Neprekidne distribucije i njihove primjene

Petrušić, Laura

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Laura Petrušić

Neprekidne distribucije i njihove primjene

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Laura Petrušić

Neprekidne distribucije i njihove primjene

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2023.

Sažetak

U ovom radu smo imali cilj opisati poneke neprekidne distribucije te navesti njihove primjene. Prvo ćemo definirati neke osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti koji su nam bitni za lakše razumijevanje neprekidnih distribucija. Zatim ćemo za eksponencijalnu, laplaceovu, beta, uniformnu, gama, normalnu i trokutastu distribuciju napisat oblik i ilustrirat grafički funkcije gustoće i distribucije te izvest formule za očekivanje i varijancu. Nakon toga ćemo za te distirbucije navesti za što se koriste te navesti primjere.

Ključne riječi

neprekidne distribucije, eksponencijalna distribucija, laplaceova distribucija, beta distribucija, uniformna distribucija, gama distribucija, normalna distribucija, trokutasta distribucija

Continuous distributions and their applications

Summary

The purpose of this thesis is describing some continuous distributions and giving some examples where those distributions can be applied. Firstly, we will state some important concepts from probability theory that will be important for easier understanding of this thesis theme. Next we will define the density and distribution functions and illustrate them, we will also prove the formulas for the mean and variance of the exponential, laplace, beta, uniform, gamma, normal and triangular distribution. After that we will state where those distributions can be applied with illustrative examples.

Key words

continuous distributions, exponential distribution, laplace distribution, beta distribution, uniform distribution, gamma distribution, normal distribution, triangular distribution

Sadržaj

Uvod

Neprekidne distribucije koriste se za opisivanje mogućih vrijednosti neprekidnih slučajnih varijabli. Cilj ovog završnog rada je upoznati čitatelja s nekim neprekidnim distribucijama te vidjeti primjere kako ih se može primjenit. U svakom poglavlju ćemo obradit po jednu distribuciju. U poglavljima ćemo vidjeti kako izgledaju funkcija gustoće, funkcija distribucije, očekivanje i varijanca pojedine distribucije i zatim ćemo navesti nekoliko primjera tih distribucija.

1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je σ-algebra skupova na Ω ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. *Ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je i $A^C \in \mathcal{F}$ (zatvorenost σ-algebre na komplementiranje)*
3. *Ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tada $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$ (zatvorenost σ-algebre na prebrojive unije).*

Definicija 2. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeće:*

(A1) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$ *(nenegativnost vjerojatnosti)*

(A2) $P(\Omega) = 1$ *(normiranost vjerojatnosti)*

(A3) *Ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ tada vrijedi $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ (σ-aditivnost vjerojatnosti).*

Definicija 3. *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ skupa $\Omega \neq \emptyset$, σ-algebre $\mathcal{F}$ na njemu i vjerojatnosti $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ nazivamo vjerojatnosni prostor.*

Definicija 4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-algebra na $\mathbb{R}$ generirana svim otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$ (tzv. Borelova σ-algebra). Svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju je $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zove se slučajna varijabla.*

Definicija 5. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

1. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f, takva da vrijedi* $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Funkciju X zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X ili kraće funkcija gustoće slučajne varijable X.

Definicija 6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Funkciju $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla poprimi realizaciju manju ili jednaku tom broju, tj. funkciju*

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$$

zovemo funkcija distribucije slučajne varijable.

Definicija 7. *Skup vrijednosti koje slučajna varijabla X može poprimiti zove se slika slučajne varijable i označava se s $\mathcal{R}(X)$.*

Definicija 8. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je konačan integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X.

Propozicija 1. *Neka je X slučajna varijabla koja ima očekivanje $E[X]$ i neka s u $a, b \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi $E[aX + b] = aE[X] + b$.* [[5], str. 87]

Definicija 9. *Ako postoji $E[(X - EX)^2]$, taj pozitivan broj zovemo varijanca slučajne varijable X i označavamo ga s $VarX$.*

Propozicija 2. *Neka je X slučajna varijabla s varijancom $VarX = E[(X - EX)^2]$, tada se varijanca može zapisat i u obliku $VarX = E[X^2] - (E[X])^2$.* [[14], str. 137]

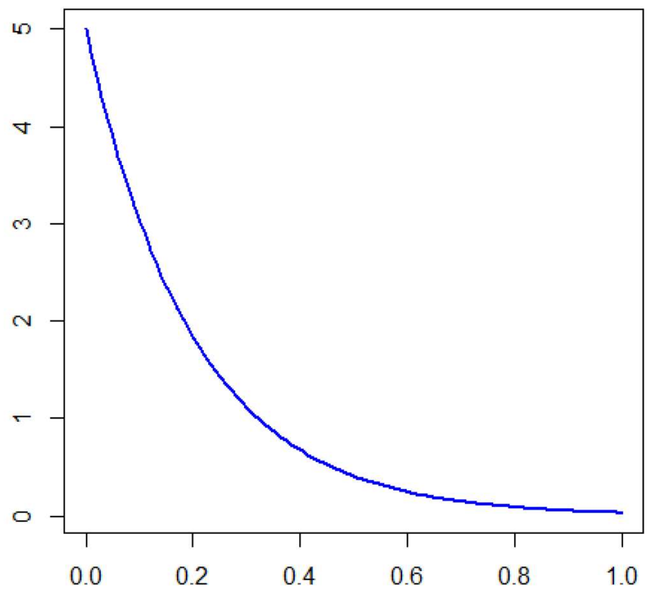
2 Eksponencijalna distribucija

Definicija 10. *Neprekidna slučajna varijabla X sa slikom $\mathcal{R}(X) = \langle 0, +\infty \rangle$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

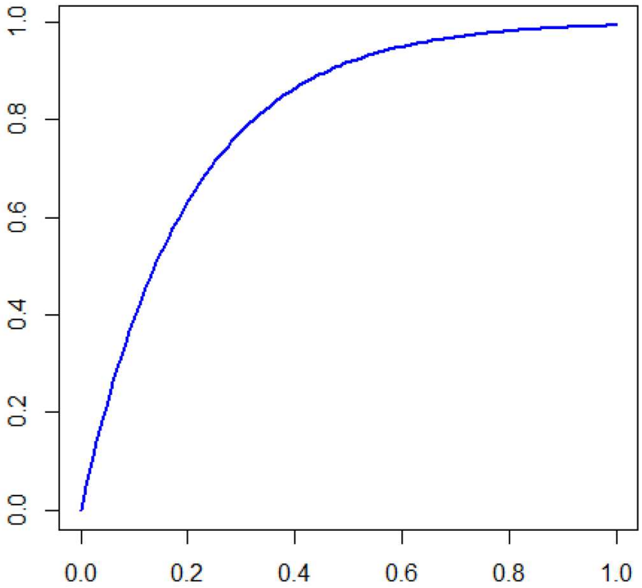
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je s izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}.$$



Slika 1: Graf funkcije gustoće eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 5$.



