Algebra u nastavi

Mink, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:754144

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primjenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Katarina Mink

Algebra u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primjenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Katarina Mink

Algebra u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Uvod **1**

1. Poučavanje matematičkog mišljenja **2**

1.1. Matematičko mišljenje . . . 2

1.2. Standardi matematičke prakse . . . 3

1.2..1 Razumijevanje problema i ustrajanje u njihovu rješavanju . . . 3

1.2..2 Apstraktno i kvantitativno zaključivanje . . . 4

1.2..3 Konstrukcija valjanih argumenata i kritiziranje obrazloženja ostalih . . . 4

1.2..4 Modeliranje u matematici . . . 5

1.2..5 Korištenje prikladnih alata . . . 6

1.3. Miskoncepcije o standardima matematičke prakse i matematičkim procesima . . 7

2. Zašto učenici imaju problema s algebrom? **8**

2.1. Što je algebra? . . . 8

2.2. Općeniti problemi . . . 9

2.3. Konkretni zadaci i izrazi s kojima učenici najčešće imaju problema . . . 10

3. Pristupi poučavanja koji vode dubljem razumijevanje algebre **13**

3.1. Korištenje jednadžbi za prikaz i rješavanje problema . . . 13

3.1..1 Primjeri zadataka . . . 13

3.2. Korištenje koordinatnog sustava za vizualizaciju algebarskih veza . . . 15

3.2..1 Primjeri zadataka . . . 18

3.3. Opisivanje uzoraka (generalizacija) varijablama . . . 19

3.3..1 Primjeri zadataka . . . 22

3.4. Ekvivalentni izrazi . . . 23

3.4..1 Primjeri zadataka . . . 25

4. Algebra u kurikulumu **28**

4.1. Osnovna škola . . . 28

4.2. Srednja škola . . . 31

5. Zaključak **33**

Literatura **34**

Uvod

Pri spomenu algebre, većina učenika pomisli "Što slova rade u matematici?" Takvo gradivo čini im se apstraktno i ne vide smisao učenja algebre. Kako bi promijenili takav stav kod učenika, učitelji bi trebali raditi na svom pristupu poučavanju.

U prvom poglavlju ovog rada govorimo o poučavanju matematičkog mišljenja, općenito, te o standradima matematičke prakse. Ponekad je teško razviti matematički način razmišljanja kod učenika pa ćemo navesti neke od strategija poučavanja i primjere zadataka koji se mogu koristiti kako bi učenicima približili matematički način razmišljanja. Nakon toga ćemo objasniti neke od najčešćih miskoncepcija o matematičkim procesima.

Drugo poglavlje ovog rada fokusira se na učeničke poteškoće s algebrom. Kako bi učitelji približili algebru svojim učenicima, prvo trebaju razumijeti zašto uopće dolazi do problema. Navest ćemo neke od najčešćih pogrešaka koje učenici prave, a zatim objasniti kako im pomoći u svladavanju istih.

U trećem poglavlju govorit ćemo o pristupima poučavanja koji se odnose konkretno na poučavanje algebarskih koncepata. Te strategije, tj. pristupi su: korištenje jednadžbi za prikaz i rješavanje problema, korištenje koordinatnog sustava za vizualizaciju algebarskih veza, opisivanje uzoraka varijablama te korištenje ekvivalentnih izraza. Za svaki od tih pristupa objasnit ćemo osnovne koncepte i ideje, te na kraju dati nekoliko primjera zadataka koji se odnose na određeni pristup poučavanja.

U posljednjem poglavlju osvrnuti ćemo se na kurikulum nastavnog predmeta Matematika u Republici Hrvatskoj, donešen u sklopu programa "Škola za život". Proučiti ćemo odgojno - obrazovne ishode nastavnog predmeta matematika koji se odnose na algebarske koncepte, te promotriti što se konkretno radi u kojem razredu.

1. Poučavanje matematičkog mišljenja

Poučavanje matematike izazovan je posao, ne samo zbog toga što je teško razviti matematički način razmišljanja kod učenika, nego i zato što većina učenika od početka matematiku povezuje s osjećajem straha i nelagode. Učenici smatraju da za matematiku moraš imati "taj gen" ili da oni to jednostavno ne mogu shvatiti i ne mogu napraviti ništa po tom pitanju.

