Matrični polinomi

Tolmačević, Maja

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Maja Tolmačević

Matrični polinomi

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Maja Tolmačević

Matrični polinomi

Završni rad

Mentorica: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sažetak:

Tema ovog rada su matrični polinomi. To su polinomi čije su varijable i pripadni koeficijenti elementi skupa matrica reda n. Posebna pažnja je posvećena karakterističnom i minimalnom polinomu koji nam daje dodatne informacije o matrici, poput svojstvenih vrijednosti matrice ili dijagonalizibilnosti matrice. Predstavljena teorija je ilustrirana odgovarajućim primjerima.

Ključne riječi:

matrica, determinanta, svojstvena vrijednost, karakteristični polinom, minimalni polinom

Matrix polynomials

Abstract:

The topic of this paper are matrix polynomials. These are polynomials whose variables and the corresponding coefficients are the elements of the set of matrices of order n. Special attention is dedicated to characteristic polynomial and minimal polynomial which gives us additional informations about matrix such as eigenvalues of matrix or diagonalizability of matrix. Presented theory is illustrated by suitable examples.

Keywords:

matrix, determinant, eigenvalues, characteristic polynomial, minimal polynomial

Sadržaj

Uvod

Tema koja će biti obrađena u ovom završnom radu su matrični polinomi. U poljima realnih ili kompleksnih brojeva polinom je linearna kombinacija elementa λ iz pojedinog polja,

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n\lambda^0, a_0 \neq 0 \; za \; n \neq 0.$$

Prema koeficijentima se imenuju polinomi pa, ako uzmemo linearnu kombinaciju potencija od A iz skupa svih kvadratnih matrica reda n i koeficijente koji su matrice iz skupa svih kvadratnih matrica reda n, dobivamo matrični polinom. Najpoznatiji matrični polinomi su karakteristični polinom i minimalni polinom matrice. Preko karakterističnog i minimalnog polinoma možemo doći do određenih informacija o matrici. Preciznije, svojstvene vrijednosti matrice definiraju se kao nul-točke karakterističnog polinoma, dok preko faktoriziranog oblika minimalnog polinoma lako utvrđujemo može li se matrica dijagonalizirati.
Završni rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju definirane su matrice, kvadratne matrice te su objašnjene operacije s matricama. Drugo poglavlje govori o pojmu karakterističnog polinoma, a u trećem poglavlju obrađuje se minimalni polinom matrice.

1 Matrice

U ovom poglavlju definirat ćemo matrice i operacije s matricama te determinantu matrice. Definicija matrice je preuzeta iz skripte [1].

Definicija 1 *Za prirodne brojeve m i n, preslikavanje A:* $\{1,2,..,m\} \times \{1,2,...,n\} \to \mathbb{F}$ *naziva se matrica tipa (m,n) s koeficijentima iz polja* $\mathbb{F}$.

Uobičajeno je da se djelovanje svakog takvog preslikavanja A bilježi u tablicu od m redaka i n stupaca tako da se u i-ti redak i j-ti stupac piše funkcijska vrijednost $A(i,j)$ (tu funkcijsku vrijednost u tablicu jednostavnije zapisujemo kao a_{ij}). Dakle, kada se uzme u obzir prethodno navedeno, svaku matricu s m redaka i n stupaca pišemo u obliku

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ponekad se, za danu matricu A, njezin koeficijent u i-tom retku i j-tom stupcu označava s $[A]_{ij}$ ili s $(A)_{ij}$. Kako bi se izbjegle zabune, ponekad se između indeksa dodaju i zarezi pa pišemo $a_{i,j}$ ili $[A]_{i,j}$.