Slika 2: Graf funkcije distribucije eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 5$.

Očekivanje eksponencijalne slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{vmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \begin{vmatrix} u = t & dv = e^{-t}dt \\ du = dt & v = -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \left[-te^{-t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t} dt \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[-(t+1)e^{-t} \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Varijanca eksponencijalne slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{vmatrix} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\lambda^2} e^{-t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} u = t^2 & dv = e^{-t}dt \\ du = 2tdt & v = -e^{-t} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left[-t^2 e^{-t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2te^{-t} dt \right] - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left[0 + 2 \left[-te^{-t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t} dt \right] \right] - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{2}{\lambda^2} \left[-te^{-t} \Big|_0^{+\infty} - e^{-t} \Big|_0^{+\infty} \right] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

2.1 Primjene

Eksponencijalna distribucija se koristi za računanje vremenskog intervala do pojave prvog slučajnog događaja, koristi se npr. za računanje vremena poziva, računanje životnog vijeka atoma pri radioaktivnom raspadu, životni vijek elektroničkih uređaja, itd.[6] To ćemo ilustrirati idućim primjerom.

Primjer 1. *Djelatnik korisničke službe radi videoidentifikacije pri čemu je vrijeme trajanja videoidentifikacije modelirano eksponencijalnom distribucijom. Očekivano vrijeme trajanja videoidentifikacije iznosi* 6 *minuta. Izračunajmo kolika je vjerojatnost da će videoidentifikacija trajati više od* 7 *minuta. U ovom primjeru je prikladno korisiti eksponencijalnu distribuciju jer se ona koristi za slučajne varijable koje predstavljaju vrijeme čekanja do pojave nekog događaja pri čemu se karakteristike ne mijenjaju tijekom vremena. U ovom slučaju slučajna varijabla X predstavlja vrijeme čekanja do pojave završetka poziva, odnosno slučajna varijabla X modelira vrijeme trajanja poziva u minutama. Znamo da je očekivano trajanje videoidentifikacije* 6 *minuta pa kako je $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ dobivamo da je parametar $\lambda = \frac{1}{6}$. Izračunajmo sada vjerojatnost da će videoidentifikacija trajati više od* 7 *minuta.*

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{6}\cdot 7} = 0.3114$$

Dobivamo da vjerojatnost da će videoidentifikacija trajati duže od 7 *minuta iznosi* 31.14%.

Primjer 2. *Očekivani životni vijek mikrovalne je* 7 *godina s pretpostavkom da se životni vijek mikrovalne može modelirati eksponencijalnom distribucijom. Odredimo kolika je vjerojatnost da će životni vijek mikrovalne biti između* 6 *i* 9 *godina. U ovom primjeru je prikladno korisiti eksponencijalnu distribuciju jer se ona koristi za slučajne varijable koje predstavljaju vrijeme čekanja do pojave nekog događaja pri čemu se karakteristike ne mijenjaju tijekom vremena. U ovom slučaju slučajna varijabla X modelira vrijeme čekanja do kvara mikrovalne u godinama, odnosno životni vijek mikrovalne u godinama. Znamo da je očekivani životni vijek mikrovalne* 7 *godina, tj. $E[X] = 7$. Kako vrijedi $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ dobivamo da je $\lambda = \frac{1}{7}$. Izračunajmo vjerojatnost da će životni vijek mikrovalne biti između 6 i 9 godina.*

$$P(6 < X < 9) = P(X < 9) - P(X < 6) = 1 - e^{-\frac{1}{7}\cdot 6} - (1 - e^{-\frac{1}{7}\cdot 9}) = 0.1479$$

Dobivamo da vjerojatnost da će životni vijek mikrovalne biti između 6 *i* 9 *godina iznosi* 14.79%.

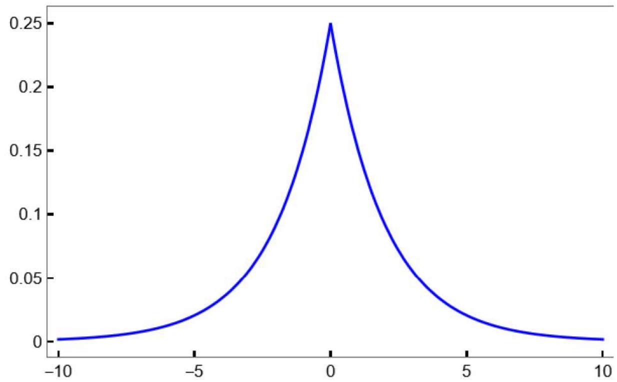
3 Laplaceova distribucija

Definicija 11. *Neprekidna slučajna varijabla X sa slikom $\mathcal{R}(X) = \mathbb{R}$ ima Laplaceovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

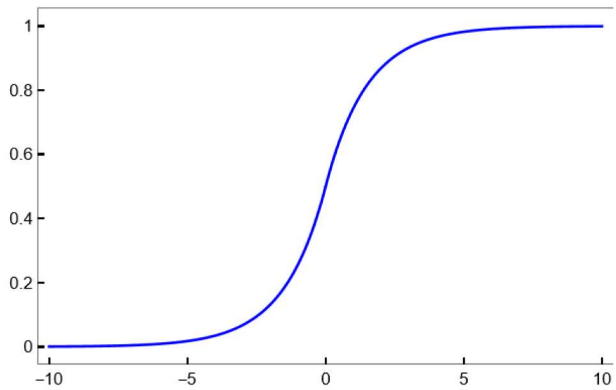
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x} & , x < 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je s izrazom

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & , x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases}.$$



Slika 3: Graf funkcije gustoće laplaceove slučajne varijable s parametrom $\lambda = 2$.



Slika 4: Graf funkcije distribucije laplaceove slučajne varijable s parametrom $\lambda = 1.5$.

Očekivanje laplaceove slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) = \int_{-\infty}^{0} x\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} x\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right) = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{\lambda x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda}xe^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right) = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{-\lambda x}dx \\ du = dx & v = \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(0 - \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(-\frac{1}{\lambda^2} - 0 - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Varijanca laplaceove slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
VarX &= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} x^2\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx - 0^2 \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} x^2e^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx\right) = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^{\lambda x}dx \\ du = 2xdx & v = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda}x^2e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx\right) \\
&= \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^{-\lambda x}dx \\ du = 2xdx & v = \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(0 - \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx + -\frac{1}{\lambda}x^2e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right) \\
&= \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{\lambda x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(-\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}xe^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx\right) + 0 + \frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right) \\
&= \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{-\lambda x}dx \\ du = dx & v = \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(-\frac{2}{\lambda}\left(0 - \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0}\right) + \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda}\left(0 - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}\right)\right) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3}\right) = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

3.1 Primjene

Laplaceova distribucija ima razne primjene u biologiji, financijama, inžinjerstvu, itd. Koristi se pri detektiranju konstantnog signala iskrivljenog zbog prisutnosti buke te pri šifriranju i dešifriranju zvučnih signala. Također se može koristiti za modeliranje kamatnih stopa, deviznog tečaja, prinosa tržišta dionica, veličine čestica, dijamanta i graha. Više o navedenim primjenama se može pročitati u [12].

