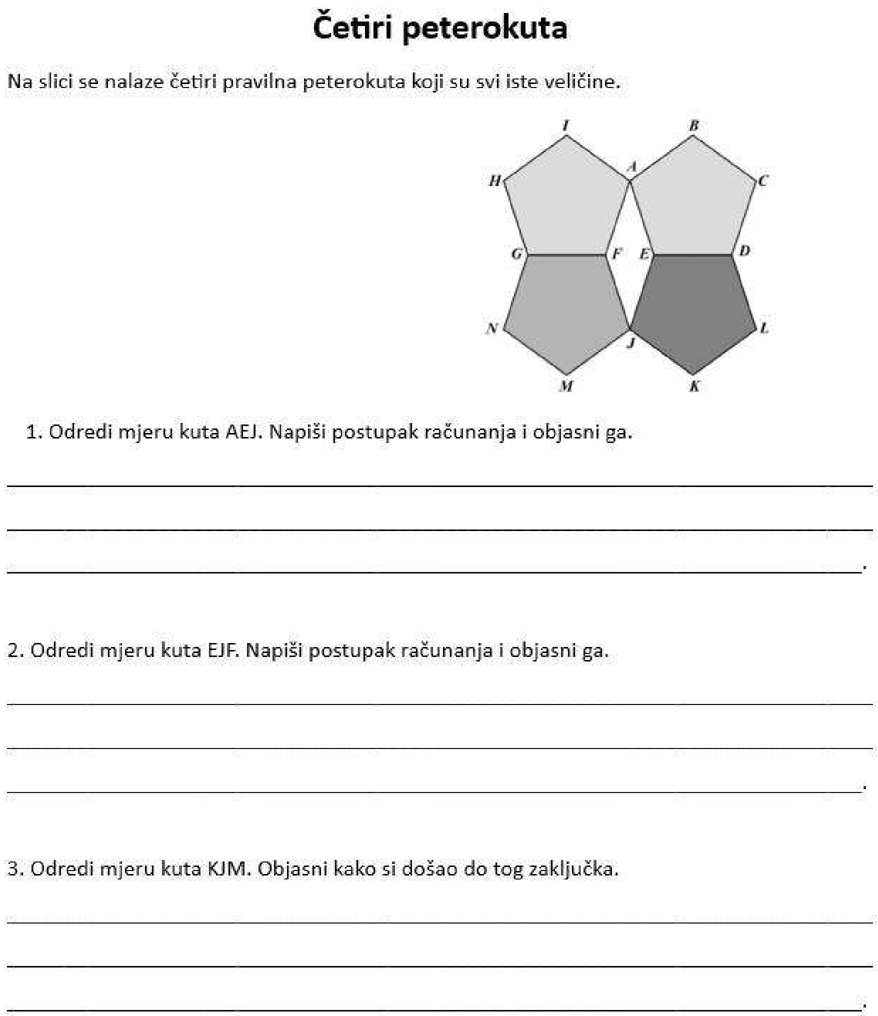
Tablica 6: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 3.4. Četiri peterokuta

Pomoću ove aktivnosti moguće je procijeniti koliko dobro učenici mogu riješiti navedene probleme koristeći geometrijska svojstva. Aktivnost „Četiri peterokuta" pomaže otkriti koliko dobro učenici mogu:

- rješavati probleme vezane uz korištenje mjera unutarnjih kutova mnogokuta;
- rješavati probleme vezane uz korištenje mjera vanjskih kutova mnogokuta.

Na samom početku provođenja ove aktivnosti s učenicima, učitelj treba podijeliti listić (Slika 8.) svakom učeniku, prilikom čega predstavlja zadatke i tako pomaže učenicima da razumiju što se od njih traži. Tijekom rješavanja listića, učenici bi trebali biti samostalni jer na taj način razvijaju svoje zaključivanje o danom problemu.



**Četiri peterokuta**

Na slici se nalaze četiri pravilna peterokuta koji su svi iste veličine.



1. Odredi mjeru kuta AEJ. Napiši postupak računanja i objasni ga.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________.

2. Odredi mjeru kuta EJF. Napiši postupak računanja i objasni ga.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________.

3. Odredi mjeru kuta KJM. Objasni kako si došao do tog zaključka.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________.

Slika 8: Listić za provođenje aktivnosti

Miskoncepcije koje se mogu pojaviti tijekom rješavanja aktivnosti „Četiri peterokuta“ navedene su u Tablici 7.

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik ima poteškoća uopće započeti rješavati zadatak ili odgovara djelomično na postavljeno pitanje.** | • Napiši ono što znaš o slici sa listića.<br>• Na koji način možeš iskoristiti te informacije?<br>• Što još možeš izračunati? |
| **Učenik radi pogreške u računanju.**<br>Na primjer:<br>• Učenik računa: „Kut EJF = 180°- 144°= 46°.“ | • Možeš li provjeriti točnost svoga rješenja? |
| **Učenik koristi netočnu formulu.**<br>Na primjer:<br>• Učenik koristi krivu formulu za izračunavanje unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta. | • Pronađi ispravnu formulu za izračunavanje unutarnjih kutova pravilnog peterokuta.<br>• Što označava n u toj formuli? |
| **Učenik djelomično točno rješava zadatak.**<br>Na primjer:<br>• Učenik izračunava da mjera svih unutarnjih kutova pravilnog peterokuta iznosi 540°, ali ne izračunava kolika je mjera jednog unutarnjeg kuta.<br>• Učenik uspijeva izračunati mjeru unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta, ali ne uspijeva izračunati mjeru kuta AEJ. | • Što još trebaš izračunati kako bi potpuno odgovorio na pitanje? |
| **Učenik se koristi netočnim pretpostavkama.**<br>Na primjer: Učenik tvrdi da su susjedni kutovi u četverokutu AFJE suplementarni, prije nego je utvrdio da je taj četverokut romb. | • Susjedni kutovi u paralelogramu/rombu su suplementarni. Kako znaš da je četverokut AFJE paralelogram/romb? |
| **Učenik daje oskudna objašnjenja.**<br>Na primjer: Učenik računa zadatak koristeći pravilo ili teorem, a ne navodi ga u objašnjenju. | • Kako znaš da je izračun točan?<br>• Kada bi netko čitao tvoje rješenje, da li bi mogao razumjeti zašto je to rješenje točno? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno i objašnjava sve pretpostavke.** | • Možeš li na neki drugačiji način riješiti zadatke sa listića? |

