Primjene nejednakosti na probleme optimizacije u ekonomiji

Jularić, Filip

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Filip Jularić

Primjene nejednakosti na probleme optimizacije u ekonomiji

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Filip Jularić

Primjene nejednakosti na probleme optimizacije u ekonomiji

Završni rad

Mentorica: prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2023.

Sažetak: Diferencijalni račun je alat koji se koristi u ekonomiji pri rješavanju problema minimizacije troškova, ali nije jedini. Kao njegove alternative pri rješavanju problema optimizacije u ekonomiji, javljaju se primjene poznatih nejednakosti kao što su aritmetičko-geometrijska nejednakost, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost i Hölderova nejednakost. Primjena navedenih nejednakosti zamjenjuje diferencijalni račun koji je nerijetko kompliciran i netrivijalan. U radu su dani iskazi i dokazi ovih nejednakosti kao i njihova primjena na konkretnim primjerima koje nam donosi svakodnevica. Na taj način ćemo moći vidjeti prednosti koje navedene nejednakosti imaju nad diferencijalnim računom.

Ključne riječi: AG nejednakost, CSB nejednakost, Hölderova nejednakost, minimizacija troškova

Applications of Inequalities in Optimization Problems in Economics

Abstract: Differential calculus is a tool used in economics for solving cost-minimization problems, but it's not the only one. As alternatives for solving optimization problems in economics, there are applications of well-known inequalities such as the arithmetic-geometric inequality, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality and Hölder's inequality. The application of these inequalities replaces differential calculus, which is often complicated and non-trivial. This paper provides statements and proofs of these inequalities and their application to concrete examples from everyday life. In this way, we can see the advantages that these inequalities have over differential calculus.

Keywords: AG inequality, CSB inequality, Hölder's inequality, cost minimization

Sadržaj

1 Uvod

Cilj svake tvrtke je da ima što veću dobit. To postižu što većom zaradom s ciljem smanjenja troškova. Godinama su ljudi za minimiziranje troškova koristili diferencijalni račun koji zna biti netrivijalan i iziskuje mnogo posla. Upravo zbog toga se početkom 21. stoljeća sve više koristi alternativni pristup minimizacije, a to su primjene aritmetičko-geometrijske, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky i Hölderove nejednakosti. Za njihovu uporabu, proizvodna funkcija treba zadovoljavati određene uvjete i ako imamo takve slučajeve, ove nejednakosti nam znatno mogu olakšati posao i uštedjeti vrijeme.

Uporaba diferencijalnog računa je ponekad neophodna i zahtjeva puno posla. Ukoliko nam je dana proizvodna funkcija jedne varijable koja je dovoljno glatka, potrebno je računati nužne i dovoljne uvjete za postojanje ekstrema proizvodne funkcije u vidu prve i druge derivacije. Za neke je funkcije potrebno računati i derivacije višeg reda kako bismo došli do pojedinih zaključaka. U ovisnosti o načinu proizvodnje, nerijetko proizvodne funkcije znaju biti funkcije više varijabli. U slučaju takve funkcije, koja je dovoljno glatka, potrebno je računati gradijent i Hesseovu matricu funkcije. Također, možemo naići i na proizvodne funkcije koje se optimiziraju uz zadana ograničenja. Tada se ovisno o vrsti ograničenja koristi Lagrangeova metoda množitelja, metoda supstitucije ili neka druga metoda temeljena na Karush-Kun-Tuckerovim uvjetima optimalnosti. Posao koji je potrebno odraditi prilikom korištenja ovih metoda ovisi o težini problema koji želimo riješiti. Ljudi koji se suočavaju s navedenom vrstom problema znaju da to često budu veoma komplicirani zadatci i zbog toga se išlo u potragu za alternativama. Kako bi se smanjila količina posla pri minimizaciji troškova proizvodnje, počele su se upotrebljavati AG nejednakost, CSB nejednakost i Hölderova nejednakost.