Primjer 3. *Ana je kupila dionicu s varijabilnosti stope povrata dionica* 8%*. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će stopa povrata dionica pasti na manje od* 2%*. Neka je X slučajna varijabla koja modelira stopu povrata dionica. Kako varijabilnost stope povrata dionica iznosi* 8% *označimo standardnu devijaciju sa $s_n = 0.08$ te kako je $VarX = s_n^2$ onda je $VarX = 0.0064$. Odredimo parametar λ. Kako vrijedi da je $VarX = \frac{2}{\lambda^2}$ onda je*

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{VarX}} = \sqrt{\frac{2}{0.0064}} = 17.6777.$$

Izračunajmo sada vjerojatnost da će stopa povrtata dionica pasti na manje od 2%*.*

$$P(X < 2) = 1 - \frac{1}{2}e^{-17.6777 \cdot 0.02} = 1 - \frac{1}{2}e^{-0.353554} = 1 - 0.3511 = 0.6489$$

Vjerojatnost da će stopa povrata dionica pasti na manje od 2% *iznosi* 64.89%*.*

4 Gama distribucija

Definicija 12. *Funkcija* $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *dana izrazom*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx, z > 0$$

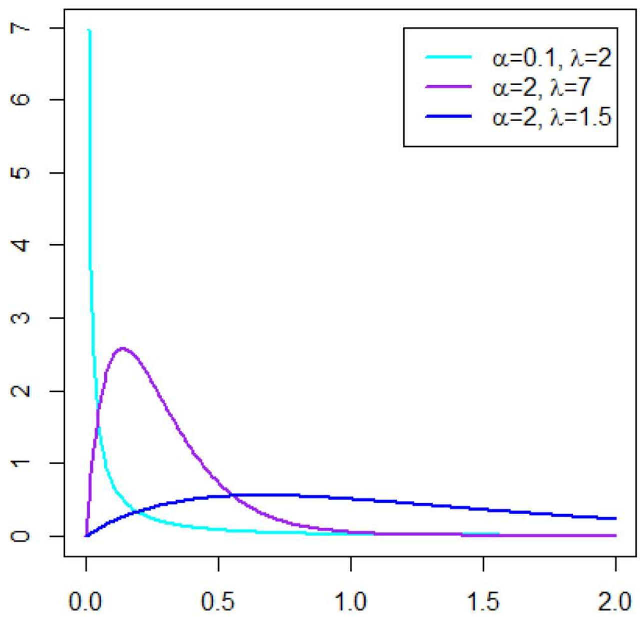
naziva se gama funkcija te za nju vrijedi $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *za* $z > 0$ *i* $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 13. *Neprekidna slučajna varijabla* X *sa slikom* $\mathcal{R}(X) = \langle 0, +\infty\rangle$ *ima gama distribuciju s parametrima* $\alpha > 0$ *i* $\lambda > 0$ *ako joj je funkcija gustoće dana izrazom*

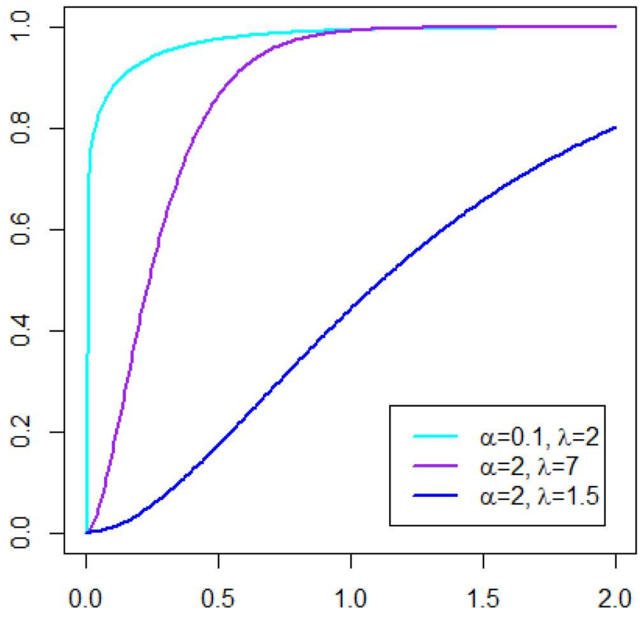
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\lambda}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}.$$



Slika 5: Graf funkcije gustoće gama slučajne varijable za različite parametre.



Slika 6: Graf funkcije distribucije gama slučajne varijable za različite parametre.

Očekivanje gama slučajne varijable je oblika

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + x\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \left| \begin{matrix} \frac{x}{\lambda} = t \\ \frac{dx}{\lambda} = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha}\lambda^{\alpha} e^{-t} \lambda dt \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{(\alpha+1)-1} e^{-t} dt = \frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\lambda\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \lambda\alpha.
\end{aligned}$$

Varijanca gama slučajne varijable je oblika

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - (\lambda\alpha)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \lambda^2\alpha^2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx - \lambda^2\alpha^2 \\
&= \left| \begin{matrix} \frac{x}{\lambda} = t \\ \frac{dx}{\lambda} = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1} e^{-t} \lambda dt - \lambda^2\alpha^2 \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} t^{(\alpha+2)-1} e^{-t} dt - \lambda^2\alpha^2 = \frac{\lambda^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} - \lambda^2\alpha^2 \\
&= \frac{\lambda^2(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} - \lambda^2\alpha^2 = \frac{\lambda^2(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \lambda^2\alpha^2 \\
&= \lambda^2(\alpha^2+\alpha) - \lambda^2\alpha^2 = \lambda^2\alpha.
\end{aligned}$$

4.1 Primjene

Gama distribucija se koristi za predviđanje vremena čekanja do pojave k-tog događaja. Primjer korištenja gama distribucije u medicini je za određivanje faze karcinogeneze. Kako gama distribucija opisuje vjerojatnost realizacije nekoliko nezavisnih slučajnih događaja koji se događaju do određenog vremena, pomoću nje se određuje faza karcinogeneze te prosječni vremenski interval među fazama za svaku vrstu raka. Također se njome određuje prosječno vrijeme trajanja procesa karcinogeneze do razvoja karcinoma u stadij kada se može otkriti tijekom kliničkog pregleda. Više o tome može se pročitati u [4]. Gama distribucija se koristi i za određivanje prosječnog broja kompenzacija mutacija po štetnoj mutaciji. Do kompenzatorne mutacije dođe kada se gubitak sposobnosti uzrokovan štetnom mutacijom obnovi epistatičkom interakcijom s drugom mutacijom na nekom drugom mjestu u genomu. Više o tome može se pročitati u [7]. Gama distribucija se koristi u metereologiji i klimatologiji za prikazivanje razlika u količini oborina. Koristi se za prikaz mjesečnih i sezonskih ukupnih količina padalina na način koji olakšava usporedbu podataka u različitim uvjetima, te se njome određuju i anomalije količine oborina. Više o tome može se pročitati u [18].