Primjer 1 *Preslikavanje A:* $\{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4\} \to \mathbb{N}$ *definirano s* $A(i,j) = i + j$ *se naziva matrica tipa (5,4) s koeficijentima iz polja* $\mathbb{N}$. *Dakle,* $A(1,1) = a_{11} = 1+1 = 2$, $A(1,2) = a_{12} = 1+2 = 3$, ... *Kada izračunate koeficijente zapišemo u obliku tablice, dobivamo matricu s 5 redaka i 4 stupca:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označava se s $M_{mn}(\mathbb{F})$. Primjerice, skup svih matrica s 5 redaka i 4 stupca s koeficijentima iz polja $\mathbb{N}$ označili bismo s $M_{54}(\mathbb{N})$. U slučaju da je $m = n$, pišemo $M_n(\mathbb{F})$, a elementi iz tog skupa zovu se kvadratne matrice reda n.Uzmemo li, primjerice, sve matrice s 5 redaka i 5 stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}$ i stavimo ih u jedan skup, dobili bismo skup svih kvadratnih matrica reda 5 s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}$ i taj skup bismo označili s $M_5(\mathbb{Z})$.

1.1 Operacije s matricama

Definicije operacija matrica su preuzete iz skripte [2]. Prilikom uvođenja operacija s matricama težilo se da račun s matricama bude što univerzalniji. Kako se rade računi s vektor-stupcem, slično se htjelo napraviti i s matricama tako da operacije s vektorima budu zapravo specijalan slučaj računa s matricama. Po pozicijama možemo zbrajati samo matrice koje imaju jednak broj redaka i jednak broj stupaca:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Jednakosti ovdje znače da su lijevo i desno od znaka = matrice jednake, što ne znači samo da imaju isti broj redaka i isti broj stupaca, nego da su im i članovi na istoj poziciji jednaki:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n \end{cases} .$$

Množenje skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$ provodi se tako da se svi elementi matrice množe tim skalarom, odnosno:

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uz tako definirano zbrajanje matrica i množenje matrica sa skalarom $M_{mn}(\mathbb{F})$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Primjer 2 *Dane su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \\ 19 & 21 & 35 \end{bmatrix} \in M_{43}(\mathbb{R}), B = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 18 \\ 15 & 14 & 20 \\ 17 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \in M_{43}(\mathbb{R})$$

te skalar $\lambda = 7 \in \mathbb{R}$. Treba zbrojiti te dvije matrice te pomnožiti matricu A skalarom λ. Prvo pogledajmo možemo li uopće zbrojiti matrice,tj. pogledajmo dimenzije matrica A i B, odnosno koliko redaka i stupaca imaju. Obje matrice imaju 4 retka i 3 stupca, tj.imaju jednak broj redaka i jednak broj stupaca pa ih možemo zbrojiti tako da zbrojimo element u i-tom retku i j-tom stupcu matrice A s elementom u i-tom retku i j-tom stupcu matrice B. Zbroj tih dviju matrica je:

$$A + B = \begin{bmatrix} 23 & 22 & 23 \\ 22 & 23 & 31 \\ 30 & 23 & 23 \\ 23 & 26 & 35 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, treba pomnožiti matricu A skalarom λ:

$$\lambda A = 7 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \\ 19 & 21 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 5 \\ 7 \cdot 7 & 7 \cdot 9 & 7 \cdot 11 \\ 7 \cdot 13 & 7 \cdot 15 & 7 \cdot 17 \\ 7 \cdot 19 & 7 \cdot 21 & 7 \cdot 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 21 & 35 \\ 49 & 63 & 77 \\ 91 & 105 & 119 \\ 133 & 147 & 245 \end{bmatrix}.$$

Uz zbrajanje matrica i množenje matrica sa skalarom može se definirati i množenje matrica.Kako bismo mogli množiti matrice, one trebaju biti ulančane. Definicija ulančanih matrica može se naći u [1].

Definicija 2 *Neka je $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{rs}$. Kažemo da su matrice A i B ulančane ako je $n = r$.*

Dakle, zaključujemo da su matrice A i B ulančane ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. No, treba biti oprezan i uočiti da se ne radi o simetričnoj relaciji. Na primjer, $A \in M_{27}$ i $B \in M_{73}$ jesu ulančane, ali B i A nisu. Kod kvadratnih matrica istog tipa se radi o simetričnoj relaciji. Definicija produkta matrica se može pronaći u skripti [1].