Rad je podijeljen u četiri dijela. Nakon ovog uvodnog gdje smo se upoznali s temom, slijedi dio u kojem ćemo iskazati i dokazati gore navedene nejednakosti kako bismo u trećem dijelu mogli što bolje razumjeti način na koji rješavamo određene probleme minimizacije troškova. Pomoću tih primjera ćemo dobiti jasnu sliku ovog alternativnog pristupa. U četvrtom dijelu ćemo navesti zaključke do kojih smo došli u proučavanju ove teme.

2 AG nejednakost, CSB nejednakost i Hölderova nejednakost

U ovom dijelu završnog rada upoznat ćemo se s definicijama težinske aritmetičke i geometrijske sredine te iskazati i dokazati tvrdnje koje ćemo koristiti u nastavku rada. Složenost primjene diferencijalnog računa ćemo ilustrirati na dokazu težinske AG nejednakosti.
Sljedeće definicije težinske aritmetičke i geometrijske sredine kao i teorem AG nejednakosti preuzeti su iz [5].

Definicija 1. Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $w = (w_1, ..., w_n)$ dane n-torke pozitivnih brojeva i neka je $W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Tada je *aritmetička sredina* $A_n(a; w)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ s težinama $w_1, ..., w_n$ definirana izrazom

$$A_n(a; w) = \frac{w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n}{W_n}.$$

Definicija 2. Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $w = (w_1, ..., w_n)$ dane n-torke pozitivnih brojeva i neka je $W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Tada je *geometrijska sredina* $G_n(a; w)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ s težinama $w_1, ..., w_n$ definirana izrazom

$$G_n(a; w) = (a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n})^{\frac{1}{W_n}}.$$

Teorem 1. *[AG nejednakost] Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $w = (w_1, ..., w_n)$ dane n-torke pozitivnih brojeva tako da je $W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Tada je*

$$A_n(a; w) \geq G_n(a; w) \tag{2.1}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = ... = a_n$.

Dokaz. Za potrebe dokaza ćemo promotriti funkciju f danu s

$$f(x) = lnx - x + 1, \qquad (x > 0).$$

Derivacija prvog reda definirane funkcije biti će

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1,$$

a drugog reda

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad (x > 0).$$

Uočimo da tada funkcija f postiže maksimum 0 za $x = 1$ te tada vrijedi nejednakost

$$lnx - x + 1 \leq 0, \qquad (x > 0). \tag{2.2}$$

Označimo li da je $A = A_n(a; w)$, prema (2.2) vrijedi nejednakost

$$ln\frac{a_k}{A} - \frac{a_k}{A} + 1 \leq 0, \qquad (k = 1, ..., n).$$

Ukoliko zadnju nejednakost pomožimo s w_k i sumiramo, dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} w_k ln\frac{a_k}{A} - \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k a_k}{A} + W_n \leq 0,$$

odnosno iz svojstava logaritamske funkcije slijedi

$$ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}\right)^{w_k}\right) \leq W_n - W_n = 0.$$

Primjenom eksponencijalne funkcije dobivamo

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k^{w_k}}{A^{W_n}} \leq 1$$

odnosno

$$\frac{G_n(a; w)}{A} \leq 1.$$

Time je nejednakost (2.1) dokazana.

Uočimo kako se jednakost dobiva iz činjenice da jednakost u (2.2) vrijedi ako i samo ako je $x = 1$. □

Teorem 2. *[Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost] Neka su* $a = (a_1, ..., a_n)$ *i* $b = (b_1, ..., b_n)$ *n-torke realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right), \tag{2.3}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $b_k = \lambda a_k, \forall k = 1, ..., n$.