Tablica 7: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

# 4. Aktivnosti predviđene za 8. razred osnovne škole

## 4.1. Otkrivanje Pitagorina teorema

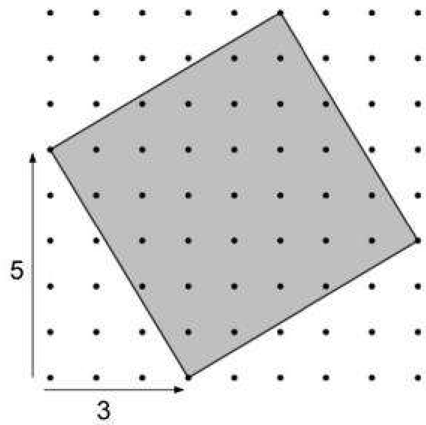
Ova aktivnost ima kao cilj pomoći procijeniti koliko dobro učenici mogu:

- pomoću površine pravokutnih trokuta odrediti površinu drugih oblika;
- koristi metodu disekcije za pronalaženje površine;
- sustavno prikupljati podatke potrebne za izračun;
- izvesti formulu za pronalaženje površine i duljina stranica pravokutnog trokuta (Pitagorin teorem).

Na samom početku provođenja aktivnosti, učitelj svakom učeniku dijeli listić (Slika 9.). Jedna od poteškoća s kojima bi se učenici mogli susresti je korištenje papira sa točkicama, tako da bi bilo dobro prije samog rješavanja listića dodatno pojasniti kako mjeriti duljine i površine na tom papiru. Svaki učenik treba imati ravnalo i olovku za rad. Učitelj daje upute za rad i govori učenicima da samostalno odgovaraju na pitanja i sve svoje zaključke objasne.

**Otkrivanje Pitagorina teorema**

Razmak između svih točkica na slici je jednak i iznosi jednu mjernu jedinicu. Kvadrat koji je prikazan na slici se može opisati i kao kvadrat „3 sa 5“. Prvi broj u takvom načinu opisa kvadrata predstavlja horizontalni nagib kvadrata kao što možeš vidjeti i na slici.

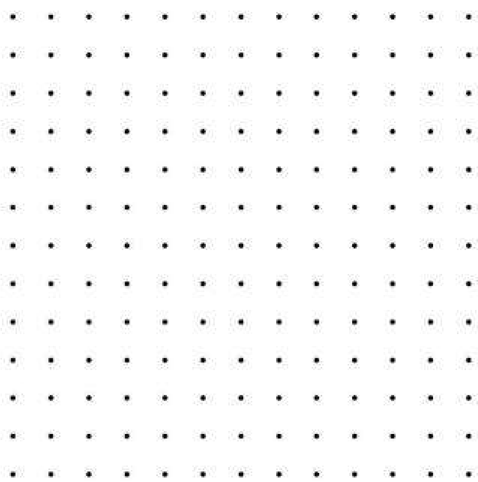



1. Izračunaj površinu kvadrata sa slike.
   Objasni kako si to izračunao.

______________________________________
______________________________________.

2. Skiciraj kvadrat „3 sa 7“. Izračunaj površinu tog kvadrata i objasni kako si to napravio.

______________________________________
______________________________________.



3. Skiciraj kvadrat „3 sa y". Izrazi površinu tog kvadrata u ovisnosti o y i objasni kako si došao do tog zaključka.

Slika 9: Listić za provođenje aktivnosti

Miskoncepcije koje se mogu pojaviti u razumijevanju navedene aktivnosti su u idućoj tablici (Tablica 8.) uz dodatna pitanja kojima se učenik može potaknuti na razmišljanje.

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
| --- | --- |
| **Učenik procjenjuje površinu kvadrata u prvom ili drugom zadatku s listića.**<br>Na primjer:<br>• Učenik dobivenu sliku sa točkicama dijeli na kvadrate i pokušava ih prebrojati.<br>• Učenik mjeri ravnalom duljinu stranice kvadrata.<br>• Učenik zaključuje sa postoji kvadrat „4 sa 4" u središtu osjenčanog kvadrata i površini tog kvadrata dodaje procijenjenu površinu četiri trokuta koji skupa sa četverokutom „4 sa 4" čini osjenčani kvadrat. | • Misliš li da će tvoja metoda dati točan odgovor? Zašto?<br>• Možeš li se sjetiti metode koja bi ti dala precizniji odgovor?<br>• Možeš li izračunati površinu kvadrata bez brojanja kvadratića?<br>• Točkice su međusobno udaljene za jednu mjernu jedinicu. Možeš li pronaći površinu kvadrata u kvadratnim jedinicama? |
| **Učenik rastavlja kvadrat na manje oblike (npr. trokute), ali ga to ne dovodi do točnog rješenja.** | • Možeš li podijeliti kvadrat na trokute kojima znaš duljinu visine i osnovice?<br>• Možeš li pronaći neku metodu izračuna u kojoj ne bi trebao kvadrat dijeliti na manje oblike? |
| **Učenik koristi Pitagorin teorem kako bi izračunao traženu površinu.** | • Možeš li pronaći neki drugi način za izračunavanje površine danog kvadrata, a da ne koristiš Pitagorin teorem? |

| | |
|---|---|
| **Učenik ima poteškoća pri računanju s varijablom u trećem zadatku s listića.**<br>Na primjer: Učenik samostalno zadaje vrijednost za varijablu y, npr. y=9. | • Y može biti bilo koja vrijednost. Provjeri da površina koju si izrazio odgovara za svaki y.<br>• Koje su bile vrijednosti varijable y u prvom i drugom zadatku?<br>• Kolika bi bila površina da je y=10 ili y=100? Provjeri da li površina koju si izrazio odgovara i nekoj drugoj vrijednosti varijable y. |
| **Učenik ima poteškoća s algebarskim zapisom u trećem zadatku s listića.** | • Možeš li koristiti metodu za izračun površine koju si koristio u prvom zadatku? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno i objašnjava svoje zaključke.** | • Možeš li načiniti neke drugačije oblike crtanjem kvadrata „x sa y“ u točkastoj mreži?<br>• Koje oblike je nemoguće načiniti? Možeš li to nekako pokazati? |