Definicija 3 *Neka su* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ *i* $B = [b_{ij}] \in M_{ns}$ *ulančane matrice. Tada je produkt* AB *definiran kao matrica* $AB = [c_{ij}] \in M_{ms}$ *pri čemu je*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \forall i = 1, 2, ..., m, \forall j = 1, 2, ..., s.$$

Umnožak AB ima redaka kao prvi faktor i stupaca kao drugi faktor. Koeficijent c_{ij} koji se u produktu nalazi u i-tom retku i u j-tom stupcu računamo kao "umnožak i-tog retka od A i j-tog stupca od B". Pod tim umnoškom se zapravo podrazumijeva zbroj $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$. To razjašnjava činjenicu zašto matrice koje množimo moraju biti ulančane.

Primjer 3 *Uzmimo primjerice matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{23}(\mathbb{R})$$

i

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_{32}(\mathbb{R}).$$

Broj stupaca matrice A jednak je broju redaka matrice B pa su matrice ulančane i možemo ih množiti. Dobivamo

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 0 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}.$$

Napomena 1 *Množenje matrica nije binarna operacija.Također, množenje matrica nije komutativna operacija.*

Nulmatrica je matrica kojoj su svi elementi jednaki nula i označavamo ju s 0.

Napomena 2 *Za svaku matricu* $A \in M_{mn}$ *vrijedi* $A0 = 0A = 0$ *(nulmatrica mora biti prikladnih dimenzija kako bi se moglo njome množiti).*

Za $n \in \mathbb{N}$ definira se jedinična matrica reda n kao kvadratna matrica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedinična matrica ima jedinice na svim dijagonalnim mjestima, a na svim ostalim mjestima su nule.

Teorem 1 (vidjeti [1], Teorem 3.1.4.) *Za množenje matrica vrijedi (kako god su navedeni produkti definirani):*

1. *A(B+C)=AB+ AC;*

2. *(A+B)C=AC+BC;*

3. *(α A)B=A(α B)= α (AB),* $\forall \alpha \in \mathbb{F}$*;*

4. (AB)C=A(BC);

5. IA=A,AI=A .

Sljedeće definicije su preuzete iz skripte [1].

Definicija 4 *Kaže se da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi $AB = BA = I$.*

Skup svih regularnih matrica reda n s elementima iz polja $\mathbb{F}$ označava se s $GL(n, \mathbb{F})$.

Definicija 5 *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$.Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je $B = S^{-1}AS$.*

1.2 Determinanta

Sljedeće definicije se mogu pronaći u skripti [1].

Definicija 6 *Neka je n proizvoljan prirodan broj. Permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ je bilo koja bijekcija $p : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$. Često se kaže i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označuje se sa S_n.*

Definicija 7 *Neka je $n \in N$ i $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. Determinanta matrice A se označava s $detA$ i definira se s*

$$detA = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot ... \cdot a_{np(n)}.$$

Determinanta se definira samo za kvadratne matrice i riječ je o skalarnoj veličini. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_n$ determinanta se označava i s

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dakle, determinanta matrice A je definirana kao konačna suma pri čemu se sumiranje vrši po permutacijama od n elemenata. Determinantu matrice možemo izračunati i Laplaceovim razvojem.

Definicija 8 (Laplaceov razvoj determinante) *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n, n \geq 2$. Tada je*

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}, \forall k = 1, 2, ..., n \, i \, detA = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}, \forall j = 1, 2, ..., n,$$

pri čemu za sve k,j vrijedi $A_{kj} = (-1)^{k+j} \Delta_{kj}$, gdje je Δ_{kj} je determinanta matrice $n-1$. reda koja nastaje tako da iz matrice A uklonimo k-ti redak i j-ti stupac.

Obje formule u definiciji se zovu Laplaceov razvoj. U prvoj formuli se radi o razvoju po k-tom retku, dok se u drugoj formuli radi o razvoju determinante matrice po j-tom stupcu.

Primjer 4 *Treba izračunati determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. Iskoristimo Laplaceov razvoj po drugom retku:*

$$detA = 6(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 24.$$

2 Karakteristični polinom

Prije definicije karakterističnog polinoma potrebno je definirati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore. Te definicije se nalaze u skripti [1].

Definicija 9 *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar operatora A i označava se s $\sigma(A)$.*

Ponekad se za svojstvenu vrijednost upotrebljavaju nazivi karakteristična vrijednost i vlastita vrijednost.

