

# Neodređeni integral i metode integracije

---

**Stojaković, Diana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:846677>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Diana Stojaković

# Neodređeni integral i metode integracije

Završni rad

Osijek, 2021.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
Fakultet primijenjene matematike i informatike Sveučilišni prijediplomski  
studij Matematika

Diana Stojaković

# Neodređeni integral i metode integracije

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2021.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Neodređeni integral</b>	<b>2</b>
2.1	Primitivna funkcija . . . . .	2
2.2	Pojam neodređenog integrala . . . . .	3
2.3	Svojstva neodređenog integrala . . . . .	3
2.4	Tablica neodređenih integrala . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Metode integracije</b>	<b>6</b>
3.1	Direktna metoda integracije . . . . .	6
3.2	Metoda supstitucije . . . . .	7
3.3	Metoda parcijalne integracije . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Tehnike integriranja nekih funkcija</b>	<b>11</b>
4.1	Integriranje racionalnih funkcija . . . . .	11
4.2	Integriranje nekih iracionalnih funkcija . . . . .	13
4.3	Integriranje trigonometrijskih funkcija . . . . .	14
	<b>Literatura</b>	<b>17</b>

## Sažetak

U ovom radu prezentiramo pojam primitivne funkcije ili antiderivacije funkcije  $f$  kojim uvodimo pojam neodređenog integrala. Opisat ćemo svojstva neodređenog integrala i dat ćemo tablicu osnovnih integrala koju ćemo koristiti u metodama integracije i tehnikama integriranja.

**Ključne riječi:** primitivna funkcija, neodređeni integral, metoda supstitucije, metoda parcijalne integracije

# Indefinite integral and integration methods

## Abstract

In this paper, we present the concept of a primitive function or antiderivation of the function  $f$  by which we introduce the concept of an indefinite integral. We will describe the properties of the indefinite integral and give a table of basic integrals that we will use in integration methods and integration techniques.

**Keywords:** primitive function, indefinite integral, substitution method, partial integration method

# 1 Uvod

Pojam integrala je ključan pojam u području matematičke analize, a naziv je dobio od latinske riječi *integralis* (cjelina) jer zbrajanjem beskonačnog broja malih dijelova dobivamo cjelinu. Isaac Newton (1642.-1727.) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) su u kasnom sedamnaestom stoljeću otkrili vezu između tangente i površina, a Newton-Leibnitzova formula je danas osnova integralnog računa.

**Teorem 1.1. (*Newton-Leibnitzova formula*)**[1, *Newton–Leibnizova formula*, str. 251.]  
*Neka je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$ . Ako je  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bilo koja primitivna funkcija od  $f$ , onda je:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pojmom primitivne funkcije ili antiderivacije funkcije  $f$  uvodimo pojam neodređenog integrala koji označava skup svih primitivnih funkcija dane funkcije  $f$ . Sam postupak integriranja je vrlo složen jer integral elementarne funkcije ne daje uvijek elementarnu funkciju i zbog toga su danas mnogi integrali ostali neriješeni. U ovom radu bavit ćemo se neodređenim integralom. Najprije ćemo navesti definiciju i osnovna svojstva neodređenih integrala, a nakon toga ćemo nešto više reći o metodama integracije. Ovaj završni rad prati literaturu [1], M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1994. i dijelovi teksta su preuzeti iz knjige.

## 2 Neodređeni integral

### 2.1 Primitivna funkcija

Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  jedan od skupova: interval  $(a, b)$ , slijeva zatvoren interval  $[a, b)$ , zdesna zatvoren interval  $(a, b]$  ili segment  $[a, b]$ . **Primitivnom funkcijom** funkcije  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  na skupu  $I$  nazivamo svaku funkciju  $F$  sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in I.$$

#### Primjer 2.1.

$F(x) = \ln x$  je primitivna funkcija funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  na intervalu  $I = (0, \infty)$  jer je  $F'(x) = f(x)$ .

#### Napomena 2.1.

Ako je  $F$  na intervalu  $I$  primitivna funkcija funkcije  $f$ , onda je i  $x \rightarrow F(x) + C$  primitivna funkcija funkcije  $f$ , gdje je  $C$  proizvoljna konstanta.

