Minimalne plohe

Jakšić, Nives

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

ZAVRŠNI RAD

Minimalne plohe

Nives Jakšić

Voditelj: doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

ZAVRŠNI RAD

Minimalne plohe

Nives Jakšić

Voditelj: doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Sažetak

Glavna tema ovog rada je minimalna ploha, odnosno ploha čija je srednja zakrivljenost jednaka nuli. U radu su definirani osnovni pojmovi lokalne teorije ploha, kao što su karta, prva i druga fundamentalna norma koji su potrebni za definiranje srednje zakrivljenosti. Na kraju je dan pregled najpoznatijih minimalnih plohe.

Ključne riječi:
plohe, srednja zakrivljenost plohe, minimalna ploha

Minimal surfaces

Abstract

The main topic of this work is minimal surface, that is, a surface whose mean curvature is equal to zero. In the work we define the basic terms of local theory of surface, such as the map, the first and the second fundamental form needed for definition of the mean curvature. The overview of well-known minimal surfaces is also given.

Keywords:
surface, mean curvature, minimal surfaces

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se plohama čija je srednja zakrivljenost jednaka nuli, tj. minimalnim plohama. Prvi se zapisi o plohama konstantne srednje zakrivljenosti pojavljuju u 18. stoljeću. Euler je pokazao da je katenoid minimalna ploha, a Lagrange je odredio parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koju mora zadovoljavati parametrizacija plohe da bi ploha bila minimalna. Minimalne plohe igraju važnu ulogu i u fizici kao plohe s najmanjom potencijalnom energijom. Joseph Plateau, belgijski fizičar i matematičar, generirao je takve plohe umakajući žice savijene kao prostorne krivulje u otopine sapuna i glicerina. Problem određivanja minimalnih ploha temeljen na eksperimentu sa sapunom i glicerinom naziva se Plateauov problem.

U prvom poglavlju definirati ćemo osnovne pojmove iz područja diferencijalne geometrije, kako bi lakše shvatili pojmove koje koristimo u daljnjem radu.

U drugom poglavlju bavit ćemo se glavnom temom završnog rada. Navest ćemo najvažnije teoreme, definicije i dati pregled najpoznatijih minimalnih ploha.

1 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne pojmove iz lokalne teorije ploha u $\mathbb{R}^3$ kao što su parametrizacija ploha, prva i druga fundamentalna forma, operator oblika plohe te srednja zakrivljenost plohe. Sve definicije koje navodimo u ovom poglavlju preuzete su iz [3].

1.1 Parametrizacija plohe

Prije svega, potrebno je definirati plohu kako bismo kasnije mogli uvoditi osnovne pojmove vezane uz nju.

Definicija 11. *Podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ je ploha ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \subset \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\boldsymbol{m} : \mathcal{U} \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \subseteq \mathbb{R}^2$ koje je glatki homeomorfizam otvorenih skupova.*

Nakon što smo definirali plohu, uvodimo pojam parametrizacija plohe.

Definicija 12. *Preslikavanje $\boldsymbol{m} : \mathcal{U} \to V \cap S$ nazivamo parametrizacijom (kartom) okoline točke p plohe S. Pišemo $\boldsymbol{m}(s,l) = (x(s,l), y(s,l), z(s,l))$*

Za plohu kažemo da je regularna ako je diferencijal preslikavanja $\mathbf{m}$ injektivan, a može se pokazati da je taj uvjet ispunjen ako i samo ako su vektori

$$\mathbf{m}_s := \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial s}, \quad \mathbf{m}_l := \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial l}$$

linearno nezavisni. Taj uvjet je ispunjen ako i samo ako vrijedi $\mathbf{m}_s \times \mathbf{m}_l \neq 0$.

1.2 Prva fundamentalna forma

U nastavku definiramo tangencijalnu ravninu plohe uz pomoć tangencijalnog vektora kako bismo došli do definicije fundamentalne forme plohe.

Definicija 13. *Neka je S regularna ploha i $p \in S$. Tangencijalni vektor u točki p je vektor $v_p \in T_p\mathbb{R}$ za koji postoji krivulja $c : I \to S$, takva da je*

$$c(0) = p, c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u točki p označavamo s T_pS. Potprostor T_pS nazivamo tangencijalna ravnina plohe S u točki p.

