Krivulje i plohe drugog reda

Knežević, Barbara

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Barbara Knežević

Krivulje i plohe drugog reda

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Barbara Knežević

Krivulje i plohe drugog reda

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sažetak:

Tema ovoga završnoga rada su krivulje, odnosno plohe drugog reda promatrane s aspekta analitičke geometrije. Navedene su definicije krivulja drugog reda, tj. kružnice, elipse, parabole i hiperbole, te sfere, elipsoida, eliptičkog paraboloida, jednoplošnog i dvoplošnog hiperboloida. Svaka promatrana krivulja, odnosno ploha je grafički prikazana, dan je pregled osnovnih obilježja te je iskazana odgovarajuća jednadžba kojom se krivulja, odnosno ploha zadaje.

Ključne riječi:

krivulje drugog reda, kružnica, elipsa, parabola, hiperbola, plohe drugog reda, sfera, elipsoid, paraboloid, hiperboloid

Curves and surfaces of the second order

Abstract:

The topic of this final thesis are curves and surfaces of the second order viewed from the aspect of analytical geometry. Definitions of some second-order curves, respectively surfaces are given, i.e. circles, ellipses, parabolas and hyperbolas, spheres, ellipsoids, elliptical paraboloids, one-sheeted and two-sheeted hyperboloids. Each observed curve or surface is graphically displayed and the corresponding equation is given. We will also show an overview of basic characteristics for each curve, respectively surface.

Key words:

curves of the second order, circle, ellipse, parabola, hyperbola, surfaces of the second order, sphere, ellipsoid, paraboloid, hyperboloid

Sadržaj

Uvod

Krivulje drugog reda ili konike jedne su od prvih proučavanih krivulja. Radove o njima pisali su još stari Grci, pripadnici Platonove akademije. Prvi izvori sežu još u 4. st. prije Krista, spominje ih grčki matematičar Menehmo, prilikom rješavanja Delskog problema. Tek stotinjak godina kasnije grčki matematičar Apolonije iz Perge, napisao je opširnu studiju o krivuljama drugog reda, i to samo geometrijskim pristupom, te je uveo nazive koje i danas rabimo. Njegovo djelo pod nazivom "Konike" po prvi puta kružnicu, elipsu, parabolu i hiperbolu prikazuje kao ravninske presjeke kružnog stošca pod određenim kutom, zato se u hrvatskom jeziku nazivaju i čunjosječnice. Trebalo je proći gotovo dva tisućljeća da bi matematičari bolje shvatili krivulje drugog reda povezivanjem algebarskih i geometrijskih tehnika.
U ovom radu razmatramo krivulje i plohe drugog reda. U prvom poglavlju ovoga rada navode se svojstva četiri osnovna oblika krivulja drugog reda, iskazuju se njihove definicije i formule, te se prikazuju njihove slike u koordinatnom sustavu. U drugom poglavlju ovog rada navode se svojstva pet osnovih oblika ploha drugog reda, te također njihove definicije, formule i slike.

1. Krivulje drugog reda

Krivulja drugog reda je skup svih točaka dvodimenzionalnog prostora za koje je sljedeća jednadžba zadovoljena

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Cy + F = 0. \tag{1}$$

1.1. Kružnica

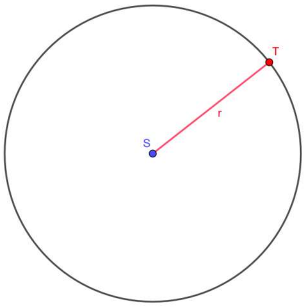
Kružnica spada u krivulje drugog reda koje nazivamo čunjosječnice. Naziv je dobila zato što ju dobijemo kao presjek stošca i ravnine paralelne s bilo kojom bazom stošca.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [2].

Definicija 1. *Kružnica je skup svih točaka u ravnini π jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.*

S se naziva **središte** ili **centar** kružnice, a udaljenost r naziva se **radijus** ili **polumjer**. Kraće, radi se o skupu K koji je definiran na sljedeći način

$$K = \{T \in \pi : d(S,T) = r\}.$$

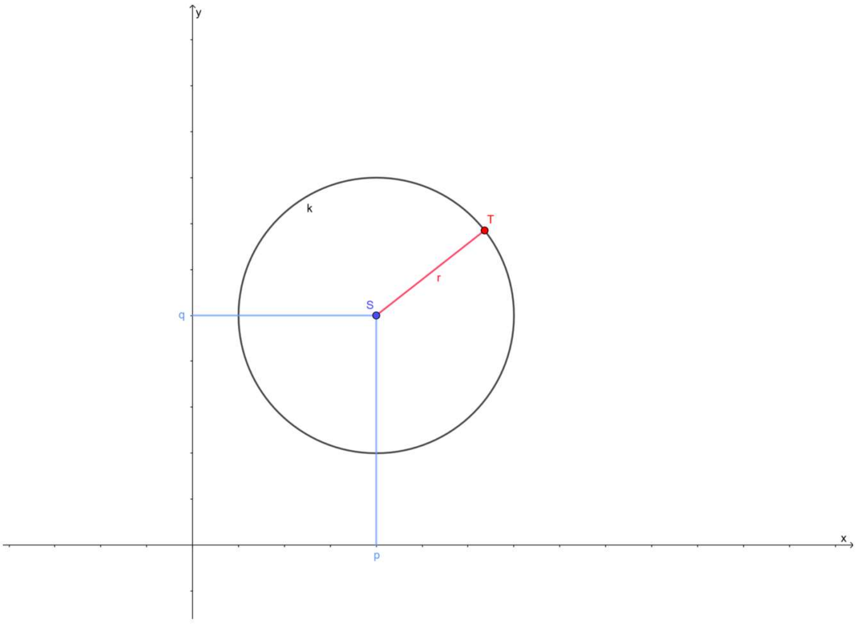


Slika 1: Kružnica sa središtem S i polumjerom r

Svaka točka $T = (x, y)$, kružnice $k(S, r)$, jednako je udaljena od središta kružnice $S(p, q)$ te je ta udaljenost jednaka duljini polumjera r, tj. $d(S,T) = r$.

