Strukture bilinearnih formi

Rečić, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:529069

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-04**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Ivana Rečić

Strukture bilinearnih formi

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Ivana Rečić

Strukture bilinearnih formi

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod

Algebarski, geometrija na $\mathbb{R}^n$ je dirigirana sa skalarnim produktom, a moguće ju je i poopćiti pomoću bilinearnih formi i tako proučavati algebarske i geometrijske pojmove na vektorskim prostorima. Bilinearne forme se trivijalno mogu shvatiti kao linearne transformacije koje su linearne u više od jedne varijable, stoga pomažu u detaljnijem proučavanju linearnih koncepata. Bilinearne forme su usko povezane i sa kvadratnim formama koje se promatra kao homogene kvadratne polinome više varijabli.

U okviru uvodnog dijela ovog diplomskog rada najprije ćemo se prisjetiti vrlo važnih pojmova i rezultata iz (linearne) algebre te vektorskih prostora, a zatim ćemo reći nešto više o uređenim poljima, budući da se veliki dio rada bazira na njima.

U drugom poglavlju započinjemo s proučavanjem bilinearnih formi. Navest ćemo aksiome koji moraju biti zadovoljeni kako bi preslikavanje nazivali bilineranom formom, zatim primjere takvih preslikavanja te glavne vrste bilinearnih formi. Osim toga, pozabavit ćemo se i nedegeneriranim formama uz koje ćemo definirati ortogonalnu sumu i ortogonalnu bazu te već spomenutim, kvadratnim formama.

Nakon toga, pojedinačno obrađujemo glavne vrste formi, a započinjemo sa simetričnim formama. U poglavlju Simetrične forme, nakon karakterizacije ove vrste forme navest ćemo primjere provjere je li bilinearna forma simetrična. Zatim ćemo u potpoglavlju Ortogonalne baze definirati nul-formu, dokazati rezultate vezane uz ortogonalne baze i simetrične forme te pomoću pojma dijagonalizibilnosti opravdati zahtjev poglavlja, odnosno zahtjev za poljem karakterirtike različite od 2. Posljednje potpoglavlje ovoga dijela temelji se na uređenim poljima te ćemo u njemu dokazati još rezultata vezanih uz simetrične forme i definirati pozitivno te negativno definitnu simetričnu formu. Naposlijetku ćemo definirati normu te prikazati Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije baze na jednome primjeru.

Četvrto poglavlje o hermitskim formama također započinjemo s pretpostavkom da je K uređeno polje, navodimo tvrdnje ekvivalentne već dokazanim tvrdnjama za simetrične forme te i ovdje definiramo ortonormiranu bazu i pozitivno/negativno definitnu formu. U prvom potpoglavlju Spektralni teorem u hermitskom slučaju definirat ćemo adjungirani i samoadjungirani operator, svojstvenu vrijednost i svojstveni vektor te navesti primjer određivanja istih. Iskazat ćemo i rezultate vezane za svojstvene vrijednosti i operatore te iskazati i dokazati teorem iz naslova potpoglavlja. Na kraju navedenog potpoglavlja definirat ćemo pozitivno i semipozitivno preslikavanje, unitaran operator i te pojmove povezati pomoću teorema. U drugom potpoglavu dokazujemo spektralni teorem u simetričnom slučaju.

Posljednje poglavlje bavi se alternirajućim formama te u njemu definiramo pojmove hiperboličke ravnine i hiperboličkog para koje vežemo uz alternirajuće forme. Definirat ćemo i standardnu alternirajuću matricu te dokazati rezultate vezane za ovu vrstu forme.

1.1 Osnovni pojmovi

Na samome početku prisjetimo se definicije Abelove grupe, prstena i ideala te dodatnih pojmova vezanih uz njih.

Definicija 1. *Za neprazan skup G i danu binarnu operaciju $\star\colon G\times G \to G$, reći ćemo da je $(G,\star)$* ***komutativna ili Abelova grupa*** *ukoliko je zadovoljeno sljedeće:*

1) asocijativnost množenja, tj. $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, $\forall a, b, c \in G$;

2) postojanje neutralnog elementa, tj. $\exists e \in G$ *takav da je* $a \star e = e \star a = a$, $\forall a \in G$;

3) postojanje inverznog elementa, tj. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)$ *takav da je* $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$;

4) komutativnost, tj. $a \star b = b \star a$, $\forall a, b \in G$.

Definicija 2. *Za dani neprazan skup* R, *binarnu operaciju zbrajanja*

$$+ \colon R \times R \to R$$

i operaciju množenja

$$\cdot \colon R \times R \to R,$$

uređenu trojku $(R, +, \cdot)$ *nazivamo* ***prstenom*** *ukoliko vrijede sljedeća svojstva:*

a) $(R, +)$ *je Abelova grupa;*

b) $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in R$

c) $a(b + c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in R$
$(a + b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in R$;

d) jedinica $1 \in R$ *ima svojstvo da je* $1a = a$, $\forall a \in R$.

Ukoliko dodatno vrijedi da je $ab = ba$, $\forall a, b \in R$ *onda prsten* R *nazivamo komutativnim.*

Definicija 3. *Pretpostavimo li da postoji* $n \in \mathbb{N}$ *sa svojstvom* $\forall r \in R$ *je* $n \cdot r = 0$, *tada najmanji takav* n *(označimo ga s* n_0*) zovemo* ***karakteristika*** *prstena* R. *Prsten je karakteristike* 0, *ako takav* n *ne postoji.*

Definicija 4. *Preslikavanje sa prstena u prsten* $\Phi \colon R \to S$ *nazivamo* ***homomorfizam*** *prstena ukoliko vrijedi* $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ *i* $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$, $\forall a, b \in R$. *Homomorfizam* Φ *koji je bijekcija nazivamo* ***izomorfizmom***, *a ako je* $\Phi \colon R \to R$ ***automorfizmom***.

Definicija 5. *Neka je* J *aditivna podgrupa prstena* R, $a \in J$ *i* $b \in R$. J *će u prstenu* R *biti:*

- ***lijevi ideal*** *ako je* $ba \in J$,
- ***desni ideal*** *ako je* $ab \in J$.

Podgrupa J *se naziva* ***obostranim/dvostranim idealom*** *u prstenu* R *ukoliko je* J *i lijevi i desni ideal u prstenu* R.

Definicija 6. *Za ideal* $J \neq R$ *kažemo da je* ***maksimalan*** *ako u* R *ne postoji ideal* I *za koji vrijedi relacija* $J \subsetneq I \subsetneq R$.

Može se primijetiti da za ideal J u prstenu R vrijedi

$$J \neq R \Leftrightarrow 1 \notin I$$

Više o komutativnim prstenima te (maksimalnim) idealima može se pronaći u [5, stranice 57 do 81]. Definirajmo nadalje polje te vektorski prostor nad istim.

Definicija 7. *Za skup K s barem dva elementa i definiranim binarnim operacijama zbrajanja*

$$+\colon K\times K\to K, (\alpha,\beta)\mapsto(\alpha+\beta)$$

i množenja

$$\cdot\colon K\times K\to K, (\alpha,\beta)\mapsto(\alpha\cdot\beta),$$

ćemo uređenu trojku $(K,+,\cdot)$ nazivati ***poljem*** *ukoliko vrijedi sljedeće:*

i) $(K,+)$ je Abelova grupa s neutralnim elementom 0;

ii) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ je Abelova grupa s neutralnim elementom 1;

iii) distributivnost mnozežnja obzirom na operaciju zbrajanja, odnosno, $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma, \forall\alpha,\beta,\gamma\in K$.

Operacije zbrajanja i množenja iz prethodne definicije su komutativne i asocijativne binarne operacije.

Definicija 8. *Neka je V neprazan skup i K polje. Neka je zadana binarna operacija zbrajanja*

$$+\colon V\times V\to V, (\alpha,\beta)\mapsto(\alpha+\beta)$$

i operacija množenja skalarima iz polja

$$\cdot\colon K\times V\to V, (\lambda,v)\mapsto\lambda\cdot v.$$

Uređenu trojku $(V,+,\cdot)$ nazivamo ***vektorskim prostorom nad poljem*** *K ukoliko vrijede sljedeća svojstva:*

a) $(V,+)$ je Abelova grupa;

b) distributivnost množenja obzirom na zbrajanje u V, tj. $\forall\lambda\in K$, $\forall a,b\in V$ vrijedi $\lambda(a+b)=\lambda\cdot a+\lambda\cdot b$;

c) distributivnost množenja obzirom na zbrajanje u K, tj. $\forall\lambda,\xi\in K$, $\forall a\in V$ vrijedi $(\lambda+\xi)a=\lambda\cdot a+\xi\cdot a$;

d) kvaziasocijativnost, tj. $\forall\lambda,\xi\in K$, $\forall a\in V$ vrijedi $(\lambda\cdot\xi)a=\lambda(\xi\cdot a)$;

e) jedinica $1\in K$ ima svojstvo da je $1a=a$, $\forall a\in V$.

Možemo reći i da gornja Definicija 8 definira K-vektorski prostor ili K-linearni prostor. Jedan primjer $\mathbb{R}$-vektorskog prostora je skup realnih matrica reda $m\times n$ u oznaci $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ uz standardnu operaciju zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom. Isto tako je skup $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\colon x_i\in\mathbb{R}\}$ ($\mathbb{R}$-) vektorski prostor uz operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_n)+(x_1',\dots,x_n') &= (x_1+x_1',\dots,x_n+x_n'),\\ \lambda(x_1,\dots,x_n) &= (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).\end{aligned}$$

Općenito vektorske prostore možemo podijeliti na konačno te beskonačno-dimenzionalne, a to ovisi o tome koliki broj linearno nezavisnih vektora pronalazimo u prostoru. Mi se nadalje fokusiramo na konačno-dimenzionalne vektorske prostore, dok ovdje samo navodimo primjer beskonačno-dimenzionalnog vektorskog prostora. Budući da su $\forall n$ vektori $1, t, t^2, t^3, \dots, t^n$ linearno nezavisni, onda je prostor svih polinoma $\mathcal{P}$ jedan beskonačno-dimenzionalan vektorski prostor. Ako nam je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, onda vrijede sljedeća svojstva:

i) Svaka baza prostora V je konačna te broj elemenata baze označavamo s $|B|$.

ii) Dvije različite baze od V imaju jednak broj elemenata pa ćemo s $\dim(V)$ (ili preciznije $dim_K(V)$) označavat broj elemenata bilo koje baze i nazivati ga **dimenzijom** vektorskog prostora V.

iii) Potprostor W od V je također konačno-dimenzionalan te je $dim(W) \leqslant dim(V)$, pri čemu znak jednakosti ($dimW = dimV$) vrijedi $\Leftrightarrow W = V$.