Sljedeći dokaz CSB nejednakosti je preuzet iz [7].
Za potrebe ovog dokaza koristimo sljedeću lemu:

Lema 3. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 2bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ kvadratna funkcija. Tada vrijedi:*

i) $b^2 - ac \leq 0 \iff f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $b^2 - ac = 0 \iff f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \quad i \quad f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Dokaz. 1. Teorem očigledno vrijedi za vrijednosti $a_1 = ... = a_n = 0$ (odnosno za $b_1 = ... = b_n = 0$).

2. Ako pretpostavimo da je barem jedna vrijednost $a_i \neq 0$ i definiramo pomoćnu funkciju

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2.$$

Nju sada zapišemo u obliku

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c,$$

gdje je

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Uočimo da je $a > 0$ zbog $a_i \neq 0$ i $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, onda prema prethodnoj lemi mora biti

$$b^2 - ac \leq 0, \tag{2.4}$$

a to je upravo nejednakost (2.3).
Trebamo još dokazati da jednakost u (2.3) vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $b_k = \lambda a_k$, $\forall k = 1, ..., n$.
($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (2.3), odnosno (2.4) stoji jednakost. Tada je prema navedenoj lemi $f(-\frac{b}{a}) = 0$, odnosno vrijedi

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{b}{a} a_k + b_k\right)^2 = 0,$$

iz čega slijedi

$$-\frac{b}{a}a_k + b_k = 0, \ \ \forall k = 1, ..., n,$$

odnosno

$$b_k = \frac{b}{a}a_k, \ \ \forall k = 1, ..., n,$$

što bi značilo da postoji λ sa svojstvom $b_k = \lambda a_k$, gdje je $\lambda = \frac{b}{a}$.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $b_k = \lambda a_k$, $\forall k = 1, ..., n$. Tada specijalno imamo

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Ako u b i c uvrstimo $b_k = \lambda a_k$ dobivamo

$$b = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda a_k = \lambda a \quad i \quad c = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k)^2 = \lambda^2 a.$$

Tada je

$$D = b^2 - ac = (\lambda a)^2 - a \cdot \lambda^2 \cdot a = 0,$$

što upravo daje jednakost u (2.4), odnosno (2.3).

□

Teorem 4. *[Hölderova nejednakost] Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke pozitivnih brojeva, p i q dva realna broja različita od nule i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako su p,q pozitivni, tj. ako je $p > 1$ vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \tag{2.5}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $\alpha a_k^p = \beta b_k^q$ za $k = 1, 2, ..., n$, gdje su α i β nenegativni realni brojevi takvi da vrijedi $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Dokaz. Ako je $\sum_{k=1}^{n} a_k^p = 0$ ili $\sum_{k=1}^{n} b_k^q = 0$, onda jednakost vrijedi u (2.5). Pretpostavimo da je $\sum_{k=1}^{n} a_k^p > 0$ i $\sum_{k=1}^{n} b_k^q > 0$. Primjenimo li specijalni slučaj AG nejednakosti (2.1) za $n = 2$, za $w_1 = \frac{1}{p}, w_2 = \frac{1}{q}, a_1 = a^p, a_2 = b^q$ slijedi nejednakost

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab, \ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1 \ i \ a, b \geq 0\right). \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem

$$a = a_l \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{-\frac{1}{p}} \quad i \quad b = b_l \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{-\frac{1}{q}} \tag{2.7}$$

u nejednakost (2.6) dobivamo

$$\frac{1}{p} \frac{a_l^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{b_l^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q} \geq \frac{a_l b_l}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti za $l = 1, ..., n$ dobivamo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Ova nejednakost je ekvivalentna s (2.5) zbog $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Budući da jednakost u (2.6) vrijedi ako i samo ako $a^p = b^q$ te na temelju (2.7) zaključujemo da jednakost u (2.5) vrijedi ako i samo ako $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{-1} \cdot a_k^p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{-1} \cdot b_k^q$ za $k = 1, ..., n$ tj. ako i samo ako $\alpha a_k^p = \beta b_k^q$ za $k = 1, ..., n$. $\square$