#### Teorem 2.1. [3, Teorem 5.9.]

Ako su  $F$  i  $G$  dvije primitivne funkcije funkcije  $f$  na intervalu  $I$ , onda se one razlikuju za konstantu, tj.

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \implies F(x) - G(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Prije nego što započnemo s dokazom teorema 2.1, iskazat ćemo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti koji ćemo koristiti u samom dokazu.

#### Teorem 2.2. (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)

[1, Lagrangeov teorem, str. 199.]

Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$  i derivabilna na intervalu  $(a, b)$ , onda postoji točka  $c \in (a, b)$  takva da je

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Dokaz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti možete naći u [1].

*Dokaz teorema 2.1.* Ako su  $F' = f$  i  $G' = f$ , onda je  $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ , odnosno  $H'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ , gdje je  $H = G - F$ . Neka su  $x_1$  i  $x_2$  bilo koje dvije točke iz domene  $I$ , pri čemu je  $x_1 < x_2$ . Prema **Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti** postoji točka  $c \in (x_1, x_2)$  takva da je:

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Kako je  $H'(c) = 0$  dobivamo  $H(x_2) = H(x_1)$ . Dakle,  $H(x) = C$ ,  $\forall x \in I$ , pa onda vrijedi  $F(x) - G(x) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 2.2 Pojam neodređenog integrala

U prethodnom poglavlju smo definirali primitivnu funkciju i naveli neka njena osnovna svojstva, te sada možemo dati definiciju neodređenog integrala.

**Definicija 2.1.** *Neodređeni integral* funkcije  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  na intervalu  $I$  je skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f$  na intervalu  $I$ .

Koristimo oznaku

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

pri čemu je  $F$  neka **primitivna funkcija** funkcije  $f$  na intervalu  $I$ ,  $x$  je **varijabla integracije**,  $f$  **podintegralna funkcija** i  $C$  **konstanta integracije**.

**Napomena 2.2.** Postupak traženja neodređenog integrala nazivamo **integriranjem**.

Da bismo pronašli neodređeni integral funkcije  $f$  na skupu  $I$  dovoljno je naći jednu njenu primitivnu funkciju.

**Napomena 2.3.** Ako funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ima primitivnu funkciju na  $I$ , onda kažemo da je funkcija  $f$  **integrabilna** na  $I$ .

**Napomena 2.4.** Integriranje je inverzna operacija od deriviranja zato još neodređeni integral nazivamo i **antiderivacija**, te rezultat integriranja uvijek možemo provjeriti deriviranjem.

## 2.3 Svojstva neodređenog integrala

Navedimo osnovna svojstva neodređenog integrala koja se lako mogu provjeriti koristeći definiciju neodređenog integrala i svojstva derivacije funkcije (*svojstva su preuzeta iz [1]*):

1. Ako funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilna na  $I$ , onda je:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

2. Ako je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna na  $I$ , onda je:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int f(x)dx \right) = f(x),$$

odnosno derivacija svake primitivne funkcije jednaka je funkciji  $f$ .

3. Ako je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna na  $I$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$ , onda je funkcija  $\lambda \cdot f$  integrabilna na  $I$  i pri tome je :

$$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Ovo svojstvo nazivamo **homogenost** neodređenog integrala.

4. Ako su funkcija  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilne na  $I$ , onda je i funkcija  $f + g$  integrabilna na  $I$  i vrijedi:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Ovo svojstvo nazivamo **aditivnost** neodređenog integrala.



**Napomena 2.5.** [1, *Primjedba 7.8*]

*Možemo pokazati da su 3. i 4. ekvivalentna svojstvu linearnosti:*

$$\int [\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)] dx = \alpha_1 \int f(x) dx + \alpha_2 \int g(x) dx, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

*i time smo pokazali da je neodređeni integral "linearna operacija", tj. ima svojstvo linearne funkcije.*

## 2.4 Tablica neodređenih integrala

Postupak integriranja sastoji se u tome da se podintegralna funkcija dovede u vezu s funkcijama za koje su primitivne funkcije navedene u sljedećoj tablici:

$\int c \, dx = c \cdot x + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln  x + \sqrt{x^2-1}  + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln  x + \sqrt{x^2-a^2}  + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$

Tablica 1: Tablica neodređenih integrala

### 3 Metode integracije

U nastavku ćemo navesti neke metode integriranja. Svaku metodu ćemo posebno opisati i navesti nekoliko primjera.

