Konformno preslikavanje i primjene

Poljarević, Filip

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Filip Poljarević

Konformno preslikavanje i primjene

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Filip Poljarević

Konformno preslikavanje i primjene

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2023.

Sažetak

U ovom završnom radu, proučavat ćemo konformno preslikavanje s naglaskom na njegove primjene. Definirat ćemo konformno preslikavanje i pokazati njegove osnovne primjere. Zatim ćemo pručavati Möbiusovu transformaciju, koja je jedna od najznačajnijih primjena komfornog preslikavanja i pokazati nekoliko slučajeva u kojima primjenjujemo konformno preslikavanje.

Ključne riječi

konformno preslikavanje, translacija, kontrakcija, dilatacija, rotacija, inverzija,
Möbiusova transformacija

Abstract

In this final paper, we will study conformal mappings with a focus on their applications. We will define conformal mapping and demonstrate its basic examples. Next, we will examine the Möbius transformation, which is one of the most significant applications of conformal mapping, and illustrate a few cases where we apply conformal mappings.

Keywords

conformal mapping, translation, contraction, dilation, rotation, inversion,
Möbius transformation

Sadržaj

Uvod

U ovom radu ćemo ukratko opisati konformno preslikavanje te promotriti njegove primjene.
U prvom poglavlju se opisuje geometrijsko značenje i sama definicija konformnog preslikavanja. U drugom poglavlju ćemo pogledati osnovne primjere konformnih preslikavanja. U trećem poglavlju kao konformno preslikavanje razmatra se Möbiusova transformacija koja je dobila naziv po matematičaru Augustu Ferdinandu Möbiusu.
U zadnjem, četvrtom poglavlju ćemo promotriti nekoliko primjena ovih preslikavanja u nekim područjima znanosti.

1. Geometrijska interpretacija i definicija konformnog preslikavanja

Neka je funkcija f analitička u području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Definicija 1.1. *Kompleksna funkcija $\omega = f(z)$ je analitička u točki z ako je diferencijabilna u nekoj okolini točke z.*

Neka je $z_0 \in \Omega$ te promotrimo u kompleksnoj ravnini neku glatku krivulju K kroz z_o. Neka je $f(z_0) = \omega_0$ te neka krivulja K u $z-ravnini$ odgovara krivulji M u $\omega - ravnini$ gdje funkcija f preslikava K na M.
Funkcija $f(z)$ je analitička te pretpostavimo da $f'(z_0) \neq 0$. Stoga kompleksni broj ima eksponencijalni oblik

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = |f'(z_0)| \cdot e^{i\alpha},$$

gdje je $\alpha = \arg f'(z_0)$.

Ako točka $z = z_0 + \Delta z$ leži na K, onda točka $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ leži na M. Neka je kut kojeg čini kompleksni broj $\Delta z = z - z_0$ jednak $\arg \Delta z$ (to je kut odgovarajuće sekante krivulje K). Neka je kut kojeg čini kompleksni broj $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ jednak $\arg\Delta\omega$. Budući da, u graničnom prijelazu - limesu kada $\Delta z \to 0$, sekanta od K prelazi u tangentu od K, analogno u limesu kada $\Delta\omega \to 0$ dobiva se tangenta odgovarajuće krivulje M.
Označimo:
$\varphi = \angle$ (tangenta u točki z_0 na K u odnosu na $x - os$ u $z - ravnini$)
$\phi = \angle$ (tangenta u točki ω_0 na M u odnosu na $u - os$ u $\omega - ravnini$).

Budući da pri dijeljenju kompleksnih brojeva imamo svojstvo

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

iz toga slijedi da je argument

$$\arg \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \arg \Delta\omega - \arg \Delta z.$$

Dobivamo:

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta\omega \to 0} \arg \Delta\omega - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \phi - \varphi.$$

Vrijednost derivacije ne ovisi o načinu na koji Δz teži prema nuli, pa je ova razlika kuteva ista za bilo koju drugu glatku krivulju koja prolazi kroz z_0.
Odatle slijedi da za analitičku funkciju f s derivacijom $f'(z_0)$, kut između bilo kojih dvaju glatkih krivulja $\angle(h_1, h_2)$ u točki z_0 u $z - ravnini$, jednak je kutu između krivulja $f(h_1)$ i $f(h_2)$ u točki ω_0, koje su slika tih glatkih krivulja u $\omega - ravnini$, tj. vrijedi

$$\begin{cases} \phi_1 - \varphi_1 = \alpha \\ \phi_2 - \varphi_2 = \alpha \end{cases} \implies \quad \phi_1 - \phi_2 - \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \quad \implies \quad \phi_1 - \phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Stoga, ovakvim preslikavanjem "čuvaju se kutovi" po veličini i orijentaciji.