Primjer 4. *U nedjelju ujutro u menzu dođe jesti* 30 *studenata po satu. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će* 4. *student doći jesti u manje od* 3 *minute te nas zanima koliko je očekivano vrijeme ulaska* 12. *studenta u menzu. Neka je* X *slučajna varijabla koja modelira vrijeme dolaska studenta u menzu u minutama. Kako se gama distribucija koristi za predviđanje vremena čekanja do k-tog događaja onda je u ovom primjeru najprikladnije koristiti gama distribuciju jer su dolazak* 4. *i* 12. *studenta k-ti događaji za koje želimo predvidjeti vrijeme čekanja do njihovog dolaska. Kako u* 60 *minuta prosječno dolazi* 30 *studenata jesti onda u prosjeku* 1 *student dolazi u menzu svake* 2 *minute. Svake 2 minute student ulazi u menzu pa je* $\lambda = 2$ *i kako nas zanima vrijeme dolaska* 4. *studenta u menzu onda je* $\alpha = 4$. *Izračunajmo sada vjerojatnost da će* 4. *student doći u menzu u manje od* 3 *minute.*

$$
\begin{aligned}
P(X<3) &= \int_0^3 \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^3 \frac{2^4}{\Gamma(4)} x^{4-1} e^{-2x} dx = \int_0^2 \frac{16}{3!} x^3 e^{-2x} dx \\
&= \int_0^3 \frac{16}{6} x^3 e^{-2x} dx = \frac{8}{3} \int_0^3 x^3 e^{-2x} = \begin{vmatrix} u = x^3 & dv = e^{-2x} dx \\ du = 3x^2 dx & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} \Big|_0^3 + \frac{3}{2} \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx \right] = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^{-2x} dx \\ du = 2x dx & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{8}{3} \left[-\frac{27}{2} e^{-6} + \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \Big|_0^3 + \int_0^3 x e^{-2x} dx \right] \right] = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{-2x} dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{vmatrix} \\
&= \frac{8}{3} \left[-\frac{27}{2} e^{-6} + \frac{3}{2} \left[-\frac{9}{2} e^{-6} + \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^3 + \frac{1}{2} \int_0^3 e^{-2x} dx \right] \right] \right] \\
&= \frac{8}{3} \left[-\frac{27}{2} e^{-6} + \frac{3}{2} \left[-\frac{9}{2} e^{-6} + \left[-\frac{3}{2} e^{-6} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^3 \right] \right] \right] \\
&= \frac{8}{3} \left[-\frac{27}{2} e^{-6} + \frac{3}{2} \left[-\frac{9}{2} e^{-6} + \left[-\frac{3}{2} e^{-6} + \frac{1}{4} \left[-e^{-6} + 1 \right] \right] \right] \right] = 0.8488
\end{aligned}
$$

Vjerojatnost da će u manje od 3 *minute* 4. *student doći u menzu jesti iznosi* 84.88%. *Izračunajmo očekivano vrjeme dolaska* 12. *studenta.*

$$E[X] = \lambda\alpha = 2 \cdot 12 = 24.$$

Očekivano je da će nakon 24 *minute već* 12. *student doći jesti u menzu.*

5 Beta distribucija

Definicija 14. *Funkcija* $B\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *dana izrazom*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

naziva se beta funkcija te za $p, q \in \mathbb{Z}$ *vrijedi*

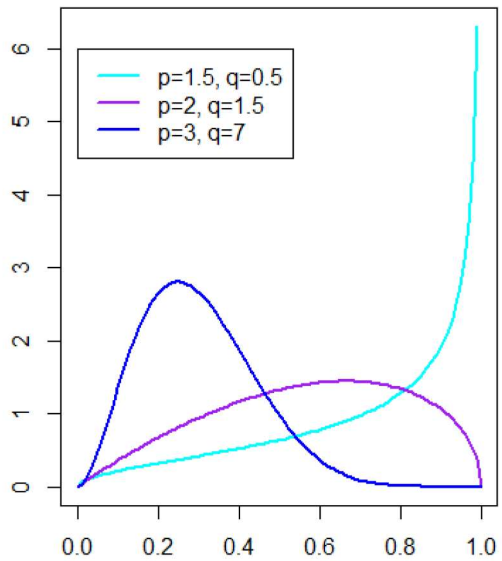
$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Definicija 15. *Neprekidna slučajna varijabla* X *sa slikom* $\mathcal{R}(X) = \langle 0,1\rangle$ *ima beta distribuciju s parametrima* $p, q \in \mathbb{R}^+$ *ako joj je funkcija gustoće dana izrazom*

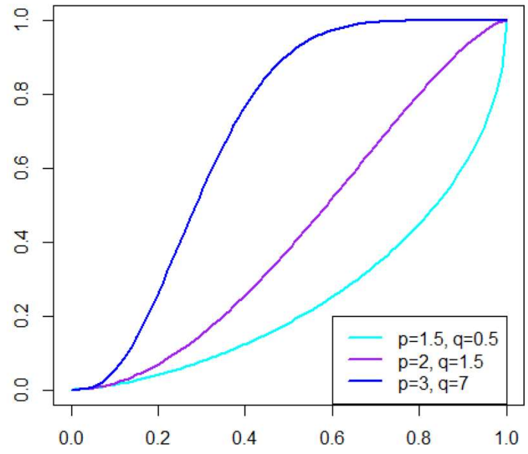
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & , x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & , x \notin \langle 0,1\rangle \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{B(p,q)} \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt & , x \in \langle 0,1\rangle \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}.$$



Slika 7: Graf funkcije gustoće beta slučajne varijable za različite parametre.



Slika 8: Graf funkcije distribucije beta slučajne varijable za različite parametre.