Matematičko mišljenje je nešto što svatko može naučiti, to je vještina koju jednostavno moramo uvježbati kao i npr. vožnju bicikla. Jedino što nam je potrebno kako bi dosegli željenu razinu znanja i samopouzdanja su volja, upornost i vrijeme.

1.1. Matematičko mišljenje

Većina nas, kada se spomene matematika, pomisli na ono što smatramo *sadržajem.* Najčešće pomislimo na operacije s razlomcima, rješavanje jednadžbi i ostalo. Ipak, u pozadini svega nalaze se fundamentalni matematički procesi. Koncepti poput rasuđivanja, rješavanja problema i modeliranja nisu nešto novo u praksi matematike, a ključni su za razvoj matematičkog mišljenja.

Matematičko mišljenje nije samo rješavanje zadataka iz matematike, već je širi koncept koji se odnosi na način razmišljanja i pristup rješavanju problema. Ono uključuje sposobnost analiziranja, logičko zaključivanje, apstraktno mišljenje i primjenu matematičkih principa na različite situacije, kako u matematici, tako i u stvarnom životu. Cilj obrazovanja iz matematike trebao bi biti razvijanje matematičkog mišljenja kod učenika, omogućavanje im da samostalno rješavaju probleme i prepoznaju primjenu matematike u svakodnevnim situacijama. Ovo je važno jer matematika ima široku primjenu u različitim područjima, poput znanosti, tehnologije, inženjerstva, ekonomije i mnogih drugih.

Iako mnogi učitelji postižu uspjeh u razvijanju matematičkog mišljenja kod svojih učenika, uvijek postoji prostor za poboljšanje. Jedan od izazova je osigurati da svi učenici, a ne samo najnapredniji, razumiju i primjenjuju matematičke koncepte na dubljoj razini. To zahtijeva diferencirani pristup podučavanju, pružanje prilika za istraživanje i primjenu matematike na različite probleme te poticanje kritičkog razmišljanja i kreativnosti.

Također je bitno naglasiti važnost povezivanja matematike s stvarnim životom kako bi učenici vidjeli svrhu i praktičnu primjenu onoga što uče. Primjeri iz stvarnih situacija i problema mogu pomoći učenicima da shvate kako matematika može biti koristan alat za rješavanje problema i donošenje informiranih odluka.

2000. godine NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) objavio je osnovne standarde matematike te specifične procese:

- Rješavanje problema
- Komunikacija
- Prikaz
- Obrazloženje i dokazivanje
- Odnosi

Kasnije su ovi procesi još razvijani te dolazimo do osam osnovnih standarda za matematičku praksu:

1. Razumijevanje problema i ustrajanje u njihovu rješavanju
2. Apstraktno i kvantitativno rasuđivanje
3. Konstrukcija valjanih argumenata i kritiziranje obrazloženja ostalih
4. Modeliranje u matematici
5. Korištenje prikladnih alata
6. Preciznost
7. Pronalaženje i korištenje struktura
8. Traženje i izražavanje pravilnosti u ponovljenom zaključivanju

1.2. Standardi matematičke prakse

Cilj poučavanja učenika matematičkim praksama i procesima je izbjegavanje jednostavnog korištenja algoritama za matematičko računanje. Također, cilj je razviti matematičko mišljenje kod učenika. U tu svrhu, nastavnici mogu izbjegavati poučavanje gotovih formula te prenošenje algoritama i koraka za rješavanje zadataka. Umjesto toga nastavnici bi trebali pružiti učenicima priliku da samostalno istražuju i sami dolaze do zaključaka te koriste neke od navedenih standarda matematičke prakse.

