Neodređeni integral i metode integracije

Stojaković, Diana

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Diana Stojaković

Neodređeni integral i metode integracije

Završni rad

Osijek, 2021.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
Fakultet primijenjene matematike i informatike Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Diana Stojaković

Neodređeni integral i metode integracije

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2021.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu prezentiramo pojam primitivne funkcije ili antiderivacije funkcije f kojim uvodimo pojam neodređenog integrala. Opisat ćemo svojstva neodređenog integrala i dat ćemo tablicu osnovnih integrala koju ćemo koristiti u metodama integracije i tehnikama integriranja.
Ključne riječi: primitivna funkcija, neodređeni integral, metoda supstitucije, metoda parcijalne integracije

Indefinite integral and integration methods

Abstract

In this paper, we present the concept of a primitive function or antiderivation of the function f by which we introduce the concept of an indefinite integral. We will describe the properties of the indefinite integral and give a table of basic integrals that we will use in integration methods and integration techniques.

Keywords: primitive function, indefinite integral, substitution method, partial integration method

1 Uvod

Pojam integrala je ključan pojam u području matematičke analize, a naziv je dobio od latinske riječi integralis (cjelina) jer zbrajanjem beskonačnog broja malih dijelova dobivamo cjelinu. Isaac Newton (1642.-1727.) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) su u kasnom sedamnaestom stoljeću otkrili vezu između tangente i površina, a Newton-Leibnitzova formula je danas osnova integralnog računa.

Teorem 1.1. ***(Newton-Leibnitzova formula)***$[1, Newton\text{–}Leibnizova\ formula, str. 251.]$ *Neka je funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a, b]$. *Ako je* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bilo koja primitivna funkcija od f, onda je:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pojmom primitivne funkcije ili antiderivacije funkcije f uvodimo pojam neodređenog integrala koji označava skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f. Sam postupak integriranja je vrlo složen jer integral elementarne funkcije ne daje uvijek elementarnu funkciju i zbog toga su danas mnogi integrali ostali neriješeni. U ovom radu bavit ćemo se neodređenim integralom. Najprije ćemo navesti definiciju i osnovna svojstva neodređenih integrala, a nakon toga ćemo nešto više reći o metodama integracije. Ovaj završni rad prati literaturu [1], M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1994. i dijelovi teksta su preuzeti iz knjige.

2 Neodređeni integral

2.1 Primitivna funkcija

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ jedan od skupova: interval (a,b), slijeva zatvoren interval $[a,b)$, zdesna zatvoreni interval $(a,b]$ ili segment $[a,b]$. **Primitivnom funkcijom** funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ na skupu I nazivamo svaku funkciju F sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in I.$$

Primjer 2.1.
$F(x) = \ln x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ na intervalu $I = (0,\infty)$ jer je $F'(x) = f(x)$.

Napomena 2.1.
Ako je F na intervalu I primitivna funkcija funkcije f, onda je i $x \to F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije f, gdje je C proizvoljna konstanta.

Teorem 2.1. [3, *Teorem* 5.9.]
Ako su F i G dvije primitivne funkcije funkcije f na intervalu I, onda se one razlikuju za konstantu, tj.

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \Longrightarrow F(x) - G(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Prije nego što započnemo s dokazom teorema 2.1, iskazat ćemo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti koji ćemo koristiti u samom dokazu.

Teorem 2.2. ***(Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)***
[1, *Lagrangeov teorem, str.* 199.]
Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i derivabilna na intervalu (a,b), onda postoji točka $c \in (a,b)$ takva da je

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a).$$

Dokaz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti možete naći u [1].

Dokaz teorema 2.1. Ako su $F' = f$ i $G' = f$, onda je $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$, odnosno $H'(x) = 0$, $\forall x \in I$, gdje je $H = G - F$. Neka su x_1 i x_2 bilo koje dvije točke iz domene I, pri čemu je $x_1 < x_2$. Prema **Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti** postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je:

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Kako je $H'(c) = 0$ dobivamo $H(x_2) = H(x_1)$. Dakle, $H(x) = C$, $\forall x \in I$, pa onda vrijedi $F(x) - G(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$ □

2.2 Pojam neodređenog integrala

U prethodnom poglavlju smo definirali primitivnu funkciju i naveli neka njena osnovna svojstva, te sada možemo dati definiciju neodređenog integrala.

