Omjeri udaljenosti u stablima

Zečević, Sanela

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:059852

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-27**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike,
smjer: Financijska matematika i statistika

Sanela Zečević

Omjeri udaljenosti u stablima

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike,
smjer: Financijska matematika i statistika

Sanela Zečević

Omjeri udaljenosti u stablima

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović Ergotić

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod

Teorija grafova je područje koje pripada diskretnoj i kombinatornoj matematici. Grafovi se već nekoliko stoljeća proučavaju s teorijskog aspekta, a u kontekstu primjena, najčešće se koriste za modeliranje sustava u kojima je poseban naglasak na vezama, odnosima među objektima. Tako se grafovi koriste u računalnim znanostima, inženjerstvu, u prirodoslovnim, ali i društvenim znanostima. Nije rijetkost da su problemi koje proučava teorija grafova dio naše svakodnevnice. Graf je matematički objekt koji se sastoji od vrhova i bridova koji povezuju neke ili sve parove vrhova. U ovom radu posvetit ćemo se specijalnoj vrsti grafova koje zovemo stablima te ćemo u njima proučavati udaljenosti između vrhova. Odredit ćemo ekstremne vrijednosti omjera specijalnih veličina pridruženih stablu: Wienerov indeks stabla ili suma svih udaljenosti među vrhovima stabla, udaljenost lista u stablu ili suma udaljenosti između lista i preostalih vrhova stabla te udaljenost centroidalnog vrha u stablu. Odmah nakon uvoda, navest ćemo definicije i osnovne tvrdnje iz teorije grafova koje su neophodne za razumijevanje glavnog dijela rada. U trećem poglavlju objasnit ćemo što je to centroid, a što centar grafa, a poglavlja koja slijede sadržavat će ključne rezultate o donjim ili gornjim granicama omjera raznih udaljenosti u stablu s n vrhova. Rezultati navedeni u ovome radu odnose se na veličine koje su i danas sastavni dio brojnih otvorenih problema iz teorije grafova.

2 Osnovni pojmovi teorije grafova

U ovom poglavlju ćemo definirati i objasniti osnovne pojmove iz teorije grafova koji su važni za razumijevanje glavnog dijela rada. Najprije ćemo definirati graf.

Definicija 2.1. *Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V(G)$ čiji su elementi vrhovi od G, skupa bridova $E(G)$ koji je disjunktan s $V(G)$ te funkcije incidencije ψ_G koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par vrhova od G.*

Kažemo da je vrh v incidentan s bridom e u G ako je v jedan kraj brida e. Za vrhove koji su krajevi istog brida kažemo da su susjedni. Ako su u grafu G dva vrha u i v spojena s više bridova, onda kažemo da postoji višestruki brid između u i v. Ako brid spaja vrh sa samim sobom, onda ga zovemo petljom. Graf je jednostavan ako ne sadrži višestruke bridove ni petlje. U ovome radu ćemo se baviti isključivo jednostavnim grafovima.

Definicija 2.2. *Stupanj vrha ili valencija vrha grafa G, u oznaci $d_G(v)$ je broj bridova u G incidentnih s v.*

Sada ćemo definirati šetnju i put kako bismo mogli definirati udaljenost.

Definicija 2.3. *Šetnja u grafu G je netrivijalan konačan niz $w = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i za sve i, $1 \leq i \leq k$.*

Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti zovemo staza, a šetnju u kojoj su različiti i bridovi i vrhovi zovemo put. Za šetnju kažemo da je zatvorena ako počinje i završava u istom vrhu. Zatvorena šetnja u kojoj su svi bridovi različiti te svi vrhovi (osim prvog i zadnjeg) različiti, zovemo ciklus. Duljina šetnje je broj bridova koji se u njoj pojavljuju. Dijametar grafa G, u oznaci diam(G), je najveća udaljenost među vrhovima grafa G, odnosno duljina puta najveće duljine u G.

U nastavku ćemo pisati o $(u, v)-$putu ako su krajevi tog puta vrhovi u i v.

Definicija 2.4. *Udaljenost $d_G(u, v)$ dvaju vrhova $u, v \in V(G)$ je duljina najkraćeg $(u, v)-$puta u G. Ako ne postoji takav put u G, onda je $d_G(u, v) = \infty$.*

Za dva vrha $v, u \in V(G)$ u grafu G kažemo da su povezana ako postoji $(u, v)-$ put u G.

Definicija 2.5. *Graf G je povezan ako $d_G(u, v) < \infty \; \forall u, v \in V(G)$. U suprotnom, kažemo da je graf G nepovezan.*

Ako je G nepovezan graf, onda se maksimalni povezani podgrafovi tog grafa zovu komponente povezanosti od G.

Definicija 2.6. *Graf H je podgraf od G ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$, a $\psi_H = \psi_{G|_{E(H)}}$. Pišemo $H \subseteq G$.*

Ako je $H \subseteq G$ i $H \neq G$ kažemo da je H pravi podgraf od G. Ako je H podgraf od G, onda kažemo da je G nadgraf od H.

Definicija 2.7. *Za graf H kažemo da razapinje G ili je razapinjujući podgraf od G ako $H \subseteq G$ i $V(H) = V(G)$.*

Podgraf grafa G nastao uklanjanjem vrha v označavamo s $G - v$. Analogno s $G - e$ označavamo podgraf grafa G nastao uklanjanjem brida e iz G.

Budući da je tema ovog rada vezana uz stabla, navest ćemo definiciju i neka svojstva stabla.

Definicija 2.8. *Aciklički graf ili šuma je graf koji ne sadrži cikluse. Stablo je povezan aciklički graf.*

S obzirom da se dvostruki brid zajedno sa svojim krajevima smatra ciklusom duljine dva, a petlja s vrhom koji joj je dvostruki kraj ciklusom duljine jedan, to je jasno da je šuma jednostavan graf. Korijensko stablo je stablo u kojem je jedan vrh istaknut kao početni i zove se korijen. Visina korijenskog stabla je broj bridova na putu od korijena do najudaljenijeg lista, gdje je list vrh stupnja jedan. Dubina nekog vrha u korijenskom stablu je broj bridova na putu od tog vrha do korijena. Jedno od ključnih svojstava stabla jest da su svaka dva njegova vrha povezana jedinstvenim putem, što znači da se uklanjanjem svakog vrha koji nije list stablo T razdvaja na najmanje dvije komponente povezanosti. Ostala svojstva stabla čitatelj može pogledati u [17]. Mi ih ovdje nećemo navoditi s obzirom da nisu ključna za razumijevanje glavnih rezultata.

Za tri ne nužno različita vrha p, q i r u stablu T kažemo da q separira p i r ako i samo ako q leži na $p - r$ putu u T, odnosno ako p i r leže u različitim komponentama povezanosti od $T - q$ (u tom slučaju su p, r i q međusobno različiti).

Definicija 2.9. *Razapinjujuće stablo grafa G je razapinjujući podgraf od G koji je stablo.*

3 Udaljenosti u grafu

S obzirom da se glavni rezultati ovoga rada odnose na udaljenosti vrhova u grafu, ovaj odjeljak ćemo u cijelosti posvetiti toj veličini.

Neka je G konačan jednostavan neusmjeren graf sa skupom vrhova $V(G)$ i skupom bridova $E(G)$. Za vrhove $u, v \in V(G)$ *udaljenost* $d(u,v)$ između vrhova u i v je broj bridova na najkraćem putu koji ih spaja. *Udaljenost* $\sigma(v)$ *vrha* $v \in V(G)$ (ili transmisija vrha v) je suma udaljenosti između vrha v i svih ostalih vrhova u G. *Udaljenost* $\sigma(G)$ *grafa* G (ili Wienerov indeks od G) definirana je na sljedeći način:

$$\sigma(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \sigma(v). \tag{1}$$

Udaljenost grafa se pod nazivom Wienerov indeks prvi put pojavila 1947. u znanstvenom radu iz kemije autora Harolda Wienera [18], i to pod nazivom Wienerov indeks. Korištena je pri određivanju aproksimacijske formule za točku vrelišta parafina. Kasnije se ova grafovska invarijanta pojavljivala u brojnim radovima i u različitim kontekstima [3, 12, 13, 14, 22]. Bez obzira na stotine radova o udaljenosti grafa, i dalje postoji velik broj neriješenih problema koji se odnose na tu veličinu pa je ona i dalje vrlo zanimljiva za istraživanje.

Osnovni rezultati o udaljenosti grafa su, poput pjesmice, poznati većini matematičara koji se bave teorijom grafova. U [5], a kasnije i u brojnim drugim radovima pokazano je da je udaljenost proizvoljnog stabla T_n s n vrhova najveća u putu P_n, a najmanja u zvijezdi S_n, odnosno vrijedi

$$(n-1)^2 = \sigma(S_n) \leq \sigma(T_n) \leq \sigma(P_n) = \binom{n+1}{3}. \tag{2}$$

Štoviše, gornja granica vrijedi i za sve povezane grafove s n vrhova.