Jednadžba kružnice $k(S, r)$ sa središtem u točki $S = (p, q)$ i polumjerom r je

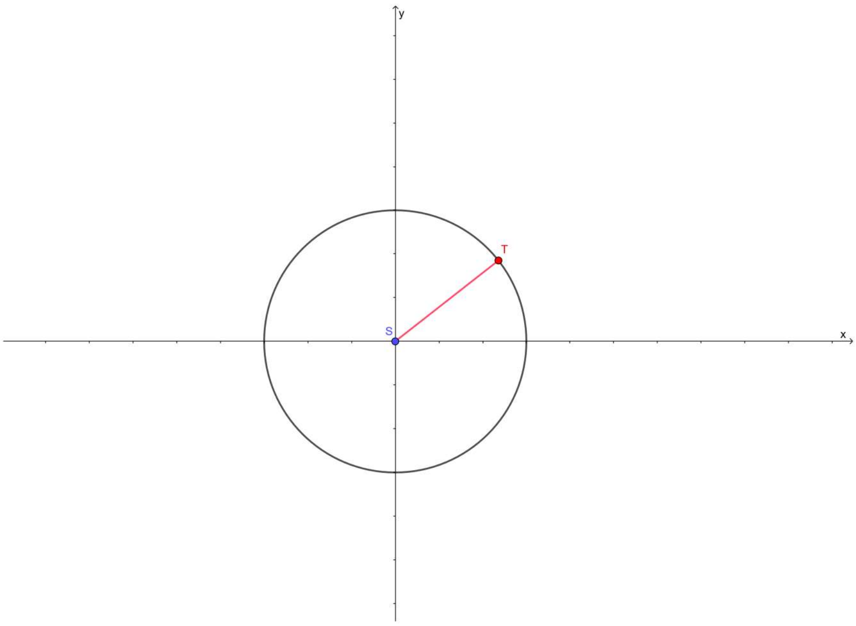
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{2}$$



Slika 2: Kružnica sa središtem S(p,q) i polumjerom r

Posebno, ako se središte kružnice nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžba (2) je jednadžba centralne kružnice te pišemo

$$x^2 + y^2 = r. \tag{3}$$



Slika 3: Centralna kružnica sa središtem S(0,0) i polumjerom r

1.2. Elipsa

Elipsu dobijemo kao rezlutat presjeka ravnine i stošca, pri čemu ravnina nije paralelna niti s jednom izvodnicom stošca i ne prolazi vrhom stošca.

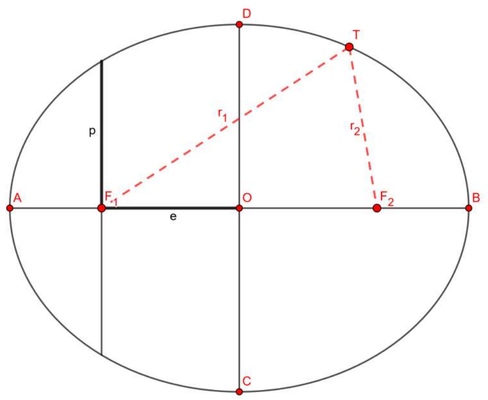
Sljedeća definicija preuzeta je iz [6].

Definicija 2. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite fiksne točke ravnine π i neka je $|F_1F_2| = 2e$, te neka je a pozitivan realni broj takav da je $a > e$. Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 stalan i jednak $2a$.*

Kraće zapisano to je skup točaka definiran kao

$$E = \{T \in \pi; |F_1T| + |F_2T| = 2a\}.$$

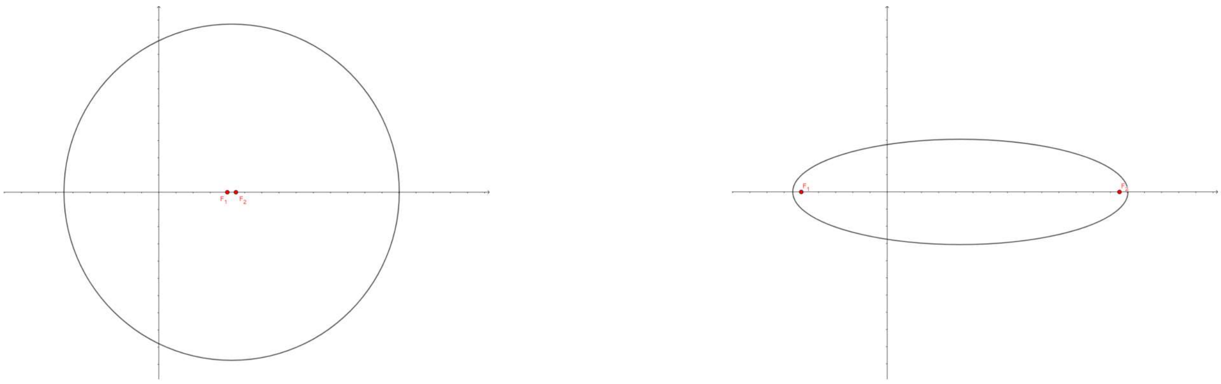
Točke F_1 i F_2 zovu se **fokusi** ili **žarišta** elipse. Kažemo da je **radijvektor** točke T dužina koja spaja žarište s bilo kojom točkom T elipse.
Polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ zovemo **središte** elipse i označavamo s O.
Pravac F_1F_2 siječe elipsu u točkama A i B, a simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ siječe elipsu u točkama C i D. Točke A, B, C i D zovemo **tjemena** elipse, dužina $\overline{AB}$ naziva se glavna ili velika os elipse, a dužina $\overline{CD}$ sporedna ili mala osi elipse. $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ zovemo velike poluosi, a dužine $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ malim poluosima. Duljina velike poluosi jednaka je a pa je duljina velike osi jednaka je $2a$. Duljina male poluosi jednaka je b.



