Pseudo-euklidski prostori

Bradić, Nensi

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij
Matematika

Nensi Bradić

Pseudo-euklidski prostori

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij
Matematika

Nensi Bradić

Pseudo-euklidski prostori

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2023.

Sažetak: U ovom radu ćemo opisati pseudo-euklidske prostore. Navest ćemo osnovne rezultate vezane uz hermitske i bilinearne forme te prostore na kojima su takve forme definirane.

Ključne riječi: pseudo-euklidski prostori, pseudo-euklidska geometrija, hermitske forme, operatori, vektorski prostor.

Pseudo-Euclidean spaces

Summary:

In this paper we will describe pseudo-Euclidean spaces. We will list the basic results related to Hermitian and bilinear forms and the spaces on which such forms are defined.

Key words: pseudo-Euclidean spaces, pseudo-Euclidean geometry, Hermitian forms, operators, vector space.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Pseudo-euklidski prostori **2**

2.1 Geometrija nedefinitnih hermitskih formi 2

2.1.1 Definicija hermitskih formi 2

2.1.2 Jezgra 3. forme 3

2.1.3 Preliminarne leme 4

2.1.4 Klasifikacija hermitskih formi 4

2.1.5 Nekoliko definicija 8

2.1.6 Druga kanonska forma 9

2.1.7 Linearni funkcionali 10

2.1.8 Ortogonalni komplementi 10

2.1.9 Izotropni potprostori 11

2.1.10 Dualnost izotropnih potprostora 12

Literatura **13**

1 Uvod

Euklidski prostori su temeljni prostori klasične geometrije koja se često koristi u matematici, kao i u teorijskoj fizici. Iako imaju slične karakteristike kao i pseudo-euklidski prostori, ipak se razlikuju u nekim karakteristikama. Pseudo-euklidski prostor je vektorski prostor definiran nad poljem realnih brojeva na kojem je zadana nedegenerirana kvadratna forma. U ovom radu opisat ćemo vektorske prostore kroz različite hermitske forme, odnosno različite uvjete zadane s vrijedećim svojstvima. Prikazat ćemo i razne ortogonalne komplemente unutar određenih ravnina te se dotaknuti raznih teorema i lema koji će biti potkrijepljeni svojim dokazima.

2 Pseudo-euklidski prostori

2.1 Geometrija nedefinitnih hermitskih formi

2.1.1 Definicija hermitskih formi

Definicija 2.1. *([2], 1.1.Definition of Hermitian forms.) Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Seskvilinearna forma na V je preslikavanje B s $V \times V$ u $\mathbb{C}$ za koje vrijede iduća svojstva:*

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w), \qquad B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2),$$
$$B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w), \qquad B(v, \lambda w) = \overline{\lambda} B(v, w)$$

za $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ i za svaki $v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

Kažemo da je seskvilinearna forma hermitska ako za sve v, w iz V vrijedi

$$B(w, v) = \overline{B(v, w)}.$$

Posebno, za svaki $v \in V je B(v, v) \in \mathbb{R}$, jer vrijedi $B(v, v) = \overline{B(v, v)}$.

Dodavanjem uvjeta $B(v, v) > 0$ za $v \neq 0$ dobivamo definiciju skalarnog produkta u kompleksnom euklidskom prostoru.

Kažemo da je vektor v :

$B -$ *pozitivan*, ako $B(v, v) > 0$,

$B -$ *negativan*, ako $B(v, v) < 0$,

$B -$ *izotropan*, ako $B(v, v) = 0$.

Kažemo da su dva vektora v, w ortogonalni ako je $B(v, w) = 0$.