1.2..1 Razumijevanje problema i ustrajanje u njihovu rješavanju

Matematički vješti učenici primjenjuju niz strategija i vještina kako bi riješili matematičke probleme. Neke od strategija koje su bitne za razumijevanje problema i ustajanje u njegovu rješavanju su:

- Vješti učenici počinju rješavanje problema tako što sami sebi objašnjavaju značenje problema. Analiziraju dostupne podatke, ograničenja, odnose i ciljeve problema kako bi stekli jasno razumijevanje situacije.
- Umjesto da odmah skoče u pokušaj rješavanja, matematički vješti učenici provode vrijeme razmišljajući o obliku i značenju rješenja. Oni planiraju put do rješenja, razmatrajući različite korake i strategije koje će koristiti.
- Vješti učenici prate svoj napredak dok rješavaju problem. Ako primijete da nešto ne ide kako su planirali, spremni su prilagoditi svoj pristup i promijeniti način rješavnja kako bi postigli ispravno rješenje.
- Vješti učenici redovito provjeravaju svoje odgovore kako bi bili sigurni da su ispravni. Oni postavljaju pitanje: "Ima li ovo smisla?" kako bi osigurali da njihova rješenja odgovaraju kontekstu problema.

Primjeri jednostavnijih zadataka koji mogu potaknuti razvoj ovog standarda matematičke prakse su:

1. Zbrojimo dva broja i zatim ih oduzmemo. Zbroj je dvostruko veći od razlike. Koji brojevi mogu biti u pitanju?

2. Pretpostavimo da restoran brze hrane prodaje pileće medaljone u pakiranjima od 6, 9 i 20 komada. Koliko točno pilećih medaljona možemo kupiti, a koji broj pilećih medaljona nikako ne možemo kupiti. Navedi samo nekoliko opcija.

1.2..2 Apstraktno i kvantitativno zaključivanje

Matematički vješti učenici razumiju količine i njihove odnose u matematičkim problemima. Oni posjeduju dvije komplementarne sposobnosti koje im pomažu u rješavanju problema vezanih uz kvantitativne odnose.

Prva sposobnost je dekontekstualizacija, što znači da su učenici u stanju interpretirati situaciju iz stvarnog svijeta i predstaviti je simbolički. Oni mogu koristiti simbole i manipulirati njima kao da imaju samostalno značenje, ne morajući nužno razmišljati o njihovim stvarnim referencama.

Druga sposobnost je kontekstualizacija, što znači da učenici mogu pauzirati tijekom procesa manipulacije simbolima kako bi istražili njihove stvarne reference ili kontekst. To im omogućuje da donekle povežu simbole s njihovim stvarnim značenjem.

Kvantitativno zaključivanje uključuje razvijanje navika za stvaranje smislenog prikaza problema s kojim se suočavaju. To podrazumijeva pažljivo razmatranje uključenih jedinica, razumijevanje značenja količina i njihovo korištenje, ne samo u izračunima, već i u kontekstu problema. Također uključuje poznavanje i fleksibilno korištenje različitih svojstava operacija i objekata kako bi se rješenje postiglo.

Kombinacija dekontekstualizacije i kontekstualizacije omogućuje matematički vještim učenicima da razumiju, manipuliraju i interpretiraju kvantitativne odnose na dubljoj razini. To im pomaže da razviju matematičko mišljenje i rješavaju složene matematičke probleme.

Primjeri jednostavnijih zadataka koji mogu potaknuti razvoj ovog standarda matematičke prakse su:

1. Je li moguće potrošiti točno 100€ na kupnju stvari koje koštaju ili 3€ ili 6€?

2. Koliko WhatsApp poruka pošalješ u godinu dana?

3. Koliko rješenja ima nejednadžba $2x + 8 < 30$? Objasni.

1.2..3 Konstrukcija valjanih argumenata i kritiziranje obrazloženja ostalih

Matematički vješti učenici posjeduju sposobnost razumijevanja, korištenja i konstrukcije argumenata u matematici. Oni mogu koristiti pretpostavke, definicije i prethodno utvrđene rezultate kako bi oblikovali svoje argumente.

Matematički vješti učenici su sposobni praviti nagađanja i razvijati logički slijed izjava kako bi istražili istinitost svojih nagađanja. Oni mogu analizirati situacije razlažući ih na slučajeve i prepoznati te koristiti protuprimjere kako bi testirali valjanost svojih tvrdnji.