Teorem 5. *[Suprotna Hölderova nejednakost] Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke pozitivnih brojeva, p i q dva realna broja različita od nule i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako je $p < 0$ ili $q < 0$, onda vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \tag{2.8}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $\alpha a_k^p = \beta b_k^q$ za $k = 1, 2, ..., n$, gdje su α i β nenegativni realni brojevi takvi da vrijedi $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $p < 0$ i označimo s $P = -\frac{p}{q}, Q = \frac{1}{q}$. Tada je $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$ za $P > 0$ i $Q > 0$. Na temelju toga i nejednakosti (2.5), imamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^P \right)^{\frac{1}{P}} \left(\sum_{k=1}^{n} B_k^Q \right)^{\frac{1}{Q}} \geq \sum_{k=1}^{n} A_k B_k,$$

gdje su $A_k > 0$ i $B_k > 0$ za $k = 1, ..., n$.

Zadnja nejednakost za $A_k = a_k^{-q}$ i $B_k = a_k^q b_k^q$ postaje (2.8). $\square$

Dokazi vezani uz Hölderove nejednakosti su preuzeti iz [4].

Dokazi AG nejednakosti, CSB nejednakosti i Hölderove nejednakosti pomoću konveksnih funkcija mogu se pronaći u [6].

3 Primjena nejednakosti u problemima optimizacije

Kao što smo već ranije naveli, ukoliko želimo koristiti ove metode za minimizaciju troškova proizvodnje, potrebno je da proizvodne funkcije ispunjavaju određene uvjete. AG i CSB nejednakosti zahtjevaju kontinuitet varijabli i funkcije moraju biti u obliku zbroja čiji umnožak daje konstantu. U teoriji je ova pretpostavka vrlo korisna, ali u stvarnom svijetu nije toliko česta. Zato za takve slučajeve koristimo Hölderovu nejednakost koja ne zahtijeva kontinuitet varijabli i možemo ju koristiti za diskretne slučajeve.

3.1 Primjena AG nejednakosti

Navesti ćemo primjer: Koliko iznosi minimalni trošak nabave lima za izradu kutije zadanog volumena pri čemu je poznata cijena jedinične površine lima? Važno je napomenuti da su troškovi nabave lima i ukupna površina nabavljenog lima proporcionalni.

Primjer 1. *Odredite dimenzije kutije volumena V koja ima oblik kvadra, tako da je njegovo oplošje minimalno uz uvjet da je volumen zadan i fiksan* ($V = abc$).

Stranice kvadra ćemo označiti s a, b, c. Znamo da je volumen kvadra dan formulom $V = a \cdot b \cdot c$ dok je oplošje kvadra $O = 2 \cdot (ab + bc + ac)$. Pošto se traže dimenzije kutije uz uvjet minimalnog oplošja, ovaj problem se svodi na problem minimizacije funkcije oplošja kvadra:

$$O(a, b, c) = 2 \cdot (ab + bc + ac). \tag{3.1}$$

Uočimo kako se umnožak pribrojnika u (3.1) može izraziti pomoću V, a to nam omogućava korištenje AG nejednakosti. Ukoliko AG nejednakost primijenimo na (3.1) dobivamo

$$\frac{2 \cdot (ab + bc + ac)}{3} \geq \sqrt[3]{2ab \cdot 2bc \cdot 2ac} \tag{3.2}$$

iz čega slijedi

$$O(a, b, c) = 2 \cdot (ab + bc + ac) \geq 3 \cdot (8a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2(V^2)^{\frac{1}{3}} = 6V^{\frac{2}{3}}. \tag{3.3}$$

Znamo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $2ab = 2ac = 2bc$ odnosno $a = b = c$. Pošto je zadan volumen, a on iznosi $V = abc$, tada slijedi da su tražene dimenzije

$$a = b = c = \sqrt[3]{V}. \tag{3.4}$$

Iz relacije (3.3) uočavamo da je vrijednost funkcije oplošja kutije veće ili jednako konstanti

$$6V^{\frac{2}{3}}. \tag{3.5}$$

Njezina se jednakost postiže ako i samo ako vrijedi (3.4), a u tom slučaju konstanta (3.5) je minimalna vrijednost funkcije O.