Dokaz navedenih svojstava može se pronaći u [6, stranice 8 do 11]. Primjeri dimenzija nekih vektorskih prostora su $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n$ te $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n$. Pogledajmo još jednu tvrdnju vezanu za dimenziju vektorskog prostora u Propoziciji 1.

Propozicija 1. *([6, stranice 12 i 13]) Za konačno-dimenzionalne potprostore U i W prostora V vrijedi da je i potprostor $U + W$ konačno-dimenzionalan te jednakost:*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Prostor $U + W$ iz Propozicije 1 se naziva **suma potprostora**. Definirajmo još i kvocijentni prostor. Neka je V vektorski prostor, W njegov potprostor te neka je na V definirana relacija $\sim$ tako da je

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W.$$

Lako se pokaže da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Skup svih klasa ekvivalencije u skupu V u odnosu na tu relaciju ekvivalencije označavat ćemo s V/W, a za klasu ekvivalencije od $x \in V$ vrijedi

$$[x] = x + W = \{x + w : w \in W\}.$$

Skup V/W je uz dobro definirane operacije zbrajanja

$$(x + W) + (y + W) = (x + y) + W$$

i množenja skalarom iz polja K

$$\lambda(x + W) = (\lambda x) + W$$

vektorski prostor te ga nazivamo **kvocijentnim prostorom prostora V po potprostoru W** nad poljem K. Za tako definirani kvocijentni prostor vrijedi Propozicija 2.

Propozicija 2. *([6, stranica 16]) Kvocijentni prostor V/W je konačno-dimenzionalan ukoliko je W potprostor konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora V i tada vrijedi:*

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W).$$

Dodatno o vektorskim prostorima te dokaz prethodne propozicije zainteresirani čitatelj može pronaći u [6, stranice 5 do 19], a ovdje u nastavku navodimo definicije modula te operatora.

Definicija 9. *Za prsten R i $(M,+)$ Abelovu grupu definiramo M kao* ***lijevi R-modul*** *uz egzistenciju preslikavanja $R \times M \to M$, $(r,m) \mapsto rm$ koje zadovoljava:*

i) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;

ii) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$;

iii) $1m = m, \forall m \in M$,

za $r, r_1, r_2 \in R$, a $m, m_1, m_2 \in M$. Na sličan način se može definirati i ***desni R-modul****.*

Za svaki prsten R kažemo da je i lijevi i desni R-modul. Više o komutativnim prstenima i modulima može se pronaći u [7, stranice 77 do 130] i [8, stranice 83 do 173].

Definicija 10. *Svako preslikavanje $A\colon V \to W$, pri čemu su V i W vektorski prostori, nazivamo* ***operator****. Ukoliko vrijedi*

$$A(\lambda x + \alpha y) = \lambda Ax + \alpha Ay, \forall x, y \in V, \forall \lambda, \alpha \in K$$

kažemo da je A ***linearan operator****. Za V i W definirane nad istim poljem K s $L(V,W)$ označavamo skup svih linearnih operatora te na tom skupu definiramo operacije zbrajanja linearnih operatora i množenja linearnog operatora skalarom iz polja. Dakle, za linearne operatore $A, B\colon V \to W$ i skalar $\lambda \in K$ vrijedi*

$$\begin{aligned} (A+B)x &= Ax + Bx, \\ (\lambda A)x &= \lambda Ax \end{aligned}$$

$\forall x \in V$. Operatori dobiveni primjenom prethodno definiranih operacija su također linearni. Osim toga, skup $L(V,W)$ je vektorski prostor za kojega je $dim(L(V,W)) = dim(V) \cdot dim(W)$.

Detaljnije o linearnim operatorima zainteresirani čitatelj može pronaći u [6, stranice 19 do 35]. Na kraju ovoga potpoglavlja definirajmo linearni funkcional te dualni prostor.

Definicija 11. ***Linearni funkcional*** *je linearno preslikavanje $\phi\colon V \to K$, odnosno linearno preslikavanje s vektorskog prostora V u polje K nad kojim je definiran. Vektorski prostor svih takvih linearnih funkcionala nazivamo* ***dualni prostor*** *vektorskog prostora V i označavamo s V^*.*

Više o dualnim prostorima može se pronaći u [7, Stranice 39 do 43]. Kako okosnicu ovoga rada čine uređena polja, reći ćemo nešto detaljnije o toj temi u sljedećem potpoglavlju.

1.2 Uređena polja

Neka je K polje. Skup $P \subseteq K$ nazivamo **uređajem na** K ukoliko su zadovoljena sljedeća svojstva:

a) Za $x \in K$ vrijedi da je $x \in P$ ili $x = 0$ ili $-x \in P$ pri čemu se tri navedene mogućnosti međusobno isključuju

b) Za $x, y \in P$ su $x + y$ i xy elementi iz P.

Napomena 1. *Svojstvo a) nam govori kako je polje K disjunktna unija skupova $P, -P$ te $\{0\}$. Također, kažemo da je polje K uređeno podskupom P te P nazivamo **skupom pozitivnih elemenata**.*

Napomena 2. *Neka je K polje uređeno podskupom P. Kako je $1 \neq 0$ i $1 = 1^2 = (-1)^2$ onda je $1 \in P$. Zbog svojstva b) je i $1 + 1 + \ldots + 1 \in P$ pa je K polje karakteristike 0. Za $x \in P$, $x \neq 0$ vrijedi da je $xx^{-1} \in P$ pa slijedi da je $x^{-1} \in P$.*

Za dane $x, y \in K$ definiramo uređaj $x < y$ (ili $x > y$) ako je $y - x \in P$. Ako je $x < 0$, x zovemo negativnim, a $-x$ pozitivnim. Lako se može uvidjeti idući odnos:

- $x < y \quad \text{i} \quad y < z \quad \Rightarrow \quad x < z,$
- $x < y \quad \text{i} \quad z > 0 \quad \Rightarrow \quad xz < yz,$
- $x < y \quad \text{i} \quad x, y > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$

Definiramo i $x \leqslant y$ što znači da je $x < y$ ili $x = y$. Jednakost elemenata x i y možemo zaključiti i u slučaju da je $x \leqslant y$ te $y \leqslant x$.
Ako je x element uređenog polja K takav da je $x \neq 0$, onda je x^2 pozitivan jer je $x^2 = (-x^2)$ ili je $x \in P$ ili $-x \in P$. Takav zbroj kvadrata je pozitivan. Pogledajmo u nastavku dodatne tri tvrdnje vezane uz uređena polja.

Tvrdnja 1. *Produkt sume kvadrata u polju E je suma kvadrata, a dodatno za sume kvadrata $a, b \in E$, $b \neq 0$ je i $\frac{a}{b}$ suma kvadrata.*

Prvi dio Tvrdnje 1 je očigledan, a drugi se lako vidi ako promatramo $\frac{a}{b}$ kao $ab(b^{-1})^2$.

Tvrdnja 2. *Ukoliko je karakteristika polja E različita od 2 i -1 suma kvadrata u E, onda je svaki element $a \in E$ suma kvadrata.*

Prethodna tvrdnja vrijedi jer je $4a = (1 + a)^2 - (1 - a)^2$.

Tvrdnja 3. *Neka je K polje uređeno podskupom P i F potpolje od K. Tada $P \cap F$ definira uređaj na F i taj uređaj nazivamo **inducirani uređaj**.*

Definirajmo sada beskonačno velik i beskonačno mal element nad potpoljem s induciranim uređajem, arhimedsko polje te valuacijski prsten.

Definicija 12. *Neka je K uređeno polje i neka je F potpolje s induciranim uređajem. Nadalje je $|x| = x$ za $x > 0$ i $|x| = -x$ za $x < 0$. Element $\alpha \in K$ nazivat ćemo **beskonačno velikim nad F** ako je $|\alpha| \geq x$, $\forall x \in F$. S druge strane, kažemo da je α **beskonačno mali nad F** ako je $0 \leq |\alpha| < x$, $\forall x \in F$, $x \neq 0$.*

Uočimo: α beskonačno velik $\Leftrightarrow$ $\alpha - 1$ beskonačno mali.

Definicija 13. *Ako polje K nema beskonačno velikih elemenata nad F kažemo da je ono* ***arhimedsko nad*** *F. Pretpostavimo da je*

$$K \supset F_1 \supset F,$$

F_1 arhimedsko nad F te ne postoji drugo međupolje sadržano u F_1 koje je arhimedsko nad F. U tom slučaju F_1 nazivamo ***makismalno arhimedsko nad*** *F* ***u*** *K. Uvijek će postojati maksimalno arhimedsko potpolje F_1 od K nad F jer ako je F_1 arhimedsko nad F i F_2 arhimedsko nad F_1, onda je F_2 arhimedsko nad F. Za maksimalno arhimedsko polje nad samim sobom u K kažemo da je* ***maksimalno arhimedsko polje u*** *K*

Definicija 14. *Pretpostavimo da je K uređeno polje, F potpolje, a σ skup elemenata iz K koji nisu beskonačno veliki nad F. Vrijedi da je σ prsten i za proizvoljni $\alpha \in K$ imamo da je ili $\alpha \in \sigma$ ili $\alpha - 1 \in \sigma$. Tada σ zovemo* ***valuacijski prsten*** *koji sadrži F.*

Neka je s m označen ideal svih beskonačno malih elemenata $\alpha \in K$ nad F. Tada je m jedinstven maksimalan ideal od σ (jer vrijedi da $\forall s \in \sigma,\ s \notin m$ je $s^{-1} \in \sigma$) te za σ kažemo da je **valuacijski prsten dobiven uređajem na $\mathbf{K/F}$**.

Recimo još nešto o elementima uređenog polja te okarakterizirajmo potpuno uređeno polje.

Definicija 15. *Za element u uređenog polja F kažemo da je* ***gornja (donja) granica*** *skupa $S \subseteq F$ ako je $u \geq x$ $(u \leq x)$ $\forall x \in S$. Kako bi $u \in F$ bio* ***najmanja gornja (najveća donja) granica*** *od $S \subseteq F$ mora zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:*

1) *u je gornja (donja) granica za S,*

2) *ako je $v \in F$ gonja (donja) granica, tada je $v \geq u$ $(v \leq u)$.*

Definicija 16. *Za uređeno polje F kažemo da je* ***potpuno*** *ukoliko svaki skup $S \subseteq F$, $S \neq \emptyset$ s gornjom granicom u F ima i najmanju gornju granicu u F.*

Više detalja o uređenim poljima može se pronaći u [8, Chapter XI] te [3, stranice 146 i 147].