Matematički vješti učenici također mogu usporediti učinkovitost dva uvjerljiva argumenta, razlikovati ispravnu logiku i rasuđivanje od onoga što je manjkavo. Ako primijete nedostatak u argumentu, mogu ga objasniti i identificirati.

Čak i osnovnoškolci mogu konstruirati argumente koristeći crteže, dijagrame i radnje. Ti argumenti mogu biti smisleni i točni, iako se ne moraju generalizirati ili formalizirati do kasnijih razreda. Učenici kasnijih razreda uče odrediti domene na koje se argument odnosi.

Učenici svih razreda također mogu slušati ili čitati argumente drugih, procijeniti njihovu valjanost i postavljati korisna pitanja kako bi razjasnili ili unaprijedili argumente. Ove vještine razvijaju njihovo kritičko razmišljanje i sposobnost evaluacije matematičkih tvrdnji.

Primjeri jednostavnijih zadataka koji mogu potaknuti razvoj ovog standarda matematičke prakse su:

1. Marija tvrdi da će pri množenju dva prirodna broja rezultat vjerojatno biti neparan. Slažete li se s njom i zašto?

2. Luka je zaključio da je 0.16 veće od 0.4 jer je 16 veće od 4. Je li Luka u pravu i zašto?

3. Zamisli da si algebarski izraz opisao svakodnevnim jezikom. Neki od izraza koje si koristio su: "trostruki", "manje" i "za pet". Kako bi mogao izgledati taj algebarski izraz? *Moguće rješenje:* $3n - 5$.

1.2..4 Modeliranje u matematici

Matematički vješti učenici mogu primijeniti matematiku koju su naučili za rješavanje problema koji se javljaju u svakodnevnom životu, društvu i na radnom mjestu. Oni su sposobni prepoznati situacije u kojima matematika može biti korisna i primijeniti je na različite načine.

Već u nižim razredima osnovne škole, matematički vješti učenici mogu koristiti matematičke alate poput jednadžbi za zbrajanje ili oduzimanje kako bi opisali situacije s kojima se susreću.

U višim razredima osnovne škole, oni mogu primijeniti proporcionalno zaključivanje za planiranje događaja u školi ili analizu problema u zajednici. Na primjer, mogu koristiti matematiku za određivanje koliko materijala treba za izgradnju ograde ili koliko hrane je potrebno za hranjenje određenog broja ljudi.

U srednjoj školi, matematički vješti učenici mogu koristiti geometriju za rješavanje projektiranog problema, poput dizajniranja prostora ili rasporeda. Također mogu koristiti funkcije kako bi opisali ovisnosti između različitih količina interesa, na primjer, kako se mijenja cijena proizvoda s promjenom potražnje.

Matematički vješti učenici koji primjenjuju matematiku su samouvjereni stvarajući pretpostavke i aproksimacije kako bi pojednostavili kompleksne situacije. Oni su u stanju identificirati važne količine u praktičnoj situaciji i koristiti razne matematičke alate, poput dijagrama, tablica, grafikona i formula, kako bi prikazali odnose među tim količinama. Mogu analizirati te odnose koristeći matematičke metode kako bi izvukli zaključke.

Važno je napomenuti da matematički vješti učenici također rutinski tumače matematičke rezultate u kontekstu situacije u kojoj se nalaze i razmišljaju o tome jesu li ti rezultati smisleni. Ako rezultati nisu konzistentni s očekivanjima ili svrhom problema, oni mogu preispitati svoj model ili pristup i pokušati poboljšati ga kako bi bolje odgovarao situaciji.

Primjeri jednostavnijih zadataka koji mogu potaknuti razvoj ovog standarda matematičke prakse su:

1. U redu je 23 učenika. Ivan stoji u sredini reda. Koliko je učenika ispred njega?

2. Pet jednakih sendviča moramo podijeliti na šest učenika. Koliki dio sendviča će dobiti svaki od učenika?

3. U receptu za 3 osobe piše da se treba koristiti $3\frac{1}{2}$ čaša vode. Ako mi želimo napraviti to jelo, ali za 2 osobe, koliko čaša vode trebamo koristiti?