Tablica 8: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 4.2. Pronalaženje najkraćeg puta

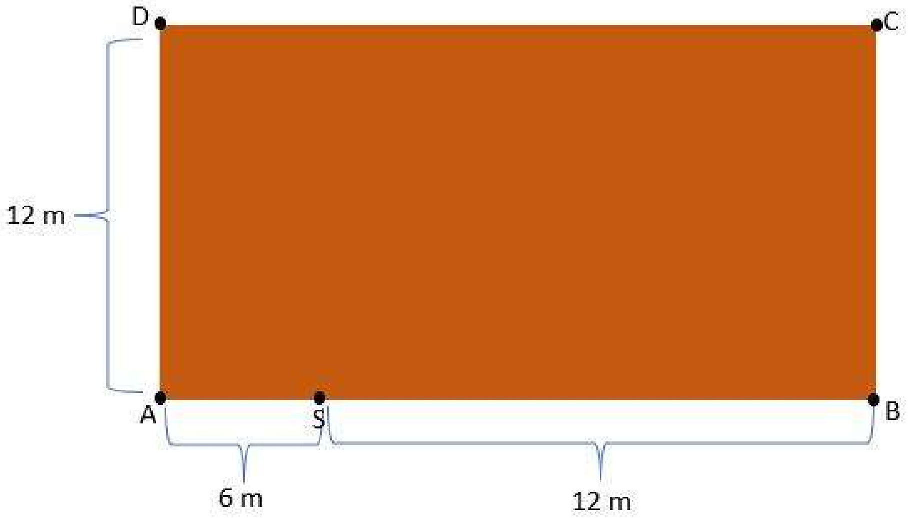
Aktivnost „Pronalaženje najkraćeg puta“ ima za cilj pomoći učenicima:

- odrediti odgovarajuću metodu za rješavanje problema;
- usporediti i vrednovati različite metode rješavanja i zaključiti koja je od tih metoda prikladnija za rješavanje problema;
- primjeniti Pitagorin teorem u svakodnevnim problemima.

Na početku provođenja ove aktivnosti, učitelj učenicima dijeli listiće (Slika 10.). Kroz razgovor sa učenicima, učitelj dodatno pojašnjava problem sa listića. Učitelj može upitati učenike: „Koje ste sve igre igrali na školskom dvorištu? U ovom zadatku su djeca izmislila vlastitu igru u kojoj se počinju kretati iz točke S. Oni moraju dodirnuti svaki zid i vratiti se tamo odakle su došli. Svako dijete želi pretrčati što kraću udaljenost kako bi pobijedio u ovoj igri. Tvoj je zadatak pronaći taj najkraći put. Pažljivo pročitaj pitanja i pokušaj na njih odgovoriti što preciznije. Objašnjenja zadataka zapiši jasno i razumljivo.” Poželjno je da učenici samostalno odgovaraju na pitanja i da im učitelj nimalo ili minimalno pomaže.

## Pronalaženje najkraćeg puta

U školskoj dvorani pravokutnog oblika učenici igraju igru koju su sami osmislili. Dvorana koja je zapravo pravokutnik ABCD je dugačka 18m i široka 12m.




Igra počinje iz točke S koja je 6 m udaljena od vrha A kao na slici. Učenici trčeći moraju dodirnuti preostala tri zida u dvorani i u što kraćem vremenu se vratiti u početnu točku S. Prva osoba koja se vrati je pobjednik.

Koji je najkraći put? Objasni kako si to zaključio?

______________________________________________________________________

_____________________________________________________________________.

Slika 10: Listić za provođenje aktivnosti

Mnoge krive ideje i pretpostavke mogu se pojaviti prilikom rješavanja zadatka sa prethodno prikazanog listića. U idućoj tablici (Tablica 9.) su navedene upravo te zablude i pitanja koja učitelj može postaviti učenicima kako bi ih potaknuo na promišljanje.

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik ima pogrešne pretpostavke.**<br>Na primjer: Učenik smatra da put kojim treba trčati igraču ne dopušta da dotakne svaki zid ili da se igrač ne vraća u početnu točku S. | • Ponovno pročitaj zadatak. Koja su pravila igre? |
| **Učenik odabire rješenje koje zadovoljava uvjete iz zadatka, ali nije najoptimalnije.**<br>Na primjer: Učenik odgovara da je najkraći put opseg pravokutnika. | • Možeš li nekako provjeriti da li je to najkraći put? |
| **Učenik mjeri udaljenosti kako bi dobio približnu vrijednost.**<br>Na primjer: Učenik koristi koordinatnu mrežu ili neka druga pomagala kako bi procijenio duljinu jednog ili više mogućih putova. | • Mjerenje je za početak dobar pristup. Možeš li pronaći neki drugi način pomoću kojeg bi mogao preciznije izračunati duljinu puta? |
| **Učenik ne potkrepljuje rezultat/račun postupkom.**<br>Na primjer: Učenik ima netočne zaključke o tome koja je ruta najkraća jer nije izračunao duljine putova. | • Kako možeš izračunati duljinu svakog puta?<br>• Možeš li se koristiti nekim matematičkim pravilima kako bi pronašao najkraći put? |
| **Učenik stvara netočne pretpostavke.**<br>Na primjer:<br>• Učenik pretpostavlja da je put u obliku trokuta kraći od puta u obliku četverokuta jer sadrži stranicu manje.<br>• Učenik pretpostavlja da je trokut SCX ( gdje se točka X nalazi $\overline{AD}$ i 6 m je udaljena od točke A) jednakokračan. | • Možeš li mi pokazati put u obliku trokuta i u obliku četverokuta? Kakve su duljine stranica tog trokuta s obzirom na duljine stranica tog četverokuta?<br>• Kakve su duljine dužina $\overline{XC}$ i $\overline{CS}$ ? Što ti to govori o trokutu SCX? |
| **Učenik ne koristi ravne putove.**<br>Na primjer: Učenik crta vijugave putove. | • Što bi se dogodilo da zamijeniš ovu krivulju pravcem ili dužinom? Bi li put bio duži ili kraći? Zašto? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno i objašnjava sve pretpostavke.** | • Kako možeš biti siguran da je tvoje rješenje najkraći mogući put?<br>• Što bi se dogodilo da je točka S smještena negdje drugdje?<br>• Što bi se dogodilo da je dvorana drugačije veličine i oblika? |