U sljedećem primjeru ćemo prikazati primjenu AG nejednakosti na problemu optimizacije troškova proizvodnje.

Primjer 2. *Neka je dana funkcija ukupnih troškova proizvodnje s* $K(x) = 2x^2 + 10x + 50$. *Varijabla* x *u ovom slučaju predstavlja količinu proizvoda. Odredimo količinu proizvoda* x_0 *za koju funkcija prosječnih troškova doseže minimum i iznos minimalnih prosječnih troškova.*

Funkcija prosječnih troškova nam je dana s

$$AK(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{2x^2 + 10x + 50}{x} = 2x + 10 + \frac{50}{x}. \tag{3.6}$$

Ukoliko AG nejednakost primijenimo na varijabilne pribrojnike $2x > 0$ i $\frac{50}{x} > 0$ funkcije prosječnih troškova AK, dobivamo

$$AK(x) = 2x + 10 + \frac{50}{x} \geq 10 + 2\sqrt{2x \cdot \frac{50}{x}} = 10 + 2\sqrt{100} = 30. \tag{3.7}$$

Jednakost u (3.7) vrijedi ako i samo ako

$$2x = \frac{50}{x}, \tag{3.8}$$

a sređivanjem tog izraza dobivamo da je $x = 5$. Na temelju toga, možemo zaključiti da na razini proizvodnje $x_0 = 5$, minimalni prosječni troškovi će iznositi 30.

Uočimo kako nam nejednakost (3.7) govori da je funkcija prosječnih troškova AK uvijek veća ili jednaka konstanti 30. To bi značilo da su prosječni troškovi uvijek veći ili jednaki 30 za sve razine proizvodnje. Onda možemo zaključiti da će prosječni troškovi proizvodnje

biti minimalni uz onu razinu proizvodnje za koju prosječni troškovi postižu vrijednost 30. Funkcija prosječnih troškova AK postiže minimalnu vrijednost 30 na onoj razini proizvodnje za koju su varijabilni pribrojnici funkcije AK jednaki. Iz toga onda imamo da je tražena razina proizvodnje x_0 jednaka 5.
Ovaj problem smo mogli riješiti i pomoću derivacija. Na taj način, morali bismo prvo pronaći prvu derivaciju funkcije AK, zatim njezine stacionarne točke i na kraju provjeravati predznak druge derivacije funkcije AK u stacionarnoj točki kako bismo se uvjerili da se radi o minimumu te funkcije. Pomoću AG nejednakosti smo izbjegli taj posao koji u ovom slučaju nije toliko kompliciran, ali smo uspjeli uštedjeti vrijeme. Time smo jednostavnim zaključivanjem iz (3.7) i (3.8) dobili da minimalni prosječni troškovi iznose 30, a postižu se na razini proizvodnje 5.
Detaljnije o primjeni AG nejednakosti može se pronaći u [1] i [3].

3.2 Primjena CSB nejednakosti

Idući primjer nam predstavlja problem optimizacije na kojemu ćemo prikazati primjenu CSB nejednakosti.