Definicija 2.1. ***Neodređeni integral*** *funkcije* $f : I \to \mathbb{R}$ *na intervalu* I *je skup svih primitivnih funkcija funkcije* f *na intervalu* I*.*
Koristimo oznaku

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

pri čemu je F *neka* ***primitivna funkcija*** *funkcije* f *na intervalu* I*,* x *je* ***varijabla integracije****,* f ***podintegralna funkcija*** *i* C ***konstanta integracije****.*

Napomena 2.2. *Postupak traženja neodređenog integrala nazivamo* ***integriranjem****.*
Da bismo pronašli neodređeni integral funkcije f *na skupu* I *dovoljno je naći jednu njenu primitivnu funkciju.*

Napomena 2.3. *Ako funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *ima primitivnu funkciju na* I*, onda kažemo da je funkcija* f ***integrabilna*** *na* I*.*

Napomena 2.4. *Integriranje je inverzna operacija od deriviranja zato još neodređeni integral nazivamo i* ***antiderivacija****, te rezultat integriranja uvijek možemo provjeriti deriviranjem.*

2.3 Svojstva neodređenog integrala

Navedimo osnovna svojstva neodređenog integrala koja se lako mogu provjeriti koristeći definiciju neodređenog integrala i svojstva derivacije funkcije (*svojstva su preuzeta iz* [1]):

1. Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na I, onda je:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

2. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I, onda je:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x)dx\right) = f(x),$$

odnosno derivacija svake primitivne funkcije jednaka je funkciji f.

3. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I i $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je funkcija $\lambda \cdot f$ integrabilna na I i pri tome je :

$$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Ovo svojstvo nazivamo **homogenost** neodređenog integrala.

4. Ako su funkcija $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabilne na I, onda je i funkcija $f + g$ integrabilna na I i vrijedi:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Ovo svojstvo nazivamo **aditivnost** neodređenog integrala.

Napomena 2.5. $[1, Primjedba\ 7.8]$
Možemo pokazati da su 3. *i* 4. *ekvivalentna svojstvu linearnosti:*

$$\int [\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)]dx = \alpha_1 \int f(x)dx + \alpha_2 \int g(x)dx, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

i time smo pokazali da je neodređeni integral "linearna operacija", tj. ima svojstvo linearne funkcije.

2.4 Tablica neodređenih integrala

Postupak integriranja sastoji se u tome da se podintegralna funkcija dovede u vezu s funkcijama za koje su primitivne funkcije navedene u sljedećoj tablici:

$\int c\, dx = c \cdot x + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\int x^\alpha\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\vert\frac{x+a}{x-a}\right\vert + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\vert x\vert + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ch} x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\vert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\vert + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\vert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\vert + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\vert x+\sqrt{x^2-1}\vert + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\vert\frac{x+a}{x-a}\right\vert + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\vert x+\sqrt{x^2-a^2}\vert + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

Tablica 1: Tablica neodređenih integrala

3 Metode integracije

U nastavku ćemo navesti neke metode integriranja. Svaku metodu ćemo posebno opisati i navesti nekoliko primjera.

3.1 Direktna metoda integracije

Direktna metoda integracije se sastoji u tome da podintegralnu funkciju transformiramo tako da dobijemo elementarne funkcije i zatim koristimo svojstva integrala i formule iz tablice neodređenih integrala kako bismo dobili rezultat.

