Nejednakosti na matematičkim natjecanjima

Dumenčić, Ena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Ena Dumenčić

Nejednakosti na matematičkim natjecanjima

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Ena Dumenčić

Nejednakosti na matematičkim natjecanjima

Završni rad

Mentorica: prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2023.

Sažetak:

U ovom završnom radu prezentirane su neke od osnovnih nejednakosti i tehnike pri rješavanju zadataka koji se pojavljuju na matematičkim natjecanjima. Navedene su i dokazane nejednakosti među sredinama, nejednakost trokuta i Ptolomejeva nejednakost. Također vrlo važne Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, Bernoullijeva nejednakost, Hölderova nejednakost i nejednakost Minkowskog. Svaka navedena nejednakost potkrijepljena je primjerima i rješenjima zadataka sa županijskih, državnih, internacionalnih natjecanja ili međunarodnih olimpijada.

Ključne riječi: nejednakosti među sredinama, Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost, Hölderova nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, nejednakost Minkowskog

Inequalities in mathematical competitions

Abstract:

This paper examines some fundamental inequalities and techniques for solving problems that arise in mathematical competitions. Mean inequalities, the triangle inequality, and Ptolomey's inequality are stated and proved. Additionally, the Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality, Chebyshev's inequality, Bernoulli's inequality, Hölder's inequality, and Minkowski's inequality are highlighted as very important. These mentioned inequalities are supported by examples and solutions from county, national, and international competitions, or international Olympiads.

Key words: mean inequalities, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality, Hölder's inequality, Chebyshev's inequality, Minkowski's inequality

Sadržaj

Uvod

U ovom radu ispitane su i prikazane najčešće nejednakosti na natjecanjima iz matematike. Završni rad podijeljen je u četiri poglavlja. Jedan od čestih pristupa pri rješavanju zadataka je svođenje dane nejednakosti na neke poznate, kao što su nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom. Spomenute sredine, definirane su za n pozitivnih brojeva i teoremi o nejednakostima između osnovnih sredina razmatrani su u prvom poglavlju. Ove se nejednakosti također koriste za dokazivanje nekih drugih nejednakosti, primjerice Nesbittove nejednakosti. U drugom poglavlju dana je jedan od najvažnijih nejednakosti u elementarnoj geometriji Ptolomejeva nejednakost. U trećem i četvrtom poglavlju navedene su i dokazane najbitnije nejednakosti u matematici: Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost, Bernoullijeva nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, Hölderova nejednakost i nejednakost Minkowskog. Problemi na koje se mogu primijeniti složenije nejednakosti javljaju se prvenstveno na natjecanjima kao što su matematičke olimpijade.

1. Osnovne sredine i njihove nejednakosti

Prvi pojmovi o sredinama potječu od Pitagorejaca (6.st.prije Krista.). Oni su znali i za nejednakost

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b), \quad a, b > 0 \tag{1}$$

no nju je dokazao Euklid.
Nejednakost (1) predstavlja nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih brojeva a i b.
Prvo ćemo definirati osnovne sredine za n pozitivnih brojeva.

Definicija 1.1. *Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

harmonijska sredina $H_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}};$$

geometrijska sredina $G_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n};$$

aritmetička sredina $A_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n};$$

kvadratna sredina $K_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Sljedeći teorem daje poopćenje nejednakosti (1) na slučaj n pozitivnih brojeva.

Teorem 1.1. *(AG nejednakost) Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \geq G_n(a) \tag{2}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Za n=2 nejednakost (2) postaje (1), tj.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$$

što je ekvivalentno s

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0.$$

Prethodna nejednakost očito je točna. Vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je je $a_1 = a_2$.
Pretpostavimo da je nejednakost (2) točna za neko $n = k$, odnosno da vrijedi

$$A_k \geq G_k. \tag{3}$$

Sada primjenom nejednakosti (1) uz odgovarajuću supstituciju dobijemo

$$A \equiv \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geq (a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{k}} \equiv G. \tag{4}$$

Iz

$$
\begin{aligned}
A_k + A &= \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\
&= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} = 2A_{k+1},
\end{aligned}
$$

pomoću (1), (3) i (4), dobijemo

$$
\begin{aligned}
A_{k+1} &= \frac{1}{2}(A_k + A) \geq (A_k A)^{\frac{1}{2}} \geq (G_k G)^{\frac{1}{2}} \\
&= (G_k^k G^k)^{\frac{1}{2k}} = (G_k^k a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}} \\
&= (G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}}.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1},$$

tj. $A_{k+1} \geq G_{k+1}$. Ovim je induktivni dokaz nejednakosti (2) dovršen.

U nastavku pokažimo da jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.
Iz pretpostavke $a_1 = \cdots = a_n$, očito slijedi jednakost u (2). Sada pretpostavimo da su barem dva broja od brojeva $a_1, ..., a_2$ različita, recimo neka je $a_1 \neq a_2$. Onda je

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} \\
&\geq \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \cdots a_n \right]^{\frac{1}{n}} \\
&> (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}},
\end{aligned}
$$

jer je $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$ za $a_1 \neq a_2$. Ovime je dokaz teorema završen. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz rada Š. Arslanagića (vidi [1]).