Grafovska invarijanta, slična udaljenosti grafa G je prosječna udaljenost $\mu(G)$ grafa G, a od nje se razlikuje jedino u faktoru koji ovisi o n:

$$\mu(G) = \frac{\sigma(G)}{\binom{n}{2}}. \tag{3}$$

Upravo zato se te dvije veličine mogu ravnopravno koristiti u istraživanjima. O udaljenosti stabala se do sada puno toga otkrilo. Još je devedesetih godina dvadesetog stoljeća Winkler [21] pokazao da za svaki racionalan broj $r > 2$ postoji beskonačno mnogo stabala za koje je prosječna udaljenost između parova vrhova jednaka r. Također, Shi [16] je dokazao hipotezu prema kojoj za stablo T s $n \geq 2$ vrhova vrijedi $\mu(T) \cdot \sum_{v \in V(T)} 1/d(v) \geq n$, dok je Entringer s koautorima [7] razmatrao očekivanu vrijednost $\sigma(T)$ među svim stablima reda n koji pripadaju specijalnim familijama. Pokazao je da je uz određene pretpostavke očekivana vrijednost $\sigma(T)$ asimptotski jednaka $Q \cdot n^{5/2}$, za $n \to \infty$, gdje konstanta Q ovisi o familiji kojoj pripada T.

3.1 Centroid grafa

Maksimalno podstablo koje kao list sadrži vrh v stabla T zovemo *granom od T u v*. Težina grane B, koju ćemo označiti s $bw(B)$, je broj bridova u B. *Centroid* stabla T, u oznaci $C(T)$, je skup vrhova v od T za koje je najveća težina grane u v najmanja moguća. Slijedi karakterizacija centroida stabla koju je dao Jordan.

Teorem 3.1. *(Jordan [11]). Ako je $C = C(T)$ centroid stabla T s n vrhova, onda vrijedi jedan od sljedećih slučajeva:*
(i) $C =: \{c\}$ i $bw(c) \leq (n-1)/2$,
(ii) $C =: \{c_1, c_2\}$ i $bw(c_1) = bw(c_2) = n/2$.
U oba slučaja vrijedi da ako je $v \in V(T) \backslash C$, tada je $bw(v) > n/2$.

Dakle, centroid stabla je skup koji se sastoji ili od jednog vrha ili od dva vrha za koje je lako ustanoviti da su susjedni. U nastavku ćemo vrhove koji pripadaju centroidu zvati centroidalnim vrhovima. Zelinka je karakterizirao skup vrhova u stablu T koji imaju najmanju udaljenost upravo pomoću centroida.

Teorem 3.2. *(Zelinka [23]). Skup vrhova stabla T koji imaju najmanju udaljenost je centroid od T.*

Iz prethodna dva rezultata proizlazi sljedeća tvrdnja.

Korolar 3.3. *Vrh v u stablu T ima najmanju udaljenost (i prema tome je u $C(T)$) ako i samo ako je $bw(v) \leq n/2$.* □

S obzirom na sljedeće opažanje, Zelinkin teorem se može proširiti.

Lema 3.4. *(Entringer i ostali [5]). Pretpostavimo da su a i b vrhovi povezanog grafa G. Neka je A skup vrhova koji su bliže a nego b i neka je B skup vrhova koji su bliže b nego a. Tada je $\sigma(a) - \sigma(b) = |B| - |A| = |B'| - |A'|$, gdje je $A' = A - a$ i $B' = B - b$.*

Iz ovoga slijedi da ako je $v = v_1, v_2, \ldots, v_k = w$ proizvoljan put od centroidalnog vrha v do lista w, tada je

$$\sigma_T(v_1) \leq \sigma_T(v_2) < \ldots < \sigma_T(v_k), \tag{4}$$

pri čemu jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako vrhovi v_1 i v_2 čine centroid stabla T.

Gore navedeni rezultati ukazuju na važnost centroida i listova u razmatranjima udaljenosti. Posljedično tome, veze između $\sigma(T), \sigma_T(v)$ i $\sigma_T(w)$, gdje je T stablo, $v \in C(T)$, i w list u T, imaju vrlo važnu ulogu u proučavanju udaljenosti u stablima. Korištenje leme 3.4 omogućuje jednostavno računanje udaljenosti između vrhova stabla T: treba odabrati neki vrh r, izračunati $\sigma(r)$, a zatim primijeniti lemu 3.4 za uspješno računanje udaljenosti između susjednih vrhova duž svakog puta od r do lista u T. Canfield i koautori [2] predstavili su rekurziju za određivanje $\sigma(T)$ i napisali mnogobrojne radove koji uključuju primjenu $\sigma(T)$ u kemiji. Kasnije ćemo koristiti sljedeći rezultat.

Lema 3.5. *(Burns i Entringer [1]). Pretpostavimo da je $c \in C(T)$ i da v, w i c (dozvoljeno je $w = c$) tim redoslijedom leže na putu P u T. Nadalje, pretpostavimo da je B grana od T u vrhu v koja ne sadrži c i neka je u vrh u B koji je susjedan vrhu v. Označimo $T' := T - uv + uw$. Tada je $\sigma(T') < \sigma(T)$.*

U nastavku ćemo dokazati zanimljiv rezultat koji se odnosi na razapinjujuća stabla povezanog grafa G koja čuvaju udaljenost. Za razapinjujuće stablo T s korijenom r grafa G kažemo da čuva udaljenost s obzirom na G ako i samo ako $d_T(r, v) = d_G(r, v)$ za sve $v \in V(G)$.

Teorem 3.6. *Povezan graf G sadrži razapinjujuće stablo T koje čuva udaljenost s korijenom r tako da je r centroidalni vrh od T .*

Dokaz. Neka je $W := \{w \in V(G) | w$ težišni vrh razapinjujućeg stabla od $G\}$. Za $w \in W$ definiramo $T(w)$ kao skup razapinjujućih stabala od G kojima je vrh w centroidalni vrh. Definiramo $\rho(w) := \min_{T \in T(w)} \sigma_T(w)$ i biramo r tako da vrijedi $\rho(r) = \min_{w \in W} \rho(w)$. Konačno, neka je T razapinjujuće stablo grafa G za koje vrijedi $\sigma_T(r) = \rho(r)$. Jasno je da je r centroidalni vrh od T. Pretpostavimo da T nije razapinjujuće stablo koje čuva udaljenost s korijenom r, tj. T sadrži vrh u za koji vrijedi $d_G(r, u) < d_T(r, u)$. Neka je $r = r_1 r_2 \ldots r_k = u$ najkraći $(r, u)-$put u G i neka je i najmanji indeks za koji vrijedi $d_G(r, r_i) < d_T(r, r_i)$. Tada je $r_i r_{i-1}$ brid u G koji nije u T i $d_T(r, r_i) \geq d_T(r, r_{i-1}) + 2$. Neka je w susjedni vrh od r_i i nalazi se na $(r_i, r)-$putu u T. Označimo s m broj vrhova u u T separiranih od r s r_i (tj. uklanjanjem vrha r_i, vrh r se nalazi u komponenti povezanosti koja ne sadrži vrhove u). Definirajmo $T' := T - r_i w + r_i r_{i-1}$. Tada imamo

$$\sigma_{T'}(r) = \sigma_T(r) + m[1 + d_T(r, r_{i-1}) - d_T(r, r_i)] < \sigma_T(r).$$

Neka je r' centroidalni vrh od T'. Jasno je da $r' \in W$. Tada, koristeći Zelinkin teorem (teorem 3.2), imamo $\sigma_{T'}(r') \leq \sigma_{T'}(r) < \sigma_T(r)$, tj. $\rho(r') < \rho(r)$, što je u suprotnosti s definicijom od r. □

3.2 Centar grafa

Ekscentricitet vrha v povezanog grafa G definiran je na sljedeći način:

$$ecc_G(v) = \max_{w \in V(G)} d(v, w).$$

Centar od G je skup vrhova s najmanjim ekscentricitetom. Kao u slučaju centroida, centar grafa G može činiti ili samo jedan vrh (centralni vrh) ili par susjednih (centralnih) vrhova. Vrijedi rezultat analogan teoremu 3.6, samo umjesto centroidalnog vrha r uzimamo da je r centralni vrh. Da bismo to pokazali, pretpostavimo da je r centralni vrh od G i T razapinjujuće stablo od G u korijenu r koje čuva udaljenost. Za $v \in V(T)$ imamo

$$ecc_T(r) = ecc_G(r) \leq ecc_G(v) \leq ecc_T(v).$$

Stoga je r centralni vrh od T pa smo dokazali tvrdnju da povezan graf G sadrži razapinjujuće stablo T koje čuva udaljenost s korijenom r tako da je r centralni vrh od T.

Obratimo pažnju na ekstremna stabla iz nejednakosti (2). Primijetimo da je vrh v najvećeg stupnja u zvijezdi S_n ujedno i centroidalni vrh, vrijedi $\sigma(v) = n - 1$ te ne postoji stablo različito od S_n čiji centroidalni vrh ima manju udaljenost. Lako se pokaže da za centroidalni vrh v puta P_n vrijedi $\sigma(v) = \lfloor n^2/4 \rfloor$.

U nekim tvrdnjama koje slijede, a odnose se na grafove s ekstremnim svojstvima, pojavit će se dva specijalna stabla. Prvo se zove *komet* (eng. comet graph), u oznaci $B(n,r)$, a označava stablo s n vrhova koje se sastoji od puta P_r s $n-r$ vrhova stupnja jedan susjednih jednom listu tog puta. Drugo stablo je tzv. *bučica* (eng. dumbbell), u oznaci $D(n,a,b)$, koji se sastoji od puta P_{n-a-b} zajedno s a vrhova stupnja jedan koji su susjedi jednom listu tog puta, te b vrhova stupnja jedan koji su susjedi drugom listu puta.

