Geometrijski zadaci na matematičkim natjecanjima

Perić, Iva

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Perić

Geometrijski zadaci na matematičkim natjecanjima

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Perić

Geometrijski zadaci na matematičkim natjecanjima

Diplomski rad

mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Uvod

Često se u životu susrećemo s ljudima kojima baš ne ide matematika. Ona zahtijeva malo više promišljanja i zaključivanja nego većina predmeta u školi. No postoje i ljudi koji imaju "klikere" za matematiku i uživaju u riješavanju matematičkih problema. Upravo zbog takvih, organizirana su matematička natjecanja. Natjecanje iz matematike prvi puta je zabilježeno u Mađarskoj 1894. godine, a u današnje vrijeme matematička natjecanja se organiziraju od onih na lokalnoj razini, pa sve do međunarodnih, od kojih posebno izdvajamo natjecanje Klokan te Međunarodnu matematičku olimpijadu. Priprema učenika za natjecanje predstavlja ozbiljan i mukotrpan posao, pogotovo ako učenik pokazuje interes samo za određeno područje matematike, dok su mu neka druga područja manje zanimljiva ili čak odbojna. U ovom diplomskom radu prikazane su cjeline iz geometrije koje se pojavljuju na natjecanjima iz matematike, teorija koju učenici moraju poznavati te primjeri zadataka i postupaka zaključivanja pri njihovom riješavanju.
U prvom poglavlju naveden je pregled povijesti natjecanja u Republici Hrvatskoj. Drugo poglavlje posvećeno je geometriji na nastavi matematike: njen povijesni pregled, geometrija u Nacionalnom okvirnom kurikulumu, geometrija na natjecanjima i geometrijske teme koje su prisutne na natjecanju. U zadnjem potpoglavlju nabrojeno je osnovno gradivo te njihova primjena u zadatke na natjecanjima. U zadnjem poglavlju dana je predodžba kroz grafove o uspješnosti riješavanja geometrijskih zadataka na državnom natjecanju 2022./23. godine.

1 Povijest i organizacija natjecanja

U Hrvatskoj se natjecanja iz matematike počinju provoditi 1959./60. godine na preporuku UNESCO-a i to samo u nekim srednjim školama. Natjecanja nedugo poslije započinju i u osnovnim školama. U današnje vrijeme natjecanje iz matematike organiziraju Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske, Agencija za odgoj i obrazovanje te Hrvatsko matematičko društvo. Ona uključuju učenike od 4. do 8. razreda te učenike srednjih škola. Prema klasifikaciji u školama postoje sljedeća natjecanja:

- školsko natjecanje;
- županijsko natjecanje;
- državno natjecanje.

Učenici se na natjecanju iz matematike natječu u 13 kategorija:

- osnovna škola: 4. r. , 5. r. , 6. r. , 7. r. , 8. r.
- srednja škola, A verzija: 1. r. , 2. r. , 3. r. , 4. r.
- srednja škola, B verzija: 1. r. , 2. r. , 3. r. , 4. r.

Od 2006. g. postoje te dvije verzije za učenike srednjih škola: A i B verzija. One se razlikuju u tome jer je verzija A namijenjena za učenike prirodoslovno-matematičke gimnazije, dok je verzija B namijenjena za učenike ostalih srednjih škola. Učenici ostalih srednjih škola na školskoj razini mogu odabrati natjecanje u A ili B verziji, pri čemu se na višim razinama natjecanja (županijsko i državno) ne može promijeniti kategorija koju su izabrali.

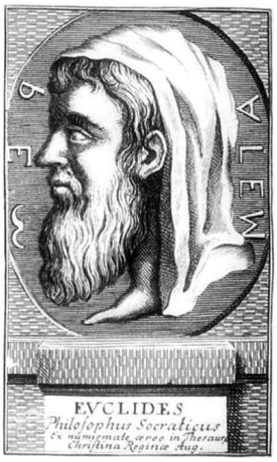
U Republici Hrvatskoj postoji jedinstven program i pravila koja vrijede za natjecanja na svim razinama. Važno je napomenuti da se za učenike četvrtog razreda osnovne škole ne održava državna razina natjecanja.

2 Geometrija u nastavi matematike

Na natjecanjima iz matematike pojavljuju se 4 osnovna područja: algebra, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva. Mi ćemo se kroz ovo poglavlje usredotočiti samo na geometriju te spomenuti nešto o povijesti geometrije, navesti njeno pojavljivanje u kurikulumu te na nastavi i natjecanjima u osnovnoj i srednjoj školi i dati primjere zadataka koji su se pojavljivali na natjecanjima.

2.1 Povijesni pregled geometrije

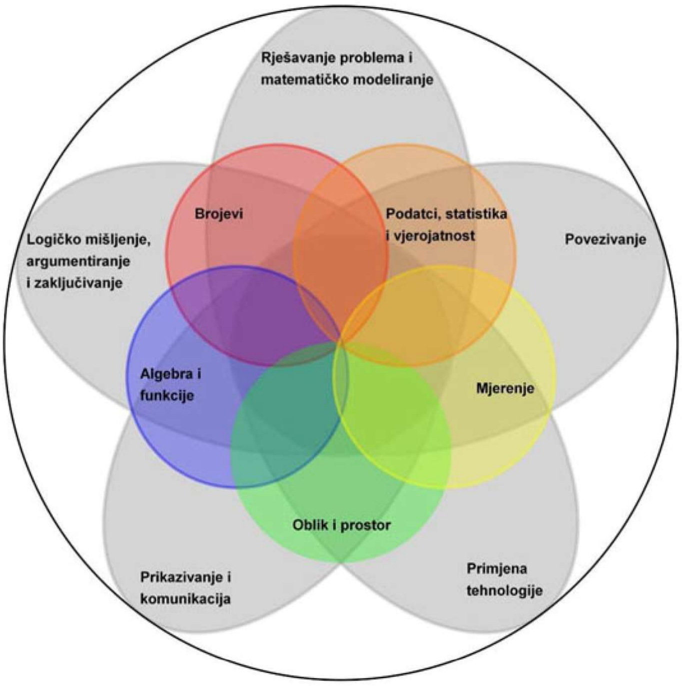
Geometrija je grana u matematici koja se bavi proučavanjem svojstava i odnosa među prostornim oblicima. Riječ geometrija nastala je spajanjem grčkih riječi geo što znači zemlja i metria što znači mjerenje. Nastala je iz problema u praksi još u prapovijesno doba, gdje su ljudi imali potrebu za korištenjem geometrije u svrhu vlastitih potreba, kao npr. mjerenje zemljišta i izračunavanje oplošja i obujma različitih tijela. Unutar geometrije postoje i razni problemi koji nisu još riješeni (npr. duplikacija kocke, kvadratura kruga, trisekcija kuta,...). Detaljniji pristup geometriji pronalazi se u Euklidovoj knjizi Elementi sastavljenoj od 13 knjiga u kojima se bavi planimetrijom (geometrijom u ravnini), aritmetikom i teorijom brojeva te stereometrijom (geometrijom u prostoru).



Slika 1: Euklid (330.pr.Kr.-275.pr.Kr.), slika preuzeta iz [5]

2.2 Geometrija u NOK-u

Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu, kraće NOK-u, matematika se može podijeliti na sljedeće domene: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost. Domene u koju možemo uključiti geometriju su Oblik i prostor i Mjerenje. U okviru domene Oblik i prostor, učenici razmatraju geometrijske oblike putem dekompozicije i kompozicije, uspoređuju njihova svojstva, identificiraju međusobne veze između njih, te izvlače pretpostavke i tvrdnje temeljene na opaženim svojstvima i odnosima. Ove tvrdnje i pretpostavke potom se dokazuju kroz primjenu crteža i algebarskih izraza. Kod domene Mjerenje učenici usvajaju standardnu mjernu jedinicu za kut, površinu, volumen i dr. te ih mjere odgovarajućim mjernim uređajem. Učenici na taj način mjerenjem povezuju matematiku s drugim odgojno-obrazovnim područjima.



Slika 2: Domene kurikuluma u matematici, slika preuzeta iz [9]

2.3 Geometrija na natjecanjima

Na natjecanju se pojavljuju zadaci koji sadrže:

- gradivo u sklopu nastavnog plana i programa za pojedine razrede,
- gradivo prethodnih razreda,
- dodatne teme.

Organizatori natjecanja na internet stranicama javno objave teme te im je moguće pristupiti. Važno je napomenuti da sve uključuje pojavu tema iz prethodnih razreda. U navedenoj tablici prikazati ćemo geometrijske teme po razredima od 4. razreda osnovne škole pa do 4. razreda srednje škole prema [2].

	ŠKOLSKO NATJECANJE	ŽUPANIJSKO NATJECANJE	DRŽAVNO NATJECANJE
4.r.		Kut i trokut	
5.r.	Mjerenje i prikaz podataka		Geometrija ravnine, Volumen
6.r.	Koordinatni sustav u ravnini i prikaz podataka		Trokut i četverokut, Sukladnost
7.r.	Koordinatni sustav u ravnini		Mnogokuti, Kružnica i krug
8.r.		Pitagorin poučak	Geometrijska tijela

Tablica 1: Geometrijske teme za razrede osnovne škole

Osim navedenih tema na natjecanjima se mogu još očekivati i dodatne geometrijske teme: sličnost trokuta, kružnica (obodni i središnji kut, tangenta) koja se može pojaviti u 7. razredu na državnom, te u 8. razredu na županijskoj i državnoj razini.