Zadatak 1.1. *Dokažite: Za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Dokaz. Za pozitivne realne brojeve x, y, z označimo:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}, \\
A &= \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+y},
\end{aligned}
$$

i

$$B = \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{x+y}.$$

Uočimo:

$$A+B=\frac{y+z}{y+z}+\frac{z+x}{z+x}+\frac{x+y}{x+y}=3.$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo:

$$A+C=\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x+y}{y+z}\cdot\frac{y+z}{z+x}\cdot\frac{z+x}{x+y}}=3$$

i

$$B+C=\frac{x+z}{y+z}+\frac{x+y}{z+x}+\frac{y+z}{x+y}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x+z}{y+z}\cdot\frac{x+y}{z+x}\cdot\frac{y+z}{x+y}}=3.$$

Zbrajanjem prethodne dvije nejednakosti dobijemo

$$6\leq (C+A)+(C+B)=A+B+2C=3+2C,$$

odakle slijedi

$$C\geq\frac{3}{2},$$

odnosno

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Očigledno, jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako je $x=y=z$. □

Nejednakost u zadatku 1.1 je u matematici poznata kao Nesbittova nejednakost.

Teorem 1.2. *(GH nejednakost) Neka je $a=(a_1,...,a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$G_n(a)\geq H_n(a), \tag{6}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Primjenom AG nejednakosti na brojeve $\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}$ imamo

$$\left(\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}. \tag{7}$$

Ako i samo ako je $\frac{1}{a_1}=\cdots=\frac{1}{a_n}$, tj. $a_1=\cdots=a_n$, vrijedi znak jednakosti. Iz (7) slijedi (6), odnosno nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz rada I. Iliševića (vidi [4]).

Zadatak 1.2. *Neka su $a_1,a_2,...,a_n$ pozitivni brojevi čija je suma jednaka 1. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geq (n+1)^n.$$

Dokaz. Nejednakost je evivalentna nejednakosti

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} \geq n+1.$$

Dokažimo ovu nejednakost. Prema GH nejednakosti je

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} &\geq \frac{n}{\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{a_2}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}} \\
= \frac{n}{\frac{1}{\frac{a_1+1}{a_1}}+\frac{1}{\frac{a_2+1}{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{a_n+1}{a_n}}} &= \frac{n}{\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+1}} \\
= \frac{n}{\frac{a_1+1}{a_1+1}+\frac{a_2+1}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_n+1}{a_n+1}-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)} \\
= \frac{n}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)} &= \frac{1}{1-\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}}{n}}.
\end{aligned}$$

Sada primjenimo AH nejednakost na brojeve a_1+1, a_2+1, ..., a_n+1:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}} &\leq \frac{(a_1+1)+(a_2+1)+\ldots+(a_n+1)}{n} \\
&= \frac{n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n} = \frac{n+1}{n},
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}}{n} \geq \frac{n}{n+1}$$

i konačno

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} &\geq \frac{1}{1-\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}}{n}} \\
&\geq \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$. □

Teorem 1.3. *(AK nejednakost) Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \leq K_n(a), \tag{8}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Ako na desnoj strani u identitetu $(a_1+\cdots+a_n)^2 = a_1^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)$, umjesto $2a_ia_k$ stavimo $a_i^2+a_k^2$, gdje je $a_i^2+a_k^2 \geq 2a_ia_k$ s jednakošću ako i samo ako je $a_i = a_k$, dobijemo nejednakost

$$(a_1+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+\cdots+a_n^2), \tag{9}$$

koja vrijedi za realne brojeve $a_1, ..., a_n$.
Svi $a_1, \cdots, a_n$ su pozitivni, pa iz (9) slijedi

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (n(a_1^2 + \cdots + a_n^2))^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

odnosno nejednakost (8).

$\square$

Primjedba 1.1. *Iz teorema 1.1, 1.2 i 1.3 slijede nejednakosti*

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a). \tag{11}$$

Sljedeći zadatak preuzet je iz [9].

Zadatak 1.3. *(1. nordijska matematička olimpijada, 1987.)*
Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokažite sljedeću nejednakost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

Dokaz. Uvedemo li supstitucije $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{b}{c}$, $z = \dfrac{c}{a}$ trebamo pokazati da za proizvoljne realne brojeve x, y i z za koje vrijedi $xyz = 1$ vrijedi nejednakost

$$x + y + z \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Zbog AK nejednakosti imamo

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}$$

odnosno

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = (x + y + z) \cdot \frac{x + y + z}{3} \overset{AG}{\geq} (x + y + z)\sqrt[3]{xyz} = x + y + z.$$

$\square$

Sljedeći zadatak preuzet je iz rada I. Iliševića (vidi [5]).