Primjer 3. *Odredite ekstreme proizvodne funkcije $f(x, y, z) = x + 3y + 9z$ ukoliko je zadano ograničenje $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Ovaj primjer možemo riješiti na vrlo jednostavan način primjenom CSB nejednakosti. Iz CSB nejednakosti ćemo dobiti sljedeću relaciju

$$f^2(x, y, z) = (x + 3y + 9z)^2 \leq (1^2 + 3^2 + 9^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 91. \tag{3.9}$$

Jednakost će u ovoj relaciji vrijediti ako i samo ako su uređene trojke $(1, 3, 9)$ i (x, y, z) međusobno proporcionalne, odnosno ukoliko postoji realan broj λ takav da

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Iz toga nam slijedi da je $x = \lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 9\lambda$, a iz ograničenja navedenog u zadatku onda slijedi $\lambda^2 = 1/91$. Iz relacije (3.9) tada lako dobijemo da je

$$-\sqrt{91} \leq f(x, y, z) \leq \sqrt{91}.$$

Također, na trivijalan način se može pokazati kako za $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{91}}$ funkcija f postiže minimum $-\sqrt{91}$, a za $\lambda = \frac{1}{\sqrt{91}}$ maksimum $\sqrt{91}$.

3.3 Primjena Hölderove nejednakosti

Ilustrirat ćemo primjer na kojemu ćemo pokazati primjenu Hölderove nejednakosti. Riješit ćemo ga metodom obrnute Hölderove nejednakosti. Treba napomenuti kako ova metoda ne zahtijeva kontinuitet varijabli proizvodne funkcije te se zbog toga može koristiti i za diskretne slučajeve.

Primjer 4. *Pretpostavimo da je tehnologija tvrtke predstavljena proizvodnom funkcijom s dvije ulazne varijable x_1 i x_2. Problem minimizacije troškova za određenu razinu proizvodnje y može se zapisati i kao:*

$$\min_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} w_1 x_1 + w_2 x_2 \tag{3.10}$$

tako da

$$(\alpha_1 x_1^{\phi} + \alpha_2 x_2^{\phi})^{\frac{1}{\phi}} = y, \tag{3.11}$$

gdje su $\alpha_1 > 0$ i $\alpha_2 > 0$, takvi da je $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, a w_1 i w_2 su tržišne cijene po kojima tvrtka može kupiti ulazne resurse x_1 i x_2. Sada iz (3.11) funkciju $f(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^{\phi} + \alpha_2 x_2^{\phi})^{\frac{1}{\phi}}$ nazivamo proizvodnom funkcijom.

Ako iz (3.11) izlučimo x_2 dobivamo

$$x_2 = \left(\frac{y^{\phi}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^{\phi} \right)^{\frac{1}{\phi}}. \tag{3.12}$$

Pomoću (3.12) početni problem možemo prebaciti u neograničeni problem:

$$\min_{x_1 \geq 0} g(x_1) = w_1 x_1 + w_2 \left(\frac{y^{\phi}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^{\phi} \right)^{\frac{1}{\phi}}, \tag{3.13}$$

gdje je g realna funkcija realne varijable.
Nadalje, označimo s $a_1 = w_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\phi}}$, $a_2 = w_2$, $b_1 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{\phi}} \cdot x_1$, $b_2 = \left(\frac{y^{\phi}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^{\phi} \right)^{\frac{1}{\phi}}$, $p = \frac{\phi}{\phi - 1}$, $q = \phi$.
Znamo da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\phi - 1}{\phi} + \frac{1}{\phi} = 1$. Također, znamo da za sve $\phi \in \langle -\infty, 0 \rangle$ vrijede nejednakosti $0 < p < 1$ i $q < 0$, dok za sve $\phi \in \langle 0, 1 \rangle$ imamo $p < 0$ i $0 < q < 1$. Za oba slučaja možemo

primijeniti suprotnu Hölderovu nejednakost za $n = 2$ na (3.13):

$$\begin{aligned} g(x_1) = w_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\phi}} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\phi}} x_1 + w_2 \left(\frac{y^\phi}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^\phi\right)^{\frac{1}{\phi}} \\ \geq \left[w_1^p \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{p}{\phi}} + w_2^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\phi}} x_1\right)^q + \left(\left(\frac{y^\phi}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^\phi\right)^{\frac{1}{\phi}}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} = \\ = y \left(w_1 \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} + w_1 \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\phi-1}}\right)^{\frac{\phi-1}{\phi}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Jednakost u (3.14) vrijedi ako i samo ako $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q}$, što je ekvivalentno s

$$\frac{\left(w_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{\phi}{\phi-1}}}{\left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{q}} x_1\right)^\phi} = \frac{w_2^{\frac{\phi}{\phi-1}}}{\frac{y^p}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^\phi}. \tag{3.15}$$