Primjer 3.1. *U ovom primjeru prikazat ćemo računanje integrala nekih funkcija direktnom metodom integracije.*

1. $\int (x^2+8)^2\ dx$

   Rješenje:

$$\int (x^2+8)^2\ dx = \int (x^2+16x+64)\ dx = \int x^2\ dx + 16\int x\ dx + 64\int dx = $$
$$= \frac{x^3}{3} + 16\frac{x^2}{2} + 64x + C = \frac{x^3}{3} + 8x^2 + 64x + C.$$

2. $\int \sqrt{x}(x-\sqrt[3]{x})\ dx$

   Rješenje:

$$\int \sqrt{x}(x-\sqrt[3]{x})\ dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{6}})\ dx = \int x^{\frac{3}{2}}\ dx - \int x^{\frac{5}{6}}\ dx \ = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C.$$

3. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5\sin^2 x}\right)\ dx$

   Rješenje:

$$\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5\sin^2 x}\right)\ dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx - \frac{2}{5}\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = 3\operatorname{tg} x + \frac{2}{5}\operatorname{ctg} x + C.$$

Deriviranjem desne strane jednakosti možemo provjeriti sljedeće pravilo koje nam olakšava računanje integrala:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + C.$$

Dakle, ako se u brojniku podintegralne funkcije nalazi derivacija nazivnika, tada je integral jednak prirodnom logaritmu apsolutne vrijednosti nazivnika.

Primjer 3.2. *Pokazat ćemo primjere u kojima ćemo primjeniti navedeno pravilo:*

1. $\int \frac{1}{x+4}\ dx$

   Rješenje:

$$\int \frac{1}{x+4}\ dx = \ln|x+4| + C.$$

2. $\int \operatorname{ctg} x \; dx$.

Rješenje:

$$\int \operatorname{ctg} x \; dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \; dx = \ln |\sin x| + C.$$

3.2 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije je postupak kojim uvodimo novu varijablu, pri čemu se podintegralna funkcija dovodi u vezu s kompozicijom funkcija.

Teorem 3.1. [1, *tvrdnja* 7.15.]
Neka su $[A, B]$ i $[a, b]$ segmenti, ρ derivabilna funkcija na $[a, b]$, ρ' neprekidna funkcija na $[a, b]$ i f neprekidna funkcija na $[A, B]$. Ako je $\rho([a, b]) \subseteq [A, B]$ tako da je na $[a, b]$ definirana kompozicija $f \circ \rho$, onda vrijedi:
Funkcija $x \mapsto f[\rho(x)]\rho'(x)$ na segmentu $[a, b]$ ima primitivnu funkciju. Pri tome je

$$\int f[\rho(x)]\rho'(x) \; dx = F[\rho(x)] + C, \tag{1}$$

gdje je F primitivna funkcija od f.

Dokaz. Dokaz je preuzet iz [1].
Primijetimo da je $x \mapsto f[\rho(x)]\rho'(x)$ neprekidna, pa i integrabilna na $[a, b]$, a funkcija f integrabilna na $[A, B]$. Nadalje, neka je F primitivna funkcija od f na $[A, B]$. Kako je $\rho([a, b]) \subseteq [A, B]$, kompozicija $F \circ \rho$ je derivabilna na $[a, b]$. Primjenom pravila za deriviranje kompozicije funkcija dobivamo:

$$(F \circ \rho)'(x) = F'[\rho(x)]\rho'(x) = f[\rho(x)]\rho'(x).$$

Slijedi tvrdnja $\int f[\rho(x)]\rho'(x) \; dx = F[\rho(x)] + C$.

□

Iz formule (1) dobivamo shemu za pronalaženje neodređenog integrala $\int f[\rho(x)]\rho'(x) \; dx$:

$$\int f[\rho(x)]\rho'(x)dx = \begin{vmatrix} \rho(x) = t \\ \rho'(x)dx = dt \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C = F[\rho(x)] + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, a F primitivna funkcija od f.

Primjer 3.3. *U sljedećim primjerima ćemo vidjeti primjenu metode supstitucije na neodređenom integralu.*

1. $\int \sqrt{2 - x} \; dx$

Rješenje:

$$\int \sqrt{2 - x} \; dx = \begin{vmatrix} t = 2 - x \\ dt = -dx \end{vmatrix} = -\int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(2 - x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$

Rješenje:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} = \begin{vmatrix} t = \frac{3x}{5} \\ dt = \frac{3}{5}dx \end{vmatrix} = \int \frac{5}{3\sqrt{25-25t^2}}\ dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\arcsin(t) + C = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{5}\right) + C.$$

3. $\int \sin^3 x \cos x\ dx$

Rješenje:

$$\int \sin^3 x \cos x\ dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t^3\ dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

3.3 Metoda parcijalne integracije

Iz formule za deriviranje produkta dvije funkcije dobivamo formulu za parcijalnu integraciju.