Slika 4: Elipsa sa žarištima F_1 i F_2

Ako su nam F_1 i F_2 iste točke, slijedi da je $e = 0$, tada dobivamo skup točaka koje su jednako udaljene od te fiksne točke čime je određena kružnica.
Broj e nazivamo **linearni ekscentricitet** elipse, on predstavlja polovicu udaljenosti između žarišta $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, $e < a$, a broj ϵ, $0 < \epsilon < 1$, nazivamo **numerički ekscentricitet**.

Numerički ekscentricitet karakterizira oblik elipse u tom smislu što su elipse s jednakim numeričkim ekscentricitetom međusobno slične. Linearni i numerički ekscentricitet vezani su relacijom $e = a\epsilon$. Što je ϵ je bliži 0, to je elipsa bliža kružnici, tj. kružnica ima numerički ekcentricitet jednak 0. Ako je numerički ekcentricitet blizak 1 tada je elipsa jako spljoštena.



$\epsilon = 0.025$ $\epsilon = 0.95$

Slika 5: Primjer dvije elipse s različitim numeričkim eksectricitetima

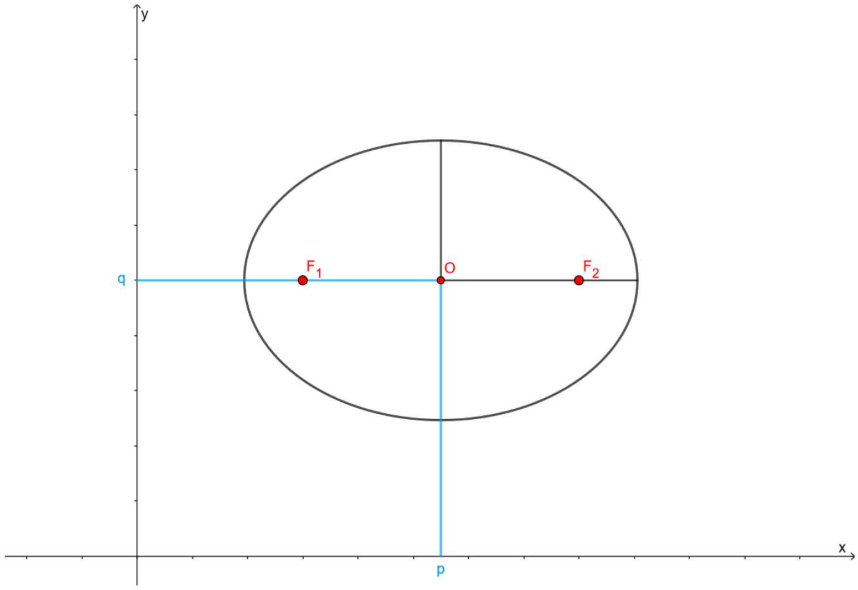
Ako odaberemo u koordinatnom sustavu točke F_1 i F_2 takve da leže na osi x te je polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ smješteno u ishodištu koordinatnog sustava tada za točku $T = (x, y)$ na elipsi, prema defniciji 2, mora vrijediti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Ta jednadžba naziva se kanonskom jednadžbom elipse, te ju još nazivamo i centralna ili središnja jednadžba elipse zato što je središte elipse smješteno u ishodište koordinatnog sustava. Elipsa je centralno simetrična krivulja sa središtem simetrije u točki O.

Jednadžbu translatirane elipse dobivamo kada izvršimo translaciju elipse duž osi X za udaljenost p i duž osi y za udaljenost q i pišemo

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$



Slika 6: Translatirana elipsa sa središtem u točki $O(p, q)$

1.3. Parabola

Krivulja koja nastaje presjekom stošca i bilo koje ravnine paralelne s jednom izvodnicom te plohe zove se parabola.

Sljedeća definicija je preuzeta iz [1].

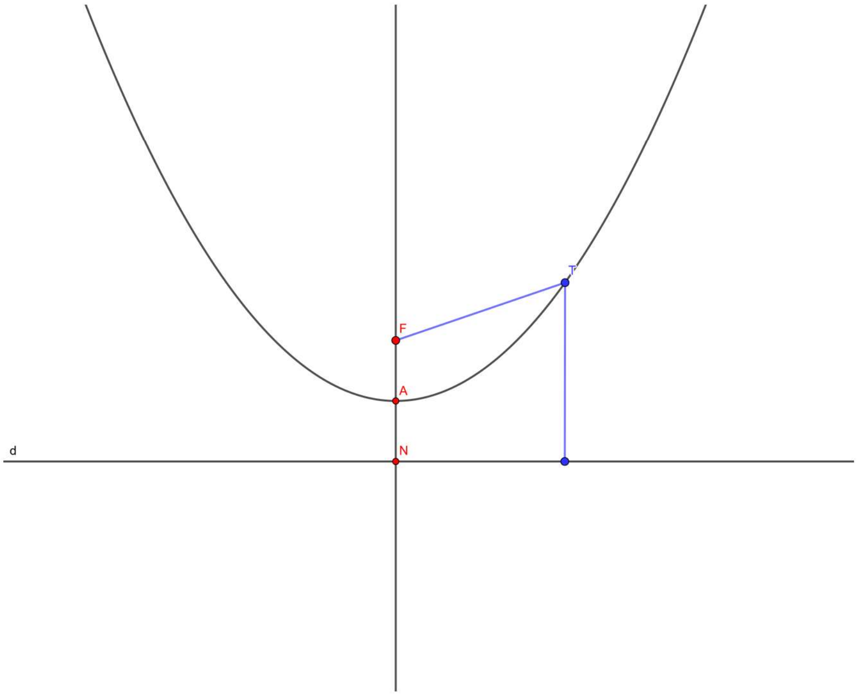
Definicija 3. *Skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d i jedne čvrste točke F u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu zove se parabola.*