	ŠKOLSKO NATJECANJE	ŽUPANIJSKO NATJECANJE	DRŽAVNO NATJECANJE
1.r.	Trokut, Karakteristične točke trokuta	Sličnost Trigonometrija pravokutnog trokuta	
2.r.		Krug i kružnica, Poučak o sinusima i kosinusima	Geometrija prostora
3.r.	Trigonometrijske funkcije	Primjena trigonometrijskih funkcija	Vektori, Pravac i kružnica
4.r			

Tablica 2: Geometrijske teme za razrede srednje škole

Dodatna tema koja se može očekivati na natjecanju je Potencija točke u odnosu na kružnicu koja se pojavljuje u 2. razredu na županijskom natjecanju u A verziji.

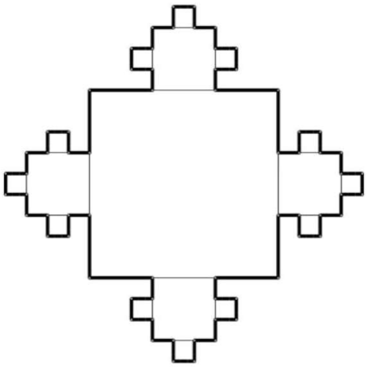
2.4 Osnovne teme iz geometrije i njihovi primjeri

U ovom poglavlju ćemo spomenuti najčešće geometrijske teme i primjere takvih na natjecanjima. Obrađene teme rađene su pomoću knjiga [1], [3], [4], [5] [6], [10], [11] te su neke slike izrađene pomoću programskog paketa Geogebra.

Krenemo li od četvrtog razreda, samog početka u natjecanju, najčešća tema u geometrijskim zadacima je traženje površine ili opsega trokuta ili četverokuta. Obično se za četverokut zadaje kvadrat. Navodimo primjer jednog takvog zadatka.

Zadatak 2.1. *ŽUPANIJSKO NATJECANJE, 4. r. OŠ, , 2022.*
U središtu mozaika nalazi se velika kvadratna ploča sa stranicom duljine 81 cm. Uz srednju trećinu svakog njenog ruba postavljene su manje kvadratne ploče. Potom su uz srednju trećinu svakog slobodnog ruba manje kvadratne ploče postavljene najmanje kvadratne ploče. Od koliko se ploča sastoji mozaik? Koliki je opseg mozaika?

Rješenje:



Slika 3: Mozaik, slika preuzeta iz [2]

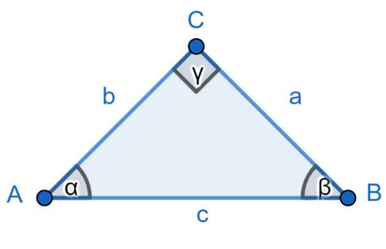
Učenik si sam treba vizualizirati i skicirati taj mozaik te će tako shvatiti što treba dalje. Od njega se očekuje da razdijeli mozaik na više manjih kvadrata (1 velika, 4 manja te 12 najmanjih kvadratnih ploča), pozbraja ih te izračuna rub mozaika za svaki dio ovisno o duljini dužine. Na kraju se treba sjetiti definicije opsega kvadrata i primjeniti ju u ovome zadatku tako da zbraja duljine stranice tog mozaika.

Teme se na natjecanju nižu prema predmetnom kurikulumu i tablici tema koju propisuje povjerenstvo. Ima ih dosta, te ćemo zbog toga spomenuti samo neke od osnovnih tema koji se upotrebljavaju u rješavanju geometrijskih zadataka u srednjoj te u osnovnoj školi. Teme su nabrojene u [8].

2.4.1 Osnovno o trokutu

Ima dosta pojmova koji se nadovezuju na geometrijski lik trokuta. No prvo se podsjetimo što je to trokut i njegovih svojstava.

Trokut definiramo kao skup svih točaka ravnine omeđen s tri dužine koje ne pripadaju istom pravcu uključujući sve točke tih dužina.

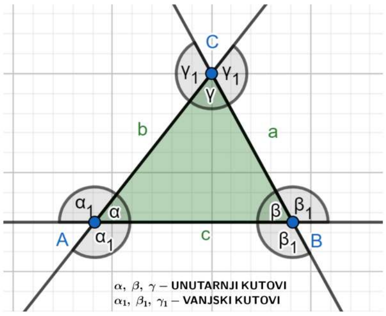


Slika 4: Trokut

Zbroj duljina bilo kojih dviju stranica trokuta veći je od duljine treće stranice tog trokuta. Tu činjenicu nazivamo nejednakost trokuta,

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad b + c > a.$$

U trokutu postoje i kutevi: unutarnji i vanjski. Zbroj veličina unutarnjih kutova jednak je 180° dok je zbroj veličina vanjskih kutova jednak 360°.



Slika 5: Unutarnji i vanjski kutovi trokuta

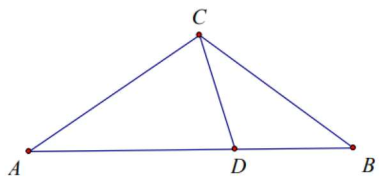
Postoji nekoliko podjela trokuta s obzirom na:

- duljinu stranice: jednakostranični, jednakokračni i raznostranični,
- veličinu kuteva: šiljastokutni, tupokutni i pravokutni.

Često se u zadacima spominje jedanakokračni trokut kod kojeg se može koristiti jednakost kutova uz osnovicu tog trokuta, te jednakostranični trokut kod kojega su svi kutovi isti tj. 60°.

Zadatak 2.2. *ŠKOLSKO NATJECANJE, 6. r. OŠ, 2020.*
U jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$ *označena je točka* D *na osnovici* $\overline{AB}$ *takva da je* $|AD| = |AC|$ *i* $|DB| = |DC|$. *Odredite veličine svih kutova trokuta* $\triangle ABC, \triangle ADC$ *i* $\triangle DBC$.

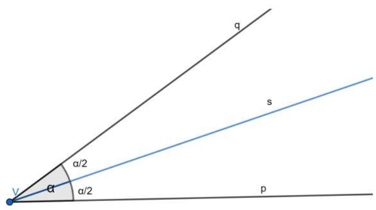
Rješenje:



Slika 6: Trokut, slika preuzeta iz [2]

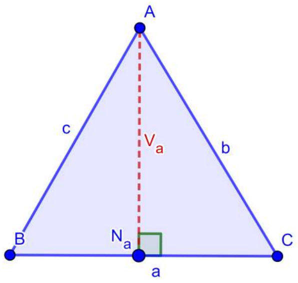
Za analizu zadatka važno je skicirati sliku premda ona ne donosi bodove, no iz nje se lakše uoče svojstva i odnosi koji vrijede. Treba se sjetiti da su kutovi kod jednakokračnog trokuta uz osnovicu jednaki te da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°. Uz to, treba se prisjetiti i same definicije vanjskog kuta.

Poznato svojstvo trokuta jest da nasuprot duljoj stranici leži veći kut i obratno. U zadacima je česta primjena pravaca, odnosno dužina koje možemo pridružiti trokutu.
Simetrala kuta je pravac koji prolazi vrhom kuta i raspolovljuje ga.



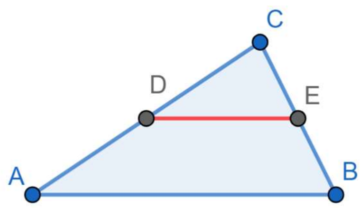
Slika 7: Simetrala kuta

Visina trokuta je dužina koja je određena vrhom trokuta i točkom u kojoj okomica iz tog vrha siječe nasuprotnu stranicu. Tu drugu točku nazivamo nožište visine (N).



Slika 8: Visina trokuta i njezino nožište

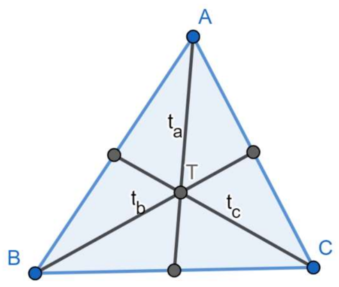
Srednjica trokuta je dužina koja spaja polovišta dviju stranica tog trokuta.



Slika 9: Srednjica trokuta

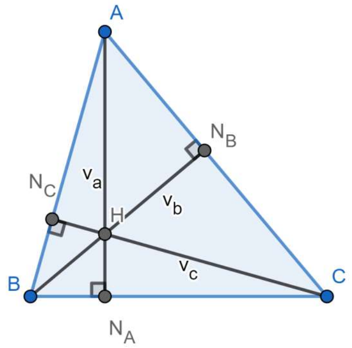
Za trokut treba naglasiti i četiri karakteristične točke :

- težište (T) - sjecište svih težišnica trokuta, ono dijeli svaku od težišnica u omjeru 2:1 računajući od vrha,



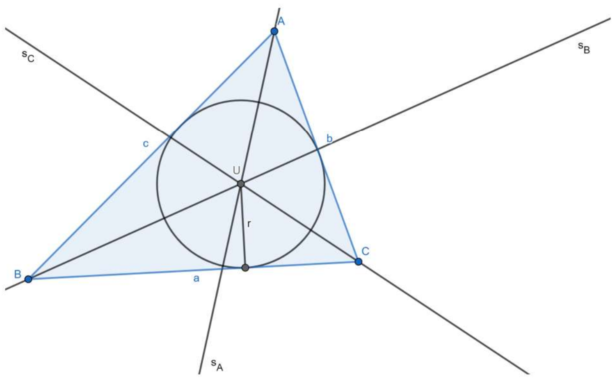
Slika 10: Težište

- ortocentar (H) - točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta,



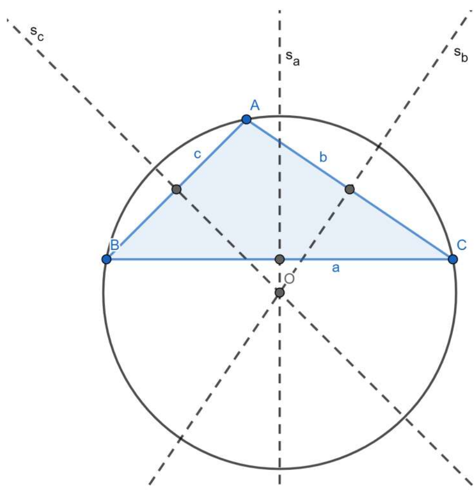
Slika 11: Ortocentar

- središte trokutu upisane kružnice (U) - točka u kojoj se sijeku simetrale unutarnjih kutova trokuta,



Slika 12: Središte trokutu upisane kružnice

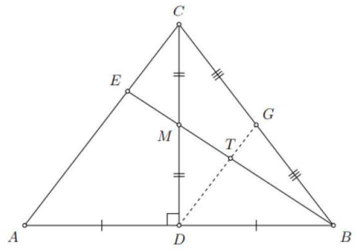
- središte trokutu opisane kružnice (O) - točka u kojoj se sijeku simetrale svih stranica trokuta.