Definicija 1.2. *Preslikavanje $f : \Omega \to \mathbb{C}$ koje je univalentno (injektivno) naziva se* ***konformno preslikavanje*** *ako ono čuva kutove po veličini i orijentaciji.*

Teorem 1.1. *(kriterij za konformno preslikavanje, [4])*
Preslikavanje $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je konformno preslikavanje u nekom području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako i samo ako je f analitička funkcija u području Ω i $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$.

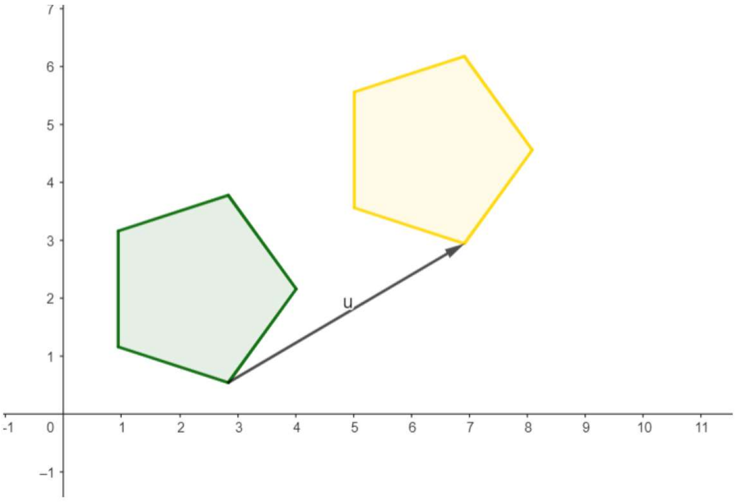
□

Dokaz prethodnog teorema može se vidjeti u [4].

2. Osnovni primjeri konformnih preslikavanja

2.1. Translacija

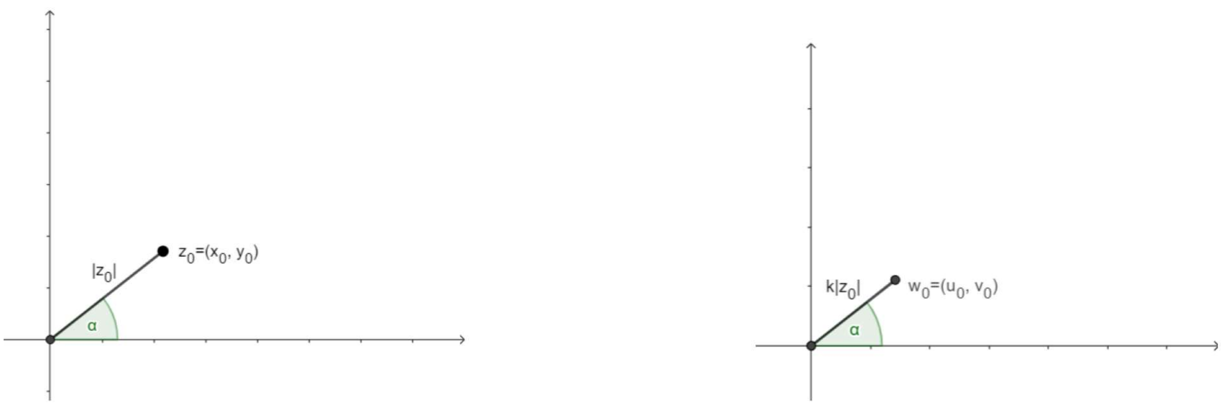
Translacija je konformno preslikavanje u kompleksnoj ravnini koje svaki kompleksni broj z preslikava u novi kompleksni broj z' tako da je $z' = z + a$, gdje je a kompleksan broj koji predstavlja pomak. Odnosno, translacija pomiče svaku točku u kompleksnoj ravnini za fiksni vektor $\vec{u}$, koji ima početnu točku u ishodištu kompleksne ravnine, a završnu točku, u točki u kompleksnoj ravnini koja predstavlja kompleksni broj a.