Propozicija 2.1. *([2], Proposition 1.1) a) Svaka se hermitska forma na $\mathbb{C}^n$ može prikazati u obliku*

$$B(v, w) = vQw^*,$$

gdje su $v, w \in \mathbb{C}^n$, dok je Q hermitska $n \times n$ matrica.

b) Za linearno preslikavanje g, zamjena varijabli $v \to vg$ inducira zamjenu

$$Q \to gQg^*.$$

Dokaz:

Označimo s $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardnu (ili kanonsku) bazu za $\mathbb{C}^n$. Tada imamo

$$B(v,w) = B(\sum v_j e_j, \sum w_k e_k) = \sum v_j \overline{w_k} B(e_j, e_k).$$

$\square$

2.1.2 Jezgra 3. forme

Jezgra $kerB$ dane forme B je potprostor $W \subset V$ koji se sastoji od vektora w takvih da je $B(w,v) = 0$ za svaki v.

Rang forme B definiramo kao kodimenziju jezgre od B te označavamo s rkB. Dakle, $rkB = dimV - dim(kerB)$. Kažemo da je forma nedegenerirana ako je njena jezgra jednaka nul-prostoru, tj. $kerB = \{0\}$.

Lema 2.1. *([2], Lemma 1.2) Forma B inducira nedegeneriranu hermitsku formu na kvocijentnom prostoru $V/kerB$.*

Dokaz:

$V/kerB$ prostor se sastoji od vektora definiranih kao klase ekvivalencije

$$v \sim v' \iff v - v' \in kerB.$$

Neka je $v' = v + \xi, w' = w + \eta$, gdje $\xi, \eta \in kerB$. Tada je

$$B(v', w') = B(v + \xi, w + \eta) = B(v, w) + 0 + 0 + 0.$$

Stoga stvarno dobivamo formu na kvocijentnom prostoru. $\square$

Napomenimo kako se može pokazati da je ovako definirana forma na kvocijentnom prostoru nedegenerirana.

Pseudo-euklidski prostor je kompleksni vektorski prostor snabdjeven nedegeneriranom hermitskom formom te u ovakvom slučaju formu obično označavamo s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i nazivamo ju skalarnim produktom.

2.1.3 Preliminarne leme

Lema 2.2. *([2], Lemma 1.3) Neka je $h \in V$ izotropan vektor, $v \notin kerB$. Tada postoji $g \in V$ takav da je*

$$\langle h, h\rangle = \langle g, g\rangle = 0, \qquad \langle h, g\rangle = 1. \tag{2.1}$$

Dokaz:

Razmotrimo proizvoljan vektor $r \in V$ takav da je $B(h, r) = \sigma \neq 0$. Stavimo li $r' := \overline{\sigma}^{-1} r$, dobivamo $B(h, r') = 1$. Kada stavimo da je $g := r' + sh$, gdje je $s \in \mathbb{R}$, tada dobivamo

$$B(h, g) = 1, \qquad B(g, g) = B(r', r') + 2s.$$

Uzimamo $s := -B(r', r')/2$ i dobivamo željeni g. □

Lema 2.3. *([2], Lemma 1.4) Neka je forma B nedegenerirana. Tada postoji vektor v takav da je $B(v, v) = \pm 1$.*

Dokaz:

Uzmimo proizvoljni vektor h. Ako nije izotropan, onda zaključak vrijedi. Inače biramo vektor g koji zadovoljava (2.1) i dobivamo $v := (h + g)/\sqrt{2}$. □

Lema 2.4. *([2], Lemma 1.5) Ako se može pronaći pozitivan i negativan vektor, tada postoji izotropni vektor različit od nule.*

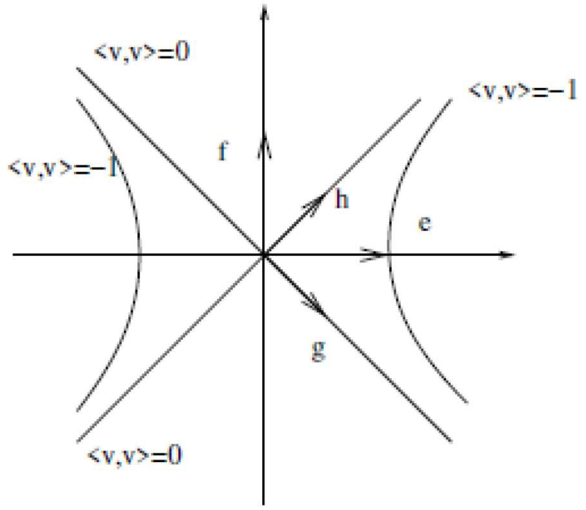
Dokaz:

Neka je $B(e, e) = +1, B(f, f) = -1$. Tada su ti vektori linearno neovisni. Prema teoremu srednje vrijednosti, jedna od točaka segmenta $te + (1 - t)f$ je izotropna. □

2.1.4 Klasifikacija hermitskih formi

Definicija 2.2. *([2], 1.4.Classification of Hermitian forms.) Za potprostor $S \subset V$, definiramo njegov ortogonalni komplement $S^{\perp}$ kao skup svih vektora $v \in V$ takvih da je $B(v, z) = 0$ za svaki $z \in S$.*

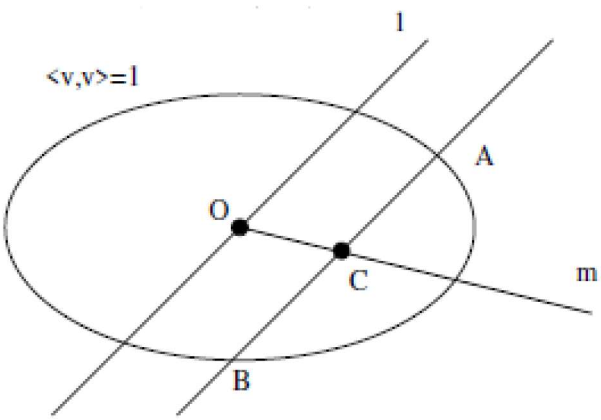
Ako je forma B degenerirana, onda je $S^{\perp} \supset kerB$ za svaki S.



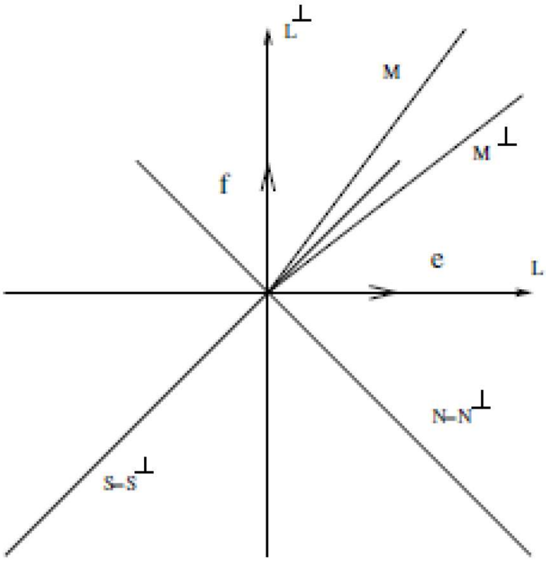
Slika 2.1.: Prostor $\mathbb{R}^{1,1}$ sa skalarnim produktom

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

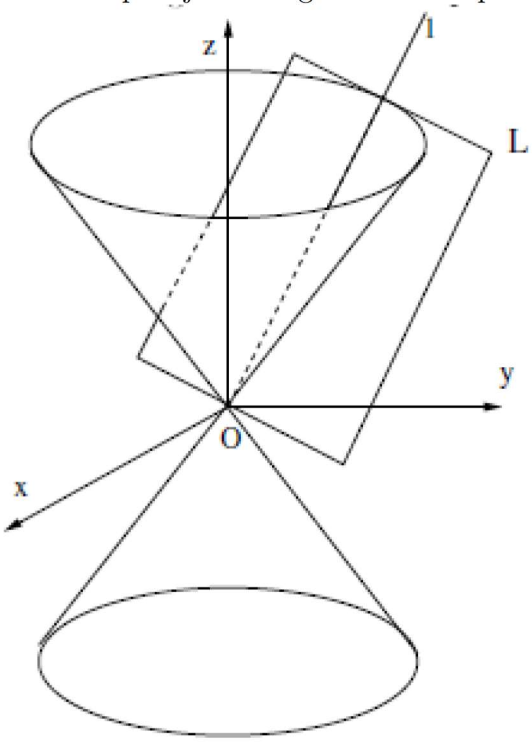
Nivo-krivulje $\langle v, v \rangle = konst.$ su hiperbole; izotropni vektori v sadržani su u paru pravaca. Predstavljamo jednu od mogućih baza e, f i jednu od baza h, g.