1.2..5 Korištenje prikladnih alata

Matematički vješti učenici razmatraju dostupne alate pri rješavanju matematičkih problema i znaju kako ispravno koristiti različite alate ovisno o situaciji. Ti alati mogu biti jednostavni poput olovke i papira, ravnala i kutomjera, ili mogu uključivati naprednije tehnološke alate poput kalkulatora, računalnih algebarskih sustava, statističkih paketa ili softvera za dinamičku geometriju.

Matematički vješti učenici su svjesni svojih alata i njihovih mogućnosti i ograničenja. Oni su sposobni donijeti ispravne odluke o tome koji alat koristiti u određenoj situaciji kako bi postigli najbolje rezultate. Na primjer, srednjoškolski učenici mogu koristiti alate poput GeoGebre za analizu grafova funkcija i pronalaženje njihovih rješenja. Međutim, oni također razumiju da tehnološki alati nisu uvijek savršeni i mogu sadržavati pogreške. Stoga će koristiti procjene i drugo matematičko znanje kako bi provjerili ispravnost rezultata dobivenih pomoću tih alata.

Kada izrađuju matematičke modele, matematički vješti učenici znaju da tehnologija može biti korisna u vizualizaciji rezultata različitih pretpostavki, istraživanju posljedica i usporedbi predviđanja s podacima. Koristeći tehnološke alate, mogu istražiti matematičke koncepte dublje i bolje razumjeti njihove karakteristike.

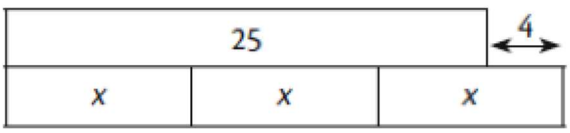
Osim toga, matematički vješti učenici su svjesni dostupnih vanjskih matematičkih resursa kao što su digitalni sadržaji na web stranicama. Oni mogu identificirati relevantne resurse i koristiti ih za postavljanje ili rješavanje problema. Također su vješti u korištenju tehnoloških alata za istraživanje i produbljivanje svog razumijevanja matematičkih koncepata.

Primjeri zadataka koji mogu potaknuti razvoj ovog standarda matematičke prakse su:

1. Broj se može podijeliti na broj desetica i broj jedinica koje sadrži. Dvostruko je više desetica nego jedinica. Navedite nekoliko brojeva za koje vrijedi ova tvrdnja.

2. Pravokutnik kojemu su duljine stranica cijeli brojevi *podijelimo* na pola s obzirom na površinu. Može li opseg novog pravokutnika biti dvostruko manji od početnoga?

3. Riješi jednadžbu $3x - 4 = 25$ bez računanja, koristeći modele.



Slika 1: Model linearne jednadžbe $3x - 4 = 25$

1.3. Miskoncepcije o standardima matematičke prakse i matematičkim procesima

Neki nastavnici smatraju da je namjera da sve lekcije trebaju uključivati sve standarde matematičke prakse, tj. sve procese. To je pogrešna pretpostavka, jer jako malo lekcija može uključiti sve prethodno navede procese, ali može se uključiti više od jednog.

Također, neki smatraju da je moguće unaprijed odrediti koji matematički standardi ili procesi će biti razvijani kod učenika kada se suoče s određenim zadatkom. Iako je za neke zadatke vjerojatnije da će razvijati određeni proces, to ipak ovisi o učeniku. Različiti učenici će izabrati različite procese pri rješavanju matematičkih problema.

Često je vjerovanje da se matematički standardi i procesi ne mogu podučavati, oni se samo *dogode*. Istina je da nekim učenicima nije potrebno podučavanje ovakvog načina razmišljanja. Ipak, vrlo je korisno eksplicitno objasniti što su matematički standradi i procesi. To može pomoći učenicima da postanu svjesni svog načina razmišljanja i prošire to na na nove zadatke i situacije.

Poučavanje standarda za matematičku praksu nebi se trebalo odvijati zasebno, odvojeno od poučavanja matematičkih sadržaja. Svaki od navedenih procesa zahtijeva matematički sadržaj u koji se *ugrađuje*.

2. Zašto učenici imaju problema s algebrom?

Da bi smo proučili primjenu i važnost primjene standarda matematičke prakse, korisno je prvo se upoznati s algebarskim konceptima i najčešćim problemima s kojima se učenici susreću u tom području.