Slika 1: Translacija

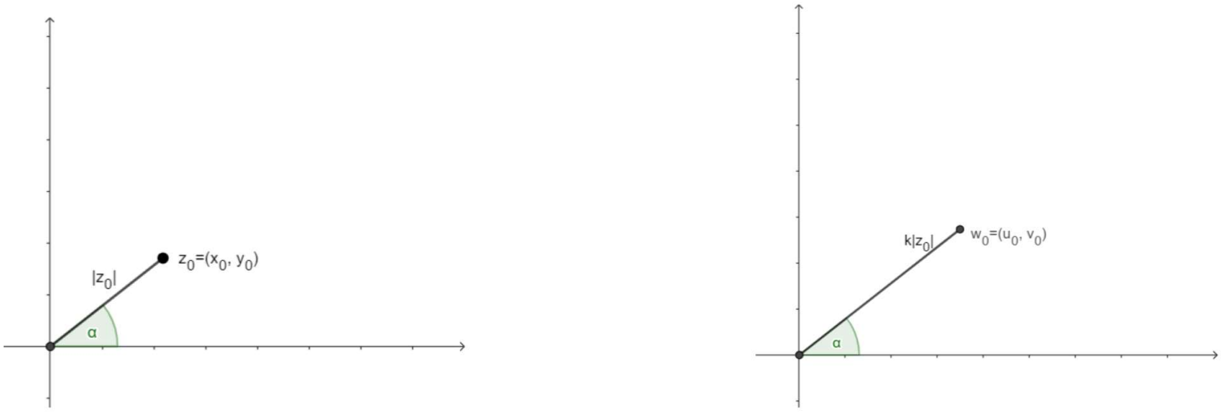
2.2. Kontrakcija i dilatacija

Kontrakcija je konformno preslikavanje koje smanjuje udaljenost između svih točaka u kompleksnoj ravnini. Udaljenost između točaka nakon kontrakcije ne može biti veća od udaljenosti između tih točaka prije preslikavanja.



Slika 2: Kontrakcija

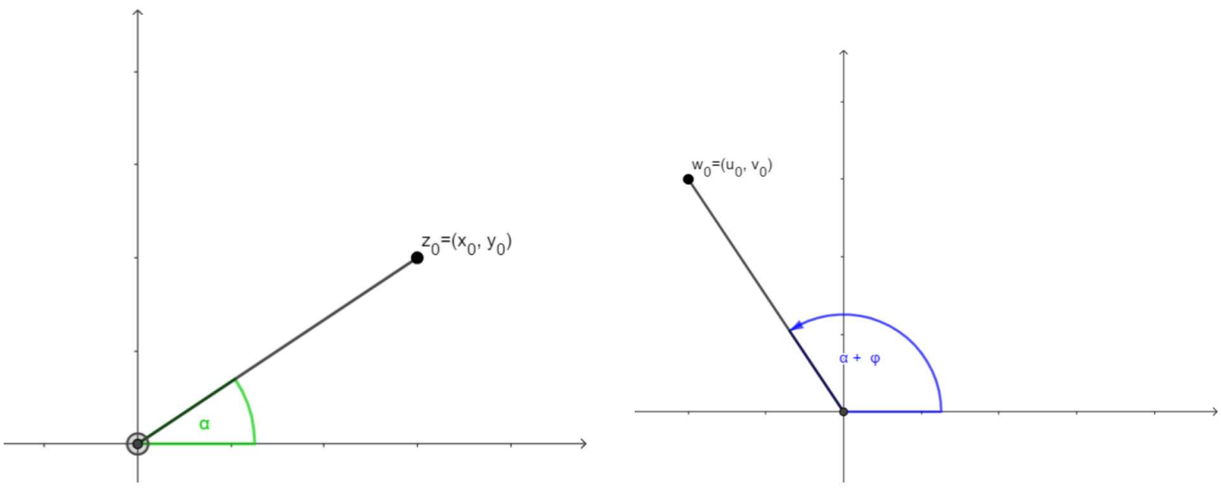
Dilatacija je konformno preslikavanje koje povećava udaljenosti između točaka. Formalno, neka je dano preslikavanje izrazom: $f(z) = az$, gdje je a je kompleksan broj različit od nule. Ako je $|a| < 1$, radi se o kontrakciji koja smanjuje udaljenosti između točaka,a ako je $|a| > 1$, radi se o dilataciji koja ih povećava.