Slika 13: Središte trokutu opisane kružnice

Zadatak 2.3. *ŽUPANIJSKO NATJECANJE, 1. r. SŠ, 2018.*
Neka je D nožište visine iz vrha C jednakokračnog trokuta ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Točka M je polovište dužine $\overline{CD}$. Pravci BM i AC sijeku se u točki E. Odredi omjer $|CE| : |AC|$.

Rješenje:



Slika 14: Trokut, slika preuzeta iz [2]

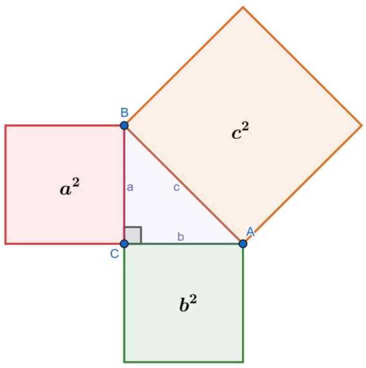
Zadatak se može riješiti uz to da se učenik prisjeti da je točka težište trokuta ako se nalazi u presjeku težišnica tog trokuta te omjera koji kaže da težište dijeli svaku od težišnica u omjeru $1 : 3$. Također, kod ovog zadatka bitno je primijeniti i svojstvo jednakokračnog trokuta (da se visina nalazi na polovištu osnovice tog trokuta). Zadatak ima dva rješenja.

2.4.2 Pitagorin i Euklidov teorem

U nekim zadacima potrebno je primijeniti Pitagorin i Euklidov teorem.

- Pitagorin teorem

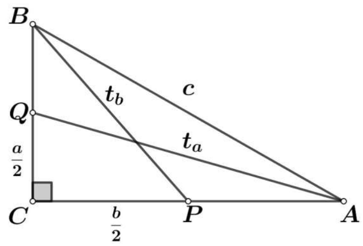
  Teorem 2.1. *U pravokutnom trokutu je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.*



Slika 15: Pitagorin poučak

Zadatak 2.4. *ŽUPANIJSKO NATJECANJE, 1. r. SŠ, 2018.*
U pravokutnom je trokutu zbroj duljina težišnica povučenih iz vrhova na hipotenuzi jednak $5\sqrt{5}$, a umnožak 30. Kolika je duljina hipotenuze?

Rješenje:



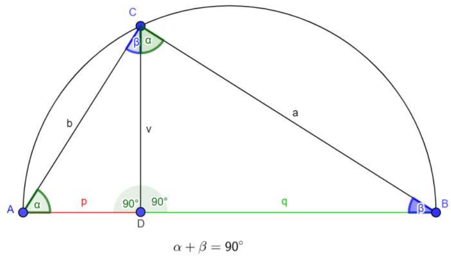
Slika 16: Pravokutni trokut, slika preuzeta iz [2]

U zadatku je najbitnije da učenik uoči trokute kod kojih je moguće primjeniti Pitagorin poučak ($\triangle BCP$ i $\triangle AQC$) za izražavanje težišnica tog trokuta. U nastavku zadatka treba iskoristiti i kvadrat zbroja dva prirodna broja i stavke koje su zadane u zadatku.

- Euklidov teorem

Teorem 2.2. *(a) Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta je geometrijska sredina njenih odsječaka na hipotenuzi tj.* $v = \sqrt{pq}$ *.*
(b) Kateta pravokutnog trokuta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu tj. vrijedi :

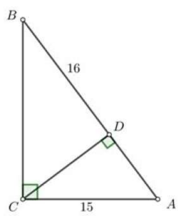
$$a = \sqrt{cq} \quad i \quad b = \sqrt{cp}$$



Slika 17: Euklidov teorem

Zadatak 2.5. *DRŽAVNO NATJECANJE, 1. r. SŠ, 2021.*
Dužina $\overline{AB}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta ABC. Visina iz vrha C, s nožištem u točki D, odsijeca na hipotenuzi odsječak $\overline{DB}$ duljine 16. Odredite površinu trokuta ABC, ako je $|AC| = 15$?

Rješenje:



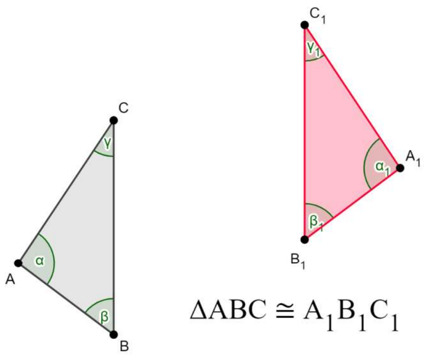
Slika 18: Pravokutni trokut, slika preuzeta iz [2]

Učenik u ovom zadatku može iskoristiti Euklidov teorem ili pak sličnost trokuta ($\triangle ADC$, $\triangle CDB$ i ABC) te uz oznaku jedne stranice kao nepoznanicu (npr $|AD|$ s x) dobiti kvadratnu jednadžbu. Površina pravokutnog trokuta izračuna se putem formule.

2.4.3 Sukladnost i sličnost dvaju trokuta

U nekim zadatcima opet trebamo uočiti i primjeniti sukladnost odnosno sličnost trokuta.

- **Sukladnost dvaju trokuta**
  Za dva trokuta kažemo da su sukladna ako se njihove slike u potpunosti preklapaju. Sve stranice i kutovi kod jednog trokuta jednaki su stranicama i kutovima kod drugog trokuta, bez obzira jesu li nastali premještanjem, rotacijom ili zrcaljenjem tog istog trokuta.



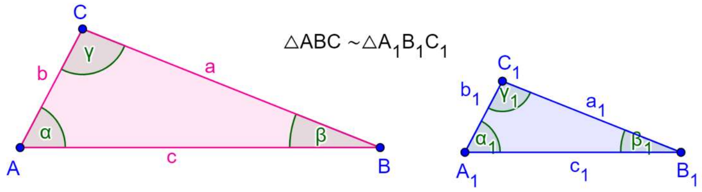
Slika 19: Sukladni trokuti

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju prema nekim stavkama iz sljedeće tablice:

S-K-S	duljini dviju stranica i veličini kuta između tih stranica
K-S-K	duljini jedne stranice i veličinama obaju kutova uz tu stranicu
S-S-S	duljinama svih triju stranica
S-S-K	duljinama dviju stranica i veličini kuta nasuprot većoj od tih dviju stranica

Tablica 3: Poučci o sukladnosti trokuta

- **Sličnost dvaju trokuta**
  Za dva trokuta kažemo da su slični ako su im odgovarajući unutarnji kutovi sukladni, a duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.



Slika 20: Slični trokuti

Dva su trokuta slična ako se podudaraju prema nekim stavkama iz sljedeće tablice:

S-K-S	duljine dva para odgovarajućih stranica proporcionalne i kutovi između tih stranica sukladni
K-K	imaju dva para sukladnih unutarnjih kutova
S-S-S	duljine svih triju parova odgovarajućih stranica proporcionalne
S-S-K	duljine dva para stranica proporcionalne i unutarnji kutovi nasuprot duljoj stranici sukladni

Tablica 4: Poučci o sličnosti trokuta

Omjer duljina odgovarajućih stranica međusobno sličnih trokuta zove se koeficijent sličnosti tih trokuta i označavamo ga s k, $k > 0$.
Za duljine stranica međusobno sličnih trokuta ABC i $A_1B_1C_1$ sa slike (20) vrijedi:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

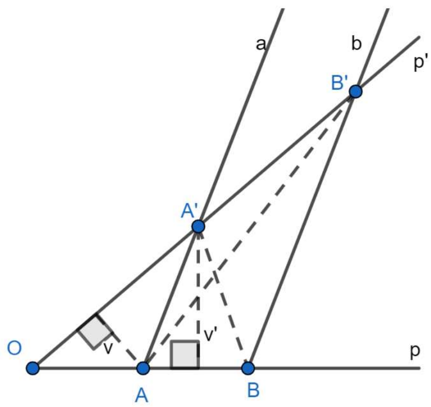
Za njihove opsege i površine tada vrijedi:

$$\frac{O_1}{O} = k \quad \text{i} \quad \frac{P_1}{P} = k^2.$$

U zadacima sa sličnosti čestu primjenu ima i sljedeći teorem.