Kraće, to je skup točaka definiran na sljedeći način

$$P = \{T \in \pi; d(T, d) = d(T, F)\}.$$

Točka F naziva se **fokus** ili **žarište** parabole, a pravac d **direktrisa** ili **ravnalica**. Usmjerenu dužinu $\overrightarrow{TF}$ zovemo **radijvektor** točke T.
Sa slovom N označimo nožište okomice iz F na d, tada je polovište dužine $\overline{FN}$ **tjeme parabole**, označimo ga s A. Okomicu povučenu kroz N zovemo **os parabole**.

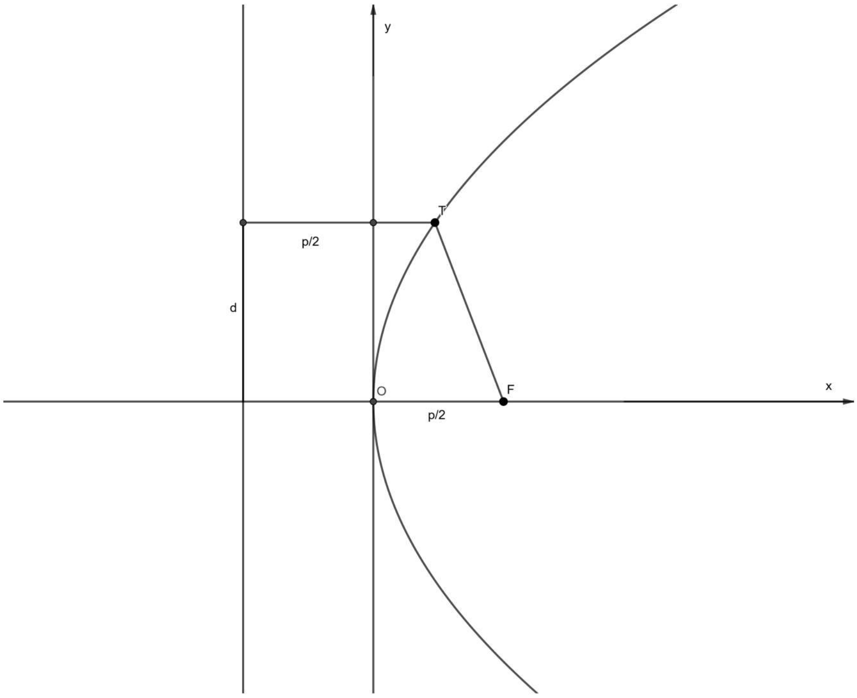
Ako znamo koordinate žarišta F i jednadžbu direktrise d, lako ćemo konstruirati parabolu.



Slika 7: Parabola sa žarištem F i direktrisom d

Parabola nije definirana "ispod" tjemena (Slika 7).

Postavimo Kartezijev koordinatni koordinatni sustav tako da je ishodište O u njezinom tjemenu i os x neka se podudara s osi parabole, te izvedimo jednadžbu te parabole.
U pravokutnom koordinatnom sustavu jednadžba direktrise je $x = -\frac{p}{2}$, gdje je $p > 0$ realan broj. Neka je broj p parametar, a broj $\frac{p}{2}$ poluparametar parbole. Točka O jednako je udaljena od žarišta parabole i od direktrise d pa fokus parabole tada ima koordinate $F = (\frac{p}{2}, 0)$.



Slika 8: Parabola sa žarištem F i direktrisom d

Ranije smo definirali parabolu i znamo da točka T leži na paraboli ako $d(T,d) = d(T,F)$. Za neku točku T parabole vrijedi

$$d(T,d) = x + \frac{p}{2}, \qquad d(T,F) = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$\Longrightarrow x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \tag{6}$$

Jednadžbu (6) nazivamo kanonska jednadžba parabole.

Ako napravimo translaciju parabole duž osi x za dužinu a i duž osi y za dužinu b dobivamo jednadžbu translatirane parabole

$$(y-b)^2 = 2p(x-a). \tag{7}$$

1.4. Hiperbola

Hiperbolu dobivamo kao presjek ravnine paralelne s dvije izvodnice stošca.

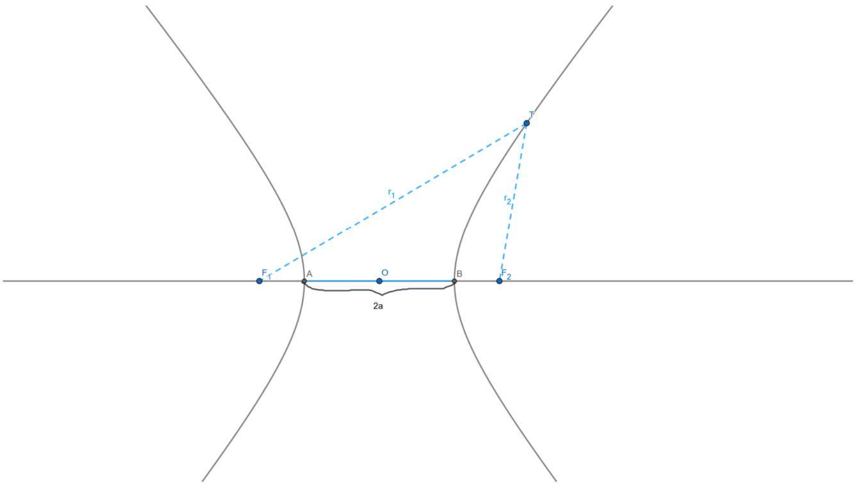
Definicija je preuzeta iz [2].