Nakon što smo ponovili sve bitne definicije i rezultate, započet ćemo s glavnim dijelom rada, odnosno s proučavanjem bilinearnih formi općenito.

2 Općenito o bilinearnim formama

Bilinearne forme najjednostavnije objašnjavamo kao linearne transformacije koje su linearne u više od jedne varijable. Zapravo ih smatramo generalizacijom skalarnog produkta koji je definiran na $\mathbb{R}^n$, tj. generalizacijom preslikavanja $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koje je za dva elemenata X i Y definirano kao $\langle X, Y\rangle = X^T Y = x_1y_1 + ... + x_ny_n$. Svojstvo skalarnog produkta koje koristimo prilikom generalizacije je bilinearnost, odnosno to da je skalarni produkt linearna funkcija sa vektorskog prostora na polje ukoliko je jedan element fiksan. Zbog svega do sada navedenog, bilinearne forme definiramo kao preslikavanja $B\colon V \times V \to K$ koja zadovoljavaju sljedeće aksiome:

A1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$

A2) $B(\alpha u, w) = \alpha B(u, w)$

A3) $B(u, v + w) = B(u, v) + (u, w)$

A4) $B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$

pri čemu je K polje, a V vektorski prostor nad istim. Skup svih bilinearnih formi na V uz pripadne operacije tvori vektorski prostor. Ako je s $\langle x, y\rangle$ definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$, onda je $B(x, y) = \langle x, y\rangle$ bilinearna forma. Isto tako, ukoliko je $V = C[a, b]$ skup svih neprekidnih funkcija na pripadnom segmentu, onda je $B(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ također jedna bilinearna forma. U Primjeru 1 navedeno je preslikavanje za koje ćemo pokazati da je bilinearna forma.

Primjer 1. *Pokažimo da je preslikavanje* $B(u, w) = B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_2$ *bilinearna forma na* $\mathbb{R}^2$.

Rješenje:
Trebamo provjeriti zadovoljava li dano preslikavanje četiri gore navedena aksioma. Neka je $v = (x_3, y_3)$.

a)

$$\begin{aligned}
B(u + v, w) &= B((x_1, y_1) + (x_3, y_3), (x_2, y_2)) = B((x_1 + x_3, y_1 + y_3), (x_2, y_2)) \\
&= (x_1 + x_3)x_2 + (y_1 + y_3)y_2 - (x_1 + x_3)y_2 - x_2(y_1 + y_3) \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3x_2 + y_3y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 \\
&= B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + B((x_3, y_3), (x_2, y_2)) = B(u, w) + B(v, w).
\end{aligned}$$

Iz gornjeg raspisa vidimo kako vrijedi aksiom A1). Provjerimo sada aksiom A2). Neka je $\alpha \in K$.

b)

$$\begin{aligned}
B(\alpha u, w) &= B(\alpha(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = B((\alpha x_1, \alpha y_1), (x_2, y_2)) = \alpha x_1x_2 + \alpha y_1y_2 - \alpha x_1y_2 - x_2\alpha y_1 \\
&= \alpha(x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1) = \alpha B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \alpha B(u, w).
\end{aligned}$$

Pokazali smo i da vrijedi aksiom A2) za $\alpha \in K$. Neka je v zadan kao i ranije te $\lambda \in K$. Trebamo provjeriti još preostala dva aksioma.

c)

$$\begin{aligned}
B(u, v+w) &= B((x_1, y_1)), (x_3, y_3) + (x_2, y_2) = B((x_1, y_1)(x_3 + x_2, y_3 + y_2)) \\
&= x_1(x_3 + x_2) + y_1(y_3 + y_2) - x_1(y_3 + y_2) - (x_3 + x_2)y_1 \\
&= x_1x_3 + y_1y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \\
&= B((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = B(u, v) + B(u, w).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
B(u, \lambda w) &= B((x_1, y_1), \lambda(x_2, y_2)) = B((x_1, y_1), (\lambda x_2, \lambda y_2)) \\
&= x_1\lambda x_2 + y_1\lambda y_2 - x_1\lambda y_2 - \lambda x_2 y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_2) \\
&= \lambda B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \lambda B(u, w).
\end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijede sva četiri aksioma, dakle, preslikavanje

$$B(u, w) = B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_2$$

je bilinearna forma.
Općenito, tri su glavne vrste bilinearnih formi koje ćemo i posebno obraditi u radu, a to su simetrične, hermitske i alternirajuće. Definirajmo najprije pojam automorfizma drugoga reda, a zatim i svaku od navedenih bilinearnih formi.

Definicija 17. ***Automorfizam drugoga reda*** *je bijektivni homomorfizam $\Phi \colon R \to R$ koji je inverzan sam sebi i označavamo ga s $\overline{\Phi}$.*

Definicija 18. *Za modul E nad komutativnim prstenom R i zadanu bilinearnu formu $g \colon E \times E \to R$ definiramo sljedeće vrste formi: Formu g nazivamo* ***Simetričnom formom*** *ukoliko je $g(x, y) = g(y, x)$, $\forall x, y \in E$,* ***hermitskom formom*** *ako R ima automorfizam drugog reda, ako vrijedi da je $g(x, y) = \overline{g(y, x)}$, $\forall x, y \in E$ te ako je forma linearna u prvoj varijabli i antilinearna u drugoj varijabli te* ***alternirajućom formom*** *ukoliko je $g(x, x) = 0$ i $g(x, y) = -g(y, x)$, $\forall x, y \in E$. Za hermitski se formu ponekad koristi i naziv skalarni produkt te oznake $g(x, y) = \langle x, y \rangle$, $g(x, y) = x \cdot y$ ili $g(x, x) = x^2$.*

Prije pojedinačne obrade navedenih vrsta bilinearnih formi iz Definicije 18 nakratko ćemo se osvrnuti na nedegeneriranu te na kvadratnu formu za koju smo već ranije napumenuli kako je usko vezana uz bilinearne forme.

2.1 Nedegenerirana forma

Definirajmo najprije jezgru forme te pomoću nje karakterizirajmo nedegeneriranu formu.

Definicija 19. ***Jezgra bilinearne forme*** *se definira kao $E^0 = E^0(g) = \{y \colon g(x, y) = 0, \forall x \in E\}$, za prouzvoljnu vrstu forme g iz Definicije 18.*

Ako je g simetrična, hermitska ili alternirajuća forma takva da je $E^0(g) = \{0\}$ kažemo da je g **nedegenerirana forma**.

Pozabavimo se sada ortogonalnom sumom te ortogonalnom bazom. Ako je E vektorski prostor sa zadanom bilinearnom formom kao u Definiciji 18 te F i F' njegovi potprostori, tada ćemo s

$$E = F \perp F' \tag{1}$$

zapisati E kao direktnu sumu od F i F' te je F okomito na F'. Zbog navedene okomitosti notacija (1) označava i da je $x \perp y$ (što bi značilo i da je $\langle x, y \rangle = 0$), $\forall x \in F$ i $\forall y \in F'$. U tom slučaju je E **ortogonalna suma** od F i F'.

Neka je E vektorski prostor i g hermitska ili simetrična forma koja je definiranana na tom vektorskom prostoru. Ako za različite indekse i, j vrijedi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, tada skup $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nazivamo **ortogonalnom bazom** obzirom na formu g. Za nedegeneriranu formu te pripadnu ortogonalnu bazu $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, $\forall i$.

Propozicija 3 ([8, Chapter XV, Proposition 1.1.]). *Pretpostavimo da je vektorski prostor E prikazan kao ortogonalna suma*

$$E = E_1 \perp E_2 \perp \dots \perp E_m.$$

te je na njemu definirana simetrična, hermitska ili alternirajuća bilinearna forma g. Tada vrijedi:

$$g \text{ je nedegenerirana na } E \Leftrightarrow g \text{ je nedegenerirana na svakom potprostoru } E_i, \text{ za } i = 1, \dots, m.$$

Ako sa E_i^0 označimo jezgru restrikcije od g na E_i, onda je jezgra od g na čitavom E dana s $E^0 = E_1^0 \perp E_2^0 \perp \dots \perp E_m^0$.

Dokaz. Neka su v,w elementi vektorskog prostora E. Zapišimo ih pomoću suma tako da je

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{m} w_i \tag{2}$$

za $v_i, w_i \in E_i$. Tada je $v \cdot w = \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot w_i$. Očito je onda da je $v \cdot w = 0$ ako je $v_i \cdot w_i = 0$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, iz čega je tvrdnja očita obzirom na definiciju jezgre bilinearne forme. □

Ranije smo, u Propoziciji 1, definirali sumu potprostora u oznaci $U + W$, pri čemu su U i W konačno-dimezionalni vektorski potprostori vektorskog prostora V. Navedena suma će biti **direktna** ako je $U \cap W = \{0\}$ te ćemo ju označavati kao $U \dotplus W$.

Neka su nam sada $E_1, E_2, \dots, E_m$ vektorski prostori nad poljem K i $g_1, g_2, \dots, g_m$ bilinearne forme definirane redom na tim vektorskim prostorima. Tada možemo definirati formu $g = g_1 \oplus g_2 \oplus \dots \oplus g_m$ na direktnoj sumi $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_m$ tako da vrijedi da za v,w elemente direktne sume E zapisane pomoću suma kao u (2) definiramo

$$g(v, w) = \sum_{i=1}^{m} g(v_i, w_i). \tag{3}$$

Iz prethodnog zapisa shvaćamo da je zapravo $E = E_1 \perp E_2 \perp \dots \perp E_m$, a posljedično i $g = g_1 \perp g_2 \perp \dots \perp g_m$.

Propozicija 4 ([8, Chapter XV, Proposition 1.2.]). *Neka je E vektorski prostor nad poljem K, g bilinearna forma na E definirana sa (3) koja je nedegenerirana te F potprostor od E. Kažemo da je forma g nedegenerirana na F ako i samo ako je $F + F^{\perp} = E$ te također ako i samo ako je g nedegenerirana na $F^{\perp}$.*

Dokaz. Vrijedi da ako je E vektorski prostor te F i $F^{\perp}$ njegovi potprostori onda je

$$dim(E) = dim(F) + dim(E/F)$$

i

$$dim(E) = dim(F^{\perp}) + dim(E/F^{\perp}).$$

Tada uz zadovoljne pretpostavke propozicije imamo

$$dim(F) + dim(F^{\perp}) = dim(E) = dim(F + F^{\perp}) + dim(F \cap F^{\perp}).$$

Stoga vrijedi da je $F + F^{\perp} = E$ ako i samo ako je $dim(F \cap F^{\perp}) = 0$ iz čega slijedi prva tvrdnja. Gornja je relacija simetrična obzirom na F i $F^{\perp}$ odakle dobivamo i drugu tvrdnju. □

Općenito, umjesto da kažemo da bilinearna forma nedegenerirana na E, možemo kraće reći da je E nedegeneriran.