Očekivanje beta slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx + \int_0^1 x\frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_1^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{B(p,q)}x^{(p+1)-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{B(p+1,q)}{B(p,q)} = \frac{\frac{p!(q-1)!}{(p+q)!}}{\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}} = \frac{p!(p+q-1)!}{(p-1)!(p+q)!} \\
&= \frac{p(p-1)!(p+q-1)!}{(p-1)!(p+q)(p+q-1)!} = \frac{p}{p+q}.
\end{aligned}
$$

Varijanca beta slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \left(\frac{p}{p+q}\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\cdot dx + \int_0^1 x^2\frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_1^{+\infty} x^2\cdot 0\cdot dx - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{B(p,q)}x^{(p+2)-1}(1-x)^{q-1}dx - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{B(p+2,q)}{B(p,q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{\frac{(p+1)!(q-1)!}{(p+q+1)!}}{\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{(p+1)!(p+q-1)!}{(p-1)!(p+q+1)!} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{(p+1)p(p-1)!(p+q-1)!}{(p-1)!(p+q+1)(p+q)(p+q-1)!} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{p^2+p}{(p+q-1)(p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{(p^2+p)(p+q) - p^2(p+q+1)}{(p+q+1)(p+q)^2} \\
&= \frac{p^3+p^2+p^2q+pq-p^3-p^2q-p^2}{(p+q+1)(p+q)^2} \\
&= \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}.
\end{aligned}
$$

5.1 Primjene

Beta distribucija se najčešće primjenjuje za određivanje vjerojatnosti uspjeha nekog eksperimenta, pri čemu s p označavamo broj uspjeha, a s q broj neuspjeha u prijašnjim realizacijama istog eksperimenta. Jedna od primjena beta distribucije je u biotestiranju, odnosno mjerenju koncentracije i potentnosti neke tvari te njegov utjecaj na žive stanice i tkiva. Najčešća upotreba beta distribucije u biotestiranju je u modeliranju disperzije Bernoullijevog parametra p. Primjer primjene beta distribucije u biotestiranju je da "uspjeh", tj. parametar p može detektirati tumor određenog tipa u određenom organu. Više o primjeni beta distribucije u biotestiranju može se pročitati u [[9],str.437-452]. Još jedna od primjena beta distribucije je u teratologiji. Teratologija se bavi proučavanjem urođenih abnormalnosti, a neki od teratogena koji mogu utjecati na pojavu fizičkih abnormalnosti su radijacija, nuspojave tableta korištene u terapijama, kontaminanti, itd. Beta distribucija se koristi pri određivanju veze između izloženosti nekog organizma ili populacije nekom teratogenu i posljedica kakav utjecaj ta izloženost ima na taj organizam ili populaciju. Više o tome može se pročitati u [[9],str.529-533].

Primjer 5. *Osmero ljudi koji su otvorili završni rad su ga pročitali do kraja, a petero ljudi je ili odmah odustalo od čitanja ili odustalo usred čitanja. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će iduća osoba koja otvori završni rad pročitati ga do kraja. Neka slučajna varijabla X modelira udio osoba koji su pročitali završni rad. Budući da su zadani uspjesi i neuspjesi prijašnjih čitanja završnog rada prikladno je koristiti beta distribuciju. Parametar p predstavlja uspjeh, odnosno broj koliko je ljudi pročitalo završni rad, a parametar q predstavlja neuspjeh, odnosno broj koliko ljudi nije pročitalo završni rad do kraja pa označimo da je* $p = 8$ *i* $q = 5$*. Vjerojatnost da će iduća osoba pročitati završni rad do kraja možemo izračunati očekivanjem.*

$$E[X] = \frac{p}{p+q} = \frac{8}{8+5} = \frac{8}{13} = 0.6154$$

Dakle, očekivana vjerojatnost da će iduća osoba koja otvori završni rad pročitati cijeli rad iznosi 61.54%.

Primjer 6. *Anin pas ima dvije loptice, jednu plavu i jednu zelenu. Svaki dan kad Ana dođe s posla kući njen pas joj donese lopticu, ali Ana nikad ne zna koju će dobiti. Počela je brojati i primjetila je da je 6 puta dobila plavu lopticu i 4 puta zelenu lopticu. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će Ana sljedeći dan s više od 80% sigurnošću dobiti plavu lopticu. Neka je X slučajna varijabla koja modelira vjerojatnost da Anin pas donese plavu lopticu. Budući da su zadani uspjesi i neuspjesi prijašnjih donošenja plave loptice prikladno je koristiti beta distribuciju. Parametar p predstavlja uspjeh odnosno broj koliko je puta donešena plava loptica pa označimo $p = 6$. Parametar q predstavlja neuspjeh odnosno broj koliko je puta donešena zelena loptica pa označimo $q = 4$. Izračunajmo da će Ana s više od 80% sigurnošću dobit plavu lopticu.*

$$
\begin{aligned}
P(X > 0.8) = 1 - P(X \leq 0.8) &= \frac{1}{B(p,q)} \int_0^{0.8} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \\
&= \frac{1}{\frac{(6-1)!(4-1)!}{(6+4-1)!}} \int_0^{0.8} x^{6-1}(1-x)^{4-1} dx = \frac{9!}{5! \cdot 3!} \int_0^{0.8} x^5(1-x)^3 dx \\
&= 504 \int_0^{0.8} x^5(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1) dx = 504 \int_0^{0.8} (-x^8 + 3x^7 - 3x^6 + x^5) dx \\
&= 504 \left[-\frac{1}{9}x^9 + \frac{3}{8}x^8 - \frac{3}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 \right] \Bigg|_0^{0.8} = 0.9144
\end{aligned}
$$

S 91.44% vjerojatnosti smo sigurni da je barem 80% vjerojatnost da će Ana sljedeći put kad dođe s posla kući dobiti plavu lopticu.

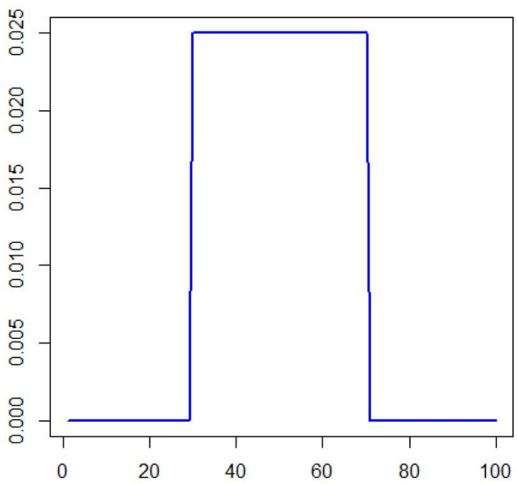
6 Uniformna distribucija

Definicija 16. *Neprekidna slučajna varijabla* X *sa slikom* $\mathcal{R}(X) = \langle a, b\rangle$ *ima uniformnu distribuciju na intervalu* $\langle a, b\rangle$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *ako joj je funkcija gustoće dana izrazom*

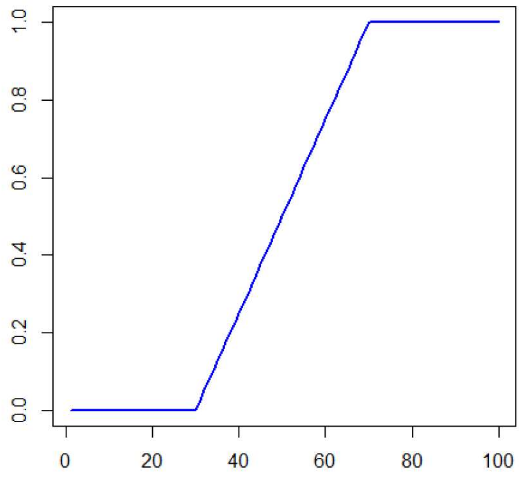
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in \langle a, b\rangle \\ 0 & , x \notin \langle a, b\rangle \end{cases}.$$

Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable na $\langle a, b\rangle$ *dana je izrazom*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, a\rangle \\ \frac{x-a}{b-a} & , x \in [a, b\rangle \\ 1 & , x \in [b, +\infty\rangle \end{cases}.$$



Slika 9: Graf funkcije gustoće uniformne slučajne varijable za a=30 i b=70.