Zadatak 1.4. *Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da zadovoljavaju $a + b + c > d$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$(a + b + c)^2 - \frac{d^2}{3} > 2(ab + bc + ca).$$

Dokaz. Prema AK nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} > \frac{d}{3},$$

odakle dobivamo

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{d^2}{9} > 0$$

odnosno

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{d^2}{3} > 0.$$

Dodavanjem $2(ab + ac + bc)$ objema stranama posljednje nejednakosti dobivamo

$$(a + b + c)^2 - \frac{d^2}{3} > 2(ab + bc + ca).$$

$\square$

Sljedeći zadatak preuzet je iz knjige Inequalities - A Mathematical Olympiad Approach. Više zadataka s matematičkih olimpijada možete naći u toj knjizi (vidi [8]).

Zadatak 1.5. *(Azijsko pacifička matematička olimpijada, 1996.)*
Neka su a, b, c stranice trokuta. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Dokaz. Stavimo li da je $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, možemo zaključiti da je $a+b-c = 2z$, $b+c-a = 2x$, $c+a-b = 2y$. Dakle, nejednakost je jednaka

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.$$

Sada primjenimo AK nejednakost te dobivamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2} \\
&\leq \sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}+\sqrt{\frac{2z+2x}{2}} \\
&= \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$ odnosno, ako i samo ako je $a = b = c$. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [10].

Zadatak 1.6. *(Županijsko natjecanje iz matematike, 4.razred A varijanta, 2018.)*
Neka je n prirodan broj. Dokažite nejednakost

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} > 1.$$

Dokaz. Primjetimo da je s lijeve strane nejednakosti $2n+1$ brojeva, te primijenimo na brojeve $n+1, n+2, ..., n+(2n+1)$ nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine. Dobivamo

$$\frac{(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+(2n+1))}{2n+1} \geq \frac{2n+1}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(2n+1)}}.$$

Budući da brojevi nisu međusobno jednaki, ne vrijedi jednakost, već stroga nejednakost. Sređivanjem dobivamo

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} > \frac{(2n+1)^2}{(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+(2n+1))}.$$

Konačno, kako je

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+(2n+1)) = n\cdot(2n+1)+\frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (2n+1)^2,$$

dobivamo traženu nejednakost. □

2. Nejednakost trokuta i Ptolomejeva nejednakost

2.1. Nejednakost trokuta

Sljedeći teorem i njegov dokaz preuzeti su iz [9].

Teorem 2.1. *Za kompleksne brojeve z_i, $i = 1, \ldots, n$ vrijede nejednakosti:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{12}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \tag{13}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \tag{14}$$

i

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|. \tag{15}$$

Jednakosti u (12) i (13) vrijede ako i samo ako je $z_1\overline{z_2} \geq 0$. Jednakost u (14) vrijedi ako i samo ako je $z_1\overline{z_2} \leq 0$. Jednakost u (15), vrijedi ako i samo ako je $z_k\overline{z_j} \geq 0$, odnosno $\frac{z_k}{z_j} > 0$ za $k, j = 1, \ldots, n$ uz pretpostavku $z_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_1} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}), \end{aligned} \tag{16}$$

gdje smo koristili formulu $Rez = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.
Kako je

$$Rez \leq |z| = ((Rez)^2 + (Imz)^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

imamo

$$Re(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|. \tag{18}$$

Iz (16) i (18) slijedi

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2, \tag{19}$$

tj. (12). Jednakost u (12) vrijedi ako i samo ako postoji jednakost u (18). Jednakost u (17) vrijedi ako i samo ako je z realan i nenegativan, zaključujemo da je $z_1\overline{z_2} \geq 0$ nužan i dovoljan uvjet za jednakost u (18), a također i u (12).
Dokažimo (13). Iz $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$, koristeći nejednakost trokuta (12), dobivamo

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|. \tag{20}$$

Slično dobivamo i

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|. \tag{21}$$

Nejednakost (13) slijedi iz (20) i (21).
Zamjenjujući z_2 s $-z_2$ u (13), dobivamo (14).
Kombinirajući (14) i (12) dobivamo

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Sada ćemo ispitati uvjete za jednakost u (14), tj. kada imamo

$$||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|. \tag{22}$$

Ako vrijedi (22), tada imamo

$$(|z_1| - |z_2|)^2 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$$

i

$$Re(z_1\overline{z_2}) = -|z_1||z_2| = -|z_1\overline{z_2}|.$$

Prema tome, $Re(z_1\overline{z_2}) \leq 0$ i $(Re(z_1\overline{z_2}))^2 = (Re(z_1\overline{z_2}))^2 + (Im(z_1\overline{z_2}))^2$, pa je $Im(z_1\overline{z_2}) = 0$. Dakle, $z_1\overline{z_2}$ je realan nepozitivan broj, pa je $z_1\overline{z_2} \leq 0$. Obrnuto, ako je $z_1\overline{z_2} \leq 0$ imamo