Definicija 4. *Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke u π udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realan broj $a < e$. Hiperbola je skup točaka u π za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$.*

Kraće,

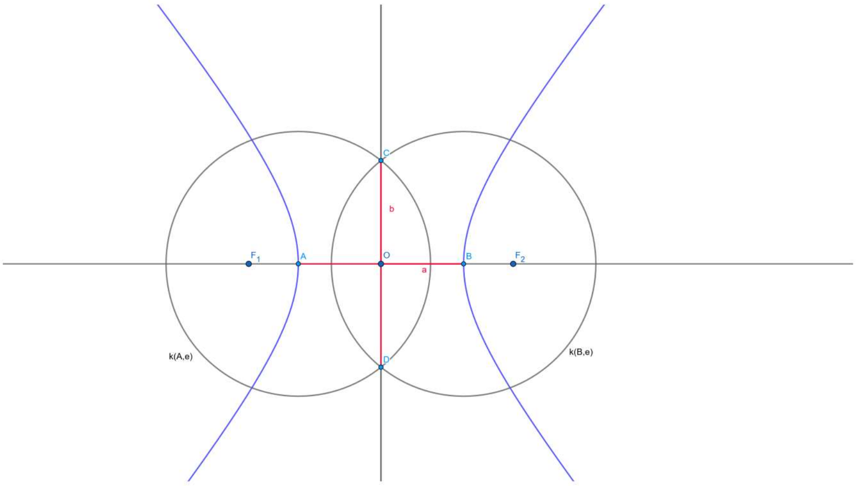
$$H = \{T \in \pi; |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}. \tag{8}$$

Hiperbola kao i elipsa ima dva žarišta, označavamo ih s F_1 i F_2. Usmjerenu dužinu koja spaja bilo koju točku hiperbole s jednim od žarišta naziva se **radijus vektor** te točke. Polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ označiti ćemo ga s O i zvati ga središte hiperbole. Tjemena hiperbole točke su A i B, jedine dvije točke u kojima pravac F_1F_2 siječe hiperbolu. Dužina $\overline{AB}$ naziva se **realna** os i jednaka je $2a$.



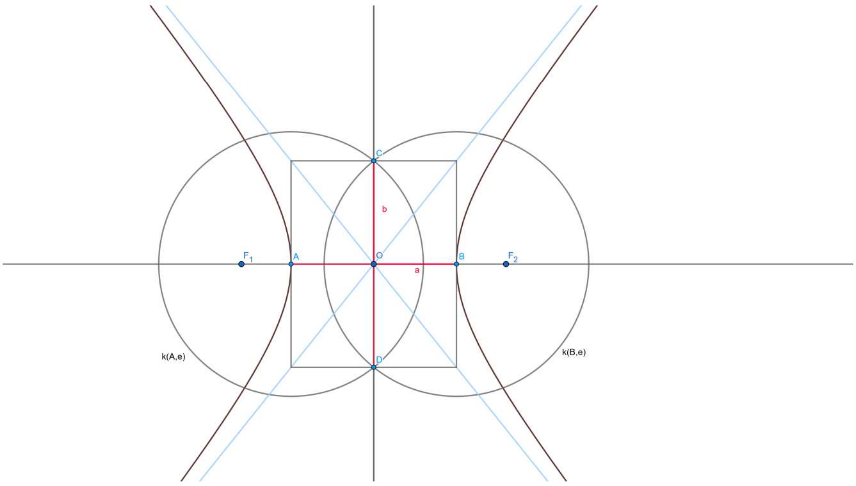
Slika 9: Hiperbola sa žarištima F_1 i F_2 i radijus vektorima r_1 i r_2

Druga os hiperbole je dužina $\overline{CD}$ pri čemu točke C i D dobijemo kao presjek kružnica $k(A, e)$ i $k(B, e)$ sa simetralom realne osi. Nazivamo ju **imaginarna** os zato što hiperbola ne siječe tu os. Duljinu $\overline{CD}$ označavamo s $2b$, a duljina b dana je izrazom $b^2 = \sqrt{e^2 - a^2}$. Broj $e, e > a$ nazivamo linearnim ekscentricitetom hiperbole, a $\epsilon = \frac{e}{a}$ numeričkim ekscentricitetom.



Slika 10: Hiperbola sa žarištima F_1 i F_2, te imaginarnom i realnom osi

Ako povučemo pravce kroz dijagonale pravokutnika stranica $2a$ i $2b$ sa središtem u središtu naše hiperbole, dobijemo pravce koje zovemo asimptote hiperbole. Pravac je asimptota krivulje ako se njegova udaljenost do krivulje približava nuli kada jedna ili obje koordinate teže u beskonačnost.



Slika 11: Hiperbola sa žarištima F_1 i F_2

Odredit ćemo jednadžbu hiperbole tako što ćemo središte hiperbole O staviti u središte koordinatnog sustava te će tada žarišta F_1 i F_2 imati koordinate $(-e, 0)$ i $(e, 0)$. Označit ćemo s $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$ radijus vektore točke T pri čemu je $T = (x, y)$ bilo koja točka hiperbole (Slika 9).