Prva fundamentlna forma plohe opisana je sljedećom definicijom.

Definicija 14. *Prva fudamentalna forma plohe S u točki $p \in S$ je simetričan, bilinearan funkcional $I : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ definiran s*

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p.$$

Pridruženu kvadratnu formu $I : T_pS \to \mathbb{R}$

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p$$

također nazivamo prvom fundamentalnom formom.

Formalno gledano definiramo ju na dva različita tangencijalna vektora, ali ju možemo definirati i na jednom tangencijalnom vektoru.
Zapišimo pomoću karte plohe $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathbf{m}(\mathcal{U}) \subset S$ djelovanje prve fundamentalne forme na tangencijalni vektor. Neka je $v_p \in T_pS$. Tada postoji krivulja $c : I \to S$ tako da je $c(0) = p$, $c'(0) = v_p$. Neka je $p = \mathbf{m}(s_0, t_0)$. Krivulju c prikazujemo u karti $c(t) = \mathbf{m}(s(t), l(t))$. Zapišimo tangencijalni vektor v_p pomoću karte. Korištenjem lančanog pravila znamo da vrijedi:

$$v_p = c'(o) = \mathbf{m}_s(s_0, l_0)s'(0) + \mathbf{m}_l(s_0, l_0)l'(0).$$

Drugi način zadavanja prve fundamentalne forme:

$$I(v_p) = v_p{\cdot}v_p = \mathbf{m}_s^2(s_0, l_0)(s'(0))^2{+}2\mathbf{m}_s(s_0, l_0){\cdot}\mathbf{m}_l(s_0, l_0){\cdot}s'(0){\cdot}l'(0){+}\mathbf{m}_l^2(s_0, l_0)(l'(0))^2.$$

Funkcije $E, F, G : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definirane na sljedeći način:

$$E = \mathbf{m}_s^2,$$
$$F = \mathbf{m}_s \cdot \mathbf{m}_l,$$
$$G = \mathbf{m}_l^2.$$

nazivamo fundamentalnim veličinama prvog reda plohe S u karti $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$.
Izraz za prvu fudamentalnu formu se preko fundamentalnih veličina prvog reda može zapisati kraće kao:

$$I = Eds^2 + 2Fdsdl + Gdl^2.$$

1.3 Operator oblika plohe

U ovom poglavlju definirat ćemo operator koji se veže uz plohu i pomoću kojeg možemo doći do određene informacije o obliku same plohe.
Neka je S regularna ploha i preslikavanje $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ karta koja pokriva područje $\mathbf{m}(\mathcal{U})$ plohe S. Prilikom definiranja jediničnog vektora normale karte koristimo se definicijom tangencijalnog vektora i tangencijalne ravnine iz prethodnog poglavlja.

Definicija 15. *Vektor normale karte je vektor normale tangencijalne ravnine plohe razapeta vektorima $\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_l$ zadan s*

$$n = \frac{\boldsymbol{m}_s \times \boldsymbol{m}_l}{||\boldsymbol{m}_s \times \boldsymbol{m}_l||}.$$

Nakon što smo definirali vektor normale karte spomenit ćemo definiciju operatora koji nam govori o tome kakvog je oblika ploha.

Definicija 16. *Preslikavanje $S_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$ definirano s*

$$S_p(v_p) = -D_{v_p}n(p)$$

nazivamo operetorom oblika plohe S u točki p.

1.4 Druga fundamentalna forma

Druga fundamentalna forma opisana je sljedećom definicijom.

Definicija 17. *Druga fudamentalna forma plohe S u točki $p \in S$ je simetričan, bilinearan funkcional $II : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ definiran s*

$$II(v_p, w_p) = S_p(v_p) \cdot w_p.$$

Pridruženu kvadratnu formu $II : T_pS \to \mathbb{R}$

$$II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

također se naziva drugom fundamentalnom formom.