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2z_1\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| - |z_2|)^2, \end{aligned}$$

odakle dobivamo (22). Prema tome (22) je ekvivalentno sa $z_1\overline{z_2} \leq 0$.
Nejednakost (15) se jednostavno dokazuje indukcijom, pa ćemo ovdje samo ispitati pod kojim uvjetima vrijedi jednakost u njoj.
Pretpostavimo da je $z_k \neq 0$ za $k = 1, \ldots, n$. Ako je

$$|z_1| + \ldots + |z_n| = |z_1 + \ldots + z_n| = |(z_1 + z_2) + z_3 + \ldots + z_n|, \tag{23}$$

tada je $|z_1| + \ldots + |z_n| \leq |z_1 + z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|$
i prema tome $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Znači $z_1\overline{z_2} \geq 0$ i kada je $z_1 z_2 \neq 0$, imamo $\dfrac{z_2}{z_1} > 0$. Slično zaključujemo da je

$$\frac{z_k}{z_j} > 0 \ \text{ za } \ k, j = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Obrnuto, ako vrijede nejednakosti (24), imamo

$$\begin{aligned} |z_1 + \ldots + z_n| &= |z_1| \left(\left| 1 + \frac{z_2}{z_1} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} \right| \right) \\ &= |z_1| \left(1 + \frac{z_2}{z_1} + \ldots + \frac{z_n}{z_1} \right) \\ &= |z_1| \left(1 + \left| \frac{z_2}{z_1} \right| + \ldots + \left| \frac{z_n}{z_1} \right| \right) \\ &= |z_1| + \ldots + |z_n|. \end{aligned}$$

□

Sljedeći zadatak preuzet je iz [10].

Zadatak 2.1. *(Državno natjecanje, 1.razred, A varijanta, 2021.)*
Neka su a, b i c realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost

$$|a + b| + |a + c| + |b + c| = 8.$$

Odredite najveću i najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + b^2 + c^2$$

te odredite kada se ona postiže.

Dokaz. Prema nejednakosti (15) vrijedi

$$8 = |a+b| + |b+c| + |c+a| = |a+b| + |a+c| + |-(b+c)| \geq |a+b+a+c-b-c| = |2a|$$

pa zaključujemo $|a| \leq 4$. Analogno dobivamo $|b| \leq 4$ i $|c| \leq 4$, pa slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 4^2 + 4^2 + 4^2 = 48.$$

Jedan izbor a, b i c za koji se postiže vrijednost 48 je $a = 4$, $b = c = -4$, pa je to najveća vrijednost izraza.
Za najmanju vrijednost, prvo primijenimo nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine na izraze $|a+b|, |b+c|$ i $|c+a|$:

$$\sqrt{\frac{|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2}{3}} \geq \frac{|a+b| + |b+c| + |c+a|}{3} = \frac{8}{3}.$$

Na svaki od pribrojnika u brojniku pod korijenom na lijevoj strani možemo primjeniti nejednakost

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2,$$

koja je ekvivalentna s $(x-y)^2 \geq 0$, jer je

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &\leq 2x^2 + 2y^2 \\ 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 &\leq (x-y)^2. \end{aligned}$$

Time dobivamo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{3}} &= \sqrt{\frac{2((a^2+b^2) + (b^2+c^2) + (c^2+a^2))}{3}} \\ &\geq \sqrt{\frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2}{3}} \geq \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Sređivanjem slijedi nejednakost

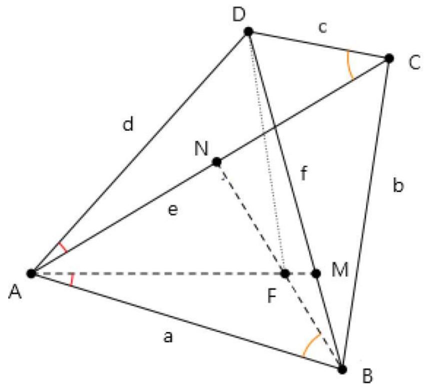
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{16}{3}.$$

Jednakost se postiže kada su svi brojevi a, b i c jednaki $\frac{4}{3}$ ili $\frac{-4}{3}$, pa je najmanja vrijednost izraza jednaka $\frac{16}{3}$.

$\square$

2.2. Ptolomejeva nejednakost

Teorem 2.2. *(Ptolomejeva nejednakost)*
Neka su A, B, C, D bilo koje četiri točke u ravnini. Tada vrijedi nejednakost $ac + bd \geq ef$, gdje je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$ i $f = |BD|$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ tetivni[1] četverokut.