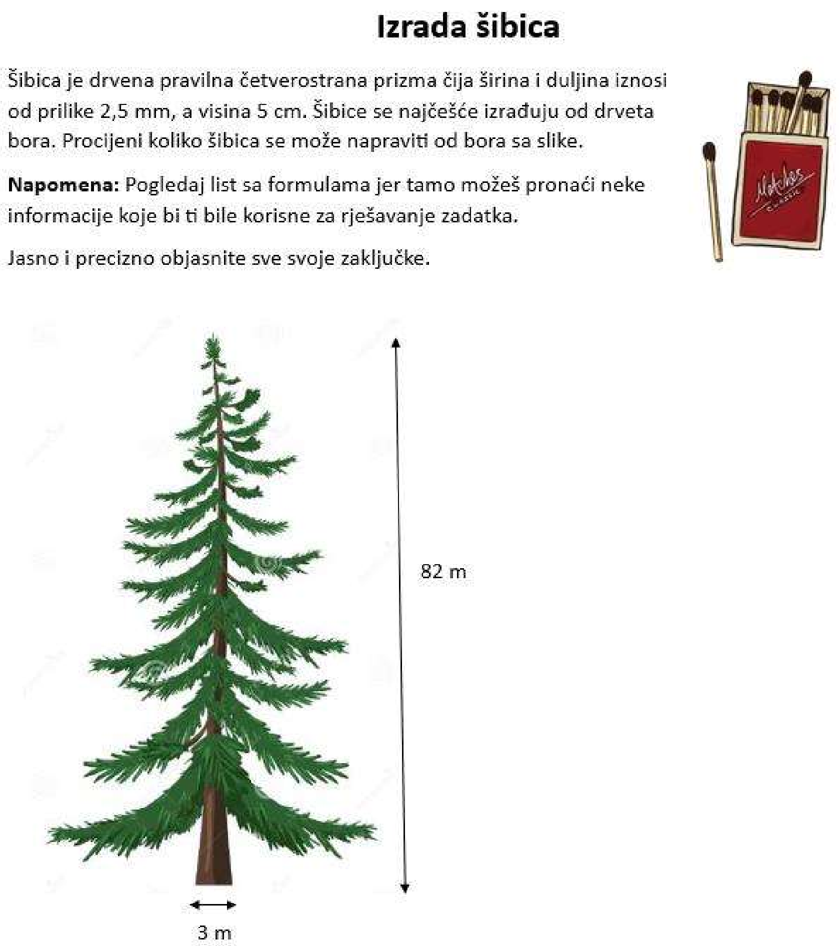
Tablica 9: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 4.3. Izrada šibica

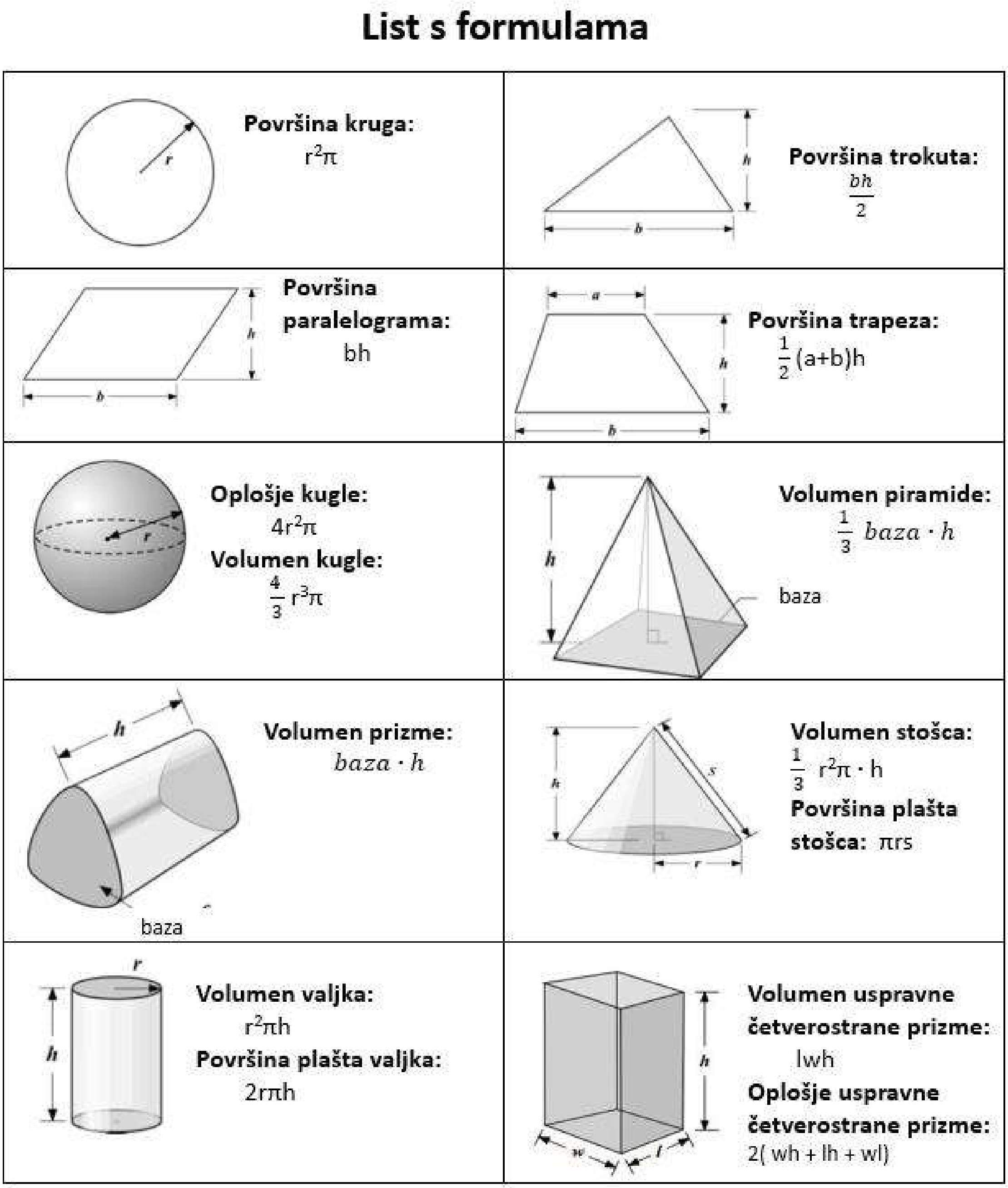
Daljnja aktivnost ima za cilj pomoći utvrditi učitelju koliko dobro učenici mogu:

- interpretirati situaciju i varijable staviti u matematički kontekst;
- odrediti odgovarajuće metametičke metode za rješevanje problema;
- interpretirati i vrednovati dane i izračunate podatke;
- jasno i precizno obrazložiti svoje obrazloženje.

Na samom početku provođenja aktivnosti „Izrada šibica“, učitelj svakom učeniku daje listić sa zadatkom (Slika 11.) i prazan papir na kojem će pisati svoja rješenja i objašnjenja. Uz to pridodaje i list (Slika 12.) na kojem se nalaze formule kojima se učenik smije koristiti tijekom rješavanja zadatka. Prije nego učenici krenu s rješavanjem zadatka, učitelj bi im trebao dati kratke upute: „U ovom zadatku trebate izračunati koliko se šibica može izraditi od drveta sa slike. Dobili ste list sa formulama kojima se možete koristiti tijekom rješavanja ovog zadatka. Pažljivo pročitajte zadatak i ono što se traži od vas, te svoja razmišljanja i zaključke obrazložite precizno i jasno.“ Važno je da učenici samostalno rješavaju zadatak sa nimalo ili vrlo malo pomoći učitelja.




Slika 11: Listić za provođenje aktivnosti




Slika 12: List s formulama

Provođenjem aktivnosti „Izrada šibica“ mogu se otkriti pogrešna razmišljanja tj. miskoncepcije učenika. Te miskoncepcije kao i pogodna pitanja kojima bi učitelj mogao utjecati na promišljanje učenika o pogrešnim idejama nalaze se u idućoj tablici (Tablica 10.).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik ima poteškoća započeti rješavati zadatak.** | • Koje podatke možeš iščitati iz zadatka? Što trebaš izračunati u zadatku?<br>• Kako bi mogao pojednostaviti dani problem? |
| **Učenik zanemaruje mjerne jedinice.**<br>Na primjer: Učenik izračunava volumen šibice u kubnim milimetrima, a volumen debla u kubnim metrima. | • Koje mjerne jedinice su zadane u zadatku?<br>• Smatraš li da je tvoje rješenje smisleno s obzirom na mjerne jedinice iz zadatka? |
| **Učenik ima pogrešne pretpostavke.**<br>Na primjer: Učenik množi volumen debla u kubičnim metrima s 1000 i pretpostavlja da će dobiti volumen debla u kubičnim milimetrima. | • Možeš li objasniti zašto si pomnožio s 1000?<br>• Možeš li opisati dimenziju drveta u milimetrima? Što primjećuješ? |
| **Učenik se koristi formulama koje nisu pogodne za rješavanje problema .**<br>Na primjer: Učenik izračunava oplošje uspravne četverostrane prizme uz pomoć dimenzija sa slike. | • Razmisli obuhvaća li vrijednost koju si izračunao čitavo deblo?<br>• Jesi li siguran da je to najbolja formula za izračun?<br>• Koja je razlika između oplošja i volumena? |
| **Učenik radi nesustavno.** | • Da li bi tvoj prijatelj iz razreda mogao iz tvojih zapisanih objašnjenja shvatiti tvoj pristup problemu?<br>• Možeš li objasniti svoje rješenje korak po korak? |
| **Učenik daje štura objašnjenja.**<br>Na primjer: Učenik označava rješenje koje smatra točnim, ali ne objašnjava zašto. | • Možeš li objasniti svoje rješenje korak po korak?<br>• Što predstavlja svaki rezultat koji si izračunao?<br>• Možeš li objasniti zašto si izabrao baš to rješenje? |
| **Učenik ima poteškoća prilikom izračunavanja vrijednosti iz formula.**<br>Na primjer:<br>• Učenik prilikom izračunavanja volumena stožaca ili valjaka množi radijus s 2, umjesto da kvadrira vrijednost radijusa.<br>• Učenik umjesto vrijednosti radijusa u formulu uvrštava vrijednost promjera. | • Koja je razlika između $2r$ i $r^2$?<br>• Kako možeš provjeriti rješenje s obzirom na informacije koje su dane u zadatku? |
| **Učenik djelomično rješava zadatak.**<br>Na primjer: Učenik ne dijeli volumen drveta s volumenom šibice. | • Što predstavlja rezultat koji si dobio?<br>• Jesi li uspio izračunati koliko se šibica može dobiti od drveta sa slike? |
| **Učenik zaokružuje rezultat na jednu ili dvije decimale.** | • Razmisli da li zaokruživanje rezultata utječe na smanjenje volumena šibice? |
| **Učenik odgovara točno i objašnjava sve zaključke.** | • Kako možeš provjeriti da si dobio točan rezultat?<br>• Možeš li koristiti neki drugačiji pristup kako bi riješio zadatak? |

Tablica 10: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 4.4. Preslikavanje trokuta

Cilj aktivnosti „Preslikavanje trokuta“ je pomoći učiteljima procijeniti koliko dobro učenici mogu:

- prepoznati i vizualizirati preslikavanja geometrijskih likova;
- translatirati, rotirati ili preslikavati geometrijske likove osnom simetrijom.