Slika 2.2. : Jedna od interpretacija ortogonalnih komplemenata. Razmotrimo dvodimenzionalnu realnu ravninu s pozitivnim skalarnim produktom. Možemo primjetiti nivo-krivulje $\langle v, v \rangle = 1$. Neka l bude pravac. Razmotrimo pravac paralelan s l. Neka su A, B točke sjecišta pravca i elipse. Razmotrimo središte C segmenta $[A, B]$. Pravac OC je ortogonalni komplement od l.



Slika 2.3. Četiri primjera ortogonalnih komplemenata u ravnini $\mathbb{R}^{1,1}$.



Slika 2.4. Primjer ortogonalnih komplemenata u $\mathbb{R}^{2,1}$. Stožac je stožac izotropnih vektora. Ortogonalni komplement $L = l^{\perp}$ izotropnog pravca l je tangenta na stožac duž L.

Teorem 2.1. *([2], Theorem 1.6) a) Svaka hermitska forma na n-dimenzionalnom prostoru može se reducirati na zbroj kvadrata u nekoj bazi, točnije*

$$B(x,y) = -\sum_{j\leq p}^{n} x_j\overline{y}_j + \sum_{p<j\leqslant p+q}^{n} x_j\overline{y}_j. \tag{2.2}$$

b) Brojevi p i q, koje nazivamo negativni i pozitivni indeksi tromosti su neovisni o odabiru baze.
c) $rkB = p + q$.

Na primjer, u n-dimenzionalnom pseudo-euklidskom prostoru može se odabrati baza $e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q$ (gdje je $p + q = n$) tako da je

$$\langle e_1, e_1\rangle = \cdots = \langle e_p, e_p\rangle = -1 \qquad \langle f_1, f_1\rangle = \cdots = \langle f_q, f_q\rangle = -1, \tag{2.3}$$

a svi ostali skalarni produkti elemenata baze su nula. S $\mathbb{C}^{p,q}$ označavamo pseudo-euklidski prostor opremljen takvom bazom.

Dokaz:

a) Razmotrimo proizvoljni komplementarni potprostor Y u odnosu na $kerB$. Očito, forma je nedegeneriranana Y, stoga se tvrdnja svodi na slučaj nedegeneriranih formi. Stoga pretpostavljamo da je B nedegeneriran. Prema Lemi 2.3, može se pronaći vektor e_1 takav da je $B(e_1, e_1) = \pm 1$. □

Lema 2.5. *([2], Lemma 1.7)* $V = \mathbb{C}e_1 \oplus (\mathbb{C}e_1)^{\perp}$.

Dokaz:

Neka je ξ vektor koji nije kolinearan s e_1. Tada je vektor

$$\eta := \xi - \tfrac{\langle \xi, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1$$

okomit na e_1 te je $\xi \in \mathbb{C}e \oplus (\mathbb{C}e)^{\perp}$. □

Zatim, uzimamo vektor $e_2 \in (\mathbb{C}e_1)^{\perp}$ tako da je $B(e_2, e_2) = \pm 1$ i razmotrimo njegov ortogonalni komplement u $(\mathbb{C}e_1)^{\perp}$, itd.