Teorem 2.3. ***(Talesov teorem o proporcionalnosti)***
Paralelni pravci na krakovima $\sphericalangle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine, tj. (uz oznake na slici) vrijedi:

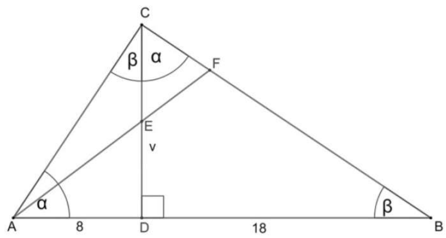
$$(i)\quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}, \qquad (ii)\quad \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}, \qquad (iii)\quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$$



Slika 21: Talesov teorem o proporcionalnosti

Zadatak 2.6. *DRŽAVNO NATJECANJE, 8. r. OŠ, 2022.*
U pravokutnom trokutu ABC visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na dva dijela tako da je $|AD| = 8$ i $|DB| = 18$. Neka je E polovište visine $\overline{CD}$. Pravac AE siječe katetu $\overline{BC}$ u točki F. Izračunaj duljinu dužine $\overline{EF}$.

Rješenje:



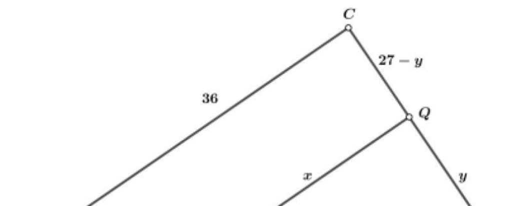
Slika 22: Trokut, slika preuzeta iz [2]

Učeniku je prilikom rješavanja zadatka bitno uočavanje sličnosti pojednih trokuta ($\triangle ADC$, $\triangle DBC$ i $\triangle ABC$). Uz to, bitna je i skica koju je kasnije potrebno i nadopuniti skiciranjem paralelne dužine sa stranicom $\overline{AF}$ kroz točku D opet radi uočavanja sličnosti trokuta ($\triangle CEF$ i $\triangle CDG$ te $\triangle ABF$ i $\triangle DBG$) te ispisivanju njihovih omjera. U zadatku je potrebno iskoristiti i Pitagorin poučak kod trokuta $\triangle ADE$ te uočiti srednjicu unutar trokuta $\triangle CDG$ i to također primijeniti pri označavanju stranica unutar trokuta $\triangle ABC$.

No ima i takvih zadataka koji se javljaju na školskim i županijskim natjecanjima, ali u srednjoj školi.

Zadatak 2.7. *ŽUPANIJSKO NATJECANJE, 2. r. SŠ, 2020.*
Duljine stranica trokuta ABC su $|BC| = 27, |AC| = 36, |AB| = 45$. *Neka su* P *i* Q *redom točke na stranicama* $\overline{AB}$ *i* $\overline{BC}$ *takve da je* $|AP| = |BQ|$ *i* $AC \parallel PQ$. *Izračunajte površinu trokuta* PBQ.

Rješenje:
Prilikom skiciranja slike (23) učenik treba vidjeti sličnost pojedinih trokuta ($\triangle ABC$ i $\triangle PBQ$).



Slika 23: Trokut, slika preuzeta iz [2]

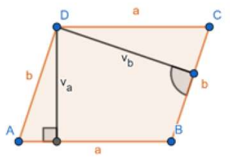
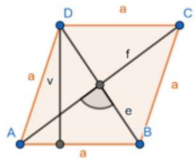
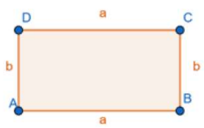
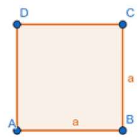
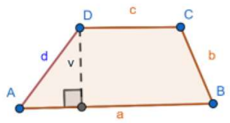
Također, treba doći do zaključka da ako je trokut pravokutan, onda mu je i sličan trokut također pravokutan. U zadatku se može iskoristiti i koeficijent sličnosti te na temelju površine jednog trokuta (jer znamo njegove stranice i možemo ju izračunati uz primjenu Heronove formule) izračunati površinu traženog trokuta.

2.4.4 Površine

Kod površina ćemo spomenuti neke od bitnijih formula koje se koriste za izračunavanje površine trokuta:

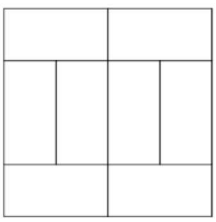
- Heronova formula $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$, a a, b, c duljine stranica trokuta
- $P = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$, gdje je a duljina stranice, a v_a duljina visine na tu stranicu
- $P = r \cdot s$, gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, a r je duljina polumjera trokutu upisane kružnice
- $P = \dfrac{abc}{4R}$, gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera trokutu opisane kružnice.

No također postoje i četverokuti čije površine treba znati jer se mogu pojaviti u nekim zadacima na natjecanjima.

	PARALELOGRAM	ROMB	PRAVOKUTNIK	KVADRAT	TRAPEZ
					
POVRŠINA	$a \cdot v_a$ ili $b \cdot v_b$	$a \cdot v$ ili $\frac{e \cdot f}{2}$	$a \cdot b$	a^2	$\frac{a+c}{2} \cdot v$

Slika 24: Površine mnogokuta

Zadatak 2.8. *ŠKOLSKO NATJECANJE, 5. r. OŠ, 2021.*
Jednake pločice u obliku pravokutnika složene su tako da čine kvadrat, kao na slici.



Slika 25: Dvorišna staza, slika preuzeta iz [2]

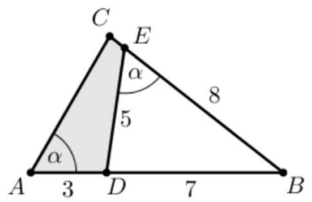
Deset takvih kvadrata, poredanih jedan do drugoga u nizu, čine dvorišnu stazu pravokutnog oblika. Izračunaj opseg i površinu dvorišne staze ako opseg jedne pločice (pravokutnika) iznosi 144 cm.

Rješenje:
U zadatku je prvo potrebno staviti oznake za pojedine stranice (dulje i kraće) te je bitno to da se učenik prisjeti formule za opseg i površinu pravokutnika. No, potrebna je i sama definicija kvadrata (pravilan četverokut omeđen s četiri jednake stranice) i na temelju jednakosti stranica kvadrata može se zaključiti o ovisnosti jedne varijable (dulje) o drugoj (kraćoj) i na taj način doći do rješenja.

Na natjecanjima za učenike 7. razreda pa nadalje, nikada se ne javljaju zadaci u kojima se površina lika treba izračunati jednostavnom primjenom formule. Često se kod zadataka gleda sličnost trokuta koeficijenta sličnosti te se na taj način dolazi do njihovih površina. To nam je prikazano u sljedećem zadatku.

Zadatak 2.9. *ŠKOLSKO NATJECANJE, 1. r. SŠ, 2023.*
Zadan je trokut ABC. Točka D nalazi se na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC tako da je $|AD| = 3$ cm, $|BD| = 7$ cm, $|BE| = 8$ cm, $|DE| = 5$ cm i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEB$. Kolika je površina četverokuta $ADEC$?

Rješenje:



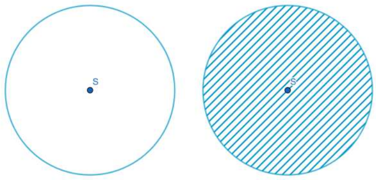
Slika 26: Trokut, slika preuzeta iz [2]

Prilikom rješavanja zadatka učenik treba uočiti način na koji može dobiti površinu četverokuta - kao razliku površina dvaju trokuta. Treba se zamijetiti da su ti trokuti slični te iskoristiti koeficijent sličnosti (kojeg dobiju kao omjer sličnih stranica) za računanje površine sličnih trokuta. Također, može se iskoristiti i Heronova formula za izračunavanje površine trokuta.

2.4.5 Krug i kružnica

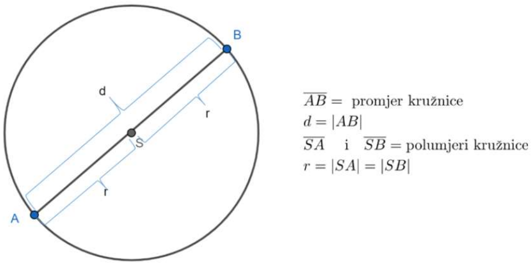
Isto kao i za geometrijski lik trokut, prisjetimo se prvo osnovnih pojmova koji su vezani uz kružnicu.

Kružnica je skup svih točaka ravnine na jednakoj udaljenosti od jedne čvrste točke ravnine (središta kružnice), dok je krug skup svih točaka ravnine ograničen kružnicom. Dakle, svaka kružnica omeđuje (zatvara) jedan krug.



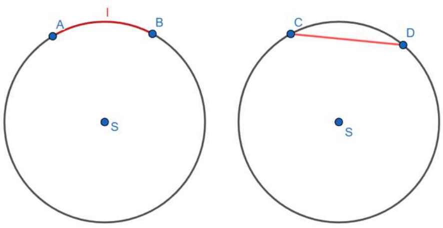
Slika 27: Kružnica i krug

Dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom te kružnice nazivamo polumjer kružnice, dok je promjer dužina koja prolazi središtem kružnice i spaja bilo koje dvije točke te kružnice. Duljinu promjera nazivamo dijametar dok duljinu polumjera nazivamo radijus.



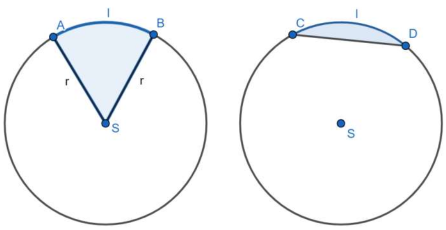
Slika 28: Kružnica

Dužina koja spaja bilo koje dvije točke kružnice nazivamo tetiva dok dio kružnice koji je omeđen s dvije točke te kružnice nazivamo kružni luk. Kružni luk obično označavamo slovom l.