Učitelj bi trebao svakom učeniku podijeliti listić (Slika 13.) za provođenje ove aktivnosti i dati upute za rješavanje: "Pročitajte pitanja, na njih odgovorite što preciznije i tamo gdje se traži obrazložite svoje odgovore." Učenici bi trebali samostalno rješavati ovaj zadatak, tj. bez pomoći svojih prijatelja iz razreda ili samog učitelja.

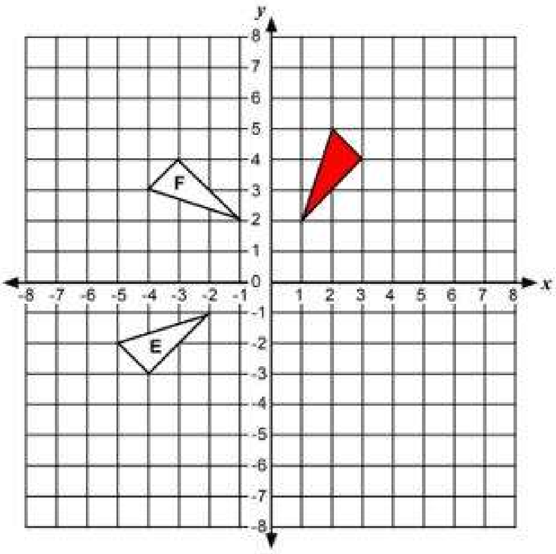
**Preslikavanje trokuta**

**1.** Nacrtaj trokut koji nastaje:

**a)** translacijom crvenog trokuta za -7 jedinica vodoravno i 1 jedinicu okomito. Oboji taj trokut zelenom bojom i označi ga s A.

**b)** osnom simetrijom crvenog trokuta s obzirom na x-os. Oboji taj trokut žutom bojom i označi ga s B.

**c)** rotacijom crvenog trokuta oko ishodišta koordinatnog sustava za 90° u smjeru kazaljke na satu. Oboji taj trokut plavom bojom i označi ga s C.




**d)** osnom simetrijom crvenog trokuta s obzirom na pravac y =x. Oboji taj trokut narančastom bojom i označi ga s D.

**2.**a) Opiši postupak kojim se crveni trokut preslikao u trokut E.

________________________________________

________________________________________

_______________________________________.

b) Opiši postupak kojim se crveni trokut preslikao u trokut F.

________________________________________

________________________________________

_______________________________________.

Slika 13: Listić za provođenje aktivnosti

Miskoncepcije koje se mogu pojaviti prilikom rješavanja prethodno navedenog listića i pitanja za promišljanje nalaze se u idućoj tablici (Tablica 11.).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik brka pojmove okomito i vodoravno.** Na primjer: Učenik u 1.a) zadatku translatira trokut za -7 jedinica okomito i za 1 jedinicu vodoravno. | • Pogledaj početak riječi horizontalno. Što bi predstavljala ta riječ? |
| **Učenik u 1.b) zadatku translatira umjesto preslika trokut osnom simetrijom.** Na primjer: Učenik translatira trokut za -7 jedinica vodoravno umjesto da preslika trokut osnom simetrijom. | • Kada bi stavio ogledao na x-os, kako bi izgledala reflektirana slika crvenog trokuta? |
| **Učenik brka pojmove „u smjeru kazaljke na satu“ i „u smjeru obrnutom od kazaljke na satu“.** Na primjer: Učenik u 1.c) zadatku rotira trokut u obrnutom smjeru od kazaljke na satu. | • U kojem smjeru se giba kazaljka na satu? |
| **Učenik zanemaruje centar rotacije i rotira trokut oko jednog njegovog vrha.** Na primjer: Učenik u 1.d) zadatku rotira trokut oko točke s koordinatama (1,2). | • Gdje se nalazi točka oko koje se rotira trokut?<br>• Označi točku oko koje se rotira crveni trokut i spoji ju s jednim vrhom tog trokuta. Gdje će se nalaziti nacrtana dužina nakon što rotiraš crveni trokut? |
| **Učenik se koristi kombinacijom preslikavanja koja nije najučinkovitija.** Na primjer: Učenik u 2.a) zadatku opisuje da je trokut E nastao iz crvenog trokuta osnom simetrijom s obzirom na y-os, zatim rotacijom za 90° u smjeru kazaljke na satu oko točke (-1,2) te translacijom za -1 jedinicu vodoravno i -3 jedinice okomito. | • Postoji li samo jedno preslikavanje kojim trokut E možemo dobiti iz crvenog trokuta? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno i objašnjava svoje zaključke.** | • Razmisli možeš li kombinacijom neka dva preslikavanja zamijeniti jedno preslikavanje? |

Tablica 11: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

# 5. Aktivnosti predviđene za srednju školu

## 5.1. Jednadžba kružnice

Pomoću ove aktivnosti nastavnici mogu utvrditi koliko dobro učenici mogu:

- izvesti jednadžbu kružnice korsiteći se Pitagorinim teoremom;
- pomoću danim informacija o kružnici izvesti jednadžbu kružnice i obrnuto.