Slika 3: Dilatacija

2.3. Rotacija

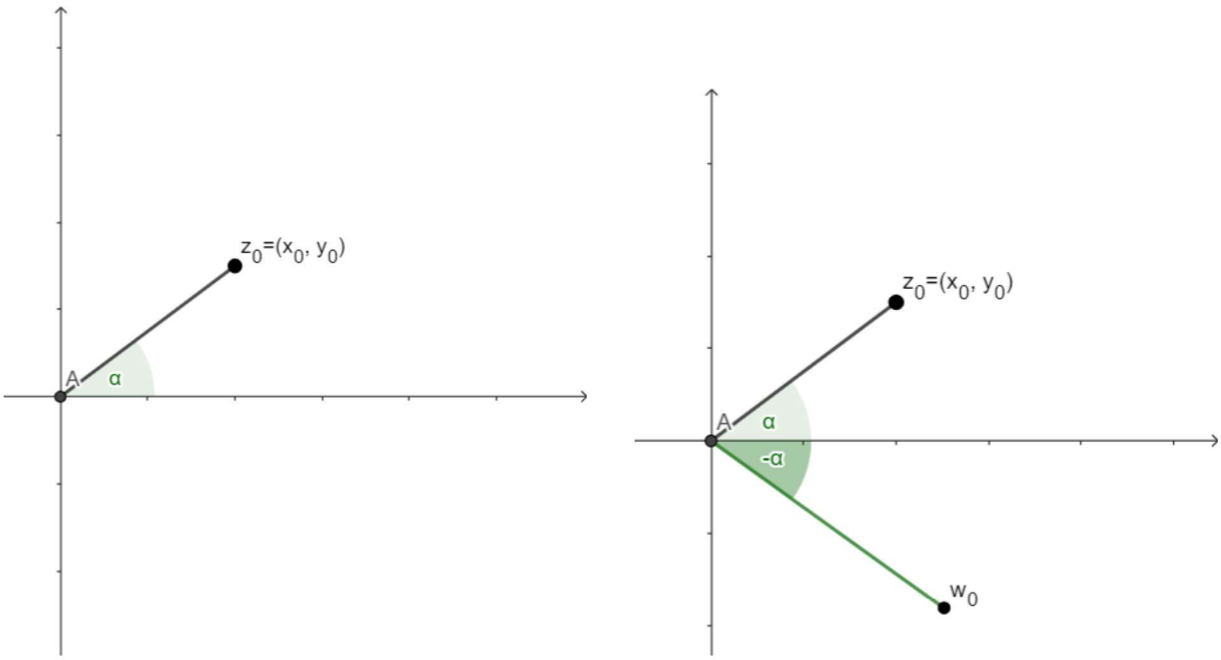
Rotacija je konformno preslikavanje koje okreće točke u kompleksnoj ravnini oko ishodišta (nule) za fiksni kut φ i ima oblik $f(z) = z \cdot e^{i \cdot \varphi}$.
To preslikavanje ima trigonometrijski oblik $\omega = f(z) = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot z$. Ako još i z zapišemo kao $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, dobivamo $\omega = r(\cos(\alpha + \varphi) + i \sin(\alpha + \varphi))$.



Slika 4: Rotacija

2.4. Inverzija

Inverzija je konformno preslikavanje dano izrazom $f(z) = \frac{1}{z}$ i koje transformira svaku točku u kompleksnoj ravnini tako da zamjenjuje mjesto s obzirom na jediničnu kružnicu (tj., kružnicu s radijusom 1) koja je centrirana u ishodištu (nuli). Formalno, za svaki kompleksni broj z različit od nule, inverzija će dati novi kompleksni broj ω na sljedeći način: $\omega = \frac{1}{z}$. Pritom, početna točka z preslikava se inverzijom u točku ω.



Slika 5: Inverzija

3. Möbiusova transformacija

Jedna od najznačajnijih primjena konformnog preslikavanja je Möbiusova transformacija.

Definicija 3.1. *Preslikavanje*

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

gdje su a,b,c,d dane kompleksne konstante takve da je $ad - bc \neq 0$,naziva se ***Möbiusova transformacija*** *(ili razlomljena linearna funkcija).*

Definiramo ju za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \left(\frac{-d}{c}\right)$ uz pretpostavku $c \neq 0$.
Općenito, s

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

je definirana funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.
U svojoj domeni ona je univalentno (injektivno) preslikavanje i vrijedi

$$f'(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\frac{-d}{c}\right).$$

Budući da je ovo analitička funkcija sa svojstvom $f'(z) \neq 0$, zaključujemo da je i konformna funkcija.
Inverzno preslikavanje

$$z = g(\omega) = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a},$$

gdje je $ad - bc \neq 0$ je također Möbiusova transformacija.
Funkcija $g : \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ je inverzna funkcija od funkcije

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Provjerimo

$$z = g(\omega) = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}.$$

Iz izraza $\omega = f(z)$ dobivamo:

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad / \cdot (cz+d)$$

$$\omega(cz+d) = az + b$$

$$\omega cz + d\omega = az + b$$

$$c\omega z - az = b - \omega d$$

$$z(c\omega - a) = b - d\omega$$

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}.$$

Napomena 3.1. *U slučaju da je* $c = 0$, *onda funkcije* $\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *i* $z = g(\omega) = \frac{-d\omega+b}{c\omega-a}$ *imaju oblik afinih analitičkih preslikavanja (tj., polinomi su prvog stupnja)*

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

$$g(\omega) = \frac{d}{a}\omega - \frac{b}{a}.$$

Funkcije f, g *mogu se proširiti do međusobno inverznih bijekcija uvođenjem tzv. beskonačno daleke "točke" kojom se proširuje skup* $\mathbb{C}$ *na sljedeći način,* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

Propozicija 3.1. *(vidi [4])*
Svaka Möbiusova transformacija jeste kompozicija translacije, dilatacije, rotacije i inverzije (pri tome neka od tih transformacija može izostati).