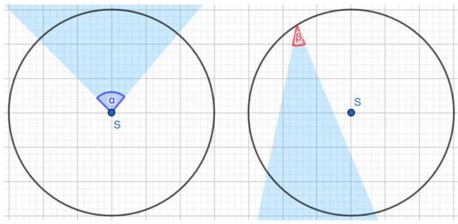
Slika 29: Kružni luk i tetiva

U zadacima na natjecanjima često se pojavljuju i pojmovi kružni isječak i kružni odsječak. Dio kruga omeđen s dva polumjera i pripadajućim kružnim lukom nazivamo kružni isječak, dok je kružni odsječak dio kruga omeđen s tetivom i pripadajućim kružnim lukom.



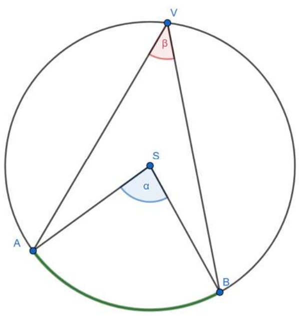
Slika 30: Kružni isječak i kružni odsječak

Kod kružnice bi trebalo istaknuti i poučak o obodnom i središnjem kutu. No za to prvo razmotrimo pojmove obodni i središnji kut.
Za kut kažemo da je obodni ako mu je vrh na kružnici te njegovi krakovi sijeku tu kružnicu dok za kut kažemo da je je središnji ako mu je vrh u središtu kružnice.



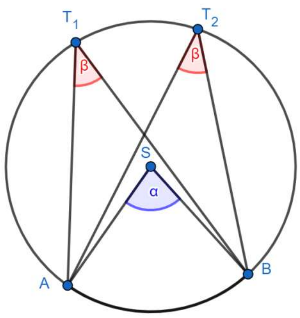
Slika 31: Središnji i obodni kut

Teorem 2.4. *(Poučak o obodnom i središnjem kutu)*
Središnji kut α dva je puta veći od obodnog kuta β pridruženoga istomu kružnom luku.



Slika 32: Poučak o obodnom i središnjem kutu

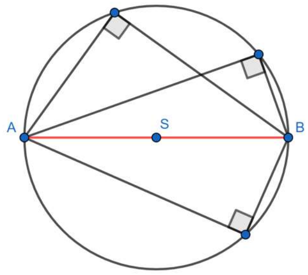
Prema ovom teoremu su obodni kutovi nad istim kružnim lukom sukladni.



Slika 33: Sukladni kutevi nad istim lukom

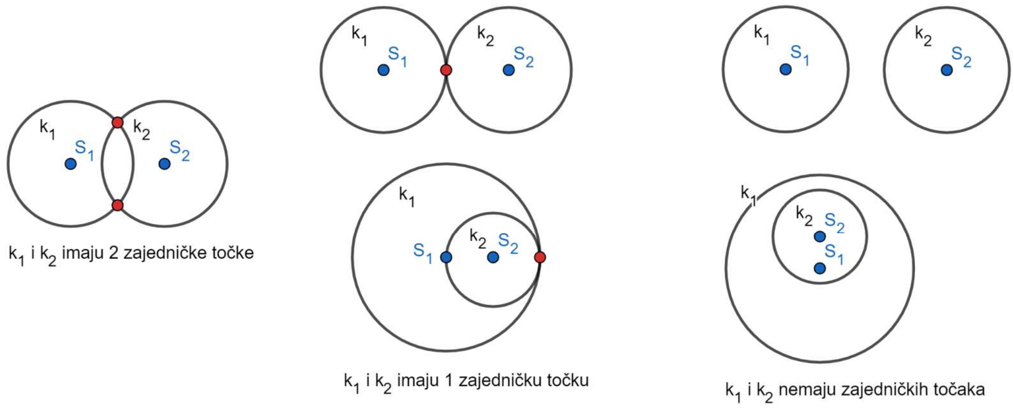
Spomenuti ćemo i vrlo poznati Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

Teorem 2.5. *Svaki je obodni kut nad promjerom kružnice pravi kut.*



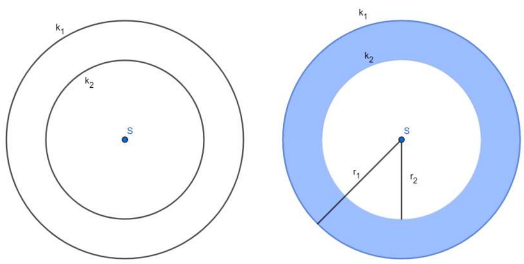
Slika 34: Talesov poučak

Dvije različite kružnice u ravnini mogu zauzeti jedan od sljedeća tri međusobna položaja: mogu imati dvije zajedničke točke, mogu imati jednu zajedničku točku ili mogu nemati zajedničkih točaka.



Slika 35: Međusobni položaj dvaju kružnica

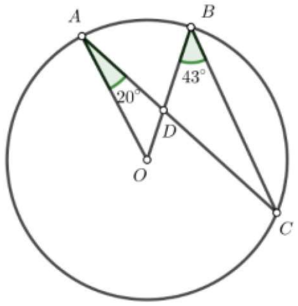
No dvije kružnice mogu imati isto središte, a različite polumjere. Takve kružnice nazivamo koncentrične kružnice. Dio ravnine između dvije koncentrične kružnice nazivamo kružni vijenac.



Slika 36: Koncentrične kružnice i kružni vijenac

Isto vrijedi i za odnos kružnice i pravca: mogu se sijeći u 2 točke, mogu se dodirivati u jednoj točki te mogu nemati zajedničkih točaka.
Promotrimo zadatak u kojemu najvažniju ulogu igra poučak o obodnom i središnjem kutu.

Zadatak 2.10. *ŠKOLSKO NATJECANJE, 3. r. , SŠ, 2022.*
Točka A, B i C nalaze se na kružnici sa središtem u točki O, kao na slici ispod. Tetiva $\overline{AC}$ siječe polumjer $\overline{OB}$ u točki D. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle BDA$ ako je $\sphericalangle OAC = 20°, \sphericalangle OBC = 43°$.



Slika 37: Kružnica, slika preuzeta iz [2]

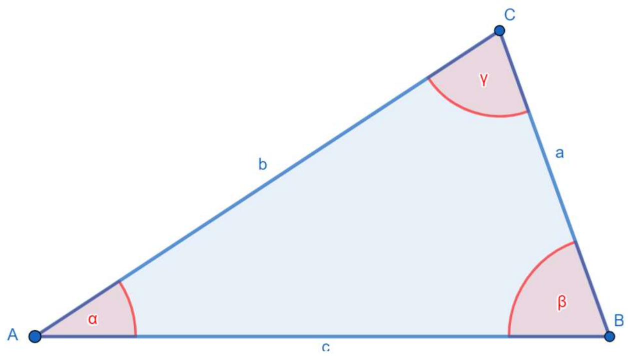
Rješenje:
Učenik u ovom zadatku treba primijeniti poučak o obodnom i središnjem kutu ($\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$) te sukladnost vršnih kuteva ($\sphericalangle ADO$ i $\sphericalangle CDB$). Pošto je zbroj kutova u trokutu jednak, pri njihovom izjednačavanju dobije se vrijednost jednog kuta. Drugi kut dobivamo kao razliku kutova u trokutu AOD te treći kut kao sukut kuta $\triangle ADO$.

2.4.6 Primjena trigonometrije

Prilikom riješavanja zadatka primjenom trigonometrije, najčešće se primijenjuju sinusov i kosinusov poučak.

Teorem 2.6. *(Poučak o sinusu)*
U svakom je trokutu kvocijent između duljine stranica i sinusa njoj nasuprotnog kuta stalan:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Teorem 2.7. *(Poučak o kosinusu)*
U svakom je trokutu kvadrat duljine stranice trokuta jednak zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranica umanjen za dvostruki umnožak duljina tih stranica pomnožen s kosinusom kuta koji one zatvaraju.

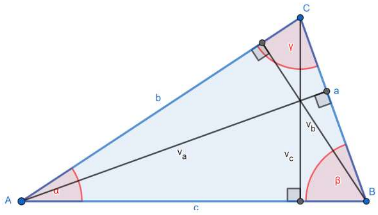
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Gledamo li visine unutar trokuta ABC , dolazimo do novih formula za površinu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c.$$

Uz oznake $v_a = b \sin\gamma$, $v_b = c \sin\alpha$, $v_c = a \sin\beta$ dobivamo :

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \sin\beta.$$



Slika 38: Trokut

Zadatak 2.11. *ŽUPANIJSKO NATJECANJE, 3. r. SŠ, 2020.*
Duljine dviju stranica trokuta su 7 cm i 4 cm. Kut nasuprot dulje stranice je dva puta veći od kuta nasuprot kraće stranice. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

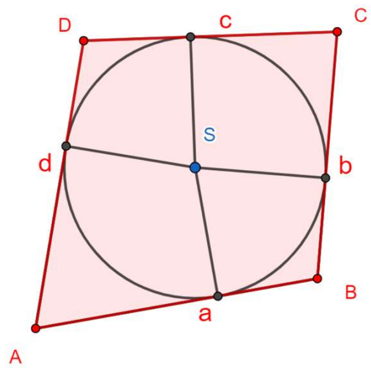
Rješenje:
U ovome zadatku učeniku je najbitnije zamijetiti poučak o sinusu i kosinusu na trokut te zaključiti da ako imamo trokut da prilikom rješavanja jednadžbi trebamo uzeti samo pozitivno rješenje.