Napomena 3 *Vektor iz gornje definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0.*

Napomena 4 *Svojstvene vrijednosti određujemo kao nultočke karakterističnog polinoma.*

Sljedeća definicija je iz skripte [2].

Definicija 10 *Karakteristični polinom matrice A n-tog reda je funkcija $\kappa : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ zadana s*

$$\kappa_A(\lambda) = det(\lambda I - A).$$

Iz formalnih se razloga koeficijenti označavaju kako slijedi:

$$\kappa_A(\lambda) = \lambda^n - \kappa_1 \lambda^{n-1} - ... - \kappa_n.$$

Karakteristični polinom se može zadati i kao: $\kappa_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ (ako je n paran broj, ta determinanta je jednaka gornjoj). Iz razvoja gornje determinante vidi se da su za realnu matricu koeficijenti $\kappa_1, ..., \kappa_n$ realni. Koeficijent κ_1 je trag matrice A:

$$\kappa_1 = trA = a_{11} + ... + a_{nn}.$$

Kompleksna fatorizacija polinoma κ_A je i za realne i za kompleksne matrice A prikaz

$$\kappa_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

gdje su $\lambda_1, ..., \lambda_s$ svojstvene vrijednosti, a $r_1, ..., r_s$ njima odgovarajuće višestrukosti:

$$r_1 + \dots + r_s = n.$$

Primjer 5 *Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Njezin karakteristični polinom je:*

$$k_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4.$$

Kao što kažemo da nultočka poništi polinom, tj. da mu daje vrijednost nula, tako kažemo da matrica A poništi realni ili kompleksni polinom ako ga uvrštenjem pretvara u nul-matricu. O tome govori sljedeći teorem iz skripte [2].

Teorem 2 (Hamilton-Cayleyjev teorem) *Kvadratna matrica A poništava svoj karakteristični polinom, tj. vrijedi*

$$\kappa_A(A) = 0.$$

Dokaz. Označimo $B(\lambda) = A - \lambda I$. Adjunktu matrice B označimo s $\tilde{B}$ i ona je oblika

$$\tilde{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(\lambda) & \dots & \beta_{1n}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1}(\lambda) & \dots & \beta_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

gdje je

$$\beta_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j} det(A - \lambda I)_{ji}.$$

$(A - \lambda I)_{ji}$ je kvadratna matrica reda $n-1$ koju smo dobili iz matrice $A - \lambda I$ tako da smo maknuli j-ti redak i i-ti stupac. Za adjunktu $\tilde{B}$ matrice B vrijedi:

$$B \cdot \tilde{B} = (det\, B)I.$$

Uočimo

$$det\, B = det(A - \lambda I) = \kappa_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Nadalje,

$$B \cdot \tilde{B} = (A - \lambda I)\tilde{B} = A\tilde{B} - \lambda \tilde{B}.$$

$\tilde{B}$ je oblika

$$\tilde{B}(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0,\ b_i \in (M)_n,\ i = 0, \ldots n-1.$$

Naime, determinanta matrice dimenzije $n \times n$ u varijabli λ daje nam polinom n-tog stupnja. Determinanta matrice dimenzije $(n-1) \times (n-1)$ u varijabli λ daje nam polinom $(n-1)$. stupnja, a upravo nam je adjunkta definirana pomoću determinante od matrice dimenzije $(n-1) \times (n-1)$.
Kako vrijedi:

$$A\tilde{B} - \lambda\tilde{B} = (det\, B)I,$$

uvrštavanjem izraza za $\tilde{B}$ i det B dobivamo:

$$Ab_{n-1}\lambda^{n-1} + Ab_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + Ab_1\lambda + Ab_0 - b_{n-1}\lambda^n - b_{n-2}\lambda^{n-1} - \ldots - b_1\lambda^2 - b_0\lambda =$$

$$\alpha_n\lambda^n I + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} I + \ldots + \alpha_1 \lambda I + \alpha_0 I.$$

Pogledajmo koeficijente uz $\lambda^n, \lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, \lambda^1, \lambda^0$ s lijeve i desne strane gornje jednakosti.