□

Propozicija 3.2. *(neka svojstva Möbiusove transformacije, [4])*

1. *koeficijenti a,b,c,d u izrazu* $\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *nisu jednoznačno određeni, množenjem s faktorom* $\lambda \neq 0$ *brojnika i nazivnika dobivamo istu transformaciju*
2. *Möbiusova transformacija ima najviše dvije točke osim u slučaju identitete* $f(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$
3. *Möbiusova transformacija* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *je jedinstveno određena ako su poznate njezine vrijednosti u tri točke.*

□

Primjer 3.1. *Preslikajmo Möbiusovom transformacijom jedinični krug pomoću funkcije* $\omega = f(z) = \frac{z}{z-1}$.

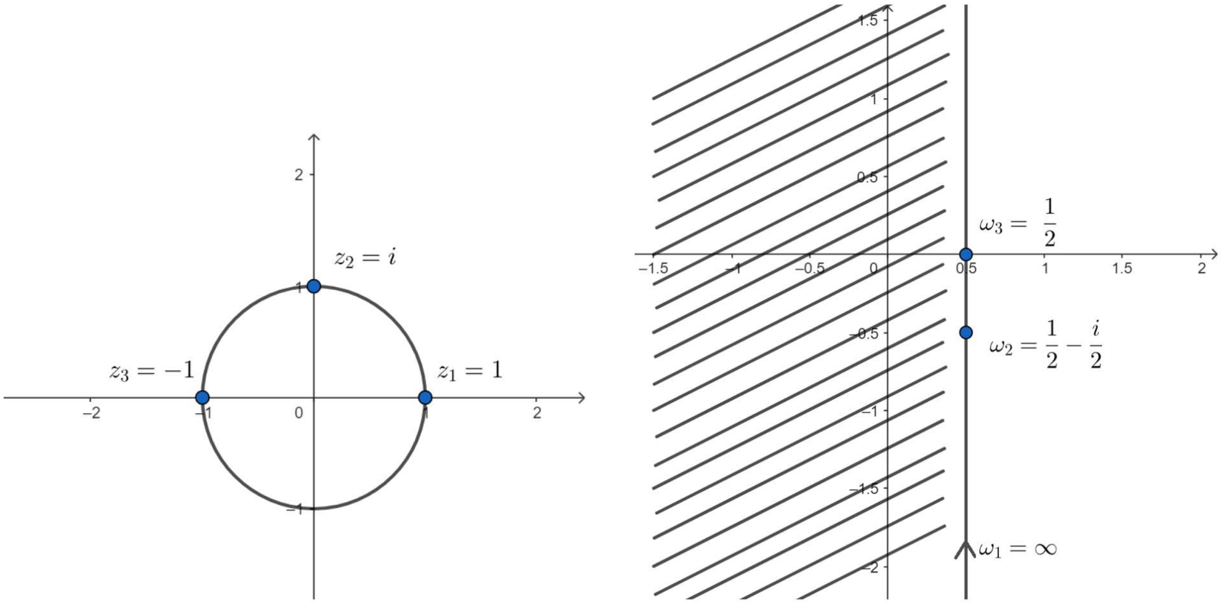
Rješenje: *Izaberimo 3 točke koje određuju tu kružnicu. Möbiusova transformacija preslikava kružnicu u pravac.*
Neka su $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$.

$$\omega_1 = f(z_1) = f(1) = \frac{1}{1-1} = \infty$$

$$\omega_2 = f(z_2) = f(i) = \frac{i}{i-1} \cdot \frac{i+1}{i+1} = \frac{i^2+i}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\omega_3 = f(z_3) = f(-1) = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, Möbiusova transformacija preslikava $z_1 = 1$ *u* $\omega_1 = \infty$, $z_2 = i$ *u* $\omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ *i* $z_3 = -1$ *u* $\omega_3 = \frac{1}{2}$. *Nadalje, točku* $z_4 = 0$ *preslikava u točku* $\omega_4 = 0$. *To znači da će se dani jedinični krug preslikati ovom Möbiusovom transformacijom u lijevu poluravninu određenu s pravcem* $u = \frac{1}{2}$ *u* $\omega -$ *ravnini.*



Slika 6: Möbiusova transformacija

4. Primjene konformnog preslikavanja

Konformna preslikavanja imaju izražen doprinos u fizici, matematici, kartografiji, medicini i u mnogim drugim područjima.