2.4.7 Tangencijalni i tetivni četverokut

Prisjetimo se pojmova tetivni i tangencijalni četverokut.

Četverokut kojem se može upisati kružnica zove se tangencijalni četverokut. U tangencijalnom je četverokutu zbroj duljina kod jednog para nasuprotnih stranica jednak zbroju duljina drugog para nasuprotnih stranica koje pripadaju tom četverokutu. Uz oznake kao na slici (39), za njega vrijedi:

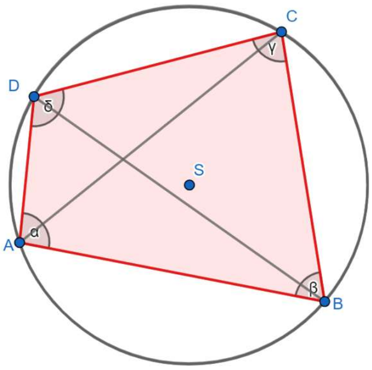
$$a + c = b + d.$$



Slika 39: Tangencijalni četverokut

Četverokut kojemu možemo opisati kružnicu nazivamo tetivni četverokut. Stranice toga četverokuta su tetive opisane kružnice. Kod njega vrijedi da je zbroj veličina jednog para nasuprotih kutova jednak zbroju veličina drugog para nasuprotnih kutova tog četverokuta,

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

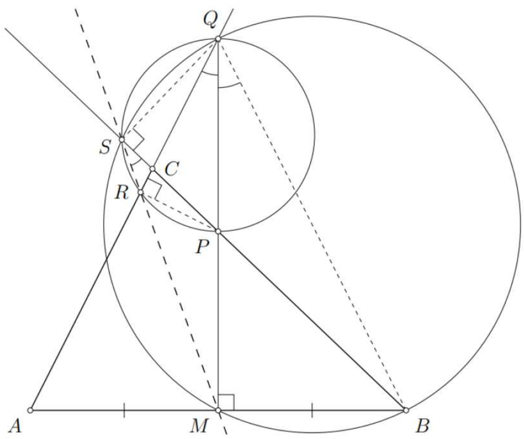


Slika 40: Tetivni četverokut

U sljedećem zadatku vidjeti ćemo kombinaciju korištenja svojstva tetivnog, odnosno tangencijalnog četverokuta.

Zadatak 2.12. *ŽUPANIJSKO NATJECANJE, 4. r. SŠ, 2018.*
Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokaži da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Rješenje:

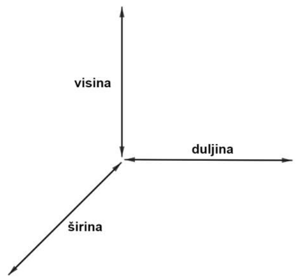


Slika 41: Trokut, slika preuzeta iz [2]

Kao i kod svakog geometrijskog zadatka, najvažnija je skica jer bez nje učenik teško može zaključivati. Kod ovog zadatka najvažnije je poznavanje pojmova tetivnog i tangencijalnog četverokuta (zaključiti da su to $BQSM$ i $PQSR$) te primjena poučka o obodnom i središnjem kutu.

2.4.8 Stereometrija

Stereometrija je grana geometrije koja se bavi proučavanjem svih geometrijskih tijela u prostoru. Taj pojam "prostor" možemo definirati kao neograničen skup točaka koji ima tri dimenzije: duljinu, širinu i visinu.



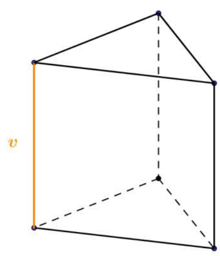
Slika 42: Dimenzije "prostora"

Kod zadataka sa stereometrijom najčešće se pojavljuju zadaci u kojima je potrebno odrediti volumen ili oplošje nekog geometrijskog tijela te zadaci sa presjecima tijela ravninom ili presjecima dva tijela.
Nabrojati ćemo ona osnovna geometrijska tijela koja učenici trebaju poznavati te ćemo pri iskazivanju formula koristiti sljedeće oznake:
v - duljina visine, B - površina baze, P - površina pobočja/plašta, r - duljina polumjera baze, s - duljina izvodnice.

PRIZMA
Poliedar (uglato geometrijsko tijelo) omeđen s dva sukladna mnogokuta koji leže u usporednim ravninama i paralelogramima.
Oplošje i volumen kod prizme računamo kao :

$$O = 2B + P, \qquad V = Bv.$$

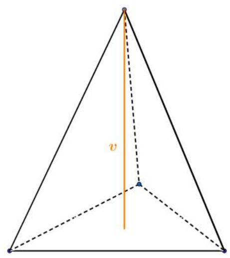
Najpoznatije četverostrane prizme su kvadar i kocka.



Slika 43: Prizma

PIRAMIDA
Poliedar omeđen jednim mnogokutom i trokutima koji imaju zajednički vrh. Njeno oplošje i volumen iznose:

$$O = B + P, \qquad V = \frac{1}{3}Bv.$$

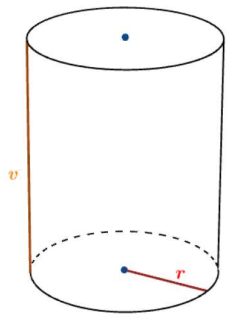


Slika 44: Piramida

VALJAK

Oblo geometrijsko tijelo omeđeno s dva sukladna kruga koja leže u međusobno usporednim ravninama i zakrivljenom plohom. Oplošje i volumen računaju se kao:

$$O = 2B + P = 2r\pi(r + v), \qquad V = Bv = r^2\pi v.$$

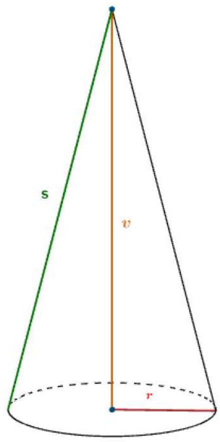


Slika 45: Valjak

STOŽAC

Oblo geometrijsko tijelo koje je omeđeno krugom i zakrivljenom plohom. Oplošje i volumen računaju se kao:

$$O = B + P = r\pi(r + s), \qquad V = \frac{1}{3}Bv = \frac{1}{3}r^2\pi v.$$

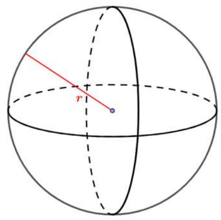


Slika 46: Stožac

KUGLA

Skup svih točaka prostora čija je udaljenost od čvrste točke tog prostora manja ili jednaka pozitivnom broju r. Kugla je dio prostora omeđen sferom. Njeno oplošje i volumen računamo kao:

$$O = 4r^2\pi, \qquad V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

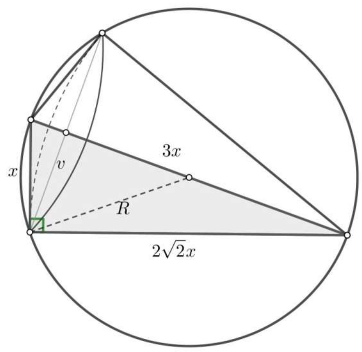


Slika 47: Kugla

Zadatak 2.13. *DRŽAVNO NATJECANJE, 2. r. SŠ, 2021.*
Pravokutan trokut kojemu je hipotenuza trostruko dulja od jedne katete rotira oko hipotenuze. Odredite omjer obujma tako nastalog tijela i obujma tom tijelu opisane kugle.

Rješenje:

Učeniku je na prvom mjestu bitna vizualizacija tog poprečnog presjeka.

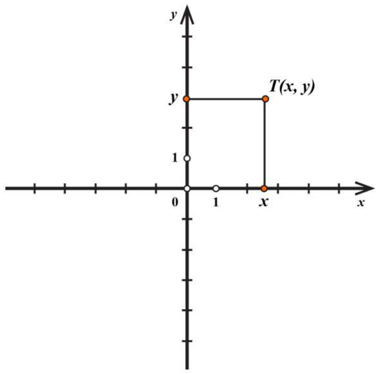


Slika 48: Poprečni presjek, slika preuzeta iz [2]

No, bitno je i poznavanje volumena stošca i kugle te površine pravokutnog trokuta jer bez toga se ne može riješiti zadatak. Postoji jedinstveno rješenje ovog zadatka.

2.4.9 Analitička geometrija

Analitička geometrija je grana geometrije gdje se geometrijski problemi riješavaju algebarskim metodama. Glavni koncept analitičke geometrije je da se točke u ravnini i prostoru definiraju koristeći koordinate, tj. kombinacije dvaju ili triju realnih brojeva, dok se drugi geometrijski objekti poput pravaca, ravnina, krivulja, ploha itd. opisuju putem jednadžbi. Točke ravnine smještene su u pravokutni koordinatni sustav ili tzv. Kartezijev koordinatni sustav. Kartezijev koordinatni sustav u ravnini definiran je sa dva međusobno okomita brojevna pravca (koordinatnim osima). Horizontalna os je os x (os apscisa), a vertikalna os je os y (os ordinata). Sjecište tih dviju koordinatnih osi zove se ishodište koordinatnog sustava.