Dokaz. Na dijagonali $\overline{BD}$ odaberemo točku M takvu da je $\angle MAB = \angle DAC$, a na dijagonali $\overline{AC}$ točku N takvu da je $\angle ABN = \angle ACD$. Pravci AM i BN neka se sijeku u točki F. Promatramo trokute ABF i ACD na slici te zaključujemo da vrijedi

$$\angle CAB = \angle FAB + \angle CAF = \angle DAC + \angle CAF = \angle DAF.$$

Kako vrijedi $\angle ABF = \angle ACD$ te $\angle FAB = \angle DAC$, zaključujemo da su $\triangle ABF$ i $\triangle ACD$ slični prema KKK teoremu o sličnosti za trokute. Tada vrijedi

$$\frac{a}{e} = \frac{|BF|}{c},$$

odnosno

$$ac = e|BF|. \tag{25}$$

Također, vrijedi i

$$\frac{a}{e} = \frac{|AF|}{d}.$$

Iz $\angle CAB = \angle DAF$, dobivamo $\triangle AFD \sim \triangle ABC$ prema SKS teoremu o sličnosti. Iz toga slijedi

$$\frac{d}{e} = \frac{|FD|}{b},$$

odnosno

$$bd = e|FD|. \tag{26}$$

Zbrajanjem nejednakosti (25) i (26) te primjenjujući nejednakost trokuta na trokut BDF dobivamo sljedeće

$$ac + bd = e(|BF| + |FD|) \geq ef.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako točka F leži na dijagonali $\overline{BD}$, odnosno ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivni.

□

[1] Tetivni četverokut je četverokut oko kojeg se može opisati kružnica.

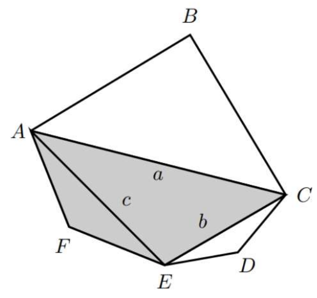
Sljedeći zadatak preuzet je iz [8].

Zadatak 2.2. *(Međunarodna matematička olimpijada, 1997.)*
$ABCDEF$ je konveksni [2] šesterokut u kojem vrijedi

$$|AB| = |BC|, |CD| = |DE|, |EF| = |FA|.$$

Pokažite da je

$$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{3}{2}.$$



Dokaz. Označimo $a = |AC|$, $b = |BC|$ i $c = |EA|$. Ptolomejeva nejednakost primjenjena na četverokutu $ACEF$ osigurava da je $|AE| \cdot |FC| \leq |FA| \cdot |CE| + |AC| \cdot |EF|$. Iz uvjeta zadatka da je $|EF| = |FA|$, imamo $c \cdot |FC| \leq |FA| \cdot b + |FA| \cdot a$.
Stoga vrijedi:

$$\frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{c}{a+b}.$$

Slično zaključimo i

$$\frac{|BC|}{|BE|} \geq \frac{a}{b+c} \quad \text{i} \quad \frac{|DE|}{|DA|} \geq \frac{b}{c+a}.$$

Dakle, $\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, gdje je posljednja nejednakost Nesbittova nejednakost. □

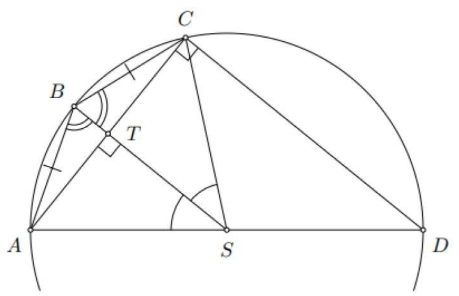
Sljedeći zadatak preuzet je iz [10].

Zadatak 2.3. *(Državno natjecanje, 1.razred, A-varijanta, 2016.)*
Neka je dužina $\overline{AD}$ duljine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) točke na kružnicis promjerom $\overline{AD}$ takve da vrijedi $|AB| = |BC| = 1$. Izračunaj $|CD|$.

Dokaz. Uočimo da su kutovi $\angle ABD$ i $\angle ACD$ pravi jer su obodni kutovi nad promjerom kružnice.
Prema Pitagorinom poučku za trokut ABD slijedi da je

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = 2\sqrt{2}.$$

[2]Skup K $\in \mathbb{R}^n$je konveksan ako $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K)$ $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq K$.



Označimo $|CD| = x$ i $|AC| = y$. Prema Pitagorinom poučku za trokut ACD slijedi da je

$$y^2 = |AC|^2 = |AD|^2 - |CD|^2 = 9 - x^2.$$

Prema specijalnom slučaju Ptolomejeve nejednakosti za tetivni četverokut $ADCB$ vrijedi

$$y \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + x \cdot |AB|, \quad \text{tj.} \quad y \cdot 2\sqrt{2} = 3 + x.$$

Uvrstimo li $y^2 = \frac{(3+x)^2}{8}$ u $y^2 = 9 - x^2$, dobivamo jednadžbu

$$3x^2 + 2x - 21 = 0$$

s rješenjima $x = -3$ i $x = \frac{7}{3}$. Dakle, $|CD| = \frac{7}{3}$. □

3. Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost, Hölderova nejednakost i nejednakost Minkowskog

3.1. Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost

Teorem 3.1. *(CSB nejednakost)*
Za bilo koje dvije n-torke realnih brojeva $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \tag{27}$$

Pri tome jednakost u (27) vrijedi onda i samo onda ako su n-torke a i b proporcionalne.