#### 3.1 Direktna metoda integracije

Direktna metoda integracije se sastoji u tome da podintegralnu funkciju transformiramo tako da dobijemo elementarne funkcije i zatim koristimo svojstva integrala i formule iz tablice neodređenih integrala kako bismo dobili rezultat.

**Primjer 3.1.** U ovom primjeru prikazat ćemo računanje integrala nekih funkcija direktnom metodom integracije.

1.  $\int (x^2 + 8)^2 dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 8)^2 dx &= \int (x^2 + 16x + 64) dx = \int x^2 dx + 16 \int x dx + 64 \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 16 \frac{x^2}{2} + 64x + C = \frac{x^3}{3} + 8x^2 + 64x + C.\end{aligned}$$

2.  $\int \sqrt{x}(x - \sqrt[3]{x}) dx$

Rješenje:

$$\int \sqrt{x}(x - \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{6}}) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int x^{\frac{5}{6}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C.$$

3.  $\int \left( \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5 \sin^2 x} \right) dx$

Rješenje:

$$\int \left( \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5 \sin^2 x} \right) dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{2}{5} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3 \operatorname{tg} x + \frac{2}{5} \operatorname{ctg} x + C.$$

Deriviranjem desne strane jednakosti možemo provjeriti sljedeće pravilo koje nam olakšava računanje integrala:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Dakle, ako se u brojniku podintegralne funkcije nalazi derivacija nazivnika, tada je integral jednak prirodnom logaritmu apsolutne vrijednosti nazivnika.

**Primjer 3.2.** Pokazat ćemo primjere u kojima ćemo primijeniti navedeno pravilo:

1.  $\int \frac{1}{x+4} dx$

Rješenje:

$$\int \frac{1}{x+4} dx = \ln |x+4| + C.$$

2.  $\int \operatorname{ctg} x \, dx$ .

Rješenje:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

### 3.2 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije je postupak kojim uvodimo novu varijablu, pri čemu se podintegralna funkcija dovodi u vezu s kompozicijom funkcija.

**Teorem 3.1.** [1, tvrdnja 7.15.]

Neka su  $[A, B]$  i  $[a, b]$  segmenti,  $\rho$  derivabilna funkcija na  $[a, b]$ ,  $\rho'$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  i  $f$  neprekidna funkcija na  $[A, B]$ . Ako je  $\rho([a, b]) \subseteq [A, B]$  tako da je na  $[a, b]$  definirana kompozicija  $f \circ \rho$ , onda vrijedi:

Funkcija  $x \mapsto f[\rho(x)]\rho'(x)$  na segmentu  $[a, b]$  ima primitivnu funkciju. Pri tome je

$$\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx = F[\rho(x)] + C, \quad (1)$$

gdje je  $F$  primitivna funkcija od  $f$ .

*Dokaz.* Dokaz je preuzet iz [1].

Primijetimo da je  $x \mapsto f[\rho(x)]\rho'(x)$  neprekidna, pa i integrabilna na  $[a, b]$ , a funkcija  $f$  integrabilna na  $[A, B]$ . Nadalje, neka je  $F$  primitivna funkcija od  $f$  na  $[A, B]$ . Kako je  $\rho([a, b]) \subseteq [A, B]$ , kompozicija  $F \circ \rho$  je derivabilna na  $[a, b]$ . Primjenom pravila za deriviranje kompozicije funkcija dobivamo:

$$(F \circ \rho)'(x) = F'[\rho(x)]\rho'(x) = f[\rho(x)]\rho'(x).$$

Slijedi tvrdnja  $\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx = F[\rho(x)] + C$ . □

Iz formule (1) dobivamo shemu za pronalaženje neodređenog integrala  $\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx$ :

$$\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx = \left| \begin{array}{l} \rho(x) = t \\ \rho'(x) \, dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) \, dt = F(t) + C = F[\rho(x)] + C,$$

gdje je  $C$  proizvoljna konstanta, a  $F$  primitivna funkcija od  $f$ .