Napomenimo i metodu kojom ćemo dokazivati da stabla koja su optimalna s obzirom na neki parametar imaju određenu strukturu. Najprije ćemo krenuti od pretpostavke da optimalno stablo nema takvu strukturu, a zatim ćemo provesti neke operacije kojima ćemo promatrani parametar povećati. U našem slučaju ćemo računati promjenu u udaljenosti stabla nakon izvršene operacije. Opći princip je sljedeći. Neka je ab brid stabla T, A i B su komponente povezanosti od $T - ab$ koje sadrže redom a i b, c je vrh u B te definiramo stablo $T' := T - ab + ac$. Tada vrijedi

$$\sigma(T) - \sigma(T') = \sum_{x\in A, y\in B} d_T(x,y) - \sum_{x\in A, y\in B} d_{T'}(x,y).$$

Primjerice, uzmimo da su u i v listovi koji pripadaju različitim granama stabla T u vrhu w i neka su obje grane putovi. Neka je u' vrh od T susjedan s u i definiramo stablo $T' := T - uu' + uv$. Tada je

$$\sigma(T') = \sigma(T) - [d_T(v,w) + 1 - d_T(u,w)][n - d_T(u,v) - 1].$$

Primijetimo da je suma udaljenosti od u do vrhova $(u,v)-$puta u T jednaka sumi udaljenosti od u do vrhova $(u,u')-$puta u T'.

Sada ćemo navesti primjer u kojemu "mičemo" više bridova. Pretpostavimo da je ab brid u stablu T, A i B su komponente povezanosti od $T - ab$ koje redom sadrže a i b te neka je S skup listova susjednih vrhu a, a različitih od b. Definirajmo stablo $T' := T - \{as|s \in S\} + \{bs|s \in S\}$. Tada je

$$\sigma(T') = \sigma(T) - |S||V(B)| + |S|(|V(A)| - |S|) = |S|(|V(A)| - |V(B)| - |S|).$$

Ova razmatranja vode do općenitijeg rezultata. Wiener [18] je pokazao da ako je T stablo, onda se $\sigma(T)$ može računati tako da se prvo izračuna težina $p(e)$ svakog brida e, a potom se sumiraju težine po svim bridovima. Težina svakog brida $e = uv$ je produkt broja vrhova koji su bliže u nego v i broja vrhova koji su bliže v nego u. Lako se može uočiti da je rezultatna suma $\sigma(T)$. Ovu formulu ćemo kasnije često koristiti te ćemo je iz tog razloga istaknuti u nastavku.

Lema 3.7. *(Wiener[18]). Za proizvoljno stablo T vrijedi $\sigma(T) = \sum_{e \in E(T)} p(e)$.*

Ovu formulu je ustanovio i Gutman zajedno s koautorima [9]. Tamo je težina $p(e)$ nazvana kao broj putova brida e jer je $p(e)$ zaista broj putova stabla koji sadrže brid e. Dana je analogna definicija za broj putova vrha v, tj. broj putova stabla koji sadrže v kao unutarnji vrh (vrh koji nije list), a time su se bavili Burns i Entriger [1].

U sljedećih pet poglavlja ćemo se baviti udaljenostima nekih specijalnih vrhova stabala, udaljenosti stabala te pronalaziti granice njihovih omjera.

4 Gornja granica za $\sigma_T(u)/\sigma_T(w)$, gdje su u i w listovi stabla T

Uočimo da se za list w stabla T ekstremne vrijednosti od $\sigma_T(w)$ pojavljuju ako je $T = S_n$ i $T = P_n$. Jer je $\sigma_{S_n}(w) = 2n - 3$ i $\sigma_{P_n}(w) = \binom{n}{2}$, omjer tih ekstremnih vrijednosti veći je od $n/4 + 1/8$. Međutim, ako dva lista pripadaju istom stablu koje sadrži $n \geq 22$ vrhova, onda je omjer njihovih udaljenosti najviše $(\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 1)/4$. To ćemo i dokazati.

Lema 4.1. *Za prirodan broj $n \geq 5$ definiramo prirodne brojeve $k \geq 1$ i s tako da $4n = k^2 + s$, $0 \leq s \leq 2k$. Jedinstven prirodan broj $r \geq 1$ u kojem funkcija*

$$f(r) := -1 + 2[(n-2)r + 2(n-1)]/[r^2 - 3r + 4(n-1)]$$

doseže maksimum dan je s

$$r = \begin{cases} \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor - 2, & 0 \leq s \leq k - 6, \\ \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor - 1, & k - 5 \leq s \leq 2k. \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz ove leme, kao i dokazi lema 5.1 i 7.1, bazira se na osnovnim računskim operacijama i razdvajanjima na slučajeve pa ćemo ga izostaviti. □

Teorem 4.2. *Ako su w i u listovi stabla T s $n \geq 2$ vrhova i ako su prirodni brojevi $k \geq 1$ i s definirani s $2n =: k^2 + s$, $0 \leq s \leq 2k$, onda vrijedi*

$$\frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(u)} \leq 2\frac{(n-2)r + 2(n-1)}{r^2 - 3r + 4(n-1)} - 1,$$

pri čemu je

$$r = \begin{cases} \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor - 2, & 0 \leq s \leq k - 6, \\ \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor - 1, & k - 5 \leq s \leq 2k. \end{cases}$$

Za $n \geq 5$ jednakost se postiže ako i samo ako je $T = B(n, r)$.

Dokaz. Neka su w (u) listovi od T s najvećom (najmanjom) udaljenosti, gdje je T odabrano između svih stabala s n vrhova tako da je omjer $\sigma(w)/\sigma(u)$ najveći. Možemo pretpostaviti da je $w \neq u$ i da je $n \geq 5$ (za stabla s $2, 3$ i 4 vrha tvrdnja se direktno dokaže). Neka je $u = u_0, u_1, \ldots, u_r = w$ put u T te primijetimo da je $2 \leq r \leq n - 1$.

Tvrdnja 1. Za $2 \leq i \leq r - 1$ vrijedi $d(u_i) = 2$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da za neki i, $2 \leq i \leq r - 1$ stablo T ima granu B u vrhu u_i koja ne sadrži u_{i-1} niti u_{i+1} i neka je x vrh u B susjedan vrhu u_i. Za stablo $T' := T - xu_i + xu_{i-1}$ vrijedi

$$\frac{\sigma_{T'}(w)}{\sigma_{T'}(u)} = \frac{\sigma_T(w) + bw(B)}{\sigma_T(u) - bw(B)} > \frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(u)},$$

što je nemoguće.

Tvrdnja 2. Svi vrhovi stabla T koji ne leže na $u-w$ putu susjedni su vrhu u_1.

Iz leme 3.4 i tvrdnje 1 slijedi

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \sigma(u_1)+n-2,\\ \sigma(u_2) &= \sigma(u_1)+n-2-2(r-2)=\sigma(u_1)+n-2r+2,\\ \sigma(u_3) &= \sigma(u_2)+n-2-2(r-3)=\sigma(u_1)+2n-4r+6\end{aligned}$$

i općenito, za $1\le i\le r$ imamo

$$\sigma(u_i)=\sigma(u_1)+(i-1)(n-2r)+i(i-1).$$

Dakle,

$$\sigma(w)=(r-1)(n-r)+\sigma(u_1)=(r-1)(n-r)+\sigma(u)-n+2.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{\sigma(w)}{\sigma(u)}=1+\frac{(r-1)(n-r)-n+2}{\sigma(u)}.$$

Za svaki fiksni r, $2\le r\le n-1$ ovaj omjer je najveći kada je $\sigma(u)$ najmanji, tj. kada su vrhovi x, koji nisu na $(u,w)-$putu najbliži vrhu u. Budući da je $d(u)=1$, to je $d(x,u)\ge 2$ pa je tvrdnja 2 dokazana.

Iz tvrdnje 2 slijedi da je $T=B(n,r)$ pa je $\sigma(u)=\binom{r+1}{2}+2(n-r-1)$ i

$$f(r):=\frac{\sigma(w)}{\sigma(u)}=1+2\frac{-r^2+(n+1)r-2(n-1)}{r^2-3r+4(n-1)}=-1+2\frac{(n-2)r+2(n-1)}{r^2-3r+4(n-1)}.$$

Primjenom leme 4.1 ovaj dokaz je gotov. □

Za $n=4$ stabla P_4 i S_4 su ekstremni grafovi u teoremu 4.2, ali s obzirom na lemu 4.1, ovo je jedini slučaj kada ekstremni graf nije jedinstven.

Ako je T stablo s $n\ge 2$ vrhova za koje je omjer $\sigma_T(w)/\sigma_T(u)$ najveći, osnovni račun pokazuje da je

$$\frac{1}{4}\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor-\frac{1}{8}\le f(\lfloor 2\sqrt{n}-2)\le\frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(u)}\le f(\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor-1)\le\frac{1}{4}\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor+\frac{1}{4}.$$

5 Granice za $\sigma_T(w)/\sigma_T(v)$, gdje je w list, a v centroidalni vrh stabla T

U nastavku ćemo pokazati kako je omjer udaljenosti lista i udaljenosti centroidalnog vrha stabla T s $n \geq 2$ vrhova najmanji u stablu koje se sastoji od puta P s $n-1$ vrhova zajedno s vrhom w koji je susjed vrhu $u \in V(P)$. Mogli bismo pomisliti da je $u \in C(P)$. Za $n \geq 4$ to je točno jedino u slučaju kada je n neparan. Ukoliko $n \geq 4$ i n paran, vrijedi $u \notin C(P)$, ali je u susjed centroidalnom vrhu puta P. Gornja granica promatranog omjera postiže se za $B(n, r)$, gdje je r približno $\sqrt{2n}$.