Iz (3.15) dobivamo

$$\overline{x_1} = y \cdot \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} \left(\alpha_1 \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\phi}{\phi-1}} + \alpha_2 \left(\frac{w_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\phi}{\phi-1}}\right)^{-\frac{1}{\phi}}. \tag{3.16}$$

Kombinacijom (3.16) i (3.12) dobivamo

$$\overline{x_2} = y \cdot \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} \left(\alpha_1 \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\phi}{\phi-1}} + \alpha_2 \left(\frac{w_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\phi}{\phi-1}}\right)^{-\frac{1}{\phi}}. \tag{3.17}$$

Tada iz (3.14) slijedi

$$g(x_1) \geq y \left(w_1 \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} + w_1 \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\phi-1}}\right)^{\frac{\phi-1}{\phi}} \tag{3.18}$$

za sve $x_1 \geq 0$, gdje jednakost u (3.18) vrijedi ako i samo ako je x_1 dan s (3.16). Prema definiciji, to znači da funkcija g ima globalni minimum što se dobiva jedinstvenim minimizatorom danim u (3.16). Metodom suprotne Hölderove nejednakosti se odmah dobiva vrijednost globalnog minimuma i tako smo na trivijalan način izbjegli složeni račun koji zahtijeva Lagrangeova metoda.

Više detalja o ovom primjeru može se pronaći u [2].

4 Zaključak

Problemi minimizacije troškova u proizvodnji mogu se riješiti na više načina. Definitivno najmoćniji način je korištenjem diferencijalnog računa. Najčešća metoda koja se koristi u diferencijalnom računu je metoda Lagrangeovih množitelja koja će nam za svaki problem donijeti odgovor, iako često zahtjeva mnogo vremena i netrivijalnog posla. Kako bismo tako nešto izbjegli, koristimo alternative preko kojih na brz i jednostavan način možemo doći do istih odgovora. Pomoću AG nejednakosti i CSB nejednakosti jednim potezom dolazimo do izračuna stacionarnih točaka i optimalnih vrijednosti proizvodnih funkcija koje promatramo. Također, treba napomenuti da se ove nejednakosti mogu koristiti samo u slučaju kada proizvodne funkcije imaju kontinuitet varijabli te funkcije moraju biti u obliku zbroja čiji umnožak daje konstantu. S druge strane, možemo koristiti Hölderovu nejednakost koja ne zahtijeva kontinuitet proizvodne funkcije, a do minimuma funkcije dolazimo na elegantniji način nego preko Lagrangeove ili neke druge metode u vidu diferencijalnog računa.

Literatura

[1] V. Kojić, M. Krpan, *Primjena težinske AG nejednakosti u problemu maksimizacije profita: Slučaj Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje s dva faktora proizvodnje*, Ekonomska misao i praksa, 30 (2021), 205.-223.

[2] V. Kojić, Z. Lukač, *On the cost minimization problem with CES technology: Reverse Hölder's inequality approach*, Proceedings of the 15th International Symposium on OPERATIONAL RESEARCH, Bled, 2019., 593.-598.

[3] Z. Lukač, V. Kojić, *Rješavanje problema optimizacije u problemima minimizacije troškova i ekonomične količine nabave pomoću nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine*, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, 11 (2013), 81.-97.

[4] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[5] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Element, Zagreb, 1996.

[6] M. Ribičić Penava, K. Bošnjak, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list, 16 (2016), 15.-25.

[7] R. Scitovski, D. Marković, D. Brajković, *Linearna algebra I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2020.