Iz defnicije hiperbole:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Slično kao kod izvoda jednadžbe elipse, uvrštavamo i dobivamo jednadžbu hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

2. Plohe drugog reda

Ploha drugog reda je skup svih $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju algebarsku jednadžbu drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \tag{10}$$

pri čemu su svi koeficijenti realni brojevi, te je barem jedan od njih različit od nule.

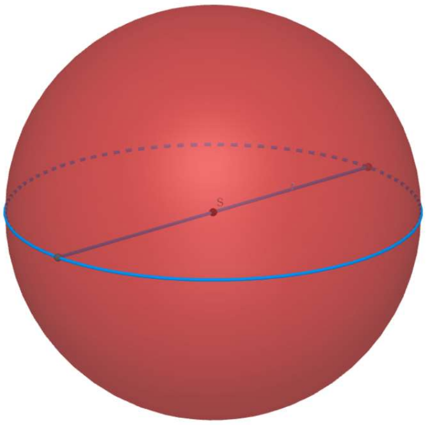
Napraviti ćemo klasifikaciju šest osnovnih ploha drugoga reda, prikazati ih grafički i opisati te dati njihove formule.

2.1. Sfera

Definicija je preuzeta iz [2].

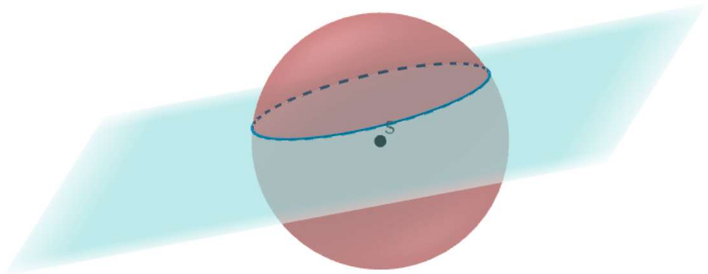
Definicija 5. *Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od neke čvrste točke tog prostora.*

Najpoznatija i najjednostavnija ploha drugog reda je sfera. Sferu nazivamo rotacijska ploha zato što ju dobivamo rotiranjem kružnice oko bilo kojega njezina promjera.



Slika 12: Sfera sa središtem u točki S i polumjerom r

Promjer je najveća udaljenost između točaka sfere. Udaljenost proizvoljne točke sfere i središta sfere zovemo **polumjer**. Kružnica koja leži na sferi i središte joj je ujedno i središte sfere naziva se **glavna** kružnica sfere. Svaki presjek ravnine sa sferom je kružnica ili točka ili prazan skup.



Slika 13: Presjek sfere i ravnine je kružnica

Neka je r polumjer sfere i točka $T = (x, y, z)$ bilo koja točka sfere. Ako središte sfere stavimo u točku $S = (a, b, c)$ dobivamo jednadžbu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \tag{11}$$

Vidimo da je jednadžba (11) zapravo poseban slučaj jednadžbe (10). Sfera sa središtem u ishodištu dana je jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

2.2. Elipsoid

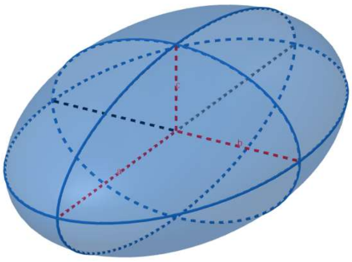
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

Definicija 6. *Ploha drugog reda određena jednadžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{12}$$

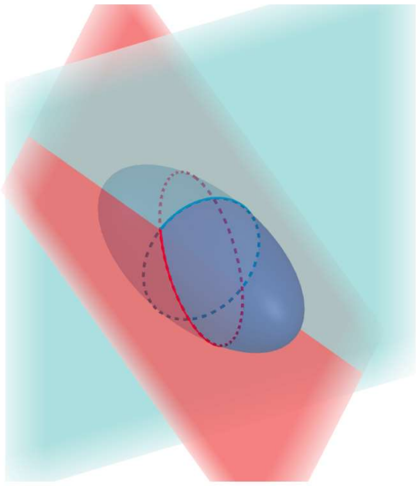
naziva se elipsoid.

Elipsoid je centralnosimetrična omeđena ploha. Glavne osi su mu paralelne s osima x, y i z, i duljine poluosi su redom a, b, c.



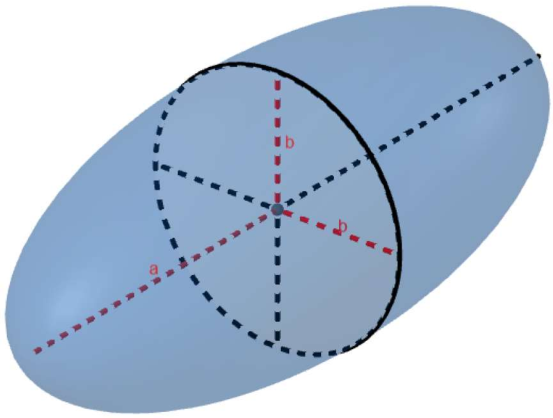
Slika 14: Elipsoid s poluosima a, b i c

Kada su sve poluosi elipsoida iste duljine tj. $a = b = c \neq 0$, postaje sfera polumjera a.



Slika 15: Presjeci ravnina sa elipsoidom

Elipsoid kojemu su dvije osi iste duljine, a treća je različita, npr. $a \neq b = c$ naziva se **sferoid**. Sferoid je poznat još i pod nazivom rotacijski elipsoid zato što nastaje rotacijom elipse oko jedne od njezinih glavnih osi.