**Primjer 3.3.** U sljedećim primjerima ćemo vidjeti primjenu metode supstitucije na neodređenom integralu.

1.  $\int \sqrt{2-x} \, dx$

Rješenje:

$$\int \sqrt{2-x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-x \\ dt = -dx \end{array} \right| = - \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{3x}{5} \\ dt = \frac{3}{5} dx \end{array} \right| = \int \frac{5}{3\sqrt{25-25t^2}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \frac{1}{3} \arcsin(t) + C = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3x}{5}\right) + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \sin^3 x \cos x dx$$

Rješenje:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

### 3.3 Metoda parcijalne integracije

Iz formule za deriviranje produkta dvije funkcije dobivamo formulu za parcijalnu integraciju.

**Teorem 3.2.** [1, tvrdnja 7.18.]

Ako su  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidno derivabilne funkcije na intervalu  $I$ , onda su funkcije  $u'v$  i  $uv'$  integrabilne na  $I$  i pri tome vrijedi:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx. \quad (2)$$

*Dokaz.* Dokaz je preuzet iz [1].

Kako su  $u$  i  $v$  prema pretpostavci neprekidno derivabilne funkcije na  $I$ , onda su i funkcije  $u'v$  i  $uv'$  neprekidne i integrabilne na  $I$ . Prema pravilu derivacije produkta dvaju funkcija dobivamo  $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ , pa slijedi

$$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x).$$

Integriranjem te jednakosti dobivamo:

$$\int u'(x)v(x) dx = (uv)(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

□

Integraciju primjenom formule (2) nazivamo **parcijalnom integracijom**.

**Napomena 3.1.** [1, Primjedba 7.10]

Kod metode parcijalne integracije treba pripaziti koju funkciju odabrati kao  $u'$ , a koju kao  $v$ . Za funkciju  $u'$  bismo trebali odabrati funkciju kojom bi lakše mogli odrediti primitivnu funkciju  $u$  od  $u'$ , a pri tome treba paziti da računanje integrala  $\int u(x)v'(x) dx$  bude lakše od računanja integrala  $\int u'(x)v(x) dx$ .

**Primjer 3.4.** Ovim primjerom ćemo pojasniti Napomenu 3.1.

Izračunat ćemo  $\int x \sin x \, dx$ :

$$\int \underbrace{x}_v \underbrace{\sin x}_{u'} \, dx = \underbrace{-\cos x}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{-\cos x}_u \underbrace{1}_{v'} \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Ako bi stavili za  $u' = x$ , a za  $v = \sin x$ , onda bi imali:

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sin x}_v \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

Ovdje možemo uvidjeti da je rješavanje  $\int x^2 \cos x \, dx$  složenije od rješavanja  $\int x \sin x \, dx$  te da nas formula parcijalne integracije na ovaj način zadana vodi u pogrešnom smjeru.

**Primjer 3.5.** Riješit ćemo sljedeće integrale:

1.  $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{u'} \, dx &= \underbrace{\operatorname{tg} x}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{\operatorname{tg} x}_u \underbrace{1}_{v'} \, dx = x \operatorname{tg} x - \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx}_{I_1} = \\ &= x \operatorname{tg} x - \ln(\cos(x)) + C. \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t} \, dt = -\ln(t) + C = -\ln(\cos(x)) + C.$$

2.  $\int x^2 \sin(2x) \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_v \underbrace{\sin(2x)}_{u'} \, dx &= \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_u \underbrace{x^2}_v - \int \underbrace{-\cos(2x)}_u \underbrace{x}_{v'} \, dx = \\ &= -\frac{\cos(2x)}{2} x^2 + \underbrace{\int \cos(2x)x \, dx}_{I_2} = \\ &= -\frac{\cos(2x)}{2} x^2 + \frac{\sin(2x)}{2} x - \frac{\cos(2x)}{4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \underbrace{x}_v \underbrace{\cos(2x)}_{u'} \, dx = \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_u \underbrace{1}_{v'} \, dx = \\ &= \frac{\sin(2x)}{2} x - \underbrace{\int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx}_{I_3} = \frac{\sin(2x)}{2} x - \frac{\cos(2x)}{4} + C. \end{aligned}$$

$$I_3 = \int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sin t \, dt = -\frac{\cos(t)}{4} + C = -\frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

**Primjer 3.6.** U ovom primjeru ćemo ilustrirati primjenu parcijalne integracije na neodređenom integralu čija podintegralna funkcija ovisi o cjelobrojnom parametru  $n$ .