Mora vrijediti:

$$\alpha_n I = -b_{n-1} \tag{1}$$
$$\alpha_{n-1} I = Ab_{n-1} - b_{n-2} \tag{2}$$
$$\alpha_{n-2} I = Ab_{n-2} - b_{n-3} \tag{3}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 I = Ab_1 - b_0 \tag{4}$$
$$\alpha_0 I = Ab_0 \tag{5}$$

Pomnožimo izraz (1) s A^n s lijeve strane, izraz (2) s A^{n-1} s lijeve strane, izraz (3) s A^{n-2} s lijeve strane, ..., izraz (4) s A^1 s lijeve strane. Tada zbrajanjem izraza s lijeve strane jednakosti dobivamo izraz za karakteristični polinom matrice A u varijabli A.

$$\kappa_A(A) = -A^n b_{n-1} + A^n b_{n-1} - A^{n-1}b_{n-2} + A^{n-1}b_{n-2} - A^{n-2}b_{n-3} + \ldots + A^2 b_1 - Ab_0 + Ab_0 = 0.$$

□

Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu iz jednakosti $\kappa_A(A) = 0$ množenjem s A^{-1} dobiva se izraz za A^{-1} pa se inverz,ako postoji, može izračunati preko potencije od A, što je najbrži način za računanje inverza. Izraz za računanje A^{-1} glasi:

$$A^{-1} = \tfrac{-1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^{i-1} \tag{6}$$

gdje je α_0 slobodni koeficijent, a α_i ostali koeficijenti koji se pojavljuju u karakterističnom polinomu.

Primjer 6 *Dana je matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Treba pronaći inverz pomoću (6).
Prvo odredimo karakteristični polinom

$$\kappa_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 3.$$

Koeficijenti karakterističnog polinoma su: $\alpha_0 = 3 \neq 0$ *(znamo da je* A *regularna matrica i da ima svoj inverz);* $\alpha_1 = -3; \alpha_2 = -1; \alpha_3 = 1$. *Sada koeficijente uvrstimo u* (6) *pa imamo:*

$$A^{-1} = \tfrac{-1}{3} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i A^{i-1} = I + \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}A^2.$$

Izračunamo A^2*:*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Konačno dobivamo:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Napomena 5 *Ako je* $detA = 0$*, traženje inverza na gore opisani način dovodi kontradikciju.*

Konstantni član κ_n svojstvenog polinoma matrice n-tog reda jednak je determinanti matrice ako je n neparan, a negativnoj determinanti ako je n paran broj:

$$\kappa_n = (-1)^{n-1} detA.$$

3 Minimalni polinom

Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu uvijek postoji normirani kompleksni polinom n. stupnja kojeg matrica A n. reda poništi. Taj polinom je realan za realnu A. Za neke matrice postoje polinomi stupnja nižeg od n koje A poništi, dok za neke matrice takvih polinoma nema. Postavlja se pitanje kako doći do minimalnog polinoma.
Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A : V \to V$ linearni operator. Definirajmo potencije operatora A:

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = A \cdot A.$$

Za n≥2 definiramo $A^n = A \cdot A^{n-1}$. Skup koji se sastoji od jednog vektora različitog od nulvektora je linearno nezavisan. Zbog Hamilton-Cayleyjevog teorema možemo načiniti linearnu kombinaciju s elementima iz skupa $\{I, A, ..., A^n\}$ koja je jednaka nul-matrici, a da je pritom koeficijent uz A^n različit od nule. Prema tome postoji broj m, $1 \leq m \leq n$, takav da je skup $\{I, A, ..., A^{m-1}\}$ linearno nezavisan, a $\{I, A, ..., A^{m-1}, A^m\}$ linearno zavisan. Neka su $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m \in K$ takvi da je

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + ... + \mu_{m-1} A + \mu_m I.$$

Označimo s μ_A polinom:

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \mu_2 \lambda^{m-2} - \ldots - \mu_{m-1}\lambda - \mu_m.$$

Tada je $\mu_A(A) = 0$. Polinom μ_A nazivamo minimalni polinom operatora A.