Teorem 3.2. [1, *tvrdnja* 7.18.]
Ako su $u, v : I \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne funkcije na intervalu I, onda su funkcije $u'v$ i uv' integrabilne na I i pri tome vrijedi:

$$\int u'(x)v(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ dx. \tag{2}$$

Dokaz. Dokaz je preuzet iz [1].
Kako su u i v prema pretpostavci neprekidno derivabilne funckije na I, onda su i funkcije $u'v$ i uv' neprekidne i integrabilne na I. Prema pravilu derivacije produkta dvaju funkcija dobivamo $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, pa slijedi

$$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x).$$

Integriranjem te jednakosti dobivamo:

$$\int u'(x)v(x)\ dx = (uv)(x) - \int u(x)v'(x)\ dx.$$

□

Integraciju primjenom formule (2) nazivamo **parcijalnom integracijom**.

Napomena 3.1. [1, *Primjedba* 7.10]
Kod metode parcijalne integracije treba pripaziti koju funkciju odabrati kao u', a koju kao v. Za funkciju u' bismo trebali odabrati funkciju kojom bi lakše mogli odrediti primitivnu funkciju u od u', a pri tome treba paziti da računanje integrala $\int u(x)v'(x)\ dx$ bude lakše od računanja integrala $\int u'(x)v(x)\ dx$.

Primjer 3.4. *Ovim primjerom ćemo pojasniti Napomenu 3.1.*
Izračunat ćemo $\int x \sin x \; dx$*:*

$$\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin x}_{u'} \; dx = \underbrace{-\cos x}_{u} \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{-\cos x}_{u} \underbrace{1}_{v'} \; dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Ako bi stavili za $u' = x$*,a za* $v = \sin x$*, onda bi imali:*

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} \; dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \; dx.$$

Ovdje možemo uvidjeti da je rješavanje $\int x^2 \cos x \; dx$ *složenije od rješavanja* $\int x \sin x \; dx$ *te da nas formula parcijalne integracije na ovaj način zadana vodi u pogrešnom smjeru.*

Primjer 3.5. *Riješit ćemo sljedeće integrale:*

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} \; dx$

   Rješenje:

$$\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{u'} \; dx = \underbrace{\operatorname{tg} x}_{u} \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{tg} x}_{u} \underbrace{1}_{v'} \; dx = x \operatorname{tg} x - \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx}_{I_1} =$$
$$= x \operatorname{tg} x - \ln(\cos(x)) + C.$$

$$I_1 = \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \; dx \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{t} \; dt = -\ln(t) + C = -\ln(\cos(x)) + C.$$

2. $\int x^2 \sin(2x) \; dx$

   Rješenje:

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\sin(2x)}_{u'} \; dx = \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{u} \underbrace{x^2}_{v} - \int \underbrace{-\cos(2x)}_{u} \underbrace{x}_{v'} \; dx =$$
$$= -\frac{\cos(2x)}{2} x^2 + \underbrace{\int \cos(2x) x \; dx}_{I_2} =$$
$$= -\frac{\cos(2x)}{2} x^2 + \frac{\sin(2x)}{2} x - \frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

$$I_2 = \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\cos(2x)}_{u'} \; dx = \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_{u} \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_{u} \underbrace{1}_{v'} \; dx =$$
$$= \frac{\sin(2x)}{2} x - \underbrace{\int \frac{\sin(2x)}{2} \; dx}_{I_3} = \frac{\sin(2x)}{2} x - \frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

$$I_3 = \int \frac{\sin(2x)}{2} \; dx = \begin{vmatrix} t = 2x \\ dt = 2 \; dx \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \int \sin t \; dt = -\frac{\cos(t)}{4} + C = -\frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

Primjer 3.6. *U ovom primjeru ćemo ilustrirati primjenu parcijalne integracije na neodređenom integralu čija podintegralna funkcija ovisi o cjelobrojnom parametru n.*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^n}}_{v} \cdot \underbrace{1}_{u'}\, dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^n}}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{-n\cdot 2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}}_{v'} =$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}}_{I}$$