4.1. Joukowsky preslikavanje

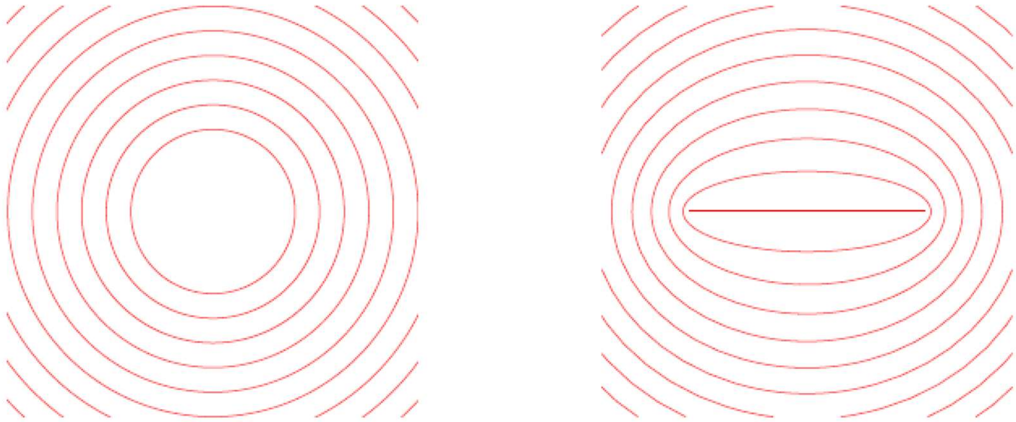
U aerodinamici imamo posebno interesantnu primjenu preslikavanja pod nazivom Joukowsky preslikavanje. Dano je izrazom

$$\omega = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Prvi puta je korišteno za proučavanje strujanja oko zrakoplovnih krila od strane pionira aero i hidrodinamike, ruskog istraživača Nikolai Zhukovskii (Joukowski).
Kako vrijedi

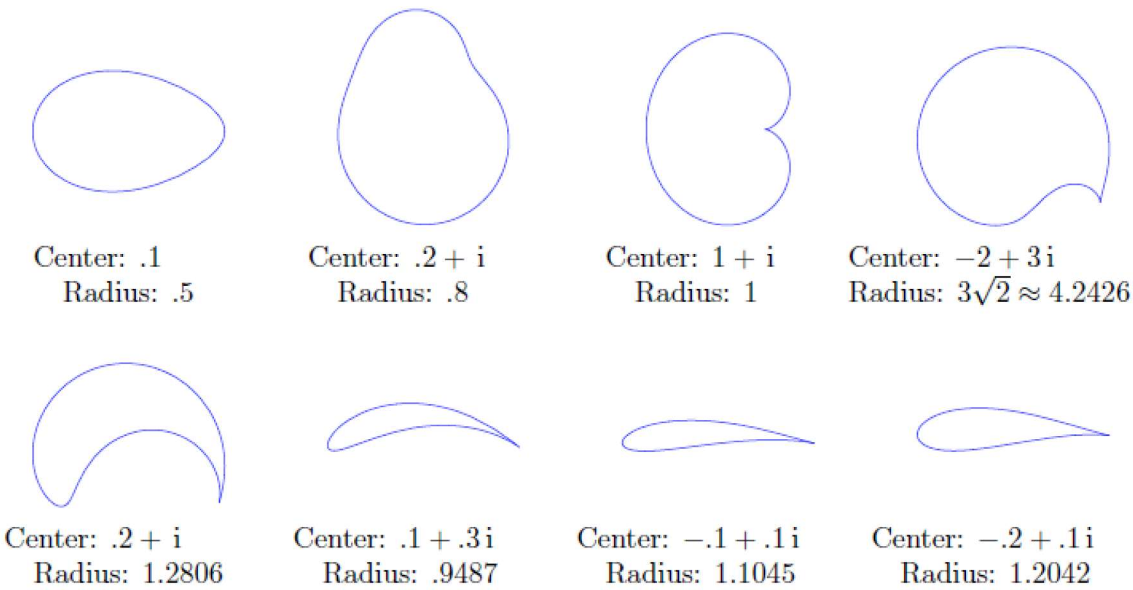
$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0,$$

ako i samo ako je $z = \pm 1$, Joukowsky preslikavanje je konformno osim u kritičnim točkama $z = \pm 1$, a u točki $z = 0$ nije definirano.