Učitelj bi svakom učeniku trebao podijeliti listić (Slika 14.) sa zadacima te uputiti učenike da pažljivo pročitaju tekst zadatka i napišu objašnjenja svojih tvrdnji. Učenici bi trebali samostalno rješavati zadatke tj. bez pomoći učitelja ili drugih učenika iz razreda. Na taj način su primorani promisliti o danom problemu i svoje zaključke zapisati na papir.

**Jednadžba kružnice**

Ako smatraš da je potrebno, prazan prostor na papiru možeš iskoristiti za svoje skice.

1. Krajnje točke promjera kružnice su (6,0) i (-6,0).

a) Koje su koordinate središta kružnice?

b) Kako glasi jednadžba te kružnice? Objasni svoj odgovor.

c) Točka koja se nalazi na toj kružnici ima koordinate (2, m).
Koje vrijednosti može poprimiti varijabla m?
Objasni kako si to zaključio?

2. Druga kružnica ima središte s koordinatama (-5, 1) i polumjerom duljine $\sqrt{14}$. Kako glasi jednadžba te kružnice? Objasni svoj odgovor.

Slika 14: Listić za provođenje aktivnosti

Prilikom rješavanja prethodnog listića, učenici mogu imati krive ideje i pretpostave koje ih mogu navesti na pogrešno rješavanje zadatka. Da bi se to svelo na minimum, u idućoj tablici (Tablica 12.) su navedene pogrešne ideje koje učenici mogu imati prilikom rješavanja navedenih problema i pogodna pitanja kojima bi učitelj mogao navesti učenike na ispravan način razmišljanja.

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik iskazuje netočne koordinate središta kružnice.**<br>Na primjer: Učenik u 1.a) zadatku tvrdi da su koordinate središta kružnice (6,6). | • U koordinatnoj mreži označi krajnje točke promjera kružnice i skiciraj tu kružnicu. Koje koordinate ima središte te kružnice? |
| **Učenik iskazuje pogrešnu jednadžbu kružnice ili ne odgovara na pitanje.**<br>Na primjer: Učenik u 1.b) zadatku tvrdi da je jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 6$. | • Što trebaš napraviti u ovom zadatku?<br>• Koje informacije o kružnici već znaš?<br>• Možeš li nekako iskoristiti poznate podatke kako bi provjerio da li je jednadžba kružnice točna? |
| **Učenik skicira kružnicu i tu skicu koristi kako bi odredio koordinate točke na kružnici kao na primjer u 1.c) zadatku.** | • Možeš li provjeriti jesu li dobivene vrijednosti točne? |
| **Učenik u 1.c) zadatku točno iskazuje samo jednu vrijednost varijable m.** | • Možeš li izračunati koliko iznosi druga vrijednost za varijablu m? |
| **Učenik pogrešno koristi Pitagorin teorem kako bi izrazio jednadžbu kružnice.**<br>Na primjer: Učenik u drugom zadatku tvrdi da je jednadžba kružnice $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 14$. | • Kako možeš provjeriti da je jednadžba kružnice točna?<br>• Skiciraj kružnicu. |
| **Učenik daje oskudna objašnjenja.** | • Kada bi netko čitao tvoje rješenje, da li bi mogao razumjeti zašto je to rješenje točno? |
| **Učenik na sva pitanja odgovara točno i objašnjava sve pretpostavke.** | • Jednadžba kružnice glasi $(x-4)^2 + (y+2)^2 = p$, gdje je p cijeli broj. Odredi vrijednost za p tako da kružnica siječe os x, ali ne siječe od y. |

Tablica 12: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

## 5.2. Duljina i površina

Ova aktivnost pomaže procijeniti nastavnicima koliko dobro učenici:

- razumiju pojmove duljine i površine;
- koriste svojstva površine kako bi dokazali jesu li ili nisu dvije površine jednake;
- konstruiraju vlastite primjere i protuprimjere kako bi dokazali ili opovrgnuli izjave.

Na početku sata nastavnik svakom učeniku dijeli listić (Slika 15.) sa zadacima i daje upute za rješavanje.

### Duljina i površina

1. Marija tvrdi iduće:

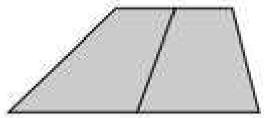
**Ako nacrtaš dva lika, lik s većom površinom će imati i veći opseg.**

Objasni da li Marijina izjava uvijek, ponekad ili nikada ne vrijedi.

2. Sara tvrdi iduće:

**Ako spojiš polovišta suprotnih stranica trapeza,**

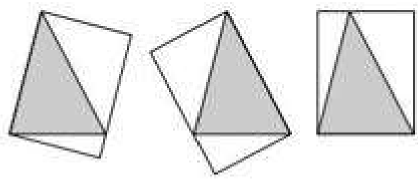
**ta dužina dijeli trapez na dva jednaka dijela.**



Objasni da li Sarina izjava uvijek, ponekad ili nikada ne vrijedi.

3. Antonio tvrdi iduće:

**Postoje tri različita načina na koja možeš nacrtati pravokutnik oko trokuta, tako da se vrhovi trokuta nalaze na stranicama ili vrhovima pravokutnika i jedna stranica im je zajednička. Površine svih tih pravokutnika su jednake.**



Objasni da li Antonijeva izjava uvijek, ponekad ili nikada ne vrijedi.