Slika 49: Kartezijev koordinatni sustav, slika preuzeta iz [6]

Važnost u koordinatnom sustavu je ta što se svakoj točki te ravnine pridružuje uređeni par realnih brojeva.

$$R \times R = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ i } y \in \mathbb{R}\}.$$

Ako imamo dvije točke u ravnini, $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, njihovu udaljenost dobivamo pomoću Pitagorinog poučka

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

a koordinate njihovog polovišta dobivamo kao aritmetičku sredinu tih koordinata tj.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

No, imamo li dvije točke, kroz njih možemo povući jednoznačno određen pravac. Dakle, jednadžba pravca kroz točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad (x_1 \neq x_2).$$

Postoje 3 oblika jednadžbe pravca u kojemu ga možemo zapisati: eksplicitni, implicitni i segmentni.

- Eksplicitni oblik

  $$y = kx + l,$$

  pri čemu je k koeficijent smjera ili nagib pravca, a l odsječak na osi y,

- Segmentni oblik

  $$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

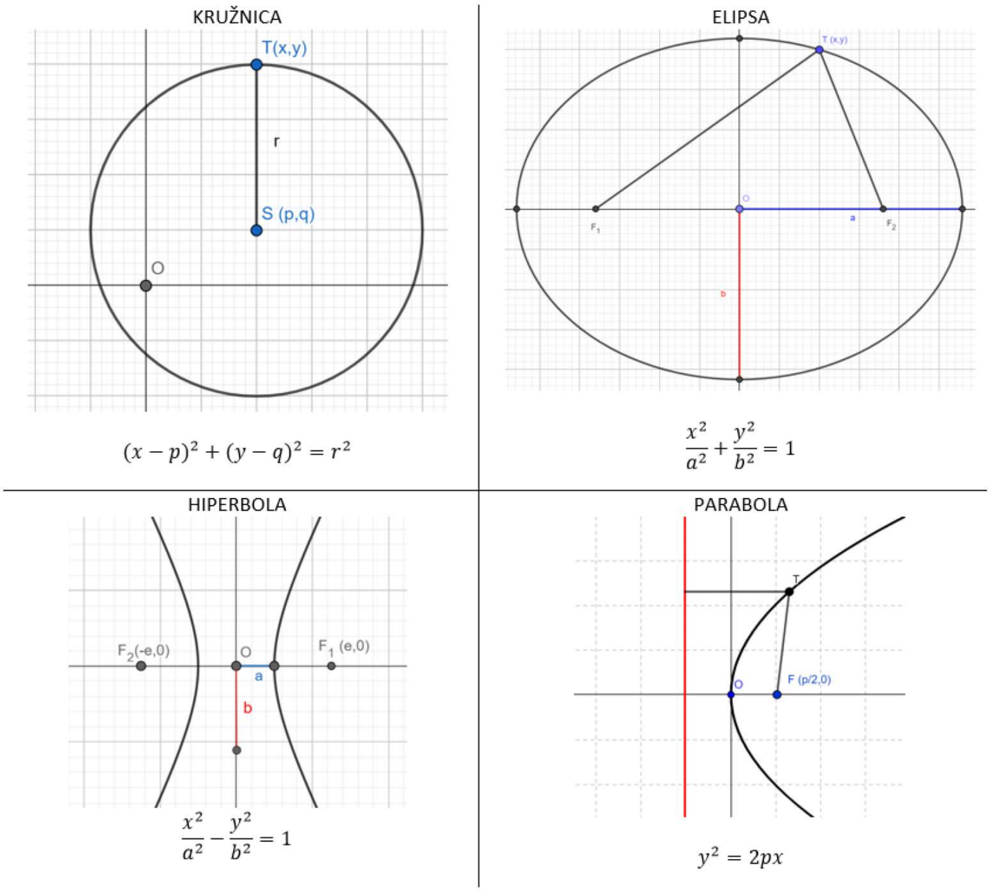
  gdje su m i n duljine odsječaka na koordinatnim osima,

- Implicitni oblik

  $$Ax + By + C = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

  gdje je bar jedan od brojeva A, B različit od nule.

Osim pravca, u koordinatni sustav možemo smjestiti i krivulje drugog reda: kružnicu, elipsu, hiperbolu i parabolu. Kod njih je najvažnije prepoznati neke od oblika njihovih jednadžbi te što pojedine oznake predstavljaju.



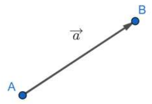
Slika 50: Jednadžbe krivulja drugog reda

Zadatak 2.14. *ŠKOLSKO NATJECANJE, 4. r. SŠ, 2020.*
Odredite koordinate sjecišta krivulja zadanih jednadžbama $x^2 + 2y^2 = 2$ *i* $2x^2 + y^2 = 2$, *te površinu konveksnog mnogokuta čiji su vrhovi te točke.*

Rješenje:
Učenik sređivanjem algebarskih izraza treba zaključiti da su navedene jednadžbe elipse te riješiti dane sustave jednadžbi. Na temelju udaljenosti njihovih sjecišta treba zaključiti da se radi o kvadratu te izračunati njegovu površinu.

2.4.10 Vektori

Uz metode analitičke geometrije usko je vezan pojam vektora. Ako na nekoj dužini $\overline{AB}$ odredimo koja će nam točka biti početna, a koja završna, dobivamo usmjerenu dužinu ili vektor. Vektor s početkom A i krajem B označava se s $\overrightarrow{AB}$ ili $\overrightarrow{a}$.

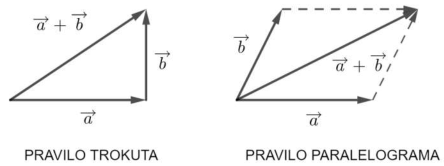


Slika 51: Vektor

Vektor predstavlja usmjerenu dužinu kojoj je jedna točka početna, a druga konačna s jednakom duljinom, smjerom i orijentacijom.
Duljina ili modul vektora $\overrightarrow{AB}$ udaljenost je točaka A i B i označava se s $|\overrightarrow{AB}|$. Smjer vektora $\overrightarrow{a}$ određen je pravcem kojemu vektor pripada. Na orijentaciju vektora pokazuje njegova strelica. Dakle, za vektor $\overrightarrow{a}$ kažemo da je orijentiran od A prema B.

Vektor kojemu se podudaraju početna i završna točka zovemo nulvektor. Označavamo ga s $\overrightarrow{0}$. Za vektor pak kažemo da je suprotan vektoru $\overrightarrow{a}$ ako ima istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju.

Zbroj vektora $\overrightarrow{a}$ i vektora $\overrightarrow{b}$ zapisujemo kao $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Kod zbrajanja vektora postoje pravila koje koristimo: pravilo trokuta i pravilo paralelograma.



Slika 52: Pravila za zbrajanje

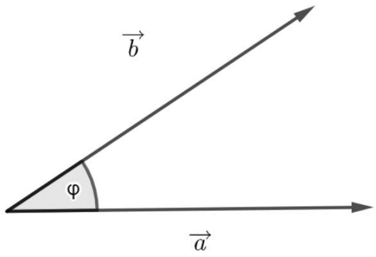
Svaki vektor možemo pomnožiti s nekim brojem n, gdje je $n \in \mathbb{R}$. Taj broj n nazivamo skalar. Vektor $n\overrightarrow{a}$ tada ima n puta veću duljinu od vektora $\overrightarrow{a}$. To nazivamo množenje vektora skalarom.
Razliku vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ definiramo kao zbroj vektora $\overrightarrow{a}$ i vektora suprotnog vektoru $\overrightarrow{b}$.

Često se kod zadataka za vektore zna naći pojam kolinearnost. Za dva vektora kažemo da su linearno zavisni ili kolinearni ako su istog su smjera. Suprotno tome, za dva vektora kažemo da su linearno nezavisni ili nekolinearni ako nemaju isti smjer. Posebno, ako imamo dva nekolinearna vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, onda je svaki vektor $\overrightarrow{c}$ linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ s realnim koeficijentima λ i μ tj.

$$\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}.$$

Bilo koja dva vektora možemo i skalarno pomnožiti. Rezultat takvog množenja je skalar koji je jednak umnošku duljina tih vektora i kosinusu kuta među tim vektorima (φ), tj.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi.$$



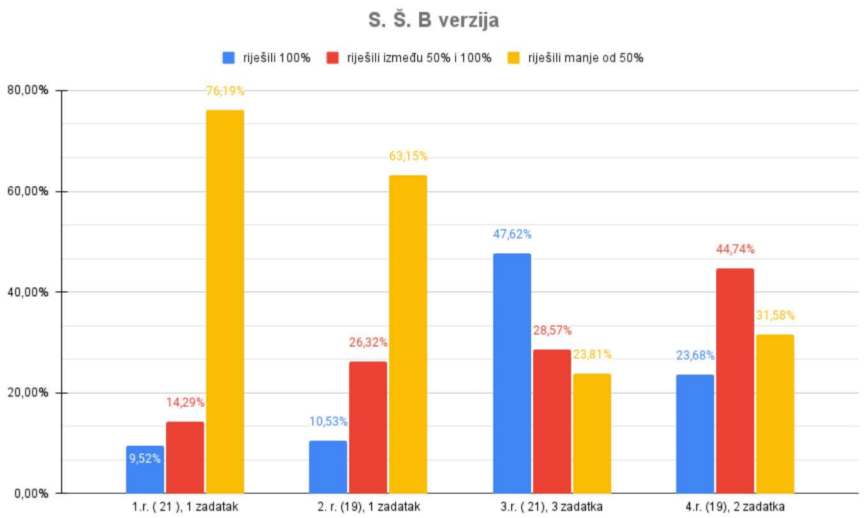
Slika 53: Skalarni produkt vektora

Zadatak 2.15. *DRŽAVNO NATJECANJE, 3. r. SŠ, 2022.*
Zadani su vektori $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{v} = 7\overrightarrow{m} - 5\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{m} - 4\overrightarrow{n}$ *i* $\overrightarrow{z} = 7\overrightarrow{m} - 2\overrightarrow{n}$, *pri čemu su* $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. *Ako su vektori* $\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{v}$, *te* $\overrightarrow{w}$ *i* $\overrightarrow{z}$ *okomiti, odredite kut između vektora* $\overrightarrow{m}$ *i* $\overrightarrow{n}$.