2.2 Kvadratne forme

Za komutativan prsten R i njegove module E, F definiramo bez 2-torziju te kvadratno preslikavanje. Za F kažemo da je **bez 2-torzija** ako $\forall y \in F$ vrijedi $2y = 0 \Rightarrow y = 0$, pri čemu je $2 \in R$ invertibilan.
Ukoliko postoje dva preslikavanja, simetrično bilinearno preslikavanje $g\colon E \times E \to F$ i linearno preslikavanje $h\colon E \to F$, takva da $\forall x \in E$ vrijedi

$$f(x) = g(x, x) + h(x), \tag{4}$$

tada f nazivamo **(R-)kvadratnim preslikavanjem**, za $f\colon E \to F$.

Primjer 2 ([4, stranica 3, Example 2.]). *Preslikavanje $f(x, y) = x^2 + 9xy + 8y^2$ je kvadratno preslikavanje, odnosno kvadratna forma.*

Zadano preslikavanje iz Primjera 2 možemo zapisati i kao $f(x, y) = g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + h(x, y)$ pri čemu je $g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + 8y_1y_2$, a $h(x, y) = 0$. Bilinearno preslikavanje g se može još zapisati i kao $g((x, y), (x, y)) = x_1x_2 + \frac{9}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + 8y_1y_2$.

Propozicija 5 ([8, Chapter XV, Proposition 2.1.]). *Neka je F bez 2-torzija i $f\colon E \to F$ kvadratno preslikavanje kao u (4). Tada su bilinearno preslikavanje g te linearno preslikavanje h jedinstveno određeni s f. Osim toga, $\forall x, y \in E$ vrijedi $2g(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$.*

Dokaz. Primijetimo da je $f(x+y)-f(x)-f(y)$ je prema (4) jednako $g(x+y, x+y)+h(x+y)-g(x, x)-h(x)-g(y, y)-h(y) = 2g(x, y)$. Preostalo nam je za dokazati jedinstvenost. Neka je g_1 simetrično bilinearno, a h_1 linearno preslikavanje za koje je $f(x) = g_1(x, x) + h_1(x)$. Tada je $2g(x, y) = 2g_1(x, y)$, a kako je F bez 2-torzija onda je i $g(x, y) = g_1(x, y)$, $\forall x, y \in E$. Dakle, g je jedinstveno određen. Iz jednakosti (4) je $h(x) = f(x) - g(x, x)$ zbog čega je onda i h jedinstveno određen. □

Kažemo da je g bilinearno, a h linearno preslikavanje pridruženo f. Definirajmo sada jedno novo preslikavanje, homogeno kvadratno preslikavanje i jedinstvenu djeljivost.
Neka je $f\colon E \to F$ preslikavanje. Definiramo novo preslikavanje $\triangle f\colon E \times E \to F$ tako da je

$$\triangle f(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y). \tag{5}$$

Kvadratno preslikavanje f čije je pridruženo linearno preslikavanje jednako 0 nazivamo **homogenim kvadratnim preslikavanjem**.

Primjer 3. *Preslikavanje zadano u primjeru 2 je homogeno kvadratno preslikavanje, budući da vrijedi da je* $h(x, y) = 0$.

Reći ćemo da je F **jedinstveno djeljiv** s 2 ako postoji jedinstven $u \in F$ za svaki $z \in F$ i pišemo $u = \frac{1}{2}z$.

Propozicija 6 ([8, Chapter XV, Proposition 2.2.]). *Neka je zadano preslikavanje* $f\colon E \to F$ *takvo da je* $\triangle f$ *bilinearno preslikavanje definirano s (5). Nadalje, pretpostavimo da je* F *jedinstveno djeljiv s 2. Ako je* $f(2x) = 4f(x)$ *onda je* f *homogeno kvadratno preslikavanje.*

Dokaz. Prema (5) je $\triangle f(x, x) = f(x+x) - f(x) - f(x) = f(2x) - 2f(x)$, a onda je zbog pretpostavke propozicije to jednako $4f(x) - 2f(x)$, odnosno $2f(x)$, $\forall x \in E$. Iskoristimo li činjenicu da je F jedinstveno djeljiv s 2 imamo: $f(x) = \frac{1}{2} \triangle f(x, x)$, $\forall x \in E$. Kako je prema definiciji $\triangle f$ simetrično, a prema pretpostavci ove propozicije ono je i bilinearno, slijedi da je preslikavanje $\frac{1}{2} \triangle f\colon E \times E \to F$ simetrično i bilinearno. Prema tome, f je homogeno kvadratno preslikavanje. □

Kvadratno preslikavanje, odnosno, kvadratnu formu možemo definirati i na sljedeći način:

Definicija 20. *Preslikavanje* $B\colon V \to K$ *je **kvadratna forma** ukoliko vrijedi*

i) $B(\alpha u) = \alpha^2 B(u)$, $\forall \alpha \in K$,

ii) Funkcija $B(u + w) - B(u) - B(w)$ *je bilinearna forma,*

pri čemu je V *vektorski prostor nad poljem* K.

Napomena 3. *Isto kao što smo napomenuli za bilinearne forme, tako i skup svih kvadratnih formi na* V *tvori vektorski prostor. Dodatno, ukoliko u definiciji uzmemo da je* $\alpha = 0$ *imamo* $B(0) = 0$, *a za* $\alpha = -1$ *imamo* $B(-u) = B(u)$.

Više o ovako definiranim kvadratnim formama te Primjer 4 može se pronaći u [2, stranica 6 do 15].

Primjer 4. *Pokažimo da je preslikavanje* $B(f) = \int_a^b f(x)^2 dx$ *kvadratna forma na* $V = C[a, b]$.

Rješenje:
Provjeravamo zahtjev i) i zahtjev ii) iz Definicije 20.

i) $B(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f(x))^2 dx = \alpha^2 \int_a^b f(x)^2 dx = \alpha^2 B(f)$

ii)

$$
\begin{aligned}
B(f+g)-B(f)-B(g) &= \int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx - \int_a^b f(x)^2 dx - \int_a^b g(x)^2 dx \\
&= \int_a^b (f(x)^2 + 2f(x)g(x) + g(x)^2) dx - \int_a^b f(x)^2 dx - \int_a^b g(x)^2 dx \\
&= \int_a^b f(x)^2 dx + 2\int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g(x)^2 dx - \int_a^b f(x)^2 dx - \int_a^b g(x)^2 dx \\
&= 2\int_a^b f(x)g(x) dx.
\end{aligned}
$$

Desna strana zahtjeva ii) je svakako bilinearna forma jer na očigled zadovoljava aksiome A1)-A4). Kako su zadovoljeni zahtjevi i) i ii) iz Definicije 20 dokazano je kako je zadano preslikavanje $B(f)$ kvadratna forma.

Sada ćemo pojedinačno obraditi vrste formi iz Definicije 18, pri čemu ćemo započeti sa simetričnim formama.

3 Simetrične forme

Neka nam je kroz ovo poglavlje K polje karakteristike različite od 2. Ranije smo definirali simetričnu formu kao bilinearnu formu g za koju vrijedi da je $g(x, y) = g(y, x)$. Pogledajmo naprije sljedeći primjer.

Primjer 5 ([4, examples]). *Provjerimo je li preslikavanje* $g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 4y_1y_2$ *bilinearna forma i ukoliko jest provjerimo je li simetrična.*

Rješenje:
Prisjetimo se, da bi preslikavanje bilo bilinearna forma mora zadovoljavati četiri ranije navedena aksioma. Dokažimo najprije aksiom A1).
U našem primjeru je $u = (x_1, y_1)$, a $w = (x_2, y_2)$. Treba provjeriti je li

$$g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w) \tag{6}$$

pri čemu ćemo označiti $v = (z_1, z_2)$. Imamo

$$\begin{aligned} g(u + v, w) &= g((x_1, y_1) + (z_1, z_2), (x_2, y_2)) = g((x_1 + z_1, y_1 + z_2), (x_2, y_2)) \\ &= (x_1 + z_1)x_2 + 2(x_1 + z_1)y_2 + 3(y_1 + z_2)x_2 + 4(y_1 + z_2)y_2 \\ &= x_1x_2 + z_1x_2 + 2x_1y_2 + 2z_1y_2 + 3y_1x_2 + 3z_2x_2 + 4y_1y_2 + 4z_2y_2. \end{aligned}$$

Raspišimo sada desnu stranu jednakosti (6).

$$\begin{aligned} g(u, w) + g(v, w) &= g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + g((z_1, z_2), (x_2, y_2)) \\ &= x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 4y_1y_2 + z_1x_2 + 2z_1y_2 + 3z_2x_2 + 4z_2y_2. \end{aligned}$$

Usporedimo li gornja dva raspisa vidimo da su oni međusobno jednaki, tj. vrijedi aksiom A1). Na analogan način se pokaže da vrijedi i aksiom A3) tj. da je $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$. Provjerimo vrijedi li aksiom A2) tj. je li

$$g(\alpha u, w) = \alpha g(u, w).$$

Raspisom dobijemo

$$\begin{aligned} g(\alpha u, w) &= g(\alpha(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g((\alpha x_1, \alpha y_1), (x_2, y_2)) \\ &= \alpha x_1x_2 + 2\alpha x_1y_2 + 3\alpha y_1x_2 + 4\alpha y_1y_2 = \alpha(x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 4y_1y_2) \\ &= \alpha g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \alpha g(u, w). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi i aksiom A3), a analogno se dokaže i aksiom A4), tj. da vrijedi $g(u, \lambda w) = \lambda g(u, w)$. Budući da vrijede sva četiri aksioma, pokazali smo da je zadano preslikavanje g bilinearna forma. Potrebno je još provjeriti je li ta forma simetrična tj. vrijedi li uvjet $g(u, w) = g(w, u)$. Raspišemo li lijevu

$$g(u, w) = g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 4y_1y_2$$

i desnu stranu uvjeta

$$g(w, u) = g((x_2, y_2), (x_1, y_1)) = x_2x_1 + 2x_2y_1 + 3y_2x_1 + 4y_2y_1 = x_1x_2 + 2x_2y_1 + 3y_2x_1 + 4y_1y_2,$$

te ih usporedimo, vidimo da ne vrijedi jednakost. Dakle, g nije simetrična bilinearna forma.