2.1.5 Nekoliko definicija

Forma B je *pozitivno-definitna* ako i samo ako je $B(v, v) > 0$ za svaki $v \in V$ koji je različit od nule. Ako je forma pozitivno-definitna, kažemo da je prostor *euklidski.* U tom slučaju se jednakost (2.2) svodi na

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j.$$

Kažemo da je forma:

negativno definitna ako i samo ako je $B(v, v) < 0$ za svaki $v \neq 0$

ne-negativno definitna (ili *pozitivno semi-definitna*) ako i samo ako je $B(v, v) \geqslant 0$

ne-pozitivno definitna (ili *negativno semi-definitna*) ako i samo ako je $B(v, v) \leqslant 0$

indefinitna ako ima vrijednosti različitih predznaka.

Neka je B proizvoljna hermistka forma unutar V. Kažemo da je potprostor $W \subset V$ *pozitivan* ako je forma B pozitivno definitna na W te na sličan način definiramo prostore koji nisu negativni, negativne prostore itd.

Za potprostor W kažemo da je *regularan* ako je B nedegeneriran na W. Inače je W *singularan.*

Lema 2.6. *([2], Lemma 1.8) Indeks negativne (odnosno pozitivne) tromosti forme B podudara se s maksimalnom dimenzijom negativnog (odnosno pozitivnog) potprostora.*

Dokaz:

Promotrimo li formu B koja je zadana jednakošću (2.2), možemo pretpostaviti da postoji negativan potprostor X čija je dimenzija veća od p. Označimo li sa S linearnu ljusku vektora $e_{p+1}, e_{p+2} \ldots$ tada vrijedi $dim(X) + dim(S) > dim(S)$ te stoga X i S imaju sjecište različito od nule, ali X je negativan, a S ne-negativan. $\square$

2.1.6 Drugа kanonska forma

Teorem 2.2. *([2], Theorem 1.9) Neka je B hermitska forma s indeksom tromosti $p \leqslant q$, $\dim \ker B = k$. Tada se njegova matrica može svesti na*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 & 0 \\ 1_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{q-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix} \quad ili \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 1_{q-p} & 0 & 0 \\ 1_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je B nedegeneriran.

Dokaz:

Neka su baze e_i, f_k kao u (2.3).

$$h_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + f_j), \quad g_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j - f_j), \quad \text{za } j \leqslant p, \qquad f_k, \quad \text{za } k > p.$$

Time se dobiva željena kanonska forma. □

2.1.7 Linearni funkcionali

Neka je V pseudo-euklidski prostor. Prostor svih linearnih funkcionala na V označavamo s V°. Za vektor $v \in V$, definiramo linearni funkcional l_v na V pomoću

$$l_v(w) = \langle w, v \rangle.$$

Propozicija 2.2. *([2], Proposition 1.10) Preslikavanje i: $v \mapsto l_v$ je antilinearna bijekcija iz V na V°.*

Dokaz:

Budući da su dimenzije V i V° iste, preslikavanje je bijektivno. □

2.1.8 Ortogonalni komplementi

Teorem 2.3. *([2], Theorem 1.11) Za bilo koji potprostor S u pseudo-euklidskom prostoru V vrijedi:*
a) $(S^\perp)^\perp = S$
b) $dim\ S + dim\ S^\perp = dim\ V$.

Lema 2.7. *([2], Lemma 1.12) Neka je W konačno-dimenzionalni vektorski prostor i neka su $l_1, ..., l_k$ linearno nezavisni fukcionali na W. Tada potprostor*

$$(kerl_1) \cap \cdots \cap (kerl_k) \tag{2.5}$$

ima kodimenziju k u W.

Dokaz:

Proširujemo l_j na bazu unutar dualnog prostora. Promotrimo dualnu bazu $e_1, \ldots, e_n \in W$,

$$l_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Potprostor (2.6) je razapet vektorima $e_{k+1}, \ldots, e_n$. □

Sada možemo dokazati i prethodni teorem.