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}$$

Napomena 3.2. $[1, Primjedba\ 7.11]$
Integral oblika

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx,$$

gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, možemo supstitucijom svesti na jedan od dva oblika:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad ili \qquad J_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}.$$

Primjer 3.7. *Integral*

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$$

riješit ćemo koristeći Napomenu 3.2.
Najprije ćemo nazivnik svesti na potpun kvadrat:

$$x^2-6x+13 = 1\cdot(x^2-6x)+13 = 1\cdot((x-3)^2-9)+13 = (x-3)^2+4$$

Stoga,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \begin{vmatrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C.$$

4 Tehnike integriranja nekih funkcija

U nastavku ćemo prikazati kako integrirati neke funkcije (npr. racionalne, iracionalne, trigonometrijske) koristeći određene tehnike integriranja.

4.1 Integriranje racionalnih funkcija

Prisjetimo se, racionalne funkcije su funkcije oblika:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n},$$

gdje su P_m i Q_n polinomi stupnja m i n, redom. Domena takve funkcije je skup realnih brojeva bez nultočke nazivnika, tj. $\{x \in \mathbb{R} : Q_n(x) \neq 0\}$. Ukoliko je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika ($n > m$), onda takvu racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom. Svaku racionalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije, a pravu racionalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj parcijalnih razlomka. Integriranje racionalnih funkcija svodimo na četiri tipa integrala.

Integral 1. tipa

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = \begin{vmatrix} t = x - a \\ dt = dx \end{vmatrix} = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| + C = A \ln|x-a| + C.$$

Integral 2. tipa

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\, dx = \begin{vmatrix} t = x - a \\ dt = dx \end{vmatrix} = A \int t^{-m} dt = A \frac{t^{-m+1}}{(-m+1)} + C = \frac{-A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$$

Integral 3. tipa

Integral 3. tipa je oblika: $\displaystyle\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\, dx$. Nazivnik $x^2 + px + q$ ćemo dopuniti do putpunog kvadrata

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}_{\phi^2}.$$

Uvodimo supstituciju $t = x + \dfrac{p}{2}$ i dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + \phi^2)^n} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + \phi^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \phi^2} = \\
&= \frac{M}{2} \ln(t^2 + \phi^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{\phi} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\phi}\right) + C = \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.
\end{aligned}$$

Integral 4. tipa

Iskoristit ćemo prethodnu supstituciju $t = x + \frac{p}{2}$ uz oznaku $\phi = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ i onda dobivamo:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+\phi^2)^n}dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+\phi^2)}{(t^2+\phi^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+\phi^2)^n} =$$
$$= \frac{-M}{2(n-1)(t^2+\phi^2)^{n-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+\phi^2)^n}}_{I_n}.$$

Integral I_n smo izračunali u Primjeru 3.6 pa slijedi da je polazni integral oblika

$$I_n = \frac{t}{(t^2+\phi^2)^n} + 2n(I_n - \phi^2 I_{n+1})$$

odnosno

$$I_n = \frac{x+\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2}^2+\phi^2)^n} + 2n(I_n - \phi^2 I_{n+1}).$$

Napomena 4.1. [1, *Primjedba* 7.12]
Integrali 1. i 3. tipa su transcedentne funkcije, dok je integral 2. tipa prava racionalna funkcija kod koje stupanj polinoma u nazivniku iznosi $(m-1)$. Integral 4. tipa sastoji se od prave racionalne funkcije kod koje je polinom u nazivniku stupnja $2(n-1)$ i od transcedentnog dijela koji sadrži funkciju arctan. *Dakle, integral prave racionalne funkcije je elemantarna funkcija koja se može prikazati kao zbroj transcedentnog i pravog racionalnog dijela.*

Primjer 4.1. *Riješit ćemo sljedeći integral* $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\, dx$.