Slika 10: Graf funkcije distribucije uniformne slučajne varijable za a=30 i b=70.

Očekivanje uniformne slučajne varijable je oblika

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \bigg|_{a}^{b} = \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2} \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}.
\end{aligned}$$

Varijanca uniformne slučajne varijable je oblika

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a} dx + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \bigg|_{a}^{b} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(a^2+b^2+ab)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{4(a^2+b^2+ab) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

6.1 Primjene

Uniformna distribucija se primjenjuje u situacijama kada su sve realizacije slučajnog uzorka jednako vjerojatne. Jedan od primjera gdje se uniformna distribucija koristi u ekonomiji je upravljanje zalihama novih proizvoda. Odnosno, njome se procjenjuje potražnja i vrijeme potrebne nadopune zalihe novih proizvoda za koje ne postoje prijašnji podatci pomoću kojih bi se moglo to dvoje procijeniti. Više o tome može se pročitati u [17]. Uniformna distribucija se može koristi i u greški kvantizacije. Greška kvantizacije je razlika između stvarne vrijednosti signala i odabrane vrjednosti signala iz intervala kvantizacije. Ukoliko ulazni signal ima visoku amplitudu i široki spektar, energija greške kvantizacije se određuje uniformnom distribucijom na intervalu između $+\frac{Q}{2}$ i $-\frac{Q}{2}$ pri čemu je Q interval kvantizacije. Više o tome može se pročitati u [[13],str.28-35].

Primjer 7. *Bus vozi od 6:00 do 23:00 svakih* 20 *minuta od zračne luke do glavnog kolodvora. Zanima nas kolika je vjerojatnost da putnik koji sleti za vrijeme kada bus vozi mora čekati manje od* 5 *minuta na bus da dođe te koje je očekivano vrijeme čekanja. Neka slučajna varijabla* X *modelira vrijeme čekanja na bus u minutama. Kako je vrijeme čekanja na bus u intervalu* $\langle 0, 20\rangle$ *pri čemu su sve moguće minute čekanja u tom intervalu jednako vjerojatne prikladno je koristiti uniformnu distribuciju. Vrijeme čekanja može iznositi od* 0 *do* 20 *minuta pa označimo* $a = 0$ *i* $b = 20$*. Izračunajmo vjerojatnost da će putnik čekati manje od* 5 *minuta na bus.*

$$F(5) = P(X < 5) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Vjerojatnost da će putnik čekat manje od 5 *minuta na bus iznosi* 25%*. Izračunajmo sada koliko je očekivano vrijeme čekanja na bus.*

$$E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+20}{2} = 10$$

Očekivano vrijeme čekanja na bus iznosi 10 *minuta.*

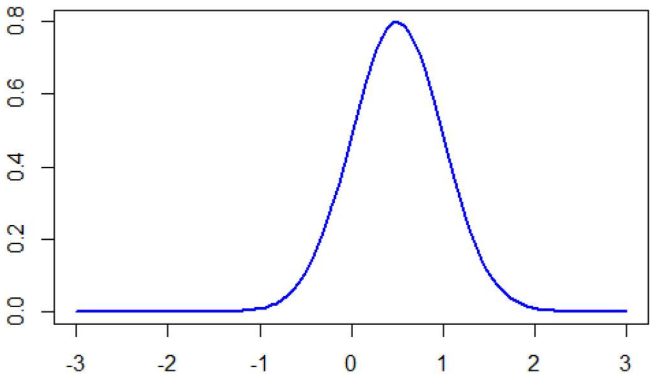
7 Normalna distribucija

Definicija 17. *Neprekidna slučajna varijabla X sa slikom $\mathcal{R}(X) = \mathbb{R}$ ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ ako je njena funkcija gustoće dana izrazom*

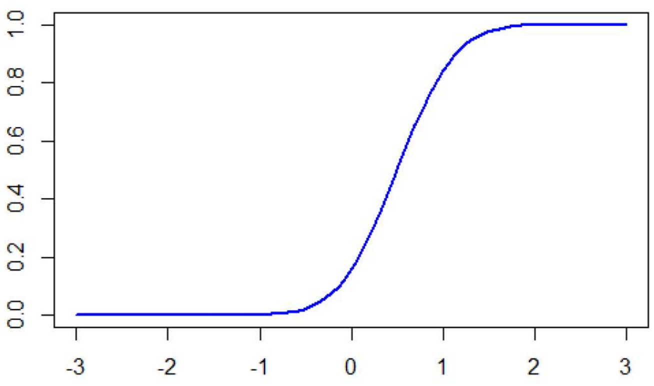
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R},$$

pri čemu su μ, $\sigma \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$.
Funkcija distribucije te slučajne varijable je oblika

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \ x \in \mathbb{R}.$$



Slika 11: Graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable za $\mu = 0.5$ i $\sigma = 0.5$.



Slika 12: Graf funkcije distribucije normalne slučajne varijable za $\mu = 0.5$ i $\sigma = 0.5$.

Definicija 18. *Normalna distribucija s očekivanjem* $\mu = 0$ *i standardnom devijacijom* $\sigma = 1$ *naziva se normalna standardna distribucija.*

Definicija 19. *Funkcija distribucije normalne distribucije s parametrima* $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\mu, \sigma > 0$ *je oblika*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$$

pri čemu je Φ *funkcija distribucije normalne standardne distribucije za koju vrijedi svojstvo* $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Očekivanje normalne distribucije je oblika

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}})^2} dx \\
&= \left| t = \tfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} dt = \tfrac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + \mu) e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[0 + \mu\sqrt{\pi} \right] = \mu.
\end{aligned}$$

Varijanca normalne distribucije je oblika

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu^2 = x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \mu^2 \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}})^2} dx - \mu^2 = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \\ dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + \mu)^2 e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt - \mu^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[2\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + 2\sqrt{2}\sigma\mu \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] - \mu^2 \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + 0 + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} - \mu^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \\
&= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \left| \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2tdt = dz \end{array} \right| = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-z} \frac{dz}{2t} \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} t e^{-z} dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \sqrt{z} e^{-z} dz \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} z^{\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} z^{\frac{3}{2}-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2.
\end{aligned}$$