Primjer 6. *Pokažimo da je preslikavanje* $B(f,g) = 2\int_a^b f(x)g(x)dx$ *simetrično.*

Rješenje:
U Primjeru 4 i u poglavlju Općenito o bilinearnim formama zaključili smo da je izraz $\int_a^b f(x)g(x)dx$ bilinearna forma. Množenje sa 2 to neće promijeniti pa je potrebno još provjeriti vrijedi li $B(f,g) = B(g,f)$. Iz svojstava množenja funkcija i integrala imamo

$$B(g,f) = 2\int_a^b g(x)f(x)dx = 2\int_a^b f(x)g(x)dx = B(f,g).$$

Dakle, uvjet je zadovoljen te je ovako definirano preslikavanje simetrična bilinearna forma.
Osvrnimo se se nakratno na ortogonalne baze te proučimo važne rezultate simetričnih formi obzirom na ortogonalne baze.

3.1 Ortogonalne baze

Reći ćemo da je simetrična forma g, definirana na vektorskom prostoru E nad poljem K, **nul-forma** ukoliko je $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall x, y \in E$. Odnosno, zbog zahtjeva na karakteristiku polja, $x^2 = 0$, $\forall x \in E$ povlači da je g nul-forma. Pretpostavimo sada da je $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza od E te g bilinearna forma na E. Matrica pridružena formi g u odnosu na bazu B je matrica $[g]_B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ čiji (i,j)-ti elemnt je vrijednost $g(v_i, v_j)$. Pripadna matrica nul-forme je nul-matrica.

Teorem 1 ([8, Chapter XV, Theorem 3.1.]). *Neka je E konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K, $E \neq 0$ i neka je g simetrična forma definirana na tom vektorskom prostoru. Tada postoji ortogonalna baza.*

Dokaz. Označimo sa n dimenziju vektorskog prostora E, pretpostavimo najprije da je g nedegenerirana forma i provedimo dokaz matematičkom indukcijom po n. Za bazu indukcije, $n = 1$, tvrdnja je očigledna. Pretpostavimo sada da je $n > 1$ i neka je $v_1 \in E$ takav da je $v_1^2 \neq 0$. Pomoću v_1 generiramo potprostor F tako da je F=$[\{v_1\}]$. Slijedi da je i F nedegeneriran te je prema Propoziciji 4 $E = F + F^{\perp}$, pri čemu je $dimF^{\perp} = n - 1$. Dodatno, pretpostavimo da je $\{v_2, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza za $F^{\perp}$ pa su elementi skupa $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u parovima ortogonalni te je navedeni skup linearno nezavisan jer:

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$$

te ako napravimo skalarni produkt s v_i dobijemo $a_iv_i^2 = 0$ što implicira $a_i = 0$, $\forall a_i \in K$ i $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Prvotno nam je g bila nedegeneriran forma, a neka je sada degenerirana te je E_0 njena jezgra. Sada E možemo zapisati u obliku direktne sume tj., $E = E_0 \oplus W$, pri čemu je W neki potprostor. Uzmemo li restrikciju od g na W, g je ponovno nedegenerirana (u suprotnom bi imali $w \neq 0 \in W$ koji se nalazi u jezgri). Ortogonalna baza od E će biti skup $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$, pri čemu je $\{v_1, \ldots, v_r\}$ baza od E_0, a $\{w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ ortogonalna baza od W. □

Korolar 1 ([8, Chapter XV, Corollary 3.2.]). *Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza od E i neka su zadovoljene sljedeće pretpostavke*

$$v_i^2 \neq 0, \forall i \leqslant r$$

i

$$v_i^2 = 0, \forall i > r.$$

Tada je $E^0 = \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$.

Dokaz. Kako već znamo da se u jezgri nalaze samo nul-elementi, uz zadovoljene navedene pretpostavke korolara, tvrdnja direktno slijedi. □

Neka je kao i u prethodnom korolaru $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza od E te neka je $X = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$, pri čemu je $x_i \in K$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Za $a_i = \langle v_i, v_i \rangle$ kvadriranjem imamo $X^2 = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$. Za ovakav prikaz forme kažemo da je **dijagonaliziran**.

Tvrdnja 4. *Bilinearna forma g je* ***dijagonalizibilna*** *uz egzistenciju baze B od E takvu da je matrica* $[g]_B$ *dijagonalna matrica.*

Primjer 7. *Neka nam je zadano preslikavanje* $g((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_2$ *na* $\mathbb{R}^2$ *te baza tog prostora* $B = \{v_1, v_2\} = \{(2, 1), (1, 4)\}$. *Je li g dijagonalizibilna bilinearna forma?*

Rješenje:

U Primjeru 1 smo već pokazali kako je dano preslikavanje g bilinearna forma. Preostaje još provjeriti je li ona dijagonalizibilna. Uz zadanu bazu B pronađimo najprije matricu $M = [g]_B$ pridruženu ovoj formi. Računamo elemete matrice M pa vrijedi

$$\begin{aligned}
g(v_1, v_1) &= g((2, 1), (2, 1))) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \\
g(v_1, v_2) &= g((2, 1), (1, 4))) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -3 \\
g(v_2, v_1) &= g((1, 4), (2, 1))) = g((2, 1), (1, 4))) = -3 \\
g(v_2, v_2) &= g((1, 4), (1, 4))) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 9.
\end{aligned}$$

Dakle, matrica pridružena bilinearnoj formi g je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

i vidimo da ona nije dijagonalna matrica. Obzirom na Tvrdnju 4 mogli bismo zaključiti da u odnosu na ovdje danu bazu B, bilinearna forma g nije dijagonalizibilna.
Pogledajmo sada sljedeći teorem koji dodatno karakterizira dijagonalizibilnu bilinearnu formu.

Teorem 2 ([2, Stranica 4, Theorem]). *Neka je E vektorski prostor nad poljem K, pri čemu je karakteristika polja različita od 2. Bilinearna forma je dijagonalizibilna ako i samo ako je simetrična.*

Za simetričnu bilinearnu formu pridužena matrica će biti simetrična matrica, odnosno vrijedit će da je $[g]_B = [g]_B^T$. Primijetimo da je matrica M pridružena bilinearnoj formi g u Primjeru 7 simetrična. Odnosno, $M = M^T$ pa je onda i g simetrična bilinearna forma, pa nam Teorem 2 daje da je g dijagonalizibilna.

Napomena 4. *Pretpostavka koju koristimo u cijelom poglavlju, a posebno u teoremu 2 da je polje K karakteristike različite od 2 je nužna. Primjerice, ukoliko je K polje s dva elementa i g bilinearna forma kojoj je pridružena matrica*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onda je g simetrična, ali nije dijagonalizibilna. Eksplicitno, ako je $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ onda je

$$Q^T M Q = \begin{bmatrix} 0 & ad+bc \\ ad+bc & 0 \end{bmatrix}$$

pa bi jedina dijagonalizacija od g bila nul-matrica što je nemoguće budući da g nije nul-forma.

Dokaz teorema 2 te više o ovoj temi se može pronaći u [2, Stranica 3 do 5].

3.2 Simetrične forme nad uređenim poljem

U uvodnome dijelu rada rekli smo nešto više o uređenim poljima pa sada pogledajmo kakve nam rezultate o simetričnim formama nosi pretpostavka da je ta forma definirana na vektorskom prostoru nad uređenim poljem. Najprije dokažimo Sylvestrerov teorem.

Teorem 3 (Sylvester, vidjeti [8, Theorem 4.1.]). *Neka je E konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad uređenim poljem K s pripadnom nedegeneriranom formom g i ortogonalnom bazom $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Tada postoji cijeli broj $r \geqslant 0$ takav da je među n elemenata $v_1^2, \ldots, v_n^2$ točno r njih > 0 i točno $n-r$ njih < 0.*

Dokaz. Neka nam je $a_i = v_i^2$ za $i \in \{1, \ldots, n\}$ i pretpostavimo da je $a_1, \ldots, a_r > 0$ te $a_{r+1}, \ldots, a_n < 0$. Nadalje, neka je $\{w_1, \ldots, w_n\}$ neka druga ortogonalna baza, pri čemu kvadrate elemenata označavamo sa b_i. Dakle, $b_i = w_i^2$ i pretpostavljamo da je $b_1, \ldots, b_s > 0$ te $b_{s+1}, \ldots, b_n < 0$. Sada trebamo dokazati da je $r = s$. Međutim, daljnji dokaz možemo provesti i tako da pokažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_r, w_{s+1}, \ldots, w_n$ linearno nezavisni. Pretpostavimo da je

$$x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r + y_{s+1} w_{s+1} + \ldots + y_n w_n = 0.$$

Prebacimo li vektore w_i s pripadnim y-ima na desnu stranu dobijemo

$$x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r = -y_{s+1} w_{s+1} - \ldots - y_n w_n,$$

a onda kvadriranjem imamo

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 = b_{s+1} y_{s+1}^2 + \ldots + b_n y_n^2.$$

Vidimo da je sada lijeva strana $\geqslant 0$, a desna $\leqslant 0$ iz čega slijedi da su obje strane jednake 0 te $x_i = y_i = 0$, $\forall i$, što implicira nezavisnost vektora koju smo i htjeli dokazati. Iz toga dobijemo da je $r + n - s \leqslant n$, odnosno $r \leqslant s$ i zbog simetrije $r = s$. □

Korolar 2 ([8, Chapter XV, Corollary 4.2.]). *Pretpostavimo da je E vektorski prostor nad poljem K te je svaki pozitivni element polja K kvadrat. Za jedinstveno određeni r postojat će ortogonalna baza $\{v_1, \ldots, v_n\}$ od E čiji elementi zadovoljavaju $v_i^2 = 1$, za $i \leqslant r$ te $v_i^2 = -1$, za $i > r$.*

Bazu sa navedenim svojstvom nazivamo **ortonormiranom bazom**. Ako su $(x_1, \dots, x_n)$ komponente vektora $X \in E$ obzirom na takvu bazu onda je $X^2 = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2$. Ukoliko je $X^2 \geq 0$ i g simetrična forma na E, onda je g **pozitivno definitna** $\forall X \in E$, $X \neq 0$. Obzirom na Teorem 3 kažemo da je g simetrična ako i samo ako je $r = n$. U suprotnom, kada je $X^2 < 0$, $\forall X \in E$, $X \neq 0$ simetrična forma g je **negativno definitna**.