Slika 7: Joukowsky preslikavanje kružnica sa središtem u ishodištu, u elipse (vidi [6])

Pod Joukowsky preslikavanjem, koncentrične kružnice $|z| = r \neq 1$ su preslikane u elipse s fokusima u točkama ± 1 u $\omega - ravnini$, pogledati Sliku 7.

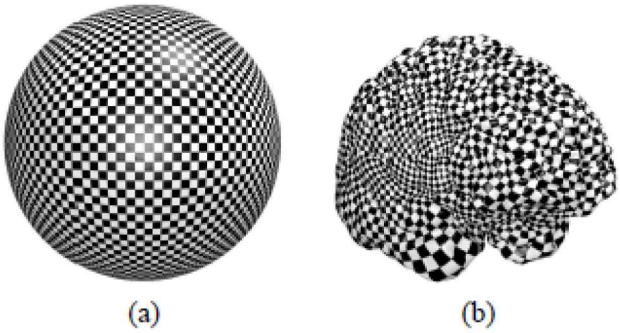


Slika 8: Promjenom središta i polumjera kružnica imamo različite slike Joukowsky preslikavanja (vidi [6])

Učinak Joukowsky preslikavanja na krugove koji nisu centrirani u ishodištu je zanimljiv. Ako krug prolazi kroz točku $z = 1$, tada njegova slika nije više glatka. već ima vrh u $\omega = 1$, a to se događa u zadnjih šest primjera Slike 8. Neke od krivulja poprimaju oblik poprečnog presjeka idealiziranog krila zrakoplova.

4.2. Mapiranje mozga

Tzv. Cortical brain flattening, je tehnika je koja se koristi u neuroznanosti i neurovizualizaciji kako bi se vizualizirala i analizirala složena naborana struktura moždane kore. Primarna svrha kortikalnog ravnanja mozga je transformirati naboranu površinu korteksa u 2D reprezentaciju, tj. prikazati mozak pomoću mapa.

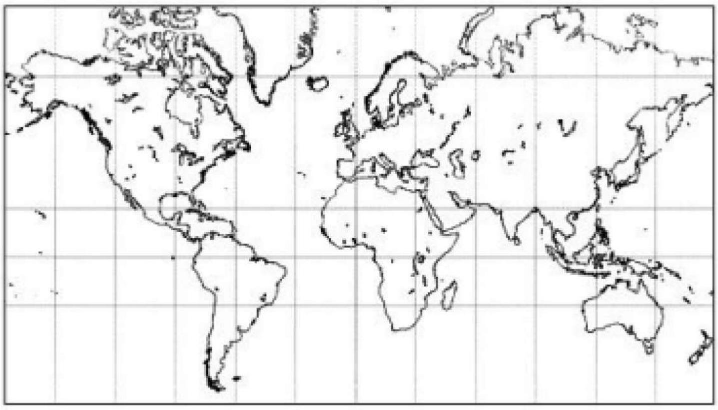


Slika 9: Konformno mapiranje: a) tekstura sfere, b) mozga (vidi [3])

Budući da ljudski mozak nema pravilni oblik, često je potrebno izvršiti transformaciju kako bismo ga aproksimirali sferičnim oblikom. Ovaj proces preslikavanja sfere na ravnu površinu poznat je kao „circlepacking”. Pri tome krugovi se stvaraju tako da nisu u međusobnom preklapanju, odnosno da je svaki krug tangenta susjednom krugu (vidi [2], [3]).

4.3. Pomorska plovidba

Konformna preslikavanja koriste se i u kartografiji, tj. kod Mercatorovog preslikavanja i stereografskih projekcija.
Stereografska projekcija je geometrijska metoda preslikavanja površine Zemlje na ravninu. Ona projicira sferu Zemlje na ravninu koja je tangencijalna u jednoj točki na sferi. Stereografska projekcija čuva kuteve, što je čini konformnom i korisnom za mapiranje malih područja s minimalnom distorzijom.
Mercatorova projekcija je cilindrična kartografska projekcija koja predstavlja površinu Zemlje kao pravokutnu kartu. Mercatorova projekcija čuva kuteve i oblike, što je čini idealnom za navigaciju i nautičke karte.
Mercatorovo preslikavanje je pogodno za pomorsku navigaciju zbog svoje sposobnosti očuvanja stalnog smjera kretanja, dok je stereografska projekcija bolja za male karte i specifične znanstvene svrhe.



Slika 10: Mercatorova karta (vidi [7])

4.4. Karta svijeta

Za preslikavanje Zemlje na ravnu površinu, odnosno za mapiranje trodimenzionalnog objekta na dvodimenzionalni, koristimo Möbiusovu transformaciju. Proces je sličan onom kod mapiranja mozga, ali razlikuju se u činjenici da je površina Zemlje relativno glatka i pravilna, pa je možemo aproksimirati kao sferu. Znanstvenici su razvili softver koji koristi Möbiusovu transformaciju kako bi pretvorio sliku projekcije Zemlje u sliku u dvodimenzionalnom prostoru (vidi [2]).