Lema 5.1. *Za prirodan broj $n \geq 3$ definiramo prirodne brojeve $k \geq 1$ i s tako da vrijedi $2n = k^2 + s$, $0 \leq s \leq 2k$. Jedinstveni prirodan broj $r \geq 1$ za koji funkcija*

$$f(r) := (2rn - r^2 - r)/(r^2 + 2n - 3r)$$

postiže maksimum dan je s

$$r = \begin{cases} \lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1, & 0 \leq s \leq k-4, \\ \lfloor\sqrt{2n}\rfloor, & k-3 \leq s \leq 2k. \end{cases}$$

Dokaz. Pogledati dokaz leme 4.1. □

Teorem 5.2. *Ako je T stablo s $n \geq 2$ vrhova, w list u T, $v \in C(T)$, a $k \geq 1$ i s definirani s $2n = k^2 + s$, $0 \leq s \leq 2k$, onda je*

$$1 + 4\frac{n-2}{n^2 - 2n + \epsilon} \leq \frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(v)} \leq \frac{2rn - r^2 - r}{r^2 + 2n - 3r},$$

pri čemu je ϵ jednak 8 ako je n paran i 5 ako je n neparan te vrijedi

$$r = \begin{cases} \lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1, & 0 \leq s \leq k-4, \\ \lfloor\sqrt{2n}\rfloor, & k-3 \leq s \leq 2k. \end{cases}$$

Za $n \geq 3$ donja granica se postiže ako i samo ako se T sastoji od puta $u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$ zajedno s vrhom w susjednim vrhu $u_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$. Gornja granica se postiže ako i samo ako je $T = B(n, r)$.

Dokaz. Tvrdnja se lako provjeri za $n = 2$, 3 i 4 pa pretpostavimo da je $n \geq 5$. Primijetimo da iz primjedbi koje proizlaze iz leme 3.4 zaključujemo $\sigma_T(w) > \sigma_T(v)$. Nadalje, ako je T stablo koje se sastoji od puta duljine $n-2$ zajedno s vrhom koji je susjedan centroidalnom vrhu od T, tada imamo

$$\frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(v)} = \frac{\sigma_T(v) + n - 2}{\sigma_T(v)} = 1 + \frac{n-2}{\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1} < 2. \tag{5}$$

Ovo vrijedi jer je udaljenost centroidalnog vrha u putu koji sadrži $n-1$ vrhova jednaka $\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$. Sada pretpostavimo da je T stablo s n vrhova koje sadrži list w i centroidalni vrh v, a za koji je omjer $\sigma_T(w)/\sigma_T(v)$ najmanji. Prema teoremu 3.1 možemo pretpostaviti da su v i w izabrani tako da je težina grane u v koja sadrži w najviše $(n-1)/2$. Kod dokazivanja tvrdnji 2 i 3 (a i kod maksimizacijskog problema 5), iz stabla T konstruirat ćemo stablo T' s n vrhova, s listom w i s $v \in C(T')$ tako da za neke $m > 0 (< 0)$ vrijedi

$$\frac{\sigma_{T'}(w)}{\sigma_{T'}(v)} = \frac{\sigma_T(w) + m}{\sigma_T(v) + m}.$$

No,

$$\frac{\sigma_T(w) + m}{\sigma_T(v) + m} < (>) \frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(v)},$$

a to je nemoguće. Stoga, da bismo dobili kontradikciju u dokazima ovih tvrdnji, dovoljno je pokazati

$$\sigma_{T'}(w) - \sigma_T(w) = \sigma_{T'}(v) - \sigma_T(v) > 0 (< 0).$$

<u>Tvrdnja 1</u>: $vw \in E(T)$.

Neka je $w = w_0 w_1 \ldots w_t = v$ put u T. Pretpostavimo $t \geq 2$ i neka je b ukupna težina grana u w_1 koje ne sadrže v ili w. Tada imamo $b \leq (n-5)/2$. Vrijedi da je v centroidalni vrh i w list stabla $T' := T - ww_1 + ww_2$. Primjenom formule (5) dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{T'(w)}}{\sigma_{T'(v)}} &= \frac{\sigma_T(w) + b + 1 - [n - 1 - (b+1)]}{\sigma_T(v) - 1} \\
&= \frac{\sigma_T(w) - n + 2b + 3}{\sigma_T(v) - 1} \leq \frac{\sigma_T(w) - 2}{\sigma_T(v) - 1} < \frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(v)},
\end{aligned}$$

a to je nemoguće.

<u>Tvrdnja 2</u>: Svaka grana u v je put.

Pretpostavimo suprotno. tj. neka postoji grana B u v koja sadrži dva lista u_1 i u_2, pri čemu $u_1 \neq v \neq u_2$. Iz tvrdnje 1 slijedi $w \notin V(B)$. Možemo pretpostaviti $d(v, u_1) \leq d(v, u_2)$. Neka je u_1' vrh u T koji je susjed vrhu u_1. Sada je v centroidalni vrh, a w list stabla $T' := T - u_1 u_1' + u_1 u_2$. No, vrijedi

$$\sigma_{T'}(w) - \sigma_T(w) = \sigma_{T'(v)} - \sigma_T(v) = d_T(v, u_2) + 1 - d_T(v, u_1) > 0$$

pa je tvrdnja dokazana.

<u>Tvrdnja 3</u>: $d(v) \leq 3$.

Pretpostavimo suprotno. Neka su prema prethodnoj tvrdnji putovi (v, u_1) (v, u_2) i (v, u_3) grane u v koje ne sadrže w. Možemo pretpostaviti $d(v, u_1) \leq d(v, u_2) \leq d(v, u_3)$ iz čega proizlazi $d(v,u_2) \leq (n-1)/2$. Neka je u_1' vrh od T koji je susjed s u_1. Tada je v centroidalni vrh (to slijedi iz korolara 3.3), a w list stabla $T' := T - u_1u_1' + u_1u_2$. Međutim,

$$\sigma_{T'}(w) - \sigma_T(w) = \sigma_{T'}(v) - \sigma_T(v) = d_T(v,u_2) + 1 - d_T(v,u_1) > 0$$

pa je tvrdnja dokazana.

Iz tvrdnji 1-3 slijedi da je $T - w$ put, a kako vrijedi $n \geq 5$, to $T - w$ ima listove x i y različite od w. Pretpostavimo da vrijedi nejednakost $d_T(v,x) \leq d_T(v,y) (\leq n/2$ budući da je $v \in C(T))$. Neka je v' vrh susjedan vrhu v na $(v,y)-$ putu u T. Ako je $d_T(v,y) = n/2$, onda je $v' \in C(T')$ tako da $\sigma_T(v') - \sigma_T(v) = 1$. Ako $d_T(v,y) < n/2$, onda $d_T(v,x) = d_T(v,y) = (n-1)/2$ i $v \in C(T-w)$. Slijedi

$$\frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(v)} = \frac{\sigma_T(v) + n - 2}{\sigma_T(v)} = \begin{cases} 1 + \dfrac{n-2}{\sigma_{T-w}(v') + 2}, & v \notin C(T-w), \\ 1 + \dfrac{n-2}{\sigma_{T-w}(v') + 1}, & v \in C(T-w). \end{cases}$$

Ovime je završen dokaz donje granice.

Neka je T stablo s $n \geq 5$ vrhova, listom w i $v \in C(T)$, za koje je omjer $\sigma_T(w)/\sigma_T(v)$ najveći. Kao ranije, pretpostavimo da je $w = w_0w_1\dots w_t = v$ put u T.

Tvrdnja 4: Ako je $1 \leq i \leq t-1$, onda je $d_T(w_i) = 2$.

Pretpostavimo da je $t \geq 2$ i da je za neke i, $1 \leq i \leq t-1$, vrh w_i susjedan vrhu u različitom od w_{i-1} i w_{i+1}. Tada je v centroidalni vrh grafa $T' := T - uw_i + uw_{i+1}$, $\sigma_{T'(w)} > \sigma_{T(w)}$ i $\sigma_{T'}(v) < \sigma_T(v)$. Budući da ovo nije moguće, zaključujemo da je $d(w_i) = 2$ za $1 \leq i \leq t-1$.

Tvrdnja 5: Svaki vrh osim w_{t-1} koji je susjedan vrhu v je list.

Pretpostavimo suprotno. Neka je B grana u v koja ne sadrži w, a za koju vrijedi $bw(B) \geq 2$, neka je u list u B različit od v i neka je u' vrh u T susjedan s u. Definiramo stablo $T' := T - uu' + uv$. Tada je $v \in C(T')$ i

$$\sigma_{T'}(w) - \sigma_T(w) = \sigma_{T'}(v) - \sigma_T(v) = 1 - d_T(v,u) < 0.$$

Iz tvrdnji 4 i 5 zaključujemo da je $T = B(n,r)$ za neki r. Prema tome, vrijedi

$$f(r) := \frac{\sigma(w)}{\sigma(v)} = \frac{\binom{r}{2} + r(n-r)}{\binom{r}{2} + n - r} = \frac{2rn - r^2 - r}{r^2 + 2n - 3r}.$$

Sada primijenimo lemu 5.1 i dokaz je završen. □

Neka je sada T stablo s $n \geq 3$ vrhova za koje je $\sigma_T(w)/\sigma_T(v)$ najveće. Osnovni račun pokazuje da vrijedi

$$\frac{1}{2}\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + \frac{1}{4} \leq f(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1) \leq \frac{\sigma_T(w)}{\sigma_T(v)} \leq f(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor) \leq \frac{1}{2}\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + \frac{3}{4}.$$

6 Granice za $\sigma(T)/\sigma_T(v)$, gdje je v centroidalni vrh stabla T

Ako je T stablo s n vrhova i $v \in C(T)$, onda, budući da je $\sigma(T) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(T)} \sigma(v)$, iz teorema 3.2 slijedi da je $\sigma(T)/\sigma_T(v) \geq n/2$. U nastavku ćemo izvesti precizniju donju granicu: $\sigma(T)/\sigma_T(v) \geq n/2 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 3/2$.
Funkcija $f(r)$ definirana u sljedećoj lemi imat će važnu ulogu u teoremu 6.2. Iako se direktnim računom može potvrditi da je $f(n-2) = f(n)$ za $n \geq 3$, to će postati očito u dokazu leme.