7.1 Primjene

Puno fenomena u biologiji, financijama, ekonometriji, astrologiji, itd. moguće je modelirati normalnom distribucijom. U biologiji se koristi kod mjerenja raznih fizičkih obilježja kao npr. visina, težina, dužine noktiju itd. Normalna distribucija s očekivanjem $\mu = 100$ i standardnom devijacijom $\sigma = 15$ se korisiti za skaliranje kvocjenta inteligencije. Centralnim graničnim teoremom se može normalnom distribucijom aproksimirati niz standardiziranih parcijalnih suma nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. [6]

Primjer 8. *U tvornici stroj puni vrećice ribanim kokosom pri čemu je masa normalno distribuirana s očekivanjem* $200g$ *i standarnom devijacijom* $3g$*. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će se u vrećici nalaziti* $5g$ *ribanog kokosa manje nego očekivano. Neka je* X *slučajna varijabla koja modelira količinu ribanog kokosa u vrećicama u gramima. Očekivano je da će u vrećici biti* $200g$ *pa je* $\mu = 200$*. Standardna devijacija je* $3g$ *pa je* $\sigma = 3$*. Izračunajmo sada vjerojatnost da će se u vrećici nalaziti* $5g$ *ribanog kokosa manje nego očekivano.*

$$P(X < 195) = \Phi\left(\frac{195 - 200}{3}\right) = \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi(1.67)$$

Vrijednost od $\Phi(1.67)$ *može se izračunati pomoću raznih softvera te uvrštavanjem podataka u njih dobivamo da je* $\Phi(1.67) = 0.9525$ *pa je*

$$P(X < 195) = 1 - 0.9525 = 0.0475.$$

Vjerojatnost da će se u vrećici nalaziti manje od $195g$ *ribanog kokosa iznosi* 4.75%*.*

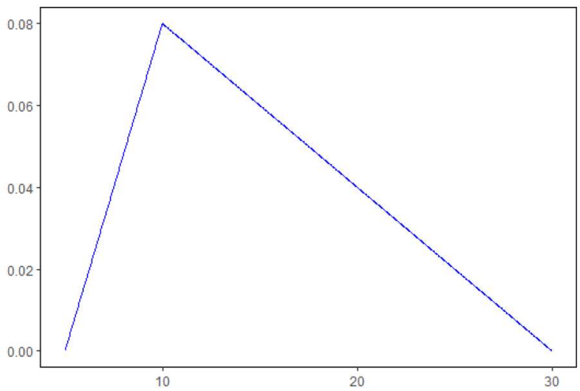
8 Trokutasta distribucija

Definicija 20. *Neprekidna slučajna varijabla X sa slikom $\mathcal{R}(X) = \langle a, c\rangle$ ima trokutastu distribuciju s parametrima $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, ako je funkcija gustoće dana izrazom*

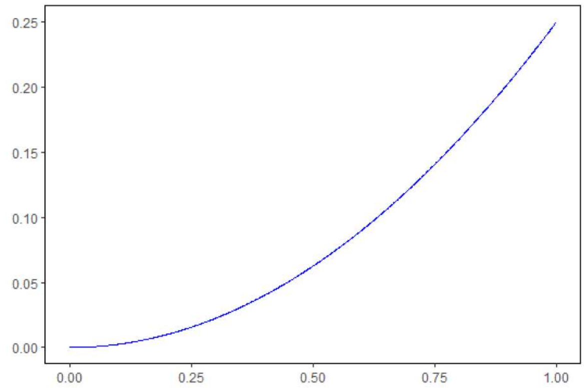
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} & , a \leq x < b \\ \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & , b \leq x < c \\ 1 & , c \leq x \end{cases}$$

pri čemu je a minimum, b mod, a c maksimum.
Funkcija distribucije te slučajne varijable je oblika

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} & , a \leq x < b \\ 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} & , b \leq x < c \\ 1 & , c \leq x \end{cases}.$$



Slika 13: Graf funkcije gustoće trokutaste slučajne varijable za a=5, b=10 i c=30.



Slika 14: Graf funkcije distribucije trokutaste slučajne varijable za a=0, b=1 i c =4.

Očekivanje trokutaste slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x) &= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x \cdot \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} dx + \int_{b}^{c} x \cdot \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} dx \int_{c}^{+\infty} 0 \cdot dx \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} (x^2 - ax) dx + \frac{1}{c-b} \int_{b}^{c} (cx - x^2) dx \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right] \Big|_{a}^{b} + \frac{1}{c-b} \left[\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{b}^{c} \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} - \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a \cdot a^2}{2} \right] \right] + \frac{1}{c-b} \left[\frac{c \cdot c^2}{2} - \frac{c^3}{3} - \left[\frac{cb^2}{2} - \frac{b^3}{3} \right] \right] \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{a^3 - ab^2}{2} \right] + \frac{1}{c-b} \left[\frac{b^3 - c^3}{3} + \frac{c^3 - cb^2}{2} \right] \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{1}{b-a} \left[\frac{(b-a)(b^2 + a^2 + ab)}{3} + \frac{a(a-b)(a+b)}{2} \right] \right] \\
&+ \frac{2}{c-a} \left[\frac{1}{c-b} \left[\frac{(b-c)(b^2 + c^2 + bc)}{3} + \frac{c(c-b)(c+b)}{2} \right] \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{2b^2 + 2a^2 + 2ab - 3a^2 - 3ab - 2b^2 - 2c^2 - 2bc + 3c^2 + 3cb}{6} \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{-a^2 - ab + c^2 + bc}{6} \right] = \frac{2}{c-a} \left[\frac{(c-a)(c+a) + b(c-a)}{6} \right] \\
&= \frac{2}{c-a} \left[\frac{(c-a)(a+b+c)}{6} \right] = \frac{a+b+c}{3}.
\end{aligned}
$$