Zapišimo pomoću karte plohe $\mathbf{m} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ djelovanje druge fundamentalne forme na tangencijalni vektor. Neka je $v_p \in T_pS$. Zapišimo tangencijalni vektor v_p pomoću karte. Korištenjem lančanog pravila znamo da vrijedi:

$$v_p = c'(0) = \mathbf{m}_s(s_0, l_0)s'(0) + \mathbf{m}_l(s_0, l_0)l'(0).$$

Drugi način zadavanja druge fundamentalne norme:

$$\begin{aligned} II(v_p) = S(v_p) \cdot v_p &= S_p(\mathbf{m}_s(s_0, l_0)) \cdot \mathbf{m}_s(s_0, l_0)(s'(0))^2 + S_p(\mathbf{m}_s(s_0, l_0)) \cdot \mathbf{m}_l(u_0, v_0)u'(0)l'(0) \\ &+ \mathbf{m}_s(s_0, l_0) \cdot S_p(\mathbf{m}_l(s_0, l_0))u'(0)l'(0) + S_p(\mathbf{m}_l(s_0, l_0)) \cdot \mathbf{m}_l(s_0, l_0)(l'(0))^2. \end{aligned}$$

Funkcije $L, M, N : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definirane na sljedeći način:

$$\begin{aligned} L &= S_p(\mathbf{m}_u(s_0, l_0)) \cdot \mathbf{m}_u(s_0, l_0), \\ M &= S_p(\mathbf{m}_u(s_0, l_0)) \cdot \mathbf{m}_v(s_0, l_0) = \mathbf{m}_u(s_0, l_0) \cdot S_p(\mathbf{m}_v(u_0, v_0)), \\ N &= S_p(\mathbf{m}_v(s_0, l_0)) \cdot \mathbf{m}_v(s_0, l_0). \end{aligned}$$

nazivamo fundamentalnim veličinama drugog reda plohe S u karti $\mathbf{m}$. Što se kraće može zapisati u obliku:

$$II = Lds^2 + 2Mdsdl + Ndl^2.$$

1.5 Srednja zakrivljenost plohe

U nastavku ćemo definirati preslikavanje koje svakoj točki domene $\mathcal{U}$ pridružuje vektor normale plohe.
Neka je S orijentirana ploha i neka je $S_p : T_pS \to T_pS$ operator oblika plohe S.
Sada imamo plohu S i operator oblika plohe S, stoga možemo definirati Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe S.

Definicija 18. *Neka je S regularna ploha parametrizirana s $\boldsymbol{m} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$. Gaussovo preslikavanje je preslikavanje koje definiramo kao*

$$n : \mathcal{U} \to S^2, n(s,l) = \frac{\boldsymbol{m}_s \times \boldsymbol{m}_l}{||\boldsymbol{m}_s \times \boldsymbol{m}_l||}.$$

Definicija 19. *Srednja zakrivljenost plohe S u točki p je funkcija $H : S \to \mathbb{R}$ definirana s $H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}S_p$, gdje je* tr *oznaka za trag matrice pridružene operatoru S_p.*

Možemo si pojednostaviti račun na sljedeći način.
Operator oblika plohe je simetričan operator, što bi značilo da postoji ortonormirana baza, e_1, e_2, od T_pS u kojoj S_p ima dijagonalnu matricu. Stoga vrijede sljedeće jednakosti

$$S_p(e_1) = k_1(p)e_1, S_p(e_2) = k_2(p)e_2,$$

$$K(p) = k_1(p)k_2(p), H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)),$$

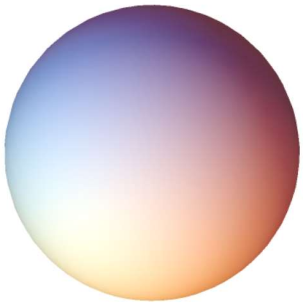
pri čemu svojstvene vrijednosti $k_1(p), k_2(p)$ operatora S_p nazivamo glavnim zakrivljenostima plohe S u točki p, a e_1, e_2 jedinični glavni vektori.

U sljedećem primjeru izračunat ćemo srednju zakrivljenost sfere pomoću operatora oblika plohe.

Primjer 11. *Neka je S sfera, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Jedinično normalno polje, koje je orijentirano prema van je $n(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$. Neka je $v \in T_pS$ proizvoljan tangencijalni vektor. Tada je*

$$S_p(v) = -(\nabla(\frac{x}{r}) \cdot v, \nabla(\frac{y}{r}) \cdot v, \nabla(\frac{z}{r}) \cdot v)) = -\frac{1}{r}(v_1, v_2, v_3) = -\frac{1}{r}v.$$

Operator $S_p = -\frac{1}{r}I$, gdje je I jedinični operator, je skalarni oeprator čiji je oblik nalik sferi. Srednja zakrivljenost sfere možemo izračunati pomoću formule $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}S_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{r} = -\frac{1}{r}$.