Lema 6.1. *Ako je $n =: k^2 + s \geq 10, 0 \leq s \leq 2k$ i ϵ definiran s $\epsilon = 0$ za n paran i $\epsilon = 1$ za n neparan, tada je cijeli broj $r, 1 \leq r \leq n-2$ koji minimizira funkciju*

$$f(r) := \frac{-r^3 + 3r^2 + (3n^2 - 12n + 10)r + 9n^2 - 12n}{-r^2 + 2(n-1)r + 2n - \epsilon}$$

i iste je parnosti kao n, zadan s

$$r = \begin{cases} 2k-1 & \text{ako je } 0 \leq s \leq k/3 - 1 \text{ i } n \text{ je neparan,} \\ 2k+1 & \text{ako je } k/3 \leq s \leq 2k \text{ i } n \text{ je neparan,} \\ 2k & \text{ako je } 0 \leq s \leq 4k/3 - 1 \text{ i } n \text{ je paran,} \\ 2k+2 & \text{ako je } 4k/3 \leq s \leq 2k \text{ i } n \text{ je paran.} \end{cases} \tag{6}$$

Dokaz. Pogledati dokaz leme 4.1. $\square$

Napomena: Ako definiramo r kao u lemi 6.1, stavimo $T^* = D(n, (n-r)/2, (n-r)/2)$ i odaberemo $v^* \in C(T^*)$, tada vrijedi

$$\begin{aligned} \sigma(T^*) &= 4\binom{(n-r)/2}{2} + \left(\frac{n-r}{2}\right)^2 (r+1) + \binom{r+1}{3} + 2\left(\frac{n-r}{2}\right)\binom{r+1}{2} \\ &= \frac{1}{12}[-r^3 + 3r^2 + (3n^2 - 12n + 10)r + 9n^2 - 12n] \end{aligned}$$

i

$$\sigma_{T^*}(v^*) = \frac{1}{4}[-r^2 + 2(n-1)r + 2n - \epsilon],$$

gdje je $\epsilon = 0$ ako je n paran i $\epsilon = 1$ ako je n neparan. Proizlazi da je

$$\frac{\sigma(T^*)}{\sigma_{T^*}(v^*)} = \frac{1}{3}\frac{-r^3 + 3r^2 + (3n^2 - 12n + 10)r + 9n^2 - 12n}{-r^2 + 2(n-1)r + 2n - \epsilon} =: \frac{1}{3}f(r).$$

Teorem 6.2. *Ako je T stablo s $n =: k^2 + s \geq 2$ vrhova, $0 \leq s \leq 2k$ i $v \in C(T)$, onda*

$$\frac{1}{3}\frac{-r^3 + 3r^2 + (3n^2 - 12n + 10)r + 9n^2 - 12n}{-r^2 + 2(n-1)r + 2n - \epsilon} \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq n - 1,$$

gdje je $\epsilon = 0$ ako je n paran i $\epsilon = 1$ ako je n neparan te vrijedi

$$r = \begin{cases} 2k-1 & \textit{ako je } 0 \le s \le k/3 - 1 \textit{ i } n \textit{ je neparan,} \\ 2k+1 & \textit{ako je } k/3 \le s \le 2k \textit{ i } n \textit{ je neparan,} \\ 2k & \textit{ako je } 0 \le s \le 4k/3 - 1 \textit{ i } n \textit{ je paran,} \\ 2k+2 & \textit{ako je } 4k/3 \le s \le 2k \textit{ i } n \textit{ je paran.} \end{cases}$$

Donja granica se postiže za $T = T^*$, a gornja ako i samo ako $T = S_n$.

Dokaz. Tvrdnja se lako provjeri za $2 \le n \le 9$ pa u nastavku pretpostavljamo $n \ge 10$. Za dobivanje donje granice pretpostavimo da je T stablo s n vrhova za koje je $\sigma(T)/\sigma_T(v)$ najmanji.

Tvrdnja 1: $\sigma(T)/\sigma_T(v) < n/2 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1/3$.

Iz leme 6.1 uočavamo da je $\sigma(T^*)/\sigma_{T^*}(v^*) \le f(2k-\epsilon)/3$. Za $k \ge 2$ neka vrijedi

$$\begin{aligned} f(2k-\epsilon) = {} & \frac{3}{2}k^2 + 3k + \frac{3}{2}s - 5 \\ + {} & \frac{(3s+1)k^2 + sk + s(3s-1) + \epsilon[k^2 - (3s-1)k + s - 3]}{2k^3 - k^2 + 2(s-1)k + s - \epsilon[k^2 - 2k + s]} \\ = {} & \frac{3}{2}n + 3\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 5 + \begin{cases} \frac{(3s+1)k^2+sk+s(3s-1)}{2k^3-k^2+2(s-1)k+s}, & n \text{ je paran,} \\ \frac{(3s+2)k^2-(2s-1)k+3s^2-3}{2k^3-2k^2+2sk}, & n \text{ je neparan.} \end{cases} \end{aligned}$$

Budući da su za $k \ge 2$ oba razlomka rastuće funkcije od s, imamo

$$\begin{aligned} f(2k-\epsilon) & \le \frac{3}{2}n + 3\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 5 + \begin{cases} \frac{6k^2+15k-2}{2k^2+3k}, & n \text{ je paran} \\ \frac{6k^2+10k+1}{2k^2+2k}, & n \text{ je neparan} \end{cases} \\ & < \frac{3}{2}n + 3\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1 \end{aligned}$$

za $n \ge 4$ i slijedi tvrdnja.

Za vrh u u stablu T kažemo da je *poseban* ako i samo ako u nije list i susjed je s $d_T(u) - 1 \ge 1$ listova. Neka je u' vrh susjedan vrhu u i nije list.

Tvrdnja 2: Ako je u poseban vrh, onda je $d(u) \ge 3$.

Pretpostavimo suprotno. Neka je $d(u) = 2$ i neka je w list susjedan vrhu u. Neka je T' stablo $T - uw + u'w$. Tada je prema tvrdnji 1, za $n \ge 12$

$$\frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'}(v)} = \frac{\sigma(T) + 1 - (n-2)}{\sigma_T(v) - 1} < \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)},$$

što je nemoguće. Za stablo s 10 (11) vrhova dobivena dodavanjem puta duljine 2 proizvoljnom vrhu stabla s 8 (9) vrhova, može se pojedinačnom provjerom pokazati da nisu ekstremna.

Tvrdnja 3: Ako je u poseban vrh, onda je

$$n - d(u) - 1 \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq n - d(u). \tag{7}$$

Da bismo dokazali ovu tvrdnju, pretpostavimo da je $\{u_i | 1 \leq i \leq d(u) - 1\}$ skup listova od T susjednih vrhu u.

Definiramo stablo $T' := T - \{uu_i \,|\, 1 \leq i \leq d(u) - 1\} + \{u'u_i \,|\, 1 \leq i \leq d(u) - 1\}$ i primijetimo da je $C(T') = C(T)$ ako je $d(u) \leq (n-1)/2$ i ako je $d(u) \geq n/2$, onda $u \in C(T)$ i $u' \in C(T')$. Dakle, postavljanjem $v' = v$ ako je $d(u) \leq (n-1)/2$ i $v' = u'$ ako je $d(u) \geq n/2$, imamo $v' \in C(T')$ i

$$\sigma_T(v) - \sigma_{T'}(v') = \begin{cases} d(u) - 1 & \text{ako je } d(u) \leq (n-1)/2, \\ n - d(u) - 1 & \text{ako je } d(u) \geq n/2. \end{cases}$$

Budući da je $\sigma(T) - \sigma(T') = [d(u) - 1][n - d(u) - 1]$ i, u ovom slučaju

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq \frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'}(v)} \text{ implicira } \frac{\sigma(T) - \sigma(T')}{\sigma_T(v) - \sigma_{T'}(v')} \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)},$$

mora vrijediti

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \geq \begin{cases} n - d(u) - 1 & \text{ako je } d(u) \leq (n-1)/2, \\ d(u) - 1 & \text{ako je } d(u) \geq n/2. \end{cases} \tag{8}$$

Sada definiramo stablo $T'' := T - \{uu_i \,|\, 1 < i < d(u) - 1\} + \{u_1u_i \,|\, 1 < i \leq d(u) - 1\}$ i primijetimo da je $C(T'') = C(T)$ ako je $d(u) \leq (n-1)/2$. Ako je $d(u) \geq n/2$, tada je $u \in C(T'') \cap C(T)$. Dakle, ako stavimo $v'' = v$ za $d(u) \leq (n-1)/2$ i $v'' = u$ za $d(u) \geq n/2$, imamo $v'' \in C(T'')$ i

$$\sigma_{T''}(v'') - \sigma_T(v) = \begin{cases} d(u) - 2 & \text{ako je } d(u) \leq (n-1)/2, \\ n - d(u) & \text{ako je } d(u) \geq n/2. \end{cases}$$

Budući da je $\sigma(T'') - \sigma(T) = [d(u) - 2][n - d(u)]$ i u tom slučaju

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq \frac{\sigma(T'')}{\sigma_{T''}(v'')} \text{ implicira } \frac{\sigma(T'') - \sigma(T)}{\sigma_{T''}(v'') - \sigma_T(v)} \geq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)},$$

moramo imati

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq \begin{cases} n - d(u) & \text{ako je } d(u) \leq (n+2)/2, \\ d(u) - 2 & \text{ako je } d(u) \geq (n+3)/2. \end{cases} \tag{9}$$

Iz (8) i (9) možemo zaključiti da je $d(u) \leq (n+2)/2$. Ako je $d(u) < n/2$, onda (7) slijedi direktno iz (8) i (9). Ako je $n/2 \leq d(u) \leq (n+2)/2$, onda je $n - d(u) - 1 \leq d(u) - 1 \leq$

$\sigma(T)/\sigma_T(v) \leq n - d(u)$, što također povlači (7).