Varijanca trokutaste slučajne varijable je oblika

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_a^b x^2 \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} dx + \int_b^c x^2 \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} dx \int_c^{+\infty} 0 \cdot dx - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \int_a^b (x^3 - ax^2) dx + \frac{2}{(c-a)(c-b)} \int_b^c (cx^2 - x^3) dx - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3}\right]\Bigg|_a^b + \frac{2}{(c-a)(c-b)} \left[\frac{cx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_b^c - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \left[\frac{b^4}{4} - \frac{ab^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{3}\right] + \frac{2}{(c-a)(c-b)} \left[\frac{c^4}{3} - \frac{c^4}{4} - \frac{cb^3}{3} + \frac{b^4}{4}\right] \\
&- \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{(c-a)(b-a)} \left[\frac{(b-a)(b+a)(b^2+a^2)}{4} + \frac{a(a-b)(a^2+b^2+ab)}{3}\right] \\
&+ \frac{2}{(c-a)(c-b)} \left[\frac{(b^2+c^2)(b+c)(b-c)}{4} + \frac{c(c-b)(c^2+b^2+cb)}{3}\right] - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{c-a} \cdot \frac{3b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^3 - 4a^3 - 4ab^2 - 4a^2b}{12} \\
&+ \frac{2}{c-a} \cdot \frac{-3b^3 - 3c^2b - 3b^2c - 3c^3 + 4c^3 + 4cb^2 + 4cb}{12} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{c-a} \left[\frac{3b^3 - a^2b - ab^2 - a^3}{6} + \frac{-3b^3 - c^2b - cb^2 - c^3}{6}\right] - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{c-a} \cdot \frac{-a^2b - ab^2 - a^3 - c^2b - cb^2 - c^3}{6} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{c-a} \cdot \frac{(c-a)(c^2+a^2+ac) + b(c-a)(c+a) + b^2(c-a)}{6} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac}{6} - \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{9} \\
&= \frac{3a^2+3b^2+3c^2+3ab+3bc+3ac-2a^2-2b^2-2c^2-4ab-4bc-4ac}{18} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}{18}.
\end{aligned}
$$

8.1 Primjene

Jedna od najčešćih primjena trokutaste distribucije je procjena vremena trajanja nekog procesa pomoću maksimalne, očekivane i minimalne vrijednosti trajanja tog procesa. Može se korisit i za upravljanje zalihama porizvoda, odnosno njome se određuje kolika je potražnja proizvoda te vrijeme potrebno za nadopunu zaliha. Više o tome može se pročitati u [8].

Primjer 9. *Agentu u korisničkoj službi je najmanje trebalo* 3 *minute da riješi problem klijenta, a najviše* 12 *minuta. Najčešće agent u* 5 *minuta riješi problem klijenta. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će agentu trebati više od* 10 *minuta da riješi problem klijenta. Neka je X slučajna varijabla koja modelira vrijeme koliko agentu treba da riješi problem klijenta u minutama. Budući da su zadani minimum, maksimum i mod prikladno je koristiti trokutastu distribuciju. Parametar a predstavlja minimum pa je $a = 3$. Parametar c predstavlja maksimum pa je $c = 12$. Parametar b predstavlja mod pa kako agentu najčešće treba* 5 *minuta da riješi problem klijenta onda je $b = 5$. Izračunajmo sada vjerojatnost da će agentu trebati više od* 10 *minuta da riješi problem klijenta.*

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - \frac{(12-10)^2}{(12-3)(12-5)}\right) \\ &= 1 - 1 + \frac{4}{63} = 0.0635 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da će agentu trebat više od 10 *minuta da riješi problem klijenta iznosi* 6.35%.

Primjer 10. *Ana je odlučila otrčati* 5 *km. Najbrže što je otrčala* 5 *km je u* 22 *minute, najviše joj je trebalo* 33 *minute, a najčešće u* 27 *minuta otrči* 5 *kilometara. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će Ana otrčati* 5 *km u manje od* 25 *minuta te koje je očekivano vrijeme da će Ani biti potrebno za otrčati* 5 *km. Neka je X slučajna varijabla koja modelira vrijeme potrebno za trčanje* 5 *km u minutama. Budući da su zadani minimum, maksimum i mod prikladno je koristiti trokutastu distribuciju. Parametar a predstavlja minimum pa je $a = 22$. Parametar c predstavlja maksimum pa je $c = 33$. Parametar c predstavlja mod pa kako Ana najčešće otrči* 5 *km u* 27 *minuta onda je $c = 27$. Izračunajmo vjerojatnost da će Ana otrčati* 5 *km u manje od 25 minuta.*

$$P(X < 25) = \frac{(25-22)^2}{(33-22)(33-27)} = \frac{9}{66} = 0.1364$$

Vjerojatnost da će Ana otrčati 5 *km u manje od* 25 *minuta iznosi* 13.64%. *Izračunajmo očekivano vrijeme potrebno da Ana otrči* 5 *km.*

$$E[X] = \frac{a+b+c}{3} = \frac{22+27+33}{3} = 27.33$$

Očekivano vrijeme potrebno da Ana otrči 5 *km iznosi* 27.33 *minuta.*

Literatura

[1] W. E. Back, W. W. Boles, G. T. Fry, (2000) Defining Triangular Probability Distributions from Historical Cost Data *Journal of Construction Engineering and Managment*, vol. 126, no. 1

[2] N. Balakrishan, N. L. Johnson, S. Kotz, *Continuous Univariate Distributions Volume 1*, Wiley-Interscience, 1994.

[3] N. Balakrishan, N. L. Johnson, S. Kotz, *Continuous Univariate Distributions Volume 2*, Wiley-Interscience, 1995.

[4] A. V. Belikov, (22.09.2017.) The number of key carcinogenic events can be predicted from cancer incidence. *Scientific Reports.* vol. 7, no. 1

[5] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[6] F. Böker, A. Stadie, W. Zucchini, *Statistik III*, Georg-August-Universität Göttingen, 18. travanj 2006

[7] L. Chao, B. H. Davis, A. Poon, (1.7.2005) The Coupon Collector and the Suppressor Mutation: Estimating the Number of Compensatory Mutations by Maximum Likelihood. *Genetics.* vol. 170, no. 3, str. 1323–1332

[8] H. Ewbanke, V. Leiva, F. Rojas, P. Wanke, (2016) Inventory management for new products with triangularly distributed demand and lead-time *Computers & Operations Research*, vol. 69, str. 97-108

[9] A. K. Gupta, S. Nadarajah, *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*, CRC Press, 2004.

[10] N. Henze, *Stochastik für Einsteiger*, GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008.

[11] J. Jensen, *Statistics for Petroleum Engineers and Geoscientists*, Elsevier Science, 2000.

[12] S. Kotz, T. J. Kozubowski, K. Podgórski, *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance* , Birkhäuser Basel, 2001

[13] K. C. Pohlmann, *Principles of Digital Audio Sixth Edition*, McGraw-Hill, 2011.

[14] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[15] J. R. van Dorp, S. Kotz, *Beyond Beta: Other Continuous Families Of Distributions With Bounded Support And Applications*, World Scientific Pub Co Inc., 2004

[16] D. VOSE, *Risk Analysis: A Quantitative Guide 3rd Edition*, John Wiley & Sons, Ltd, 2008

[17] P. F. WANKE, The uniform distribution as a first practical approach to new product inventory managment.*International Journal of Production Economics* , vol. 114, no. 2, str. 811-819, Elsevier, 2008

[18] D. S. WILKS, Maximum Likelihood Estimation for the Gamma Distribution Using Data Containing Zeros. *Journal of Climate.* vol. 3, no. 12, str. 1495-1501, American Meteorological Society, 1990.