Slika 11: Primjena konformnog preslikavanja u kartografiji (vidi [5])

4.5. Dirichletov problem

Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje te neka je h neprekidna funkcija na rubu tog područja $\partial\Omega$. Potrebno je pronaći harmonijsku funkciju u na Ω koja je neprekidna na rubu područja $\partial\Omega$ tako da vrijedi

$$\Delta u = 0$$

$$u|_{\partial\Omega} = h,$$

gdje je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplaceov diferencijalni operator drugog reda.

Neki primjeri problema za koje se može primijeniti ovaj gornji, tzv. Dirichletov problem, u matematičkom modeliranju su:

- Ravninski tok fluida
- Elektrostatski potencijal
- Difuzija topline.

Teorem 4.1. *(vidi [5])*
Neka je $U(u, v)$ harmonijska funkcija na području D' u $\omega -$ ravnini, tj. $U(u, v)$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta U(u, v) = 0, \qquad \omega = u + iv \in D'.$$

Ako je $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ konformno preslikavanje koje preslikava D iz $z-$ravnine u D' u $\omega -$ ravninu, onda je funkcija

$$V(x, y) = U(f(z)) = U(u(x, y), v(x, y))$$

harmonijska na D u $z -$ ravnini pa zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta V(x, y) = 0, \qquad z = x + iy \in D.$$

$\square$

Napomenimo da ako je kompleksna funkcija $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička u području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, onda su pripadne funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ harmonijske funkcije na Ω, tj. u i v ispunjavaju Laplaceovu jednadžbu na Ω.

Navedimo par primjera Dirichletovog problema.

Primjer 4.1. *(stacionarni toplinski tok, vidi [1])*
Fourierov zakon provođenja topline koji tvrdi da toplinski flux - tok q u homogenom izotropnom mediju - području Ω konstantne toplinske vodljivosti k, dan je s

$$q = -k\nabla u,$$

gdje je u temperatura u području Ω. Za vremenski neovisnu temperaturu u, zakon očuvanja energije implicira da $\nabla \cdot q = 0$, tj. $\Delta u = 0$ u Ω. Kada je u određen na rubu, ovo je Laplaceova jednadžba s Dirichletovim rubnim uvjetima.
Izračunajmo temperaturu u, u vanjskom dijelu dvije kružnice $|z-i| < 1$ i $|z+i| < 1$, sa Dirichletovim uvjetima $u = 1$ za prvu kružnicu te $u = -1$ za drugu kružnicu, isto kao i $u \to 0$ pri graničnom prijelazu ∞.
Kako bismo riješili problem, pogledajmo da preslikavanje $\omega = \frac{1}{z}$ preslikava našu promatranu domenu u $\frac{-1}{2} < \zeta(\omega) < \frac{1}{2}$.
Riješimo:

$$\begin{cases} \Delta U(\xi,\eta) = 0 \\ U(\xi, -\frac{1}{2}) = 1 \\ U(\xi, \frac{1}{2}) = -1 \\ U \to 0 \quad kada \quad (\xi,\eta) \to (0,0). \end{cases}$$

Može se pokazati da je jedinstveno rješenje ovoga problema

$$U(\xi,\eta) = -2\eta$$

tako da je

$$u(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

rješenje originalnog problema.

Primjer 4.2. *(vidi [5])*
Rješenje Dirichletovog rubnog problema, danog u ravninskim polarnim koordinatama r, φ, na krugu polumjera R

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \qquad D = \{\ (r,\varphi) : r \leqq R\}$$

$$u(R,\varphi) = h(\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

pomoću Poissonove formule glasi (vidi [5])

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rrcos(\varphi - t) + r^2} h(t)dt.$$

Literatura

[1] L. Ahlfors, *Applications of Conformal Mapping*, New York University, 1979.

[2] A. Fiedorowic, T. Remkiewicz, Z. Flanagan, *Möbius Transformations*, 2020.

[3] X. Gu, Y. Wang, T. F. Chan, P. M. Thompson, S. T. Yau, *Genus Zero Surface Conformal Mapping and Its Application to Brain Surface Mapping*, 2004.

[4] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4/I, Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[5] S. Majstorović, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa II*, 2017. https://www.mathos.unios.hr/index.php/209

[6] P. J. Olver, *Complex Analysis and Conformal Mapping*, University of Minnesota, 2022.

[7] N. Tomić, *Mercatorova i srodne kartografske projekcije*, PMF - matematički odsjek, Zagreb, 2017.