Korolar 3 ([8, Chapter XV, Corollary 4.3.]). *Neka za simetričnu formu g na $E = E^+ \perp E^-$ vrijedi da je pozitivno definitna na E^+, a negativno definirna na E^-. Za svaku takvu dekompoziciju dimenzija od E^+ (ili E^-) ostaje ista.*

Neka je sada g pozitivno definitna forma na E i svaki pozitivan element polja K kvadrat.

Definicija 21. *Norma elementa $v \in E$ je $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ i za $v \neq 0$ je ona pozitivna.*

Za ovako definiranu normu i $\forall v, w \in E$ vrijedi Schwarzova nejednakost tj.,

$$|v \cdot w| \leqslant |v||w|. \tag{7}$$

Dokaz nejednakosti (7) može se provesti pomoću proširenja po bilinearnosti

$$0 \leqslant (av \pm bw)^2 = (av \pm bw) \cdot (av \pm bw)$$

pri čemu je $a = |w|$ i $b = |v|$. Dobije se

$$\mp 2abv \cdot w \leqslant 2|v|^2 \cdot |w|^2. \tag{8}$$

Ukoliko je $|v| = 0$ ili $|w| = 0$ onda imamo trivijalnu nejednakost. Ukoliko su $|v| \neq 0$ i $|w| \neq 0$ onda nejednakost (8) podijelimo s $|v||w|$ i dobijemo traženu nejednakost (7) koja onda vrijedi za sve $v, w \in E$.
Ako nam je dana pozitivno definitna forma tada ćemo pomoću gore definirane norme lako doći do ortonormirane baze. Standardna procedura je da postupamo induktivno s proizvoljnom bazom $\{v_1, \dots, v_n\}$. Neka je $v_1' = \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1$ i tada je v_1 norme 1. Neka je $w_2 = v_2 - \langle v_2 \cdot v_1' \rangle v_1'$ i $v_2' = \frac{1}{|w_2|} \cdot w_2$. Induktivno dobivamo

$$w_k = v_k - \langle v_k v_1' \rangle v_1' - \dots - \langle v_k v_{k-1}' \rangle v_{k-1}'$$

i

$$v_k' = \frac{1}{|w_k|} \cdot w_k.$$

U tom slučaju je $\{v_1', \dots, v_n'\}$ ortonormirana baza za E. Prethodno opisane korake koji su doveli do ortonormirane baze zovemo **Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije**. Prikažimo na jednostavnom primjeru navedeni postupak.

Primjer 8. *Neka je $S = \{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ takav da je $v_1 = (1, 0, 2)$ i $v_2 = (0, 3, 0)$. Ukoliko je S ortogonalna baza ovog vektorskog prostora, odredimo ortonormiranu bazu Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije.*

Rješenje:

Skup S je linearno nezavisan jer iz

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 3, 0) = (\lambda_1, 0, 2\lambda_1) + (0, 3\lambda_2, 0) = (\lambda_1, 3\lambda_2, 2\lambda_1) = (0, 0, 0)$$

slijedi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Isto tako vrijedi da je $v_1 \perp v_2$ jer je

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Dakle, vektori iz S su također i ortogonalni pa je S ortogonalna baza od $\mathbb{R}^3$. Preostaje nam još odrediti ortonormiranu bazu. Najprije normirajmo v_1 tj. imamo

$$v_1' = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{|(1,0,2)|}(1,0,2) = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}(1,0,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2).$$

Potrebno je još odrediti $v_2' = \frac{1}{|w_2|} w_2$, pri čemu je

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \langle v_2, v_1' \rangle v_1' = (0,3,0) - \left\langle (0,3,0), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= (0,3,0) - 0 = (0,3,0). \end{aligned}$$

Tada je $|w_2| = 3$ pa je $v_2' = (0,1,0)$. Ortonormirana baza je $S' = \{v_1', v_2'\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), (0,1,0) \right\}$.

Nakon proučavanja simetričnih formi, fokus rada prebacujemo na hermitske forme te spektralne teoreme.

4 Hermitske forme i spektralni teoremi

Pretpostavimo li da je $K \subseteq \mathbb{R}$ uređeno polje, onda će ono imati automorfizam drugog reda. Pozabavimo se sada hermitskom formom definiranom na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru E nad poljem K, tj. preslikavanjem $g\colon E \times E \to K$ koje ćemo označiti kao

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

a ono je K-linearno u prvoj i K-antilinearno u drugoj varijabli i vrijedi $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in E$. Kako je $\langle x, x \rangle \in K$, $\forall x \in E$ tvrdnje navedene u poglavlju 2 poslužit će i za hermitski slučaj. Iskažimo sada te tvrdnje.

Teorem 4 ([8, Chapter XV, Theorem 5.1.]). *Ako je E konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $K \subseteq \mathbb{R}$ i g hermitska forma, onda postoji ortogonalna baza. Ako je navedena forma nedegenerirana, onda postoji broj $r \geqslant 0$ sa svojstvom da ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza tada je točno r od n elemenata među $\langle v_1, v_1 \rangle, \ldots, \langle v_n, v_n \rangle$ veće od 0, dok su preostali elementi manji od 0.*

Ako za elemente ortogonalne baze $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vrijedi

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1$$

ili

$$\langle v_i, v_i \rangle = -1,$$

$\forall i \in 1, \ldots, n$ tada tu bazu nazivamo **ortonormiranom**.

Korolar 4 ([8, Chapter XV, Colorally 5.2.]). *Ako je forma nedegenerirana i svaki pozitivan element polja kvadrat, tada postoji otogonalna baza.*

Ako za hermitsku formu vrijedi nejednakost

$$\langle x, x \rangle > 0, \forall x \in E$$

kažemo da je ona **pozitivno definitna**, a ukoliko vrijedni suprotna nejednakost, tj.

$$\langle x, x \rangle < 0, \forall x \in E, x \neq 0,$$

negativno definitna.

Korolar 5 ([8, Chapter XV, Corollary 5.3.]). *Neka za hermitsku formu g na $E = E^+ \perp E^-$ vrijedi da je pozitivno definitna na E^+, a negativno definirna na E^-. Za svaku takvu dekompoziciju dimenzija od E^+ (ili E^-) ostaje ista.*

Napomena 5. *Dokazi do sada iskazanih tvrdnji za hermitske forme ekvivalentni su dokazima tvrdnji za simetrični slučaj.*

Napomena 6. *U uvodnom dijelu definirali smo vektorski prostor V nad poljem K te smo napomenuli kako se takav prostor može nazivati i K-linearni prostorom. U okviru toga možemo reći i da je prelikavanje $T\colon V \to W$* ***K-linearno*** *ako vrijedi* *i) T je homomorfizam grupa, tj. $T(x+y) = T(x) + T(y)$*

ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

$\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in K$, pri čemu su V i W K-vektorski prostori.

Za K-linearno preslikavanje $A\colon E \to E$ vrijedi polarizacijski identitet, tj.,

$$\langle A(x+y), (x+y)\rangle - \langle A(x-y), (x-y)\rangle = 2[\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle].$$

Ukoliko je $\langle Ax, x\rangle = 0$, $\forall x \in E$ i E vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, zamjenom x sa ix dobijemo

$$\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = 0,$$
$$i\langle Ax, y\rangle - i\langle Ay, x\rangle = 0.$$

Može se zaključiti da ako je $\langle Ax, x\rangle = 0$, $\forall x \in E$ onda je $A = 0$ i radi se o jedinoj tvrdnji koja nema analogon u simetričnom slučaju.
Pretpostavimo li da je hermitska forma pozitivno definitna te da su svi pozitivni elementi polja K kvadrati, onda i ovdje vrijedi Schwarzova nejednakost, tj., vrijedi $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.
U hermitskom slučaju normu definiramo kao $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ te se pomoću nje može doći do ortonormirane baze Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije.

4.1 Spektralni teorem u hermitskom slučaju

Neka nam je u ovome potpoglavlju E vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ dimenzije barem 1 sa zadanom pozitivno definitnom hermitskom formom.
Neka je $A\colon E \to E$ $\mathbb{C}$-linearno preslikavanje. Fiksiramo li $y \in E$, preslikavanje $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ je linearan funkcional pa postoji jedinstven $y^* \in E$ takav da je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, $\forall x \in E$. **Adjungirani operator** od A definiramo kao preslikavanje $A^*\colon E \to E$ takvo da je $A^*y = y^*$. Tako definirano preslikavanje je očito linearan operator.
Neka su A i B linearni operatori s E u E. Tada vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}(A+B)^* &= A^* + B^*,\\ A^{**} &= A,\\ (\alpha A)^* &= \overline{\alpha} A^*,\\ (AB)^* &= B^* A^*.\end{aligned}$$

Kažemo da je linearni operator A hermitski ako vrijedi

$$A^* = A.$$

Hermitski operator također nazivamo i **samoadjungirani operator**.

Propozicija 7 ([8, Chapter XV., Proposition 6.1.])**.** *Za linearno preslikavanje $A\colon E \to E$ vrijedi:*

$$A \text{ je hermitski operator} \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in E.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $A\colon E \to E$ hermitski operator. Tada je

$$\overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\langle x, Ax\rangle} = \langle Ax, x\rangle$$

pa je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo sada da je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$. U tom slučaju vrijede sljedeće jednakosti

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^* x, x\rangle. \tag{9}$$

Zbog jednakost (9) vrijedi i $\langle (A - A^*)x, x\rangle = 0$, $\forall x \in E$ i u konačnici $A = A^*$. □

Definirajmo sada svojstveni vektor i svojstvenu vrijednost te iskažimo dvije tvrdnje vezane uz njih.

Definicija 22. ***Svojstveni vektor*** *linearnog operatora $A\colon E \to E$ je element $\xi \in E$, $\xi \neq 0$ za kojeg postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $A\xi = \lambda\xi$. Element λ nazivamo* ***svojstvenom vrijednošću*** *operatora A koja pripada svojstvenom vektoru ξ, za ξ.*

Primjer 9 ([9, Primjer 2])**.** *Za dani linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ te pripadnu matricu*

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 2 \\ -7 & -6 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

potrebno je odrediti svojstvene vrijednosti te pripadne svojstvene vektore za matrice M.