Propozicija 1 (vidjeti [2], str. 319) *Minimalni polinom matrice A je polinom najmanjeg stupnja kojeg matrica A poništava.*

Dokaz. Očito slijedi jer bismo u suprotnom imali

$$A^r - \nu_1 A^{(r-1)} - \ldots - \nu_r = 0$$

za $r < m$ uz neku $\nu_j \neq 0$, što nije moguće jer su $I, A, ..., A^r$ linearno nezavisni. □

Propozicija 2 (vidjeti [2], str. 319) *Ne postoji normirani polinom kojeg matrica A poništi i koji bi imao stupanj jednak stupnju minimalnog polinoma, a koji bi bio od njega različit.*

Dokaz. Egzistencija takvog polinoma bi povlačila egzistenciju

$$\nu_A(\lambda) = \lambda^m - \nu_1 \lambda^{m-1} - ... - \nu_m$$

kojeg A poništi s bar jednim $\nu_j \neq \mu_j$. No, tada bismo imali

$$(\mu_1 - \nu_1)A^{m-1} + ... + (\mu_m - \nu_m) = 0,$$

što nije moguće jer bi u tom slučaju postojao polinom nižeg stupnja od m kojeg A poništi, a to je u kontradikciji s propozicijom 1. □

Propozicija 3 (vidjeti [2], str. 320) *Svaki polinom P stupnja $p > m$ kojeg A poništi djeljiv je s μ_A.*

Dokaz. Dokazuje se dijeljenjem polinoma P s μ_A. Rezultat dijeljenja je polinom Q stupnja $p-m$ uz ostatak R stupnja strogo manjeg od m:

$$P(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A(\lambda) + R(\lambda).$$

Kada se A uvrsti u gornju jednakost, dobivamo

$$P(A) = Q(A)\mu_A(A) + R(A).$$

Znamo da A poništi P pa je $P(A) = 0$ i A poništava minimalni polinom μ_A pa je $\mu_A(A) = 0$. Slijedi da je R(A)=0, a to znači da je P djeljiv s μ_A. □

Propozicija 4 (vidjeti [2], str. 321) *Nul-točke karakterističnog polinoma su i nul-točke minimalnog polinoma.*

Dokaz. Neka je λ_0 nul-točka karakterističnog polinoma κ_A. Tada postoji bar jedan svojstveni vektor v_0 za kojeg je

$$Av_0 = \lambda v_0.$$

No, tada je

$$A^2 v_0 = A(Av_0) = A(\lambda_0 v_0) = \lambda_0(Av_0) = \lambda_0^2 v_0$$

i općenito

$$A^k v_0 = \lambda_0^k v_0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Za bilo koji polinom

$$P(\lambda) = \lambda^p \alpha_p + ... + \alpha_0$$

imamo

$$P(A)v_0 = (A^p \alpha_p + ... + I\alpha_0)v_0 = (\lambda_0^p \alpha_p + ... + \alpha_0)v_0 = P(\lambda_0)v_0.$$

Ako je $P(A) = 0$, kako je $v_0 \neq \vec{0}$, mora biti $P(\lambda_0) = 0$. No, ako je polinom P jednak μ_A, zbog $\mu_A(A) = 0$ mora vrijediti $\mu_A(\lambda_0) = 0$. □

Pokazali smo da karakteristični i minimalni polinom imaju isti skup nul-točaka, jedino im se mogu razlikovati kratnosti iste nul-točke.

Propozicija 5 (vidjeti [2], str. 323) *Slične matrice imaju isti minimalni polinom što znači da imaju isti skup nul-točki te da su im višestrukosti pojedine nul-točke iste.*

Teorem 3 *Ako je A blok-dijagonalna matrica s dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, ..., A_s$, tada je minimalni polinom od A jednak najmanjem zajedničkom višekratniku minimalnih polinoma dijagonalnih blokova.*

Prema prethodnom teoremu slijedi da matrice koje su oblika aI_n, gdje je I_n jedinična matrica reda n, $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ imaju minimalni polinom prvog stupnja.