Tvrdnja 4: Možemo pretpostaviti da su svi posebni vrhovi od T istog stupnja.

Pretpostavimo da su u i w dva posebna vrha od T za koje vrijedi $d(u) > d(w)$. Tvrdnja 3 implicira

$$n - d(u) = n - d(w) - 1 \leq \sigma(T)/\sigma_T(v) \leq n - d(u).$$

Dakle, svaki poseban vrh od T ima stupanj $d(u)$ ili $d(w)$. Nadalje, nejednakosti u (8) i (9) primijenjene na u i w su jednakosti kao i parovi nejednakosti koje im neposredno prethode. Ako bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je T izabran tako da minimizira broj parova posebnih vrhova s različitim stupnjevima, tada možemo uočiti, po pitanju stabala T' i T'' koja su konstruirana u dokazu tvrdnje 3, da svi posebni vrhovi od T imaju isti stupanj.

Tvrdnja 5: Svaki list u T je susjedan posebnom vrhu.

Pretpostavimo suprotno. Neka je neki list w susjedan vrhu w' koji nije poseban. Postoji netrivijalna grana od B od T u w' koja ne sadrži v. Označimo sa z vrh od B koji je susjedan vrhu w'. Budući da je B netrivijalna grana, ona sadrži poseban vrh u i sve listove susjedne vrhu u. Definiramo $T' := T - ww' + wz$ i primijetimo da je $v \in C(T')$ (ako je $w' = v$, onda biramo B tako da bude netrivijalna grana od T u v s najmanjom težinom). Sada imamo

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq \frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'}(v)} = \frac{\sigma(T) - bw(B) + (n - 1 - bw(B))}{\sigma_T(v) + 1},$$

što zajedno sa (7) daje

$$n - bw(B) - 1 \leq n - d(u) - 1 \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \leq n - 1 - 2bw(B),$$

a to je nemoguće.

Tvrdnja 6: Stablo T ima točno dva posebna vrha.

Najprije primijetimo da iz tvrdnji 1 i 3, za svaki poseban vrh u iz T proizlazi

$$d(u) - 1 \geq n - 2 - \sigma(T)/\sigma_T(v) > n/2 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 5/3.$$

Napominjemo kako će se tvrdnja 4 u dokazu tvrdnje 6 koristiti više puta. Iz nje i iz tvrdnje 5 slijedi da je broj unutarnjih vrhova od T kongruentan s n modulo broj posebnih vrhova.

Ako T ima šest ili više posebnih vrhova, onda T ima najmanje $6[d(u-1)]$ listova. Nadalje, budući da posebni vrhovi ne mogu biti susjedni osim kada postoje samo dva posebna vrha, stablo T mora imati najmanje 7 unutarnjih vrhova. Dakle, $|V(T)| > 3n - 6\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 2$. To je nemoguće za $n \geq 10$.

Ako T ima pet posebnih vrhova, onda $V(T) \geq 5n/2 - 5\sqrt{n} - 7/3$. Budući da je to nemoguće za $n \geq 12$, imamo da je $n = 10$ i T ima šest, sedam ili osam unutarnjih vrhova ili $n = 11$ i T ima točno šest unutarnjih vrhova. Stablo koje zadovoljava ove kriterije postoji samo za $n = 11$ (i jedinstveno je). Izračuni pokazuju da ovo stablo nije ekstremno.

Ako T ima četiri posebna vrha, onda $V(T) \geq 2n - 4\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 5/3$ tako da je $n \leq 17$. Zapravo, u pogledu napomena koje smo spomenuli ranije u dokazu ove tvrdnje, jedini mogući (n, i) parovi, gdje je i broj unutarnjih vrhova od T su $(10, 6), (11, 7), (13, 5)$ i $(17, 5)$. Postoje dva moguća stabla za slučaj $(10, 6)$, četiri za slučaj $(11, 7)$ i jedinstveno stablo za svaki od slučajeva $(13, 5)$ i $(17, 5)$. Izračun pokazuje da niti jedno od ovih stabala nije ekstremno.

Ako T ima točno tri posebna vrha, onda ima $i \geq 4$ unutarnjih vrhova. Neka je sada $|V(T)| > 3[d(u) - 1 + i] \geq 3n/2 - 3\sqrt{n} + i - 5$, što je nemoguće za $i \geq 9$. U tablici 1 su navedeni svi mogući (n, i) parovi za $4 \leq i \leq 8$ zajedno s brojem stabala koja moraju biti istražena u svakom pojedinom slučaju. Budući da izračun pokazuje da niti jedno od ovih stabala nije ekstremno, dokaz tvrdnje je završen.

Neka je $u_1 u_2 \ldots u_t$ put u T koji povezuje posebne vrhove u_1 i u_t. Sljedeća tvrdnja slijedi direktno iz tvrdnji 5 i 6.

i	n	broj stabala
8	10, 11, 16 17	5
7	10-13, 16-19,25	3
6	10-13, 16-21, 25-27	2
5	10-29	1
4	10-31, 36, 37	1

Tablica 1: Kandidati za ekstremna stabla

Tvrdnja 7: Za $1 < i < t$ vrijedi $d(u_i) = 2$.

U svrhu evaluacije donje granice za $\sigma(T)/\sigma_T(v)$, možemo pretpostaviti da je $T = D(n, (n-r)/2, (n-r)/2)$ za neki r. Donja granica sada slijedi iz leme 6.1 i primjedbi koje slijede nakon nje.

Da bismo dobili gornju granicu, pretpostavimo da je T stablo s n vrhova za koje je $\sigma(T)/\sigma_T(v)$ najveći i uočimo da je $\sigma(T)/\sigma(v) \geq \sigma(S_n)/\sigma_{S_n}(v) = n-1$, pri čemu je v centroidalni vrh od S_n.

Pretpostavimo da je $bw(B) \geq 2$ za neku granu B od T u v i neka je u vrh od B susjedan vrhu v. Označimo vrhove koji su susjedni vrhu u, ali različiti od v s u_i, $1 \leq i \leq r$. Konstruiramo stablo T' s n vrhova tako da $T' := T - \{uu_i | 1 \leq i \leq r\} + \{vu_i | 1 \leq i \leq r\}$. Lako se može uočiti da je $\sigma_T(v) - \sigma_{T'}(v) = bw(B) - 1 > 0$, i kako smo pokazali ranije, imamo

$$\begin{aligned}\sigma(T) - \sigma(T') &= [bw(B) - 1][n - bw(B)] - [bw(B) - 1] \\ &= [bw(B) - 1][n - bw(B) - 1] > 0.\end{aligned}$$

Tada

$$\frac{\sigma(T) - \sigma(T')}{\sigma_T(v) - \sigma_{T'}(v)} = n - bw(B) - 1 < n - 1 \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} \text{, što daje } \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} < \frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'}(v)}.$$

Budući da $v \in C(T)$ povlači da je $v \in C(T')$ (vidi 3.3), posljednja nejednakost je nemoguća. Dakle, $bw(B) = 1$ za sve grane B od T u v, tj. $T = S_n$ i $\sigma(T)/\sigma_T(v) = n - 1$. □

Na kraju ovog poglavlja primijetimo da ako je u vrh od T^* susjedan listu, imamo (nastavlja se na tvrdnju 1)

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(v)} = \frac{\sigma(T^*)}{\sigma_{T^*(v^*)}} \geq n - d(u) - 1 = \frac{n + r}{2} - 1 \geq \frac{n}{2} + k - \frac{3}{2} = \frac{n}{2} + \lfloor\sqrt{n}\rfloor - \frac{3}{2}.$$

7 Granice za $\sigma(T)/\sigma_T(w)$, gdje je w list u T

Za $3 \leq m \leq n-1$ graf $S(n,m)$ je stablo s n vrhova sa samo jednim centroidalnim vrhom, označimo ga s v, a svaka od m grana stabla $S(n,m)$ u v je put duljine $\lfloor (n-1)/m \rfloor$ ili $\lceil (n-1)/m \rceil$. Stavljamo $S(n,2) := P_n$ za $n \geq 2$.