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$.
Za $n = 1$ imamo $a_1^2 \cdot b_1^2 \geq (a_1 b_1)^2$.
Nadalje, za $n = 2$ vrijedi

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Pretpostavimo da nejednakost (27) vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ tj.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Sada pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)^{\frac{1}{2}} + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pri tome u prvoj nejednakosti koristimo pretpostavku indukcije, a u drugoj nejednakosti koristimo bazu, gdje koristimo izraz

$$\alpha\beta + a_{n+1}b_{n+1} \leq (\alpha^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

uz supstituciju

$$\alpha = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \text{ i } \beta = (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, nejednakost (27) vrijedi i za $n + 1$. Ovim je dokaz završen. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz rada I. Iliševića (vidi [6]).

Zadatak 3.1. *Neka su a,b i c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost*

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Dokaz. Primjenimo CSB nejednakost:

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}}\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c+a+b)\,.$$

Iz posljednje nejednakosti dobivamo $(a+b+c) \leq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}$. Množenjem ove nejednakosti s abc dobivamo traženu nejednakost. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [11].

Zadatak 3.2. *(Međunarodna matematička olimpijada, 1981.)*
Neka je P točka unutar trokuta ABC, a D, E, F neka su nožišta okomica iz P na pravce BC, CA, AB redom. Pronađite sve P koje minimiziraju sljedeću sumu

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

Dokaz. Primjetimo da je $BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF$ dvostruko veća od površine trokuta ABC, tj. konstanta. Po CSB nejednakosti vrijedi,

$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF)\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right) \geq (BC + CA + AB)^2$$

s jednakošću točno kada je $PD = PE = PF$, što se događa kada je P središte upisanog trokuta. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [10].

Zadatak 3.3. *(Hrvatska matematička olimpijada, 2015.)*
Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{xy+z} + \frac{y^2}{yz+x} + \frac{z^2}{zx+y} \geq \frac{(x+y+z)^3}{3[x^2(y+1) + y^2(z+1) + z^2(x+1)]}.$$

Dokaz. Iz CSB nejednakosti imamo

$$\left(\frac{x^2}{xy+z} + \frac{y^2}{yz+x} + \frac{z^2}{zx+y}\right) \cdot [x(xy+z) + y(yz+x) + z(zx+y)] \geq (x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z})^2. \quad (28)$$

Nejednakost među sredinama nam daje

$$\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z}}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3},$$

odnosno

$$(x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z})^2 \geq \frac{(x+y+z)^3}{3}. \quad (29)$$

Iz AG nejednakosti slijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \quad (30)$$

Sada iz (28), (29) i (30) slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y} &\geq \frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{x^2y+y^2z+z^2x+zx+xy+yz} \\
&\geq \frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{x^2y+y^2z+z^2x+x^2+y^2+z^2} \\
&\geq \frac{(x+y+z)^3}{3[x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1)]}.
\end{aligned}$$

□

3.2. Hölderova nejednakost

Teorem 3.2. *(Youngova nejednakost) Nek su a i $b > 0$ i $p, q > 1$ realni brojevi takvi da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Tada vrijedi $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^p = b^q$.*

Dokaz. Budući da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, možemo zapisati $p=\frac{m+n}{m}$, $g=\frac{m+n}{n}$, gdje su m i n pozitivni cijeli brojevi. Zapišimo $a = x^{\frac{1}{p}}$, $b = y^{\frac{1}{q}}$. Tada je

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=\frac{x}{\frac{m+n}{m}}+\frac{y}{\frac{m+n}{n}}=\frac{mx+ny}{m+n}.$$

Međutim, zbog AG nejednakosti je

$$\frac{mx+ny}{m+n} \geq (x^m \cdot y^n)^{\frac{1}{m+n}} = x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} = ab$$

odnosno

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab.$$

□

Teorem 3.3. *(Hölderova nejednakost) Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i p, q dva realna broja različita od nule takva da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Tada za $p > 1$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{31}$$

za $p < 1$ vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su a^p i b^q proporcionalne n-torke.

Dokaz. Po Youngovoj nejednakosti za

$$a=\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad b=\frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

imamo

$$\frac{a_i b_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \tag{32}$$

Zbrajanjem nejednakosti (32) za $i = 1, \ldots, n$ imamo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

odakle dobivamo upravo (31). Očigledno jednakost je onda i samo onda ako
$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \ldots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [3].

Zadatak 3.4. *Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju $xy+yz+zx+xyz = 4$. Dokažite nejednakost*

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2} \geq 3\sqrt{3}.$$

Dokaz. Označimo $x + 2 = a$, $y + 2 = b$ i $z + 2 = c$. Tada uvjet $xy + yz + zx + xyz = 4$ postaje

$$abc = ab + bc + ca,$$

odnosno

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Zbog generalizirane Hölderove nejednakosti $\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{\alpha_j} \right) \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)^{\alpha_j} \right.$, gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1)$ vrijedi

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3^3,$$

a zbog uvjeta $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ dobijemo

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \geq 3^3,$$

odnosno

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt{3}.$$

□

3.3. Nejednakost Minkowskog

Teorem 3.4. *(nejednakost Minkowskog) Ako su a i b dvije pozitivne n-torke i $p > 1$, onda je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{33}$$

a ako je $p < 1$ $(p \neq 0)$ vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost nastupa u (33) ako i samo ako su a i b proporcionalne n-torke.