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}}_v \cdot \underbrace{1}_{u'} dx = \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}}_v - \int \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{-n \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}}}_{v'} dx = \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}}_I
 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}$$

**Napomena 3.2.** [1, Primjedba 7.11]

Integral oblika

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx,$$

gdje su  $p, q \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$ , možemo supstitucijom svesti na jedan od dva oblika:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad \text{ili} \quad J_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}.$$

**Primjer 3.7.** Integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$$

riješiti ćemo koristeći Napomenu 3.2.

Najprije ćemo nazivnik svesti na potpun kvadrat:

$$x^2 - 6x + 13 = 1 \cdot (x^2 - 6x) + 13 = 1 \cdot ((x - 3)^2 - 9) + 13 = (x - 3)^2 + 4$$

Stoga,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} &= \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} t = x - 3 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{2} + C.
 \end{aligned}$$

## 4 Tehnike integriranja nekih funkcija

U nastavku ćemo prikazati kako integrirati neke funkcije (npr. racionalne, iracionalne, trigonometrijske) koristeći određene tehnike integriranja.

### 4.1 Integriranje racionalnih funkcija

Prisjetimo se, racionalne funkcije su funkcije oblika:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n},$$

gdje su  $P_m$  i  $Q_n$  polinomi stupnja  $m$  i  $n$ , redom. Domena takve funkcije je skup realnih brojeva bez nultočke nazivnika, tj.  $\{x \in \mathbb{R} : Q_n(x) \neq 0\}$ . Ukoliko je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika ( $n > m$ ), onda takvu racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom. Svaku racionalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije, a pravu racionalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj parcijalnih razlomka. Integriranje racionalnih funkcija svodimo na četiri tipa integrala.

**Integral 1. tipa**

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \left| \frac{t = x-a}{dt = dx} \right| = A \int \frac{dt}{t} = A \ln |t| + C = A \ln |x-a| + C.$$

**Integral 2. tipa**

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = \left| \frac{t = x-a}{dt = dx} \right| = A \int t^{-m} dt = A \frac{t^{-m+1}}{(-m+1)} + C = \frac{-A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$$

**Integral 3. tipa**

Integral 3. tipa je oblika:  $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$ . Nazivnik  $x^2+px+q$  ćemo dopuniti do potpunog kvadrata

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}_{\phi^2}.$$

Uvodimo supstituciju  $t = x + \frac{p}{2}$  i dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + \phi^2)^n} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + \phi^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \phi^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + \phi^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{\phi} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\phi}\right) + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$



#### Integral 4. tipa

Iskoristit ćemo prethodnu supstituciju  $t = x + \frac{p}{2}$  uz oznaku  $\phi = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$  i onda dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + \phi^2)^n} dt = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + \phi^2)}{(t^2 + \phi^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \phi^2)^n} = \\ &= \frac{-M}{2(n-1)(t^2 + \phi^2)^{n-1}} + \underbrace{\left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \phi^2)^n}}_{I_n}.\end{aligned}$$

Integral  $I_n$  smo izračunali u Primjeru 3.6 pa slijedi da je polazni integral oblika

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + \phi^2)^n} + 2n(I_n - \phi^2 I_{n+1})$$

odnosno

$$I_n = \frac{x + \frac{p}{2}}{\left(x + \frac{p}{2} + \phi^2\right)^n} + 2n(I_n - \phi^2 I_{n+1}).$$