Slika 15: Listić za provođenje aktivnosti

Pogrešne ideje i metode koje učenici mogu imati prilikom rješavanja prethodno navedenog listića kao i pogodna pitanja koja bi učenike navodila na promišljanje navedena su u idućoj tablici (Tablica 13.).

| Uobičajeni problemi: | Pitanja za promišljanje: |
|---|---|
| **Učenik ima krive pretpostavke.**<br>Na primjer:<br>• Učenik u prvom zadatku pretpostavlja da lik koji ima veću površinu ima i veći opseg.<br>• Učenik u drugom zadatku pretpostavlja da samo sukladni likovi imaju jednaku površinu. | • Moraju li likovi s većim opsegom imati i veću površinu? Možeš li to dokazati?<br>• Moraju li likovi biti sukladni kako bi imali jednaku površinu? |
| **Učenik ne uzima u obzir specifične slučajeve.**<br>Na primjer: Učenik ne konstruira likove s različitim dimenzijama kako bi dokazao ili opovrgnuo tvrdnju. | • Možeš li nacrtati neki drugi lik za koji izjava ne vrijedi? |
| **Učenik uzima u obzir premalo različitih primjera.**<br>Na primjer:<br>• Učenik smatra da je dovoljan jedan primjer kako bi se dokazala pretpostavka.<br>• Učenik ne uzima u obzir specifične slučajeve. | • Možeš li pronaći neki drugi primjer kako bi dokazao točnost tvrdnje?<br>• Kako znaš da je tvrdnja točna za sve slučajeve? |
| **Učenik u drugom i trećem zadatku ne uspijeva konstruirati spojnice.** | • Možeš li podijeliti lik na manje dijelove kako bi lakše utvrdio točnost izjave?<br>• Možeš li nacrtati neke spojnice kako bi lakše uočio je li tvrdnja točna? |
| **Učenik ne uspijeva primijeniti algebarske zakonitosti.**<br>Na primjer: Učenik u drugom i trećem zadatku ne uočava važnost formula za površinu trapeza ili trokuta. | • Možeš li koristiti formulu za izračunavanje površine trapeza/trokuta kako bi dokazao svoju tvrdnju? |

Tablica 13: Uobičajeni problemi i pitanja za promišljanje

# Zaključak

Navedene aktivnosti u ovome diplomskom radu potiču učenike da razvijaju svoje razmišljanje i na taj način usvajuaju vještine koje pruža matematika. Veliki faktor pri učeničkom usvajanju tih vještina je dakako učitelj tj. nastavnik koji svojim pitanjima i potpitanjima upravlja razvojem kognitvnog razmišljanja. Pitanja i potpitanja kojima učitelj omogučuje da učenici sami promišljaju o problemu pozitivnija su od onih koja učenicima ne daju potrebno vrijeme za razmišljanje i samostalno dolaženje do rješenja. Pomoću zanimljivih aktivnosti i adekvatnih uputstava nastavnika učenici na interesantan i produktivan način mogu usvojiti predviđeni sadržaj i vještine. Učenicima je tada matematika puno zanimljivija te ih se puno lakše može motivirati i zainteresirati za rad. Takav pristup učenju matematike pruža učenicima da usvoje vještine i način razmišljanja koji je opisan u navedenom modelu. Navedene miskoncepcije vezane za pojedine aktivnosti mogu pomoći učiteljima da unaprijed razmisle o mogućim zabludama učenika te na taj način budu spremni pozitivno utjecati na tijek učeničkog razmišljanja tijekom rješavanja zadataka. Svaki učenik ima svoj individualni pristup prilikom rješavanja problema pa su sve nabrojene mikskoncepcije za određenu aktivnost dobra smjernica učiteljima kako bi svakom učeniku bez obzira na njegov način razmišljanja pomogli u dolaženju do točnog rješenja.

# Literatura


[1] University of California, Berkeley; Shell Center Team at the University of Nottingham, U.K. (2015) *The Mathematics Assessment Project (MAP).* , `https://www.map.mathshell.org/` (posjećeno: 12. srpnja 2023.)

[2] Schoenfeld, A. H. (2013) Classroom observations in theory and practice. *ZDM - international Journal on Mathematics Education.* 45, 607–621.

[3] Schoenfeld, A. H. (2014) What Makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher.* 43(8), 404–412.

[4] Schoenfeld, A.H. (2017) Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education.* 20, 415–432.

# Sažetak

U ovome radu bavilo se elementima pozitivnog okruženja za učenje opisanih u modelu koji se sastoji od pet dimenzija te aktivnostima koje su pogodne za formativnu procijenu znanja učenika kao i za dijagnostičko učenje na samom početku obrade nove teme. Pri navođenju svake aktivnosti opisane su miskoncepcije s kojima se učenici mogu susresti kao i pogodna pitanja koja bi učitelji tj. nastavnici mogli postaviti učenicima kako bi ih potaknuli na promišljanje o točnosti odgovora.



**Ključne riječi:** Aktivnosti, miskoncepcije, pogodna pitanja, geometrija, pet dimenzija močne učionice

# Title: Application of geometry in teaching mathematics and frequent misconceptions


## Summary

This Thesis is about elements of positive learning environment described through the model consisted of five dimensions and activities. Described activities are suitable for formative evaluation of students' knowledge, as well as for the diagnostic learning at the very beginning of a new topic. With each listed activity, there's description of misconceptions that students may encounter, along with suitable questions that teachers could ask students to encourage lead them to critical thinking about right solutions.



**Keywords:** Activities, misconceptions, convenient questions, geometry, the five dimensions of a powerful classroom

# Životopis

Rođena sam 2.4.1996. godine u Zagrebu. Paralelno sam pohađala IV. osnovnu školu i glazbenu osnovnu školu Vatroslava Lisinskog u Bjelovaru koje završavam 2011. godine. Nakon toga upisujem Prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Bjelovaru koju završavam 2015. godine. Tijekom svog srednjoškolskog obrazovanja shvaćam da mi je od svih predmeta najdraža matematika, a uz to se pojavila i želja za poučavanjem drugih, pa te iste godine upisujem Preddiplomski studij matematike (nastavnički smjer) na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Pri završetku preddiplomskog studija 2020. godine odlučujem se zaposliti u školi na radno mjesto učiteljice matematike i naučeno primjeniti u praksi. Nakon godinu dana rada u četiri različite osnovne škole, upisujem Diplomski nastavnički studij matematike i infromatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja bavila sam se raznim poslovima, a jedan od njih je bio držanje instrukcija iz matematike učenicima osnovne i srednje škole.