Slika 1: Sfera

Jedan od primjera plohe s konstantnom zakrivljenošću je upravo sfera.

Sljedećom propozicijom pokazat ćemo da koristeći fundamentalne veličine prvog i drugog reda možemo izračunati Gaussovu i srednju zakrivljenost znajući samo parametrizaciju plohe.

Propozicija 11. *(Vidjeti [3], Propozicija 3.5.1) Neka je* $\boldsymbol{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *karta za plohu* S, *te neka su* E, F, G, L, M, N *fundamentalne veličine prvog i drugog reda s obzirom na kartu* $\boldsymbol{m}$. *Tada su Gaussova i srednja zakrivljenost dane formulama*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Izraz $W^2 = EG - F^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{m}_s \cdot \mathbf{m}_s & \mathbf{m}_s \cdot \mathbf{m}_l \\ \mathbf{m}_l \cdot \mathbf{m}_s & \mathbf{m}_l \cdot \mathbf{m}_l \end{vmatrix}$ nazivamo Weingartenova funkcija.

2 Minimalne plohe

Koristeći do sada opisane pojmove dolazimo do glavne teme ovog poglavlja, a samim time i do glavne teme ovog rada. Možemo naslutiti da je riječ o minimalnim plohama.
Krenimo od same definicije minimalne plohe.

Definicija 21. *Za plohu* S *kažemo da je minimalna ako je* $H(p) = 0$ *za svaku točku* p *plohe.*

Za minimalnu plohu vrijedi da je je $k_1 = -k_2$ u svim njezinim točkama.
U nastavku ćemo dokazati da je ploha zadana parametrizacijom $(x, y) = (x, y, f(x, y))$ minimalna ploha ako i samo ako zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0.$$

Ploha je zadana parametrizacijom $(x, y, f(x, y))$, gdje je f glatka funkcija. Želimo doći do izraza za srednju zakrivljenost. Imamo

$$m_x = (1, 0, f_x), \quad m_y = (0, 1, f_y)$$

iz čega možemo izračunati koeficijente prve fundamentalne norme:

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x \cdot f_y, \quad G = 1 + f_y^2.$$

Nadalje

$$m_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad m_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad m_{yy} = (0, 0, f_{yy})$$

iz čega možemo izračunati koeficijente druge fundamentalne norme:

$$L = \frac{1}{W} f_{xx}, \quad M = \frac{1}{W} f_{xy}, \quad N = \frac{1}{W} f_{yy}.$$

Tada je

$$H = \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_x y + (1 + f_y^2)f_{xx}}{2W^3} = 0$$

ako i samo ako vrijedi

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0.$$

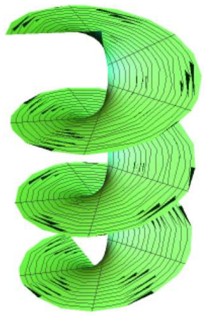
Rješavanje ove jednadžbe možemo dobiti ravninu kao trivijalno rješenje.

2.1 Primjeri minimalne plohe

Među primjerima minimalnih ploha od posebnog su interesa helikoid i katenoid.

2.1.1 Helikoid

Helikoid je ploha koja nastaje istovremenom translacijom i rotacijom pravca (tzv. zavojnim gibanjem) oko fiksnog pravca, pri čemu su pravci međusobno okomiti, a brzina translacije je proporcionalna brzini rotacije. Po obliku je sličan Arhimedovu vijku, koji se u različitim smjerovima proteže beskonačno.