Rješenje:

Za određivanje svojstvenih vrijednosti λ_1, λ_2 potrebno je riješiti jednadzbu $det(\lambda I - M) = 0$. Dobivena rješenja su $\lambda_1 = -8$ i $\lambda_2 = 8$ te sada određujemo svojstvene vektore pridružene tim svojstvenim vrijednostima. Za prvu stvojstvenu vrijednost dobije se sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} -18v_1 - 4v_2 + 2v_3 &= 0 \\ 7v_1 - 2v_2 - 7v_3 &= 0 \\ -4v_1 - 8v_2 - 12v_3 &= 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje vektor $(v_1, v_2, v_3) = (\frac{1}{2}v_3, -\frac{7}{4}v_3, v_3)$. Dakle, svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -8$ je $\vec{v}_1 = v_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$, za $v_3 \neq 0$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 8$ dobijemo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} -2v_1 - 4v_2 + 2v_3 &= 0 \\ 7v_1 + 14v_2 - 7v_3 &= 0 \\ -4v_1 - 8v_2 + 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

čijim rješavanjem dođemo do vektora $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2v_2 + v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, za $v_2, v_3 \in \mathbb{R}$.

Povežimo sada pojmove svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora s hermitskim operatorom.

Propozicija 8 ([8, Chapter XV., Proposition 6.2.]). *Sve svojstvene vrijednosti hermitskog operatora pridružene ne-nul svojstvenom vektoru su realne. Neka su ξ i ξ' ne-nul svojstveni vektori s pripadnim svojstvenim vrijednostima λ i λ'. Vrijedi:*

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \xi \perp \xi'$$

Dokaz. Za svojstvenu vrijednost λ operatora A pridruženu svojstvenom vektoru $\xi \neq 0$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\lambda\langle \xi, \xi\rangle = \langle \lambda\xi, \xi\rangle = \langle A\xi, \xi\rangle = \langle \xi, A^*\xi\rangle = \langle \xi, A\xi\rangle = \langle \xi, \lambda\xi\rangle = \overline{\lambda}\langle \xi, \xi\rangle,$$

a kako smo pretpostavili da je ξ ne-nul, onda je $\lambda = \overline{\lambda}$ što znači da je $\lambda \in \mathbb{R}$. Nadalje, pretpostavimo da su ξ, ξ' i λ, λ' kao iz iskaza propozicije. Tada vrijedi

$$\langle A\xi, \xi'\rangle = \lambda\langle \xi, \xi'\rangle = \langle \xi, A\xi'\rangle = \lambda'\langle \xi, \xi'\rangle,$$

a onda slijedi i da je $\langle \xi, \xi'\rangle = 0$. □

Lema 1 ([8, Chapter XV., Lema 6.3.]). *Postoji barem jedan svojstveni vektor $\xi \neq 0$ linearnog preslikavanja $A\colon E \to E$, pri čemu je dimenzija od E barem 1.*

Iskažimo i dokažimo sada teorem čiji se naziv nalazi u naslovu ovog potpoglavlja.

Teorem 5 (Spektralni teorem, hermitski slučaj, [8, Chapter XV., Theorem 6.4.]). *Za $E \neq 0$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ na kojem je definirana pozitivno definitna hermitska forma postoji ortogonalna baza sastavljena od svojstvenih vektora hermitskog linearnog operatora $A\colon E \to E$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je ξ_1 svojstveni vektor, λ_1 pripadna svojstvena vrijednost te E_1 potprostor generiran navedenim svojstvenim vektorom. Tada vrijedi:

$$\langle AE_1^{\perp}, \xi_1\rangle = \langle E_1^{\perp}, A\xi_1\rangle = \langle E_1^{\perp}, \lambda_1\xi_1\rangle = \lambda_1\langle E_1^{\perp}, \xi_1\rangle = 0,$$

iz čega zaključujemo da je $A\colon E_1^{\perp} \to E_1^{\perp}$. Iz svega navedenog slijedi da je $AE_1^{\perp}$ okomit s ξ_1. Kako je $\xi_1 \neq 0$ onda je $\langle \xi_1, \xi_1\rangle > 0$ i kako pretpostavljamo da imamo hermitsku formu koja je nedegenerirana vrijedi

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}.$$

Vrijedi da je za $\dim E > 1$ restrikcija forme na $E_1^{\perp}$ pozitivno definitna, a iz Propozicije 7 da je restrikcija od A na $E_1^{\perp}$ hermitska, zbog čega dokaz možemo privesti kraju pomoću matematičke indukcije. □

Korolar 6 ([8, Chapter XV., Corollary 6.5.]). *Neka nam vrijede pretpostavke Teorema 5. Tada postoji ortonormirana baza sastavljena od svojstvenih vrektora od A.*

Dokaz. Ortonormiranu bazu dobijemo tako da svaki vektor ortogonalne baze iz Teorema 5 podijelimo s normom tog vektora. □

Korolar 7 ([8, Chapter XV., Corollary 6.6.]). *Neka su na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru E nad poljem $\mathbb{C}$ definirane dvije različite hermitske forme f i g, pri čemu je f i pozitivno definitna. Tada postoji baza od E koja je ortogonalna i u odnosu na f i u odnosu na g.*

Dokaz. Neka je f je pozitivno definitna hermitska forma definirana na E i $f(x, y) = \langle x, y \rangle$. Zbog pozitivne definitnosti je ona i nesingularna, a onda zbog toga postoji jedinstveno hermitsko linearno preslikavanje $A\colon E \to E$. Bazu za E sastavljenu od svojstvenih vektora od A pronalazimo primjenom Teorema 5 i neka nam je s $\{v_1, \dots, v_n\}$ označena ta baza. Ako pretpostavimo da je λ_i svojstvena vrijednost takva da je $Av_i = \lambda_i v_i$, onda vrijedi

$$g(v_i, v_j) = \langle Av_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle$$

čime je je tvrdnja dokazana. □

Definirajmo sada semipozitivno i pozitivno definitno preslikavanje.
Linearno preslikavanje $P\colon E \to E$ nazivamo **semipozitivnim** ako je ono hermitsko preslikavanje i $\forall x \in E$ vrijedi

$$\langle Px, x \rangle \geqslant 0.$$

Ukoliko vrijedi stroga nejednakost $\forall x \in E$, $x \neq 0$, onda P nazivamo **pozitivno definitno** preslikavanje.

Dokažimo sada dvije tvrdnje vezane uz prethodno definirane pojmove semipozitivnog i pozitivno definitnog preslikavanja.

Propozicija 9 ([8, Chapter XV., Proposition 6.8.])**.** *Ukoliko je P semipozitivno, onda ono ima jedinstven kvadratni korijen $B\colon E \to E$, odnosno postoji jedinstveno semipozitivno linearno preslikavanje B takvo da je $B^2 = P$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je P i pozitivno definitno pa će spektralni teorem (teorem 5) implicirati postojanje baze od E sastavljene od svojstvenih vektora, pri čemu pripadne svojstvene vrijednosti moraju biti veće od 0. Kako je linearno preslikavanje dovoljno definirati na bazi vektorskog prostora E, definiramo linearan operator B koji svaki vektor baze preslikava u njegov umnožak kvadratnim korijenom odgovarajuće svojstvene vrijednosti. Tako definiran linearan operator B je semipozitivan te vrijedi $B^2 = P$. Moramo još dokazati jedinstvenost takvog preslikavanja. Iz zahtjeva $B^2 = P$ vidimo da B i P komutiraju pa slijedi da ako je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza sastavljena od svojstvenih vektora od P tada svaki vektor v_i je ujedno i svojstveni vektor od B. Iz jedinstvenosti pozitivnog drugog korijena slijedi da je linearan operator B definiran upravo na ranije navedeni način. □

Prisjetimo se sada unitarnog preslikavanja te iskažimo tvrdnju koja ga povezuje s pozitivno definitnim preslikavanjem.

Definicija 23. *Kažemo da je linearan operator $U\colon E \to E$* ***unitaran*** *ako i samo ako je $U^* = U^{-1}$. To svojstvo možemo još zapisati i kao $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in E$ što znači da je U automorfizam forme f.*

Više o unitarnim prostorima i unitarnim operatorima zainteresirani čitatelj može pronaći u [6, Stranice 69 do 87].

Teorem 6 ([8, Chapter XV., Theorem 6.9.])**.** *Ukoliko je $A\colon E \to E$ invertibilno preslikavanje, onda se ono može na jedinstven način zapisati u obliku $A = UP$, pri čemu je U unitarno, a P pozitivno definitno preslikavanje.*

Dokaz. Pretpostavimo da je dano pozitivno definitno preslikavanje P i unitarno preslikavanje U takvo da je $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ i $U = AP^{-1}$. Kako je U unitaran odmah znamo da postoji dekompozicija i preostaje nam dokazati jedinstvenost. Neka nam je $A = U_1P_1$ i $U_2 = PP_1^{-1} = U^{-1}U_1$. U tom slučaju je i U_2 unitaran pa je $U_2^*U_2 = I$. Za hermitske operatore vrijedi $P^* = P$ i $P_1^* = P_1$ pa možemo zaključiti i da je $P^2 = P_1^2$. Iz svega navedenog i propozicije 9 slijedi da je $P = P_1$ što smo trebali i pokazati. □

Napomena 7. *Dekompoziciju linearnog operatora A opisanu u Teoremu 6 nazivamo* ***polarna dekompozicija*** *od A. Više o polarnoj dekompoziciji može se pronaći u [1, Stranice 233 do 235].*

Osim za hermitski slučaj, postoji spektralni teorem u simetričnom slučaju kojega ćemo dokazati u sljedećem potpoglavlju.

4.2 Spektralni teorem u simetričnom slučaju

Neka je E konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem realnih brojeva na kojem je definirana simetrična, pozitivno definitna forma.
Definirajmo sad transponirani linearni operator i pomoću njega simetričan operator.

Definicija 24. *Transponirani operator linearnog operatora $A\colon E \to E$, u oznaci A^t je operator koji zadovoljava relaciju*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle, \forall x, y \in E. \tag{10}$$

Ako linearan operator A dodatno zadovoljava i $A = A^t$ tada kažemo da je on simetričan.