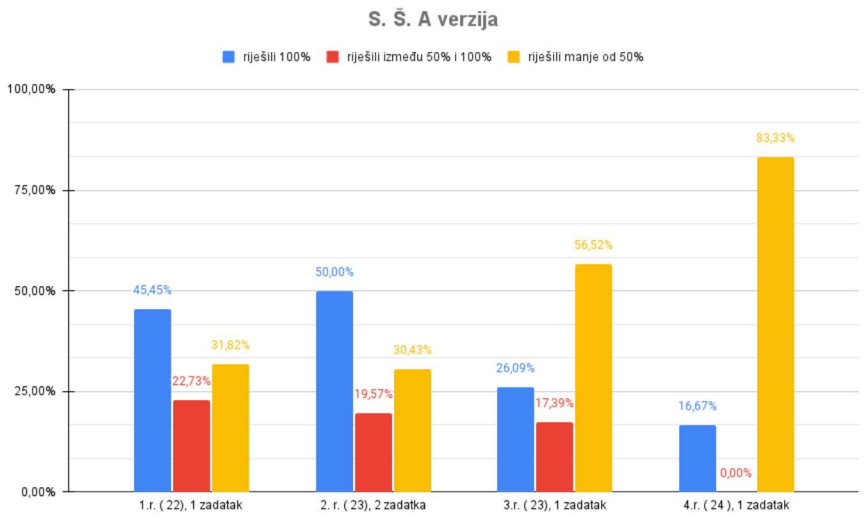
Rješenje:
Učenik prilikom rješavanja ovog zadatka treba koristiti isključivo skalarni produkt. Mora znati da ako ima okomite vektore, skalarni produkt je jednak 0 te primijeniti postupak skalarnog množenja na dobivene vektore.

3 Rezultati državnog natjecanja 2022./23.

U ovom poglavlju dajemo pregled uspješnosti učenika pri riješavanju geometrijskih zadataka na državnom natjecanju održanom od 24. do 26. travnja 2023. godine u Poreču, budući da su ti podaci dostupni na [2]. Na sljedeća dva grafa prikazan je postotak točnosti riješenja geometrijskih zadataka za srednju školu.

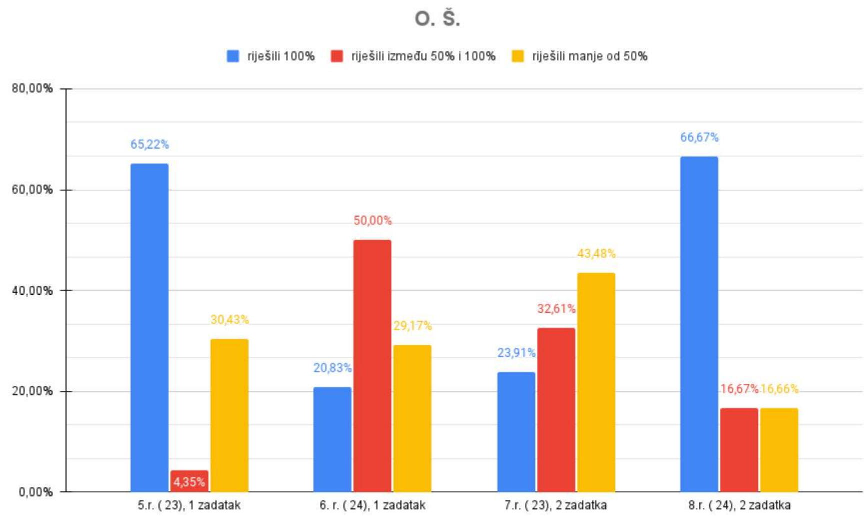


Slika 54: B verzija



Slika 55: A verzija

Na grafovima je s plavom bojom označen postotak učenika koji su imali geometrijske zadatke u potpunosti riješene, s crvenom bojom postotak učenika čija rješenja nisu bila u potpunosti točna, ali više od pola predstavljenog rješenja je točno, a s narančastom bojom postotak riješenosti geometrijskih zadataka učenika koji su imali manje od pola predstavljenog rješenja. Iz grafova se može vidjeti da učenici manje uspješno riješavaju geometrijske zadatke. Iako na natjecanja dolaze učenici koji su se istaknuli na nastavi matematike i shvaćaju definicije geometrijskih pojmova te njihova osnovna svojstva, očito je da velik dio njih ne posjeduje vještinu rješavanja geometrijskih zadataka gdje je potrebno ta svojsta samostalno prepoznati i primijeniti. To je posebno lako uočiti kod učenika 1. i 2. razreda u B verziji. Razlog tome možda leži u činjinici da učenici algebarski postupak rješavanja lakše svladavaju, odnosno iz samog teksta zadatka lakše uočavaju koje postupke je potrebno primijeniti. Kod geometrijskih zadataka moraju samostalno otkriti vezu između onoga što je zadano i onoga što se traži, a to predstavlja velik izazov pogotovo ako se učenici dobro ne pripreme. Učenici prirodoslovno matematičke gimnazije postižu nešto bolje rezultate. Jedan od razloga toga je sigurno veća satnica nastave matematike što doprinosi detaljnijoj obradi geometrijskog sadržaja. Jedna od dobrih ideja prilikom pripreme za natjecanja je upoznati učenike s ključnim riječima za određene teme kako bi lakše prepoznali vezu koju treba primijeniti u zadataku. Na primjer, ukoliko je u zadatku potrebno dokazati sukladnost odgovarajućih dužina, vrlo je izgledno da bi se u zadatku mogla primjeniti sukladnost trokuta, ukoliko su u pitanju omjeri duljina, mogla bi se primijeniti sličnost trokuta, itd... Prisutnost geometrijskih zadataka kod B verzije nešto je malo veća, što je malo začuđujuće.



Slika 56: Osnovna škola

Pogledamo li rezultate za osnovnu školu, vidljivo je da su učenici bili vrlo uspješni u rješavanju geometrijskih zadataka. Jedan od razloga je svakako i sama težina zadatka koja je prilagođena očekivanom znanju učenika, odnosno od učenika se ne očekuje da uoče i primijene manje poznata svojstva geometrijskih likova i tijela.

Literatura

[1] S. Antoliš, N. Antončić, E. Špalj, V. Volenec, Matematika 3 (2.dio), Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] Agencija za odgoj i obrazovanje, URL:https://www.azoo.hr/

[3] S. Barnaki, Repetitorij matematike osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

[4] M. Bombardelli, D. Ilišević, Elementarna geometrija, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO, Zagreb, 2007., URL: https://www.pmf.unizg.hr/images/50026392/EGskripta.pdf

[5] B. Červar, G. Erceg, I. Lekić, Osnove geometrije, skripta za istoimeni kolegij na PMF, Split, 2014., URL: https://mapmf.pmfst.unist.hr/~gorerc/OG-materijali/OG-13-14.pdf

[6] Edutorij, URL: https://edutorij.e-skole.hr/share/page/home-page

[7] A. Horvatek, Natjecanja iz matematike u RH, URL: http://antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm

[8] Matematička natjecanja, URL: https://natjecanja.math.hr/

[9] MZO, Ministarstvo znanosti i obrazovanja , Kurikulum nastavnog predmeta Matematika, URL:https://mzo.gov.hr/istaknute-teme/odgoj-i-obrazovanje/nacionalni-kurikulum/predmetni-kurikulumi/matematika/746

[10] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 2, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[11] Z. Šporer, Repetitorij matematike za srednje škole, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[12] S. Vidačić, Planimetrija na natjecanjima u osnovnoj školi, Diplomski rad, Osijek, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2018.

Sadržaj

Cilj ovog diplomskog rada je istaknuti određene geometrijske teme koje se protežu na matematičkim natjecanjima sve od 4. razreda osnovne škole pa do 4. razreda srednje škole. U radu je prikazan kratak osvrt na povijest geometrije, njenu prisutnost u Nacionalnom okvirnom kurikulumu te je dan pregled zadataka koji su se tijekom godina javljali na natjecanjima. Na samom kraju prikazana je analiza uspješnosti riješavanja geometrijskih zadataka na državnom natjecanju za osnovnu, odnosno srednju školu, održanom u školskoj godini 2022./2023.

Ključne riječi: geometrija, natjecanja, zadaci

Exercises in geometry at math competition

Summary

The goal of this master's thesis is to highlight specific geometric themes that are present in mathematical competitions from the 4th grade of elementary school to the 4th grade of high school. The thesis provides a brief overview of the history of geometry, its presence in the National Curriculum Framework, and offers an overview of problems that have appeared in competitions over the years. Finally, it presents an analysis of the success rate in solving geometric problems at the national competition for elementary and high school students held during the 2022/2023 school year.

Key words: geometry, competitions, problems

Životopis

Zovem se Iva Perić. Rođena sam 31. 3. 1997. godine u Osijeku. Živim u Punitovcima. Pohađala sam osnovnu školu "Josip Kozarac" u Josipovcu Punitovačkom te I. gimnaziju u Osijeku. Kao odlična učenica upisujem preddiplomski studij matematike i završavam ga s temom završnog rada "Primjene diferencijalnih jednadžbi prvog reda u fizici" kod mentorice Ivane Crnjac. Nakon završetka, upisujem sveučilišni diplomski nastavnički studij matematike i informatike u Osijeku.