Primjer 7 *Odredimo karakteristični i minimalni polinom matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vidljivo je da je riječ o blok-dijagonalno1,j matrici jer na dijagonali imamo kvadratne matrice, a ostali elementi su nula pa možemo iskoristiti prethodnu napomenu kada budemo tražili minimalni polinom. Pogledajmo matrice s dijagonale:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, A_3 = [8].$$

Prvo odredimo karakteristični i minimalni polinom matrice A_1:

$$\kappa_{A_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

$$\mu_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 3)^2 = \kappa_{A_1}(\lambda).$$

Matrica A_1 nije oblika aI_2 pa ne može imati minimalni polinom prvog stupnja (prema prvoj tvrdnji iz prethodne napomene). Nadalje, odredimo karakteristični i minimalni polinom matrice A_2:

$$\kappa_{A_2} = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ -4 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 18 = (\lambda - 9)(\lambda - 2).$$

Karakteristični polinom matrice A_2 ima 2 nultočke kratnosti 1 pa je

$$\mu_{A_2}(\lambda) = (\lambda - 9)(\lambda - 2) = \kappa_{A_2}(\lambda).$$

Sada još treba odrediti karakteristični i minimalni polinom za matricu A_3. Karakteristični polinom matrice A je polinom prvog stupnja pa vrijedi

$$\kappa_{A_3}(\lambda) = \lambda - 7.$$

Kako imamo jednu jednostruku nultočku, vrijedi:

$$\mu_{A_3} = \lambda - 7.$$

Sada je karakteristični polinom matrice A umnožak karakterističnih polinoma matrica s dijagonale:

$$\kappa_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 9)(\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Minimalni polinom matrice A je najmanji zajednički višekratnik minimalnih polinoma matrica s dijagonale (znamo iz prethodne napomene):

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 9)(\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Primjer 8 *Odredimo karakteristični i minimalni polinom matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Prvo odredimo karakteristični polinom:

$$\kappa_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & \lambda - 3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)}(\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -9 & 5 \\ 0 & \lambda - 4 & -6 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = .$$

$$(\lambda - 2)\left((\lambda - 3)\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 \\ 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix}\right) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$$

Možemo iščitati da su nultočke $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 5$. Sve su jednostruke, a to su i nultočke minimalnog polinoma pa je $\mu_B(\lambda) = \kappa_B(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.

Primjer 9 *Dana je matrica* $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ -6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. *Računamo karakteristični polinom dane matrice:*

$$\kappa_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 7 & 5 \\ 6 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix}.$$

Determinantu razvijamo po prvom stupcu pa imamo:

$$\kappa_A(\lambda) = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 5 \\ 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ \lambda - 7 & 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 - 4\lambda + 28.$$

Faktorizirani karakteristični polinom glasi:

$$\kappa_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 7)(\lambda - 2).$$

Imamo 3 nul-točke karakterističnog polinoma i sve su jednostruke, pa slijedi da je minimalni polinom jednak karakterističnom:

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 7)(\lambda - 2).$$

Primjer 10 *Zadana je matrica* $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Trebamo odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice.*

Riječ je o blok-dijagonalnoj matrici jer na dijagonali imamo kvadratne matrice, dok su preostali elementi nula. Prvo odredimo karakteristični i minimalni polinom za matrice s dijagonale. Za matricu $C_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *računamo karakteristični i minimalni polinom:*

$$k_{C_1} = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 = (\lambda - 3)^2, \mu_{C_1} = (\lambda - 3)^2 = k_{C_1}(\lambda).$$

Matrica C_1 *nije oblika* aI_2 *pa ne može imati minimalni polinom prvog stupnja. Kako vrijedi* $C_2 = C_1$, *karakteristični i minimalni polinomi matrica* C_1 *i* C_2 *su jednaki. Za matricu* $C_3 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ *karakteristični polinom glasi* $k_{C_3} = 3 - \lambda$, *a minimalni polinom glasi* $\mu_{C_3} = \lambda - 3$. *Sada je karakteristični polinom matrice* C *umnožak karakterističnih polinoma matrica* C_1, C_2 *i* C_3 *i glasi* $k_C = -(\lambda - 3)^5$. *Minimalni polinom matrice* C *je najmanji zajednički višekratnik matrica s dijagonale i glasi:* $\mu_C(\lambda) = (\lambda - 3)^2$. *Ovo je primjer matrice kojoj karakteristični i minimalni polinom nisu jednaki.*

Literatura

[1] D. Bakić, "Linearna algebra", *Školska knjiga, Zagreb* (2008.).

[2] D. Butković, "Predavanja iz linearne algebre", *Odjel za matematiku, Osijek* (2008.).