Teorem 7 (Spektralni teorem, simetričan slučaj, [8, Chapter XV., Theorem 7.1.])**.** *Za vektorski prostor $E \neq 0$ postoji ortogonalna baza sastavljena od svojstvenih vektora operatora $A\colon E \to E$, pri čemu je A simetričan linearan operator.*

Dokaz. Tvrdnju možemo reducirati na slučaj $E = \mathbb{R}^n$ tako da izaberemo ortogonalnu bazu pozitivno definirne forme, jer je tada matrica od A obzirom na tu bazu simetrična realna. Za matricu M od A će vrijediti da je hermitsko linearno preslikavanje ukoliko djeljuje na $\mathbb{C}^n$. Neka nam je sada $z \neq 0$ kompleksni svojstveni vektor od M zapisan kao $z = x + iy$, pri čemu su $x, y \in \mathbb{R}^n$. Iz Propozicije 8 je jasno da je λ, svojstvena vrijednost od M pridružena z, realna pa imamo $Mz = \lambda z$. Zbog toga je $Mx = \lambda x$ i $My = \lambda y$, ali uz uvjet da je ili $x \neq 0$ ili $y \neq 0$. Na taj je način pronađen ne-nul svojstveni vektor u E za M, ali i za A. Za taj ne-nul vektor vrijedi da mu je ortogonalni komplement u E dimenzije $n - 1$ pa će ga operator A preslikati u njega samoga. Stoga, dokaz kao i prije završavamo matematičkom indukcijom. □

Korolar 8 ([8, Chapter XV., Corollary 7.2.])**.** *Za vektorski prostor $E \neq 0$ postoji ortonormirana baza sastavljena od svojstvenih vektora operatora $A\colon E \to E$, pri čemu je A simetričan linearan operator.*

Dokaz. Ukoliko se svaki vektor ortogonalne baze podijeli s pripadajućom normom dokaz slijedi direktno. □

Korolar 9 ([8, Chapter XV., Corollary 7.3.])**.** *Pretpostavimo da su na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru $E \neq 0$ nad poljem realnih brojeva definirane dvije međusobno različite, simetrične forme f i g, pri čemu* *je f dodatno pozitivno definitna. Tada postoji baza za E koja je ortogonalna baza i u odnosu na f i u odnosu na g.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Korolara 7, a može se pronaći i u [8, Stranica 585. i 586.]. □

Preostaje nam razmotriti treću navedenu vrstu bilinearnih formi, alternirajuće forme.

5 Alternirajuće forme

Pretpostavimo da je E vektorski prostor nad proizvoljnim poljem K te preslikavanje $f\colon E \times E \to K$ alternirajuća forma, odnosno $f(x,x) = 0$ i $f(x,y) = -f(y,x)$, $\forall x, y \in E$. Za f vrijedi da je $f(x,x) = x^2 = 0$, $\forall x \in E$. Uvrštavanjem $x + y$ umjesto x u formu f dobije se:

$$x \cdot y = -y \cdot x, \forall x, y \in E.$$

Hiperbolička ravnina alternirajuće forme je dvodimenzionalan nedegenerirani vektorski prostor pa automatski postoji $w \in E$ takav da vrijedi $w^2 = 0$, $w \neq 0$. Ne-nul element $y \in P$ sa svojstvom $w \cdot y \neq 0$ će postojati ukoliko je P hiperbolička ravnina te je element $w \in P$ ne-nul element. Podijelimo li y s proizvoljnom konstantom možemo pretpostaviti da je $w \cdot y = 1$. U tom slučaju je $y \cdot w = -1$, odakle slijedi da je matrica pridružena formi obzirom na bazu $\{w, y\}$ jednaka

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U tom slučaju ćemo par w, y nazivati **hiperbolički par**.
Neka nam je zadan dvodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K na kojemu je definirana bilinearna forma te par elemenata $\{w, y\}$ koji udovoljava sljedećim zahtjevima:

1) $w^2 = y^2 = 0$,

2) $y \cdot w = -1$,

3) $w \cdot y = 1$.

Ukoliko su zahtjevi zadovoljeni, dana forma je alternirajuća uz pripadnu hiperboličku ravninu (w, y).

Za zadanu alternirajuću formu f na vektorskom prostoru E možemo reći ili da je E hiperbolički vektorski prostor ili da je f hiperbolička forma ako E možemo prikazati u obliku ortogonalne sume hiperboličkih ravnina. Dodatno, ukoliko vrijedi

$$x \cdot y = 0, \forall x, y \in E,$$

za E ili f ćemo reći da je nula.

Teorem 8. *[8, Chapter XV, stranica 586] Za konačno-dimenzionalan vektorski prostor E nad poljem K sa pripadnom alternirajućom formom f vrijedi da je E zapisan u obliku ortogonalne sume njegove jezgre i hiperboličkog potprostora. Prostor E ćemo nazivati hiperboličkim prostorom parne dimenzije ukoliko je on nedegeneriran.*

Dokaz. Pretpostavimo da je E nedegenriran. Takvu pretpostavku nam omogućava činjenica da je komplementarni potprostor jezgre nedegeneriran. Pretpostavimo i da je $w \in E$, $w \neq 0$ te $\exists y \in E$, $y \neq 0$ koji zadovoljava $w \cdot y \neq 0$. Tada je (w, y) nedegeneriran pa neka je to hiperbolička ravnina koju označimo s P. Nadalje, zapišimo E kao $E = P \oplus P^{\perp}$ pa će slijediti da je i $P^{\perp}$ nedegeneriran. Dokaz se dalje nastavlja indukcijom. □

Iz Teorema 8 te organizacijom elemenata baze ortogonalne sume od hiperboličke ravnine slijedi da je matrica pridružena formi dana s:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je I_r jedinična matrica reda $r \times r$. Nenul blok prethodne matrice, odnosno matricu

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{bmatrix}$$

nazivamo **standardnom alternirajućom matricom**.

Korolar 10. *Neka nam je dan konačno-dimenzionalan vektorski prostor E nad poljem K na kojemu su definirane dvije forme, Ω i forma označena kao $\langle\ ,\ \rangle$. Ω je nedegenerirana alternirajuća, a $\langle\ ,\ \rangle$ nedegenerirana simetrična forma. U tom slučaju postoji dekompozicija prostora E u obliku direktne sume, tj. $E = E_1 \oplus E_2$ i simetričan izomorfizam A od E (u odnosu na navedenu simetričnu formu) sa narednim svojstvom: Ako se $x, y \in E$ zapišu kao*

$$x = (x_1, x_2) \ \ za \ \ x_1 \in E_1 \ \ i \ \ x_2 \in E_2$$

$$y = (y_1, y_2) \ \ za \ \ y_1 \in E_1 \ \ i \ \ y_2 \in E_2$$

tada je

$$\Omega(x, y) = \langle Ax_1, y_2\rangle - \langle Ax_2, y_1\rangle.$$

Dokaz. Biramo bazu prostora E za koju će Ω biti standardna alternirajuća matrica te f forma na E u obliku skalarnog produkta koja je simetrična i nedegenerirana. U tom slučaju dobivamo dekompoziciju od E u obliku direktne sume od E na potprostore E_1, E_2 za koju vrijedi

$$\Omega(x, y) = f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1).$$

Kako smo pretpostavili da je simetrična forma $\langle\ ,\ \rangle$ nedegenerirana možemo pronaći automorfizam A koji daje traženi efekt, pri čemu možemo zaključiti da je A simetričan zbog simetričnosti bilinearne forme f. $\square$

Literatura

[1] S. Axler, *Linear algebra done right*, Third edition, Springer, San Francisco State University, San Francisco, CA, USA, 2015.

[2] E. Dummit, *Linear Algebra (part 5): Bilinear and Quadratic Forms*, Northeastern University, Boston, USA, 2022.

[3] J.R. Durbin, *Modern Algebra, An Introduction*, Sixth edition, The University of Texas at Austin, 2008.

[4] Z. Dvořák, *Bilinear and quadratic forms*, $https://iuuk.mff.cuni.cz/\ rakdver/linalg/lesson15-10.pdf$, Univerzita Karlova, 2015. (pristupljeno 11. svibnja 2023.)

[5] H. Kraljević, *Algebra*, Skripta, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.

[6] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Skripta, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.

[7] S. Krešić-Jurić, *Algebarske strukture*, Skripta, Odjel za matematiku, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split, 2013.

[8] S. Lang, *Algebra*, Department of Mathematics, Yale University, New Haven, USA, 2002.

[9] M. Škarica, *Svojstvene vrijednosti linearnog operatora*, Završni rad, Osijek, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu iskazuju se aksiomi koji su potrebni kako bi se preslikavanje definiralo kao bilinearna forma te se obrađuju tri glavne vrste bilinearnih formi, a to su simetrične, hermitske i alternirajuće. U uvodnom dijelu se nalazi kraći prikaz definicija i rezultata koji su važni za temu rada te nešto više o uređenim poljima. U dijelu o simetričnim formama definiraju se ortogonalne baze te dijagonalizibilna matrica i ti se pojmovi povezuju sa simetričnom formom. Osim toga, obrađuju se simetrične forme nad uređenim poljem te se prikazuje Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. U dijelu o hermitskim formama navode se rezultati ekvivalentni onima u simetričnom slučaju te se iskazuje i dokazuje spektralni teorem u hermitskom i simetričnom slučaju. U dijelu o alternirajućim formama definiraju se pojmovi hiperboličke ravnine, hiperboličkog para te standardne alternirajuće matrice koji se povezuju s navedenom formom.

Ključne riječi

vektorski prostor, polje, uređena polja, bilinearna forma, simetrična forma, hermitska forma, alternirajuća forma, nedegenerirana forma, kvadratna forma, ortogonalna baza, spektralni teorem

Structures of bilinear forms

Summary

This thesis presents the axioms necessary to define mapping as a bilinear form. Furthermore, it discusses the three main types of bilinear forms, namely symmetric, hermitian, and alternating. In the introductory part, there is a brief presentation of definitions and results that are important for the topic of the paper, as well as some more information about ordered fields. In the section on symmetric forms, orthogonal bases and a diagonalizable matrix are defined and connected to the symmetric form. In addition, symmetric forms over the ordered field are processed and the Gram-Schmidt orthogonalization procedure is presented. In the section on hermitian forms, results equivalent to those in the symmetric case are given, and the spectral theorem is stated and proved in the hermitian and symmetric cases. In the section on alternating forms, the concepts of hyperbolic plane, hyperbolic pair, and standard alternating matrix, which are associated with the aforementioned form, are defined.

Keywords

vector space, field, ordered field, bilinear form, symmetric form, hermitian form, alternating forms, non-degenerate form, quadratic form, orthogonal basis, spectral theorem

Životopis

Rođena sam 7. studenoga 1997. godine u Slavonskom Brodu. Živim u malom slavonskom selu Sredanci, gdje sam u područnoj školi završila prva četiri razreda osnovne škole, a preostala četiri u matičnoj osnovnoj školi "Viktor Car Emin" u Donjim Andrijevcima. Moje selo pripada općini Donji Andrijevci u čijem radu i sama sudjelujem kao općinska vijećnica. Godine 2013.upisujem gimnaziju "Matija Mesić" općeg smjera koju završavam 2017.godine te se upisujem na Odjel za matematiku u Osijeku (današnji Fakultet primijenjene matematike i informatike). U 2021.godini završavam prijediplomski studij sa završnim radom "Taylorov teorem i Taylorovi redovi" pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Ivana Solde te upisujem diplomski studij financijske matematike i statistike na istom odjelu, odnosno fakultetu.