Slika 2: Helikoid

Helikoid je uz ravninu jedina pravčasta minimalna ploha. Krivulja koju opisuje pravac koji se giba naziva se kružna zavojnica, a njena parametrizacija dana je s

$$x(s) = a\cos s, y(s) = a\sin s, z(s) = bs$$

$s \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0$, gdje je a polumjer zavojnice, a $2b\pi$ korak zavojnice. Parametarske jednadžbe helikoida dane su s

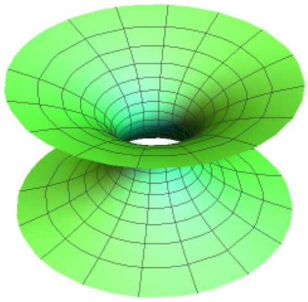
$$x(s,l) = al\cos s, \quad y(s,l) = al\sin s \quad z(s,l) = bs$$

$(s,l) \in \mathbb{R}^2, a > 0, b \neq 0.$
Iz parametrizacije plohe lako odredimo fundamentalne veličine prvog i drugog reda, odnosno srednju zakrivljenost plohe :

$$\begin{aligned}
&E = a^2l^2 + b^2,\\
&F = 0,\\
&G = a^2,\\
&W^2 = EG - F^2 = a^4l^2 + b^2a^2,\\
&L = 0,\\
&M = \frac{a^2b}{\sqrt{a^4l^2 + b^2a^2}},\\
&N = 0,\\
&H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = 0.
\end{aligned}$$

2.1.2 Katenoid

Katenoid je ploha koja nastaje rotacijom lančanice čija je parametrizacija $\mathbf{y}(t) = a\cosh\frac{t}{a}$. Lončanica je zakrivljeni oblik kojeg zauzima nit ovješena o dvije nepomične točke na horizontalnom razmaku, opterećena horizontalnim opterećenjem u ravnotežnom položaju. Leonhard Euler i Jean-Baptiste Meusnier de la Place su pokazali da rotacijom lančanice nastaje katenoid.



Slika 3: Katenoid

U yz-ravnini zadamo lančanicu parametarskim jednadžbama

$$y(l) = a\text{ch}\frac{l}{a}, z(l) = l, l \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Rotiramo li ju oko z osi nastat će katenoid, čija je parametrizacija dana s

$$\begin{aligned} x(s,l) &= a\text{ch}\frac{l}{a}\cos s, \\ y(s,l) &= a\text{ch}\frac{l}{a}\sin s, \\ z(s,l) &= l, \end{aligned}$$

gdje je $(s,l) \in [-\pi,\pi] \times \mathbb{R}, a \neq 0$.

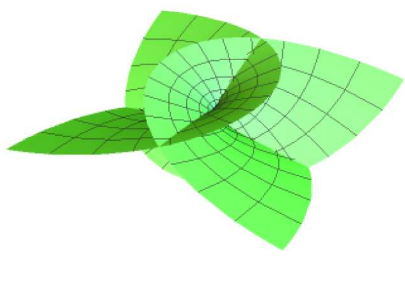
Iz parametrizacije plohe lako odredimo fundamentalne veličine prvog i drugog reda, odnosno srednju zakrivljenost plohe:

$$
\begin{aligned}
&E = a^2 \mathrm{ch}^2 \frac{l}{a}, \\
&F = 0, \\
&G = \mathrm{ch}^2 \frac{l}{a}, \\
&W^2 = EG - F^2 = a \mathrm{ch} \frac{l}{a} \\
&L = \frac{1}{a}, \\
&M = 0, \\
&N = -a \mathrm{ch}^2 \frac{l}{a} \mathrm{sech}^2 \frac{l}{a}, \\
&H = 0.
\end{aligned}
$$

Osim helikoida i katenoida izdvojila bih i Enneperovu, Catalanovu, Hennebergovu minimalnu plohu.

2.1.3 Enneperova minimalna ploha

Alfred Enneper 1864. godine otkrio je jednu od jednostavnijih minimalnih ploha. Danas se takva minimalna ploha naziva Enneperova minimalna ploha. Njena parametrizacija je



Slika 4: Enneperova minimalna ploha

$$
\mathbf{m}(s, l) = (s - \frac{s^3}{3} + sl^3, -l + \frac{l^3}{3} - ls^2, s^2 - l^2).
$$

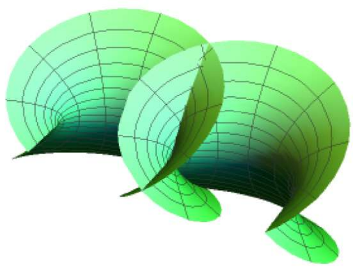
Računajući fundamentalne veličine prvog i drugog reda, lako se pokaže da je $H = 0$. Imamo

$$\begin{aligned} E &= (1 + s^2 + l^2)^2, \\ F &= 0, \\ G &= (1 + s^2 + l^2)^2, \end{aligned}$$

Kako je $L = -N$ i $E = G$, očito vrijedi $H = 0$.