U ovom poglavlju će $S'(n,m)$ označavati stablo koje se sastoji od stabla $S(n-1,m)$ zajedno s listom w susjednim centroidalnom vrhu v od $S(n-1,m)$. Primijetimo da je v jedini centroidalni vrh od $S'(n,m)$. Definiramo k i s s $n-2 =: km+s$, pri čemu je $0 \leq s \leq m-1$.

Lema 7.1. *Neka je $n \geq 2$ i*

$$f(n) := \max_m \sigma(S'(n,m))/\sigma_{S'(n,m)}(w).$$

Tada je $n - 2\sqrt{3n} \leq f(n) \leq n$.

Dokaz. Pogledati dokaz leme 4.1. □

Teorem 7.2. *Neka stablo T sadrži $n \geq 2$ vrhova i neka je w list u T. Definiramo k i s tako da $2n-2 =: k^2 + s$ za $0 \leq s \leq 2k$. Vrijedi*

$$\frac{1}{3}\left[\frac{-r^3 + 3nr^2 - (12n-13)r + 24n^2 - 39n + 12}{-r^2 - 4(n-1)r + 4n - 3}\right] \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(w)} \leq (1+o(1))n,$$

pri čemu je

$$r = \begin{cases} 2k-1, & 0 \leq s \leq k/3 - 1, \\ 2k+1, & k/3 \leq s \leq 2k. \end{cases}$$

Donja granica postiže se ako i samo ako je $T = B(n,(r-1)/2)$, a gornja ako je $T = S'(n, \lfloor (n-2)/\lceil \sqrt{3n} \rceil \rfloor)$.

Dokaz. Teorem se lako dokaže za $n = 2, 3, 4$ ili 5. Neka je T stablo s $n \geq 6$ vrhova i w list u T za koji je $\sigma(T)/\sigma_T(w)$ najmanji. Neka je T' stablo koje dobijemo ako uzmemo dvije kopije od T, T_1 i T_2 identificirajući sve vrhove w (slijepimo ih u jedan vrh), pri čemu novonastali vrh označimo s v. Tada je $v \in C(T')$ i $\sigma_{T'}(v) = 2\sigma_T(v) = 2\sigma_T(w)$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \sigma(T') &= 2\sigma(T) + \sum_{v_1 \in V(T_1)\setminus v} \sum_{v_1 \in V(T_2)\setminus v} d(v_1, v_2) \\ &= 2\sigma(T) + \sum_{v_1 \in V(T_1)\setminus v} \sum_{v_2 \in V(T_2)\setminus v} d(v_1, v) + d(v, v_2) \\ &= 2\sigma(T) + 2(n-1)\sigma_T(v). \end{aligned}$$

Sada, koristeći teorem 6.2 imamo

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(T)}{\sigma_{T(w)}} &= \frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'(v)}} - (n-1) \\ &\geq \frac{1}{3}\frac{-r^3 + 3r^2 + [3(2n-1)^2 - 12(2n-1) + 10]r + 9(2n-1)^2 - 12(2n-1)}{-r^2 + 2[(2n-1)-1]r + 2(2n-1) - 1} - (n-1) \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{-r^3 + 3nr^2 - (12n-13)r + 24n^2 - 39n + 12}{-r^2 - 4(n-1)r + 4n - 3}\right]. \end{aligned}$$

Iz leme 6.1, posljednji izraz je minimiziran (po cijelim brojevima između 1 i $2n-1$) za

$$r = \begin{cases} 2k-1, & 0 \leq s \leq k/3 - 1, \\ 2k+1, & k/3 \leq s \leq 2k, \end{cases}$$

pri čemu je $2n - 1 =: k^2 + s,\ 0 \leq s \leq 2k$. Stoga vrijedi $T = B(n, r)$.

Neka je T stablo s n vrhova i neka je w list u T za koji je $\sigma(T)/\sigma_T(w)$ najveći. Izaberimo centroidalni vrh v u T i pretpostavimo da je $w = w_0 w_1 \dots w_t = v$ put u T i $B_i, 1 \leq i \leq s$ grane od T u v koje ne sadrže w.

Tvrdnja 1: Vrhovi w i v su susjedi, tj. $t = 1$.

Pretpostavimo suprotno. Neka je $t \geq 2$ i neka je m ukupan broj vrhova u granama od T u w_1 koje su različite od grana koje sadrže v i w. Tada m može biti 1 (budući da je w_1 ubrojen) te iz teorema 3.1 vrijedi $m + 1 \leq n/2$ jer $w \notin C(T)$. Neka je $T' := T - ww_1 + ww_2$. Tada je

$$\frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'(w)}} = \frac{\sigma(T) + m - (n - m - 1)}{\sigma_T(w) + m - (n - m - 1)} > \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(w)}$$

jer je $n - 2m - 1 > 0$ i $\sigma_T(w) < \sigma(T)$. No, to je nemoguće jer je w list u T'.

Tvrdnja 2: Ako su B_1 i B_2 dvije grane u vrhu u od T i niti jedna grana ne sadrži w, onda

(*i*) $\sigma(T)/\sigma_T(w) \geq n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1$ *ako je* $bw(B_1) \geq bw(B_2)$.

(*ii*) $\sigma(T)/\sigma_T(w) \leq n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1$ *ako je* $bw(B_1) \leq bw(B_2) - 2$.

Kako bismo ovo i dokazali, pretpostavimo da su u_i, $1 \leq i \leq d(u)$ vrhovi od T susjedni s u i neka su B_i grane u u koje sadrže u_i. Neka je $T' := T - \{uu_i | 3 \leq i \leq d(u)\} + \{u_2 u_i | 3 \leq i \leq d(u)\}$ tako da uz lemu 3.7 vrijedi,

$$\sigma(T') = \sigma(T) + [n - [bw(B_1) + 1]bw(B_1) - 1] - bw(B_2)[n - bw(B_2)].$$

Dakle,

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(w)} \geq \frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'}(w)} = \frac{\sigma(T) + [bw(B_1) - bw(B_2) + 1][n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1]}{\sigma_T(w) + bw(B_1) - bw(B_2) + 1},$$

što daje

$$[bw(B_1) - bw(B_2) + 1]\sigma(T) \geq [bw(B_1) - bw(B_2) + 1] \times [n - bw(B_2) - bw(B_1) - 1]\sigma_T(w).$$

Nejednakosti (*i*) i (*ii*) direktno slijede.

Napomena: Primijetimo da ako vrijedi jednakost u (i) i $bw(B_1) \neq bw(B_2)$, onda je $\sigma(T)/\sigma_T(w) = \sigma(T')/\sigma_T(w)$.

Tvrdnja 3: Ako je B grana u vrhu u, $bw(B) > 1$ i B ne sadrži w, onda je $\sigma(T)/\sigma_T(w) \leq n - bw(B) - 1$.

Neka je u' vrh od B susjedan vrhu u i označimo vrhove susjedne vrhu u' s $u = u'_1, u'_2, \ldots, u'_{d(u')}$. Definiramo

$$T' := T - \{u'u'_i \,|\, 2 \leq i \leq d(u')\} + \{uu'_i \,|\, 2 \leq i \leq d(u')\}$$

i primijetimo da iz leme 3.7 proizlazi $\sigma(T') = \sigma(T) + n - 1 - bw(B)[n - bw(B)]$. Dakle,

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_T(w)} \geq \frac{\sigma(T')}{\sigma_{T'}(w)} = \frac{\sigma(T) - [bw(B) - 1][n - bw(B) - 1]}{\sigma_T(w) - [bw(B) - 1]},$$

što daje $\sigma(T)[bw(B) - 1] \leq \sigma_T(w)[bw(B) - 1][n - bw(B) - 1]$.

Tvrdnja 4: Ako su B_1 i B_2 dvije grane u vrhu u od T i niti jedna grana ne sadrži w, onda je

(i) $\sigma(T)/\sigma_T(w) \geq n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1$,

(ii) $\sigma(T)/\sigma_T(w) = n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1$ *ako* $|bw(B_2) - bw(B_1)| > 1$.

Nejednakost (i) slijedi iz tvrdnje 2 ako $bw(B_1) \geq bw(B_2)$ ili (zamjenom B_1 i B_2 u tvrdnji 2) $bw(B_2) \geq bw(B_1)$, tj. dio (i) vrijedi za sve vrijednosti od $bw(B_1)$ i $bw(B_2)$.

Iz nejednakosti (ii) tvrdnje 2 imamo $\sigma(T)/\sigma_T(w) \leq n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1$ ako $bw(B_1) < bw(B_2) - 1$ ili $bw(B_2) < bw(B_1) - 1$. Kombinacijom ovih rezultata s nejednakosti (i) tvrdnje 4, dobivamo jednakost (ii).

Tvrdnja 5: Svaka grana od T u v je put.

Pretpostavimo suprotno. Postoji vrh $u(\neq v)$ grane B_1 od T u v za koji vrijedi $d(u) \geq 3$ te neka su A i B grane od T u u od kojih niti jedna ne sadrži w. Tada, primjenjujući tvrdnju 4 na u i tvrdnju 3 na v dobivamo

$$n - bw(A) - bw(B) - 1 \leq \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(w)} \leq n - bw(B_1) - 1,$$

iz čega proizlazi $bw(B_1) \leq bw(A) + bw(B)$, a to je nemoguće.

Tvrdnja 6: Neka su B_i, $0 \leq i \leq m$ grane od T u v s w u B_0. Tada je $|bw(B_i) - bw(B_j)| \leq 1$ za $1 \leq i < j \leq m$.