Dokaz:

a) Budući da vrijedi $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$, navedeni prostori imaju istu dimenziju.

b) Neka je $e_1, ..., e_k$ baza unutar S. Uzimajući funkcionale $l_j(v) := \langle v, e_j \rangle$, po definiciji vrijedi $S^{\perp} = \cap \ker l_j$ te slijedi $kodim S^{\perp} = \dim S$. □

Propozicija 2.3. *([2], Proposition 1.13) U pseudo-euklidskom prostoru vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) presjek $S \cap S^{\perp}$ jednak je jezgri restrikcije forme na (S) i jezgri restrikcije forme na $(S^{\perp})$,

b) ako je S regularan, onda vrijedi $V = S \oplus S^{\perp}$,

c) $(S \cap T)^{\perp} = S^{\perp} + T^{\perp}$,

d) $(S + T)^{\perp} = S^{\perp} \cap T^{\perp}$,

e) ako je $S \subset T$, onda vrijedi $S^{\perp} \supset T^{\perp}$.

2.1.9 Izotropni potprostori

Razmotrimo pseudo-euklidski prostor V snabdjeven formom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potprostor $W \subset V$ je

$$\textit{izotropan ako je} \qquad \langle v, w \rangle = 0 \qquad \text{za svaki } v, w \in W.$$

Ekvivalentno tome, W je izotropan ako je $W \subset W^{\perp}$.

Teorem 2.4. *([2], Theorem 1.14)*

a) Najveća moguća dimenzija izotropnog potprostora je $min(p, q)$, gdje su (p, q) indeksi tromosti.

b) Svaki izotropni potprostor sadržan je u izotropnom potprostoru najveće moguće dimenzije.

Dokaz:

a) Pretpostavimo da je $p \leqslant q$. Druga kanonska forma (Teorem 2.2) podrazumijeva postojanje p-dimenzionalnog izotropnog potprostora. Dovoljno je uzeti u obzir linearnu ljusku prvih p vektora baze.

Pretpostavimo da postoji izotropni potprostor dimenzije veće od p. Tada je njegovo sjecište s q-dimenzionalnim pozitivnim potprostorom različito od nule, što nas dovodi do kontradikcije.

b) Neka je T m-dimenzionalni izotropni potprostor. Imajući u vidu $T^\perp \supset T$ i $(T^\perp)^\perp$, uočavamo da je T jednak jezgri restrikcije forme na $T^\perp$. Označimo sa S komplementarni potprostor od T unutar $T^\perp$; tada je $\dim S = \dim V - 2m$ i $V = S \oplus S^\perp$.

Razmotrimo dva slučaja.

1. Neka je S indefinitna, $h \in S$ izotropni vektor. Tada je $T \oplus \mathbb{C}h$ izotropni potprostor dimenzije $m + 1$.

2. Neka je S pozitivno ili negativno definitna. Onda vrijedi da je $dim(S^\perp) = 2m, T \subset S^\perp$ izotropan potprostor, dok je $dim(S) = m$. Stoga su indeksi inercije forme $S^\perp$ zapravo (m, m). A shodno tome su indeksi inercije forme V zapravo $m, m+dim(S)$ ili $(m+dim(S), m)$ prema predznaku S. Drugim riječima, T ima najveću moguću dimenziju. $\square$

2.1.10 Dualnost izotropnih potprostora

Dualnost izotropnih potprostora možemo pokazati na primjeru $p = q$, pri čemu su W_1, W_2 komplementarni izotropni potprostori. Za vektor $h \in W_1$ definiramo linearni funkcional na W_2 s $l_h(v) = \langle v, h \rangle$. Tada je $h \mapsto l_h$ bijekcija od W_1 na prostor linearnih funkcionala na W_2.

Literatura

[1] C. M. Fulton, A Pseudo-Euclidean Geometry, Proceedings of the American Mathematical Society, 10 (1959), 304-306

[2] Y. A. Neretin, Lectures on Gaussian Integral Operators and Classical Groups, European Mathematical Society, 2011.