2.1.4 Catalanova minimalna ploha

Minimalna ploha koja je dobila ime po belgijskom matematičaru Eugenu Charlesu Catalanu naziva se Catalanova minimalna ploha.



Slika 5: Catalanova minimalna ploha

Njena parametrizacija je

$$\mathbf{m}(s, l) = (s - \sin s \mathrm{ch} l, 1 - \cos s \mathrm{ch} l, -4 \sin \frac{s}{2} \mathrm{sh} \frac{l}{2})$$

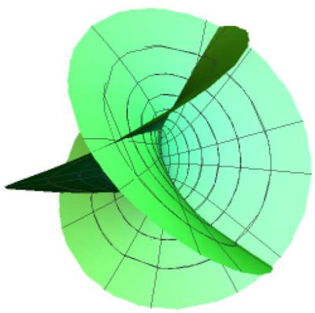
gdje je s>0. Pomoću fundamentalnih veličina prvog i drugog reda pokazat ćemo da je srednja zakrivljenost Catalanove plohe jednaka 0. Imamo

$$
\begin{aligned}
E &= 2\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}l(\mathrm{ch}l - \cos s),\\
F &= 0\\
G &= 2\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}l(\coth l - \cos s),\\
L &= -\mathrm{ch}\frac{1}{2}l\sin\frac{1}{2}s,\\
M &= \cos\frac{1}{2}l\sin\frac{1}{2}s,\\
N &= \mathrm{ch}\frac{1}{2}l\sin\frac{1}{2}s.
\end{aligned}
$$

Uočimo da i za ovu plohu vrijedi $E = G$, odnosno $L = -N$ te slijedi $H = 0$.

2.1.5 Henebergova minimalna ploha

Njemački matematičar Ernest Lebrecht Henneberg otkrio je plohu koja se naziva Hennebergova minimalna ploha. Njena parametrizacija je



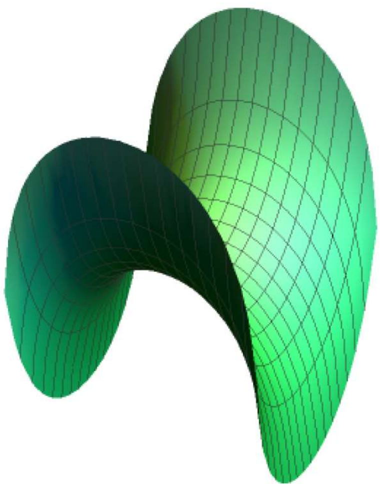
Slika 6: Hennebergova minimalna ploha

$$
\mathbf{m}(s,l) = (2\mathrm{sh}s\cos l - \frac{2}{3}\mathrm{sh}3s\cos 3l, 2\mathrm{sh}s\sin l + \frac{2}{3}\mathrm{sh}3s\sin 3l, 2\mathrm{ch}2s\cos 2l).
$$

Među zanimljivim primjerima minimalnih ploha našla se i Scherkova minimalna ploha.

2.1.6 Scherkova minimalna ploha

1834. godine Heinrich Ferdinand Scherk otkrio je jednu minimalnu plohu, po kome je i dobila ime. Jedna od zanimljivosti vezanih za Scherkovu minimalnu plohu je kada bi gledali s gornje strane plohu, imala bi oblik šahovske ploče i to sa beskonačno polja.



Slika 7: Scherkova minimalna ploha

Njena parametrizacije je

$$\mathbf{m}(s,l) = \left(s, l, \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos as}{\cos al}\right)\right).$$

Literatura

[1] A. GRAY, E. ABBENA, S.SALAMON, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, 2006.

[2] E. SAMEC, I. KODRNJA: Familija ploha Heltocat, KoG, Vol. 19. No. 19., 2015, 57.-64.

[3] Ž.MILIN ŠIPUŠ, S. VIDAK, Uvod u diferencijalnu geometriju, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.