Možemo pretpostaviti da je $m \geq 3$ jer ako je $T - w$ put, tvrdnja 6 slijedi iz činjenice da je $v \in C(T)$. Dakle, ako tvrdnja 6 ne vrijedi, onda imamo tri grane B_1, B_2 i B_3 od T u v za koje vrijedi $bw(B_1) \leq bw(B_2) \leq bw(B_3)$ i $bw(B_3) \geq bw(B_1) + 2$. Iz tvrdnje 4 slijedi

$$n - bw(B_1) - bw(B_3) - 1 = \frac{\sigma(T)}{\sigma_T(w)} \geq n - bw(B_1) - bw(B_2) - 1,$$

što zahtijeva da je $bw(B_2) = bw(B_3)$. Možemo zaključiti da ako je B bilo koja grana od T u v različita od B_1 i ne sadrži w, onda je $bw(B) = bw(B_3)$. Nadalje, budući da stablo T zadovoljava jednakost (ii) tvrdnje 4, to imamo, s obzirom na napomenu koja slijedi iz tvrdnje 2 $\sigma(T)/\sigma_T(w) = \sigma(T')/\sigma_{T'}(w)$ za stablo T' definirano u dokazu tvrdnje 2 (pri čemu smo uzeli da je u sada v). Primijetimo da je u vidu tvrdnje 5, stablo T' dobiveno iz T zamjenom puta B_1 putom B_1' duljine $bw(B_1) + 1$ i zamjenom puta B_2 putom B_2' duljine $bw(B_2) - 1$. U T' imamo

$$bw(B_1) + 1 = bw(B_1') \leq bw(B_2') \leq bw(B_2) - 1 < bw(B_3),$$

tj. u T' je najveća razlika u težinama grana u v, koje ne sadrže w, manja od odgovarajuće razlike u T. Ali ovo je suprotno od našeg početnog izbora stabla T. Zato zaključujemo da vrijedi tvrdnja 6.

Iz tvrdnji 1, 5 i 6 slijedi da je $T = S'(n, m)$ za neke m gdje je $n - 2 = km + s$ i $0 \leq s \leq m - 1$. Dokaz ovog teorema završavamo primjenom leme 7.1. $\square$

8 Završna razmatranja

Entriger i ostali [6] koristili su gornju granicu teorema 6.2 kako bi pokazali da svaki povezan graf G s n vrhova sadrži razapinjujuće stablo T za koje vrijedi $\sigma(T) \leq 2(1 - 1/n)\sigma(G)$. Ovo je zanimljivo u svijetlu rezultata Johnsona i ostalih [10] koji su pokazali da je problem pronalaska minimalne udaljenosti razapinjujućeg stabla grafa NP-težak. U svrhu usporedbe, tablica koja slijedi sadrži asimptotske vrijednosti naših granica.

omjer	donja granica $\sim$	gornja granica $\sim$
$\sigma_T(w)/\sigma_T(u)$		$\sqrt{n/2}$
$\sigma_T(w)/\sigma_T(v)$	1	$\sqrt{n/2}$
$\sigma(T)/\sigma_T(v)$	$n/2$	n
$\sigma(T)/\sigma_T(w)$	$\sqrt{2n}$	n

Tablica 2: Asimptotski oštre granice omjera gdje je T stalo s n vrhova, v je centroid od T, a w i u su listovi u T.

Literatura

[1] K. Burns, R. C. Entringer, *A graph-theoretic view of the United States postal service*, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.), Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Wiley, New York. 1995 pp. 323–334.

[2] E. R. Canfield, R. W. Robinson, D. H. Rouvray, *Determination of the Wiener molecular branching index for the general tree*, J. Comput. Chem. 6 (1985) 598–609.

[3] A. A. Dobrynin, R. Entringer, I. Gutman, *Wiener index of trees: Theory and applications*, Acta Appl. Math. 66(3) (2001), 211–249.

[4] R. C. Entringer, *Distance in graphs: trees*, J. Combin. Math. Combin. Comput., 24 (1997) 65–84.

[5] R. C. Entringer, D. E. Jackson, D. A. Snyder, *Distance in graphs*, Czechoslovak Math. J. 26 (101) (1976) 283–296.

[6] R. C. Entringer, D. J. Kleitman, L. A. Szekely, *A note on spanning trees with minimum average distance*, Bull. Inst. Combin. Appl. 17 (1996) 71–78.

[7] R. C. Entringer, A. Meir, J. W. Moon, L. A. Szekely, *On the Wiener index of trees from certain families*, Austral. J. Combin. 10 (1994) 211–224.

[8] I. Gutman, *A new method for the calculation of the Wiener number of acyclic molecular graphs*, J. Mol. Struct.: THEOCHEM 285 (1993) 137–142.

[9] I. Gutman, Y. N. Yeh, S. L., Lee, Y. L. Lou, *Recent results in the theory of the Wiener number*, Indian J. Chem. 32A (1993) 651–661.

[10] D. S. Johnson, J. K. Lenstra, A. H. G. Ronnooy-Kan, *The complexity of the network design problem*, Networks 8 (1978) 279–285.

[11] C. Jordan, *Sur les assemblages de lignes*, J. Reine Angew. Math. 70 (1869) 185–190.

[12] M. Knor, R. Škrekovski, *Wiener index of line graphs*, in M. Dehmer and F. Emmert-Streib (Eds.), Quantitative Graph Theory: Mathematical Foundations and Applications, CRC Press (2014) 279–301.

[13] M. Knor, R. Škrekovski, A. Tepeh, *Mathematical aspects of Wiener index*, Ars Math. Contemp. 11 (2016) 327–352.

[14] M. Knor, R. Škrekovski, A. Tepeh, *Selected topics on Wiener index*, https://arxiv.org/abs/2303.11405

[15] J. Plesnik, *On the sum of all distances in a graph or digraph*, J. Graph Theory 8 (1984) 1–21.

[16] R. Shi, *The average distance of trees*, Systems Sci. Math. Sci. 6 (1993) 18–24.

[17] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

[18] H. Wiener, *Structural determination of paraffin boiling points,* J. Amer. Chem. Sot. 69 (1947) 17–20.

[19] H. Wiener, *Characterization of heats of isomerization, and differences in heats of vaporization of isomers, among the paraffin hydrocarbons*, J. Amer. Chem. Soc. 69 (1947) 2636–2638.

[20] H. Wiener, *Influence of interatomic forces on paraffin properties*, J. Chem. Phys. 15 (1947) 766.

[21] P. Winkler, *Mean distance in a tree*, Discrete Appl. Math. 27 (1990) 179–185.

[22] K. Xu, M. Liu, K. C. Das, I. Gutman, B. Furtula, *A survey on graphs extremal with respect to distance-based topological indices*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 71 (2014), 461–508.

[23] B. Zelinka, *Medians and peripherians of trees*, Arch. Math. (Brno) 4 (1968) 87–95.

Sažetak. Stablo je povezan aciklički graf, tj. povezan graf koji ne sadrži cikluse. Brojni autori posvetili su se istraživanju prosječne udaljenosti u stablima. Udaljenost između vrhova u i v u povezanom grafu G definirana je kao duljina najkraćeg $(u, v)-$ puta u G te ju označavamo s $d_G(u, v)$ ili $d(u, v)$. Glavni cilj ovog rada je odrediti asimptotske vrijednosti omjera raznih udaljenosti u stablima.

Ključne riječi: graf, stablo, vrh, razapinjujuće stablo, grana, udaljenost, granica

Extremal values for ratios of distances in trees

Summary. A tree is a connected acyclic graph, i.e. a connected graph that does not contain cycles. Numerous authors have dedicated themselves to research the average distance in trees. Distance between vertices u and v in connected graph G is defined as the length of the shortest $(u, v)-$path in G and is denoted by $d_G(u, v)$ or $d(u, v)$. The main goal of this work is to determine the asymptotic values of ratios of various distances in the trees.

Keywords: graph, tree, vertex, spanning tree, branch, distance, limit

Životopis

Rođena sam 12.06.1992. godine u Osijeku. Odrasla sam i živim u Valpovu gdje sam 2007. godine završila Osnovnu školu Matije Petra Katančića. Iste godine upisala sam Opću gimnaziju u Srednjoj školi Valpovo. Srednju školu završila sam 2011. godine te sam iste godine upisala Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku na Svučilištu J. J. Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij završila sam 2015. godine te stekla akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike uz mentorstvo prof. dr. sc. Kristiana Sabe i završni rad pod nazivom Numerička integracija. Iste godine upisujem diplomski studij, smjer Financijska matematika i statistika. Na drugoj godini diplomskog studija odradila sam kratku stručnu praksu na odjelu kontrolinga u tvrtci Harburg-Freudenberger Belišće d.o.o.. Tijekom studija radila sam više studentskih poslova, a najviše bih istaknula rad u Hrvatskom Crvenom križu Gradskom društvu Crvenog križa Valpovo gdje sam volontirala od osnovne škole. Godine 2017. dobila sam ugovor na neodređeno te sam od tada zaposlena. Radila sam poslove voditeljice rada s mladima i volonterima te na pripremi i provedbi projekata financiranim iz EU fondova. 2018. godine pohađala sam Stručno usavršavanje "Javna nabava" na Ekonomskom fakultetu u Osijeku te sam 2019. godine dobila certifikat javne nabave. Trenutno obavljam poslove projektne menadžerice te poslove iz područja javne nabave u Hrvatskom Crvenom križu Gradskom društvu Crvenog križa Valpovo.