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\, dx = \int \frac{x^2-5x+6+3}{x^2-5x+6}\, dx = \int 1\, dx + \int \frac{3}{x^2-5x+6}\, dx =$$
$$= x + 3\int \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx.$$

Kako je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika, zaključujemo da je riječ o pravoj racionalnoj funkciji. Stoga rastavljamo razlomak na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} &= \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} \Big/ \cdot (x-3)(x-2) \\
1 &= A(x-2) + B(x-3) \\
1 &= (A+B)x - 2A - 3B \\
&\Rightarrow A + B = 0 \quad i \quad -2A - 3B = 1 \\
&\Rightarrow A = 1 \quad i \quad B = -1
\end{aligned}$$

Na taj način dobivamo:

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx = x + 3\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = x + 3\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx =$$
$$= x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$$

4.2 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

1. Integral oblika

$$\int R(x, x^{q_1}, x^{q_2}, ..., x^{q_n})dx,$$

gdje je R racionalna funkcija svojih argumenata i $q_1, ..., q_n \in \mathbb{Q}$. Takav integral rješavamo uvođenjem supstitucije $x = t^k$, gdje je k najmanji zajednički višekratnik od nazivnika brojeva $q_1, q_2, ..., q_n$. Tim ćemo postupkom integral iracionalne funkcije, uz odgovarajuću supstituciju, svesti na rješavanje integrala racionalne funkcije.

Primjer 4.2.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} &= \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^6}}\, dt = 6 \int \frac{t^5}{t^3(t-1)} dt = 6 \int \frac{t^2}{t-1} dt = \\
&= \left| \begin{matrix} u = t - 1 \\ du = dt \end{matrix} \right| = 6 \int \frac{(u+1)^2}{u}\, du = 6 \int \frac{u^2 + 2u + 1}{u}\, du = \\
&= 6 \int u\, du + 6 \int 2\, du + 6 \int \frac{1}{u}\, du = 3u^2 + 12u + 6 \ln|u| + C = \\
&= 3(t-1)^2 + 12(t-1) + 6 \ln|t-1| = \\
&= 3(\sqrt[6]{x} - 1)^2 + 12(\sqrt[6]{x} - 1) + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.
\end{aligned}$$

2. Integral oblika:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

pri čemu je R racionalna funkcija od x i $\frac{ax+b}{cx+d}$. Supstitucijom $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ ovaj integral svodimo na integral racionalne funkcije.

Primjer 4.3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \left| \begin{matrix} \frac{1-x}{1+x} = t^2 & \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ 1 - x = \frac{2t^2}{1+t^2} & dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{2}{(\frac{2t^2}{1+t^2})^2} \cdot t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = \\
&= -2 \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.
\end{aligned}$$

3. Integral oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx,$$

gdje je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Koristeći Eulerove supstitucije integral ćemo svesti na racionalnu funkciju.

Eulerove supstitucije:

(a) Za $a > 0$ uzmimo supstituciju: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$. Kada kvadriramo dobijemo $bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}tx$, odakle slijedi:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, \qquad dx = \frac{-2\sqrt{a}t^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{a}t)^2} dt.$$

Tim postupkom integral iracionalne funkcije svedemo na integral racionalne funkcije.

(b) Za $a < 0$ prvo odredimo nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije $x \to ax^2 + bx + c$. Neka je $x_1 < x_2$ i onda uvodimo supstituciju:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1).$$

Kvadriranjem dobivamo $a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$, odakle je:

$$x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}, \qquad dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Kako je x funkcija od t onda polazni integral svodimo na integral racionalne funkcije.

Primjer 4.4. *Riješimo integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$
Kako je $a = 1 > 0$ koristimo prvu Eulerovu supstituciju $\sqrt{x^2 - x + 1} = t + x$. Kvadriranjem dobivamo $-x + 1 = t^2 + 2tx$, odakle slijedi da je $x = \frac{1-t^2}{1+2t}$, odnosno $dx = \frac{-2t^2-2t-2}{(2t+1)^2}\, dt$. Prema tome, imamo:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t + \frac{1 - t^2}{1 + 2t} = \frac{t^2 + t + 1}{1 + 2t}.$$