Slika 16: Sferoid (elipsoid s poluosima a, b, b)

2.3. Eliptički paraboloid

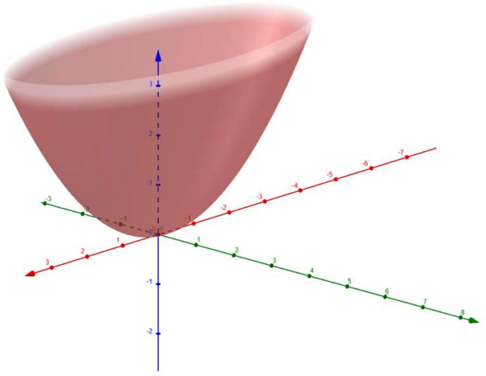
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

Definicija 7. *Ploha drugog reda koja zadovoljava jednadžbu*

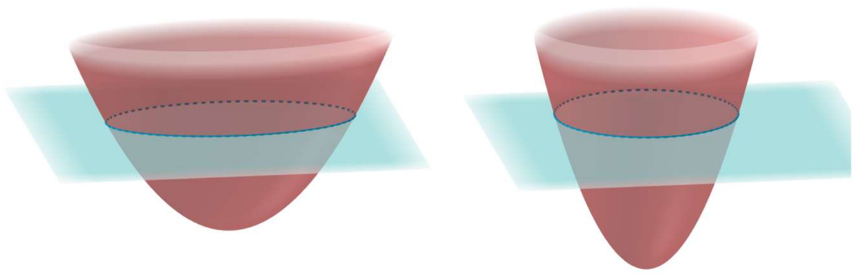
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{13}$$

naziva se eliptički paraboloid.

Eliptički paraboloid nije omeđen odozgo, te je simetričan obzirom na xz i yz ravnine.

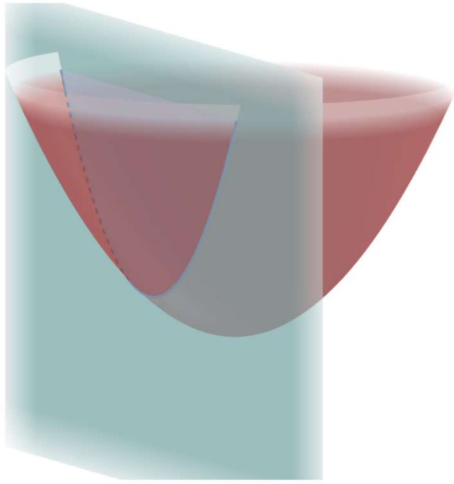


Slika 17: Eliptički paraboloid sa vrhom u $(0, 0, 0)$



Slika 18: Presjek eliptičkog i kružnog paraboloida s ravninom $z = k$

Presjek ravnina $x = k$ i $y = k$ s eliptičkim paraboloidom jesu parabole.

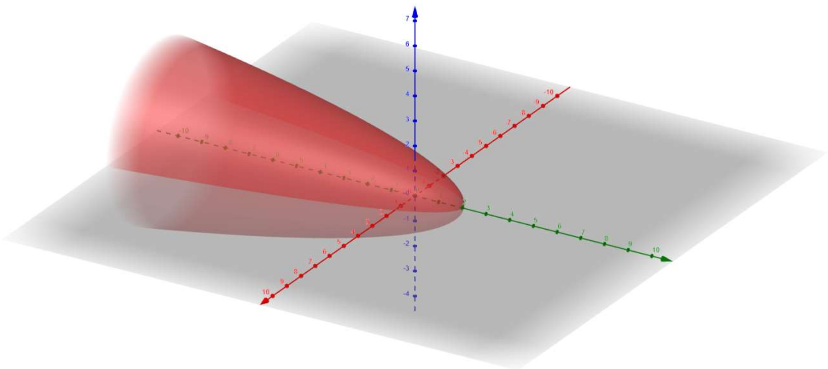


Slika 19: Presjek eliptičkog paraboloida s ravninom $x = k$

Jednadžba translatiranog eliptičkog paraboloida s vrhom u točki $S = (x_0, y_0, z_0)$ dana je u obliku

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0. \tag{14}$$

Eliptički paraboloid duž neke druge osi dobijemo zamjenom varijabli, a predznak nezavisne varijable govori nam na koju stranu je paraboloid okrenut. Pomaknuti i polegnuti eliptički paraboloid prikazan je na slici 19.



Slika 20: Eliptički paraboloid $-y + 2 = x^2 + z^2$

2.4. Jednoplošni hiperboloid

Definicija je iz [10].

Definicija 8. *Jednoplošni hiperboloid je ploha parametrizirana jednadžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{15}$$

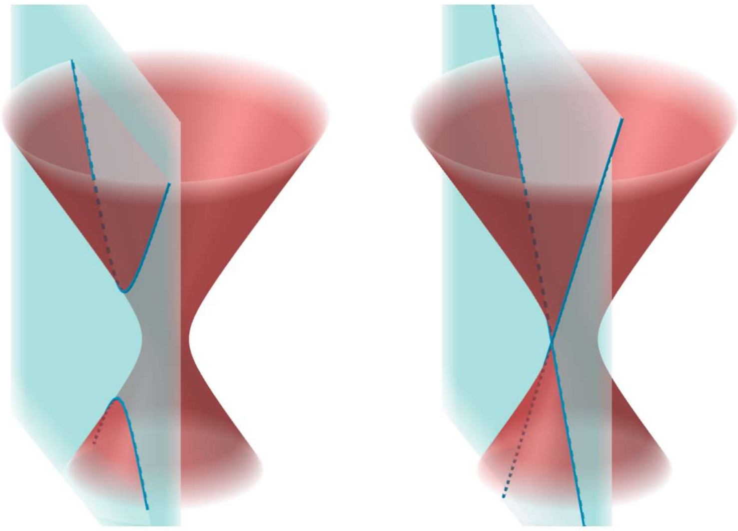
Hiperboloid nije omeđen, te je simetričan obzirom na sve osi.