**Napomena 4.1.** [1, *Primjedba 7.12*]

*Integrali 1. i 3. tipa su transcendentne funkcije, dok je integral 2. tipa prava racionalna funkcija kod koje stupanj polinoma u nazivniku iznosi  $(m-1)$ . Integral 4. tipa sastoji se od prave racionalne funkcije kod koje je polinom u nazivniku stupnja  $2(n-1)$  i od transcendentnog dijela koji sadrži funkciju arctan. Dakle, integral prave racionalne funkcije je elementarna funkcija koja se može prikazati kao zbroj transcendentnog i pravog racionalnog dijela.*

**Primjer 4.1.** Riješit ćemo sljedeći integral  $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{x^2 - 5x + 6 + 3}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 1 dx + \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6} dx = \\ &= x + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx.\end{aligned}$$

Kako je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika, zaključujemo da je riječ o pravoj racionalnoj funkciji. Stoga rastavljamo razlomak na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \Big/ \cdot (x-3)(x-2) \\ 1 &= A(x-2) + B(x-3) \\ 1 &= (A+B)x - 2A - 3B \\ \Rightarrow A+B &= 0 \quad i \quad -2A - 3B = 1 \\ \Rightarrow A &= 1 \quad i \quad B = -1\end{aligned}$$

Na taj način dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx &= x + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = x + 3 \int \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \\ &= x + 3 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + C = x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.\end{aligned}$$

## 4.2 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

1. Integral oblika

$$\int R(x, x^{q_1}, x^{q_2}, \dots, x^{q_n}) dx,$$

gdje je  $R$  racionalna funkcija svojih argumenata i  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ . Takav integral rješavamo uvođenjem supstitucije  $x = t^k$ , gdje je  $k$  najmanji zajednički višekratnik od nazivnika brojeva  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Tim ćemo postupkom integral iracionalne funkcije, uz odgovarajuću supstituciju, svesti na rješavanje integrala racionalne funkcije.

**Primjer 4.2.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x}}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{\sqrt[3]{t^{12} - \sqrt{t^6}}} dt = 6 \int \frac{t^5}{t^3(t-1)} dt = 6 \int \frac{t^2}{t-1} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t-1 \\ du = dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{(u+1)^2}{u} du = 6 \int \frac{u^2 + 2u + 1}{u} du = \\ &= 6 \int u du + 6 \int 2 du + 6 \int \frac{1}{u} du = 3u^2 + 12u + 6 \ln |u| + C = \\ &= 3(t-1)^2 + 12(t-1) + 6 \ln |t-1| = \\ &= 3(\sqrt[6]{x} - 1)^2 + 12(\sqrt[6]{x} - 1) + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C. \end{aligned}$$

2. Integral oblika:

$$\int R \left( x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

pri čemu je  $R$  racionalna funkcija od  $x$  i  $\frac{ax+b}{cx+d}$ . Supstitucijom  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$  ovaj integral svodimo na integral racionalne funkcije.

**Primjer 4.3.**

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| = \int \frac{2}{\left(\frac{2t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= -2 \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \end{aligned}$$

3. Integral oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

gdje je  $R$  racionalna funkcija od  $x$  i  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . Koristeći Eulerove supstitucije integral ćemo svesti na racionalnu funkciju.

**Eulerove supstitucije:**

(a) Za  $a > 0$  uzmimo supstituciju:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$ . Kada kvadriramo dobijemo  $bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}tx$ , odakle slijedi:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, \quad dx = \frac{-2\sqrt{a}t^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{a}t)^2} dt.$$

Tim postupkom integral iracionalne funkcije svedemo na integral racionalne funkcije.

- (b) Za  $a < 0$  prvo odredimo nultočke  $x_1$  i  $x_2$  kvadratne funkcije  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ . Neka je  $x_1 < x_2$  i onda uvodimo supstituciju:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1).$$

Kvadriranjem dobivamo  $a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$ , odakle je:

$$x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Kako je  $x$  funkcija od  $t$  onda polazni integral svodimo na integral racionalne funkcije.