Dokaz. Za $p > 1$ biramo $q > 1$ tako da je $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, tj. $q=\dfrac{p}{p-1}$. Prema Hölderovoj nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}((a_i+b_i)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}((a_i+b_i)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}((a_i+b_i)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}((a_i+b_i)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p)\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
\iff &\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{p-1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\iff &\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}$. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [8].

Zadatak 3.5. *(Azijsko pacifička olimpijada, 2003.)*
Dokažite da vrijedi

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}\leq 1+\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2},$$

gdje su a, b, c stranice trokuta opsega 1 i $n > 1$ prirodan broj.

Dokaz. Kako su a, b, c stranice trokuta, postoje pozitivni brojevi x, y, z takvi da je

$$a = y + z, \qquad b = x + z, \qquad c = x + y.$$

Nadalje, kako je $a + b + c = 1$, zaključujemo da je $x + y + z = \frac{1}{2}$.
Koristeći nejednakost Minkowskog na $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ dobijemo nejednakost

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=((y+z)^n+(z+x)^n)^{\frac{1}{n}}\leq(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}+(2z^n)^{\frac{1}{n}}<c+\sqrt[n]{2}z.$$

Analgono se dobije

$$(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<a+\sqrt[n]{2}x$$

i

$$(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<b+\sqrt[n]{2}y.$$

Pa je

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<a+b+c+\sqrt[n]{2}(x+y+z)=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

□

4. Bernoulijeva i Čebiševljeva nejednakost

4.1. Bernoulijeva nejednakost

Idući dokazi teorema iz ovog poglavlja preuzeti su iz [7].

Teorem 4.1. *Neka je n prirodan broj i x realan broj veći od -1. Tada vrijedi*

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \tag{34}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$ ili $x=0$.

Dokaz. Izraz $(1+x)^n = 1+nx$ vrijedi ako je $n=1$ ili $x=0$. Strogu nejednakost dokazujemo matematičkom indukcijom za n veći od 1 i $x \neq 0$. Nejednakost vrijedi i za $n=2$ jer je $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Sada retpostavimo da za neki prirodni broj n veći od 1 vrijedi $(1+x)^n > 1+nx$ i dokažimo da ta nejednakost također vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&> 1+(n+1)x.
\end{aligned}$$

Stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1 i svaki realan broj $x \neq 0$, prema principu matematičke indukcije, □

Sljedeća dva teorema su poopćenja Bernoulijeve nejednakosti.

Teorem 4.2. *(a) Ako je $x > -1$ i $0 < \alpha < 1$, onda je $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.*

(b) Ako je $x > -1$ i $\alpha < 0$ ili $\alpha > 1$, onda je $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$.
Jednakost (u oba slučaja) vrijedi ako i samo ako je $x=0$.

Teorem 4.3. *Za sve realne brojeve $x_k > -1, k = 1,2,\ldots,n$ koji su istog predznaka, vrijedi nejednakost*

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n. \tag{35}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$.

Dokaz. Za $n=2$ vrijedi stroga nejednakost jer je

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2 > 1+x_1+x_2$$

Sada pretpostavimo da za neki prirodan broj n veći od 1 vrijedi

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) > 1+x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Tada zbog uvjeta $x_ix_j > 0$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ imamo

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \\
&> (1+x_1+x_2+\ldots+x_n)(1+x_{n+1}) \\
&= (1+x_1+x_2+\ldots+x_n)+x_{n+1}+(x_1+x_2+\ldots+x_n)x_{n+1} \\
&> 1+x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodan broj n veći od 1. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [10].

Zadatak 4.1. *(Državno natjecanje, 4.razred, A varijanta, 2008.)*
Dokaži da za po volji odabrane prirodne brojeve m i n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Dokaz. Ako je neki od brojeva m ili n jednak 1, nejednakost očito vrijedi.
Pretpostavimo zato da je $m > 1$ i $n > 1$. Tada vrijedi $\sqrt[n]{m} = 1 + u$, $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, za neke pozitivne realne brojeve u i v. Prema (34) vrijedi

$$m = (1+u)^n > 1 + nu, \qquad n = (1+v)^m > 1 + mv,$$

odnosno

$$u < \frac{m-1}{n}, \qquad v < \frac{n-1}{m}.$$

Odavde slijedi

$$1 + u < \frac{m+n-1}{n}, \qquad 1 + v < \frac{m+n-1}{m}.$$

Iz posljednjih nejednakosti dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} > \frac{n}{m+n-1} + \frac{m}{m+n-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1.$$

□

Sljedeći zadatak preuzet je iz [3].