Slika 21: Jednoplošni hiperboloid

Nivo krivulje jednoplošnog hiperboloida su elipse sa središtem na osi z. Presjek jednoplošnog hiperboloida i ravnine

$$\begin{array}{rccll} x = k : \text{za} & k & \neq & \pm a & \text{je hiperbola} \\ & k & = & \pm a & \text{su pravci} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccll} y = k : \text{za} & k & \neq & \pm b & \text{je hiperbola} \\ & k & = & \pm b & \text{su pravci} \end{array}$$

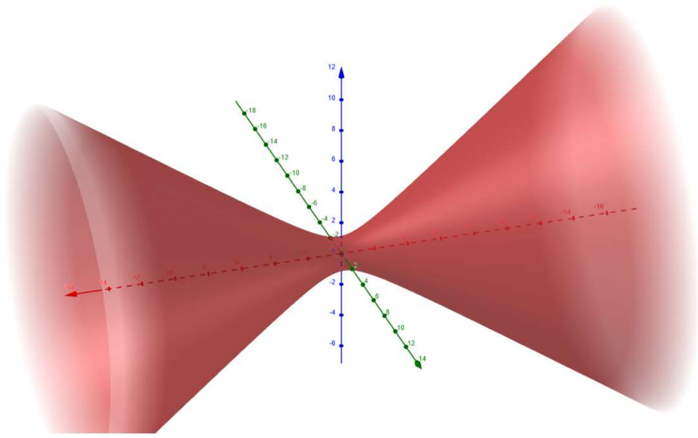


Slika 22: Presjeci jednoplošnog hiperboloida pravcem $x = k$

Kada je $a = b$, hiperboloid je rotacijska ploha. Jednoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.
Translatirani jednoplošni hiperboloid kao i kod ostalih ploha dobijemo pomicanjem središta hiperboloida. Jednadžba translatiranog jednoplošnog hiperboloida sa središtem u $S(x_0, y_0, z_0)$ određena je

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1. \tag{16}$$

Zamjenom varijabli dobijemo jednoplošni hiperboloid uzduž neke druge osi (Slika 22).



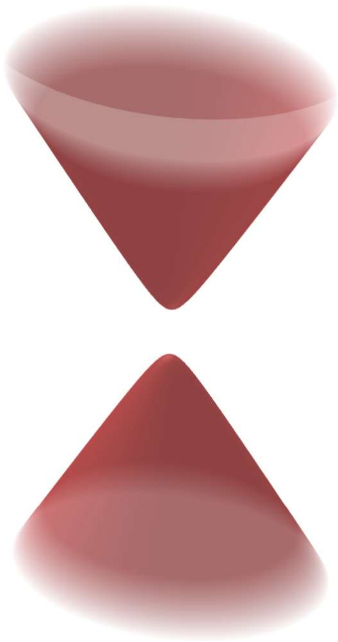
Slika 23: $\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$

2.5. Dvoplošni hiperboloid

Definicija je preuzeta iz [10].

Definicija 9. *Dvoplošni hiperboloid je ploha drugog reda generirana točkama koje zadovoljavaju jednadžbu*

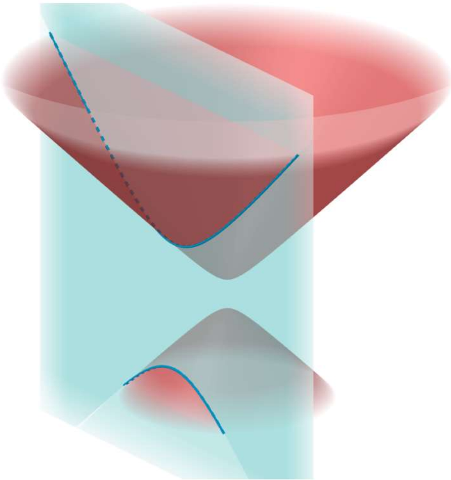
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \geq b. \tag{17}$$



Slika 24: Dvoplošni hiperboloid

Također nije omeđen te je simetričan obzirom na sve koordinatne osi.
Presjek jednoplošnog hiperboloida i ravnine

$$\begin{aligned} x &= k: \quad \text{je hiperbola} \\ y &= k: \quad \text{je hiperbola} \end{aligned}$$



Slika 25: Dvoplošni hiperboloid presječen ravninom $x = k$

Dvoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.

Jednadžba translatiranog jednoplošnog hiperboloida sa središtem u $S(x_0, y_0, z_0)$ određena je

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1. \tag{18}$$

Kao u prethodnim plohama, cikličkom zamjenom varijabli dobivamo hiperboloid koji se proteže uzduž neke druge koordinatne osi.

Literatura

[1] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovne gimnazije*, Element, Zagreb, 1998.

[2] Ž. Milin Šipuš, M. Bombardelli, *Analitička geometrija*, skripta, Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb 2008

[3] A. I. Miroševic, N. Koceić-Bilan, J. Jurko, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, math.e (Hrvatski matematički elektronički časopis), dostupno na, http://e.math.hr/broj27/mirosevic, kolovoz 2022.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb 1995.

[5] I. Slović, *Konike i Dandelinove kugle*, Matka 21, br. 82,

[6] M. Suvalj, *Krivulje drugog reda i primjene,*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/SUV03.pdf, kolovoz 2022

[7] http://lavica.fesb.unist.hr/mat2/predavanja/node50.html

[8] https://upwikihr.top/wiki/Apollonius_of_Perga

[9] https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/3DGrafika.html

[10] http://www.staff.city.ac.uk/o.castro-alvaredo/teaching/surfaces.pdf