**Primjer 4.4.** Riješimo integral  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Kako je  $a = 1 > 0$  koristimo prvu Eulerovu supstituciju  $\sqrt{x^2 - x + 1} = t + x$ . Kvadriranjem dobivamo  $-x + 1 = t^2 + 2tx$ , odakle slijedi da je  $x = \frac{1-t^2}{1+2t}$ , odnosno  $dx = \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(2t+1)^2} dt$ . Prema tome, imamo:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t + \frac{1 - t^2}{1 + 2t} = \frac{t^2 + t + 1}{1 + 2t}.$$

Konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{\frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1+2t)^2} dt}{\frac{2+t}{1+2t}} = \int \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1+2t)(2+t)} dt = \\ &= \int \frac{-2(t^2 + t + 1)}{(1+2t)(2+t)} dt = \int \left( -1 + \frac{3t}{(t+2)(2t+1)} \right) dt = \\ &= - \int dt + \int \frac{-1}{2t+1} dt + \frac{2}{t+2} dt = -x - \frac{1}{2} \ln |2x+1| \\ &+ 2 \ln |x+2| + C = \sqrt{x^2 - x + 1} - x \\ &- \frac{1}{2} \ln |2(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) + 1| + 2 \ln |\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2| + C. \end{aligned}$$

4. Integral oblika:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

gdje je  $P_m$  polinom  $m$ -tog stupnja ( $m \geq 1$ ).

### 4.3 Integriranje trigonometrijskih funkcija

1. Integral oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

riješavamo na sljedeći način:

- (a) Ako je  $n = 2k + 1$  neparan broj, onda uvođenjem supstitucije  $t = \sin x$  dobivamo:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^m (1-t^2)^k dt.$$

Ako je  $m$  neparan, onda supstitucijom  $t = \cos x$  polazni integral prelazi u integral polinoma.

(b) Brojevi  $m = 2k$  i  $n = 2l$  su parni. Koristeći trigonometrijske formule:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad i \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

podintegralnu funkciju zapišemo u obliku:

$$\sin^m x \sin^n x = (\sin^2)^k (\cos^2 x)^l = \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^k \left( \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^l,$$

nakon potenciranja, transformiramo sve dok ne dobijemo samo neparne potencije funkcije  $\cos$ .

**Primjer 4.5.** *Riješimo integral  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ :*

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2(2x)) \, dx = \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) \, dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos(4x) \, dx = \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C. \end{aligned}$$

2. Integrale oblika

$$\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) \, dx, \quad \int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) \, dx \quad i \quad \int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) \, dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

rješavamo pomoću trigonometrijskih formula:

$$\sin(\alpha x) \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x].$$

Pri tome koristimo sljedeće integrale:

$$\int \sin(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C \quad (a \neq 0), \quad \int \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C \quad (a \neq 0),$$

koji se rješavaju supstitucijom  $t = ax$ .

**Primjer 4.6.** *Riješimo integral  $\int \sin(4x) \cos(10x) \, dx$ .*

$$\begin{aligned} \int \sin(4x) \cos(10x) \, dx &= \frac{1}{2} \int (-\sin(6x) + \sin(14x)) \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sin(6x) \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(14x) \, dx = \\ &= \frac{1}{12} \cos(6x) - \frac{1}{28} \cos(14x) + C. \end{aligned}$$

3. Integral oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gdje je  $R$  racionalne funkcija danih argumenata i takav integral riješavamo supstitucijom  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Kad izrazimo  $x$  i deriviramo izraz dobivamo:

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Prema trigonometrijskim formulama imamo:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Odnosno, dobivamo da je integral oblika:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Primjer 4.7.** Izračunajmo sljedeći integral  $\int \frac{dx}{5 \cos x + 5 \sin x + 1}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 \cos x + 5 \sin x + 1} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \frac{2t}{1+t^2} + 1} = \int \frac{-2dt}{4t^2 - 10t - 6} = \\ &= \int \frac{-dt}{(t-3)(2t+1)} = \int \frac{-1}{7(t-3)} dt - \int \frac{-2}{7(2t+1)} dt = \\ &= \frac{-1}{7} \ln |t-3| + \frac{1}{7} \ln |2t+1| = \ln \left| \frac{2t+1}{t-3} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C. \end{aligned}$$

## Literatura

- [1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1994.
- [2] P. Javor, Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 2003.
- [3] B. Guljaš, Matematička analiza I i II, predavanja, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf>, (pristupljeno 1.10.2021.)