Zadatak 4.2. *Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da zadovoljavaju $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{1}{2}$. Dokažite nejednakost*

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Dokaz. Zbog $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{1}{2}$ i činjenice da su $x_1, x_2, ..., x_n$ nenegativni realni brojevi možemo zaključiti da vrijedi

$$0 \leq x_i \leq \frac{1}{2} < 1, \qquad -x_i > -1, \qquad \text{za sve } \ i = 1, 2, ..., n,$$

pa je jasno da su svi $-x_i$ jednakog predznaka. Sada primjenimo (35) te dobivamo

$$\begin{aligned}(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) &= (1 + (-x_1))(1 + (-x_2))\ldots(1 + (-x_n)) \\ &\geq 1 + (-x_1 - x_2 - \ldots - x_n) \\ &= 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

4.2. Čebiševljeva nejednakost

Teorem 4.4. *Neka su* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *dvije* n*-torke realnih brojeva te* $p = (p_1, \ldots, p_n)$ *pozitivna* n*-torka realnih brojeva.*

i) Ako su n*-torke* a *i* b *slično uređene, pod čime se misli* $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ *za* $i, j = 1, \ldots, n$*. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i. \tag{36}$$

ii) Ako su n*-torke* a *i* b *takve da je* $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$ *za sve* $i, j = 1, \ldots, n$*, onda vrijedi obrnuta nejednakost*

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ *ili* $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$*.*

Dokaz. Prvo, pokažimo da vrijedi sljedeći identitet:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j). \tag{37}$$

Zbog simetrije i i j imamo

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Osim toga vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i b_i + a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_j b_j \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{j=1}^{n} p_j b_j - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_j \\
&= 2 \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \right]
\end{aligned}$$

što dokazuje jednakost (37). Kako vrijedi $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq (\leq) 0$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$ iz identiteta (37), slijedi nejednakost (36). Slučaj jednakosti je očit. Ovime je dokaz završen. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [3].

Zadatak 4.3. *Neka su* a*,* b*,* c*,* d *pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a + b + d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $a \geq b \geq c \geq d$. Tada je i $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2$.
Koristimo Čebiševljevu nejednakost i imamo

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 3(a^3+b^3+c^3) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.
\end{aligned}$$

Slično dobijemo i

$$\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d} \geq \frac{a^2+b^2+d^2}{3}, \qquad \frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d} \geq \frac{a^2+c^2+d^2}{3},$$
$$\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} \geq \frac{b^2+c^2+d^2}{3}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost. □

Sljedeći zadatak preuzet je iz [8].

Zadatak 4.4. *(Balkanska matematička olimpijada, 2016.)*
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite

$$\sqrt{a^3b+a^3c}+\sqrt{b^3c+b^3a}+\sqrt{c^3a+c^3b} \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca).$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo $a \geq b \geq c$.

$$\begin{aligned}
&a \geq b \geq c \Rightarrow ab \geq ac \geq bc \Rightarrow ab+ac \geq ab+bc \geq ac+bc \\
&\qquad\Rightarrow \sqrt{ab+ac} \geq \sqrt{bc+ba} \geq \sqrt{ac+bc}.
\end{aligned}$$

Koristeći Čebiševljevu nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^3b+a^3c}+\sqrt{b^3c+b^3a}+\sqrt{c^3a+c^3b} = a\sqrt{ab+ac}+b\sqrt{bc+ba}+c\sqrt{ca+cb} \geq \\
&\qquad \frac{(a+b+c)}{3}(\sqrt{ab+ac}+\sqrt{bc+ba}+\sqrt{ca+cb}).
\end{aligned}$$

Sada koristimo GH nejdnakost i dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b+c)}{3}(\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}) \geq \\
&\qquad \frac{(a+b+c)}{3}\left(\frac{2a(b+c)}{a+b+c}+\frac{2b(c+a)}{b+c+a}+\frac{2c(a+b)}{c+a+b}\right) = \\
&\qquad\qquad \frac{(a+b+c)}{3}\frac{4(ab+bc+ca)}{a+b+c} = \frac{4}{3}(ab+bc+ca).
\end{aligned}$$

□

Literatura

[1] Š. Arslanagić, D. Zubović, *Nesbittova nejednakost*, Osječki matematički list, Vol.22 No.1, (2022) 33–38

[2] I. Brnetić, *Nejednakosti na međunarodnim matematičkim olimpijadama*, Osječki matematički list, Vol.8 No.1, (2008), 5-18

[3] C. Cvetkovski, *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problem*, Springer Berlin, Heidelberg, 2012.

[4] I. Ilišević, *GH-nejednakost*, Osječki matematički list, Vol.8 No.2, (2008), 59-63

[5] I. Ilišević, *KA-nejednakosti*, Osječki matematički list, Vol.6 No.1, (2006), 13-19

[6] I. Ilišević, *Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost*, Mathematical Communications, Vol.1 No.2, 1996.

[7] I. Ilišević, *Bernoullijeva nejednakost*, Osječki matematički list, Vol.9 No.1, 2009.

[8] R. Manfrino, J. Ortega, R. Delgado, *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[9] J. Pečarić, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.

[10] HMD, Matematička natjecanja URL: https://natjecanja.math.hr/

[11] AoPS online URL: https://artofproblemsolving.com/community/c3223