Konačno dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{\frac{-2t^2-2t-2}{(1+2t)^2}}{\frac{2+t}{1+2t}} dt = \int \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1 + 2t)(2 + t)} dt = \\
&= \int \frac{-2(t^2 + t + 1)}{(1 + 2t)(2 + t)} dt = \int \left(-1 + \frac{3t}{(t + 2)(2t + 1)}\right) dt = \\
&= -\int dt + \int \frac{-1}{2t + 1} dt + \frac{2}{t + 2} dt = -x - \frac{1}{2} \ln|2x + 1| \\
&+ 2 \ln|x + 2| + C = \sqrt{x^2 - x + 1} - x \\
&- \frac{1}{2} \ln|2(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) + 1| + 2 \ln|\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2| + C.
\end{aligned}$$

4. Integral oblika:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

gdje je P_m polinom m-tog stupnja ($m \geq 1$).

4.3 Integriranje trigonometrijskih funkcija

1. Integral oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx, \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

riješavamo na sljedeći način:

(a) Ako je $n = 2k + 1$ neparan broj, onda uvođenjem supstitucije $t = \sin x$ dobivamo:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{vmatrix} = \int t^m (1 - t^2)^k \, dt.$$

Ako je m neparan, onda supstitucijom $t = \cos x$ polazni integral prelazi u integral polinoma.

(b) Brojevi $m = 2k$ i $n = 2l$ su parni. Koristeći trigonometrijske formule:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad i \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

podintegralnu funkciju zapišemo u obliku:

$$\sin^m x \sin^n x = (\sin^2)^k (\cos^2 x)^l = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^l,$$

nakon potenciranja, transformiramo sve dok ne dobijemo samo neparne potencije funkcije cos.

Primjer 4.5. *Riješimo integral* $\int \sin^2 x \cos^2 x \; dx$:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \; dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cos^2 x \; dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2x)}{2} \; dx = \\ &= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2(2x)) \; dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x) \; dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos(4x)) \; dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x) \; dx = \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C.\end{aligned}$$

2. Integrale oblika

$$\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x) \; dx, \quad \int \sin(\alpha x)\cos(\beta x) \; dx \quad i \quad \int \cos(\alpha x)\cos(\beta x) \; dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

rješavamo pomoću trigonometrijskih formula:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha x)\sin(\beta x) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x], \\ \sin(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x], \\ \cos(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x].\end{aligned}$$

Pri tome koristimo sljedeće integrale:

$$\int \sin(ax) \; dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C \quad (a \neq 0), \qquad \int \cos(ax) \; dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C \quad (a \neq 0),$$

koji se riješavaju supstitucijom $t = ax$.

Primjer 4.6. *Riješimo integral* $\int \sin(4x)\cos(10x) \; dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin(4x)\cos(10x) \; dx &= \frac{1}{2}\int (-\sin(6x) + \sin(14x)) \; dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int \sin(6x) \; dx + \frac{1}{2}\int \sin(14x) \; dx = \\ &= \frac{1}{12}\cos(6x) - \frac{1}{28}\cos(14x) + C.\end{aligned}$$

3. Integral oblika

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx,$$

gdje je R racionalne funkcija danih argumenata i takav integral riješavamo supstitucijom $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Kad izrazimo x i deriviramo izraz dobivamo:

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Prema trigonometrijskim formulama imamo:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Odnosno, dobivamo da je integral oblika:

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Primjer 4.7. *Izračunajmo sljedeći integral* $\int \frac{dx}{5\cos x + 5\sin x + 1}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{5\cos x + 5\sin x + 1} &= \left| \begin{matrix} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\frac{2t}{1+t^2} + 1} = \int \frac{-2dt}{4t^2 - 10t - 6} = \\
&= \int \frac{-dt}{(t-3)(2t+1)} = \int \frac{-1}{7(t-3)}\ dt - \int \frac{-2}{7(2t+1)}\ dt = \\
&= \frac{-1}{7} \ln|t-3| + \frac{1}{7} \ln|2t+1| = \ln\left|\frac{2t+1}{t-3}\right| + C = \\
&= \ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C.
\end{aligned}$$

Literatura

[1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1994.

[2] P. Javor, Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 2003.

[3] B. Guljaš, Matematička analiza I i II, predavanja, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf, (pristupljeno 1.10.2021.)