2.1. Što je algebra?

Pri spomenu algebre, većina ljudi pomisli na "matematiku sa slovima". Tradicionalno, algebra podrazumijeva pojednostavljivanje algebarskih izraza, rješavanje jednadžbi te učenje pravila za manipuliranje simbolima. Takvu algebru, čini se, učenici smatraju odbojnom i teškom. Iako se algebra kroz povijest smatrala "prolazom" do više matematike, u današnje vrijeme taj je "prolaz" zatvoren za većinu učenika.

Svrha algebre je određena ili povezana s različitim konceptima algebre. Oni koreliraju s različitim načinima korištenja varijabli. Usiskin (1998.) opisuje četiri algebarska koncepta:

- Algebra kao generalizirana aritmetika
  U ovom slučaju, varijable promatramo kao generalizaciju nekog uzorka. Na primjer, $7+5 = 5+7$ generaliziramo kao $a+b=b+a$.

- Algebra kao procedura za rješavanje određenih problema
  Primjer problema koji bi mogli rješavati ovim algebarskim konceptom je: "Kada broj 3 dodamo nekom broju pomnoženom s 5, zbroj je 40. Pronađite nepoznati broj."
  Ovaj problem lako zapišemo algebarskim jezikom: $5x+3=40$
  U prošlom konceptu (algebra kao generalizirana aritmetika) nema nepoznanica. U tom slučaju, ovakav zadatak bi bio završen, pronašli smo generaliziran uzorak. Ipak, u konceptu algebre kao procedure za rješavanje problema, ovaj zadatak je tek započet.

- Algebra kao proučavanje odnosa među veličinama ili varijablama
  Kada napišemo $P = ab$, formulu za površinu pravokutnika, opisujemo odnos između triju veličina. U ovom konceptu također nema nepoznanica, jer ne rješavamo ovu formulu. Formula kao ova, drugačija je od generalizacije poput $a+b=b+a$, iako formule možemo smatrati posebnim slučajevima generalizacije.

- Algebra kao proučavanje struktura
  Pogledajmo ovaj problem: $3x^2+4ax-132a^2$. Varijable ovdje predstavljaju nešto drugačije od svega u dosadašnjim algebarskim konceptima. Nemamo aritmetički uzorak koji generaliziramo. Nemamo jednadžbu koju trebamo riješiti, varijabla nije nepoznanica. Nemamo funkciju ili relaciju, varijabla nije argument. U primjeni ovog algebarskog koncepta, od učenika se traži da faktoriziraju dani izraz. U ovakvim zadacima učenici su skloni tome da tretiraju varijable kao oznake na papiru, bez da im pridaju ikakvo značenje ili stvarnu vrijednost. Iako ne želimo da učenici uvijek razmišljaju o varijablama na način da ih vežu za konkretan broj, moraju znati da su varijable ipak više od običnih simbola.
  U ovakvim problemima, pouzdajemo se u svojstva varijabli, u odnose između x-eva, y-a ili n-ova, bili oni pribrojnici, faktori ili nešto drugo. Varijabla postaje objekt u strukturi povezanoj određenim svojstvima. To je pogled na varijablu koji se nalazi u apstraktnoj algebri.

Algebarski koncepti i korištenje algebarskih prikaza jedno su od najmoćnijih intelektualnih alata koje je naša civilizacija razvila. Bez neke forme simoličke algebre danas ne bismo imali višu matematiku i kvantitativne znanosti, a s time ni tehnologiju ni moderan život kakav poznajemo. S toga je jako bitno pronaći način kako algebru približiti svima, tj. pronaći metode poučavanja koje će stvoriti okruženje u učionici takvo da učenicima omogućuje učenje s razumijevanjem.

2.2. Općeniti problemi

U mnogo slučajeva može se primijetiti da učenici kojima je tijekom školovanja previše stavljan naglasak na aritmetiku teže vide relacijske aspekte operacija koje provode, njihov fokus bude na samom provođenju računskih operacija. Zbog toga Kieran (2004.) sugerira da neke promjene moraju biti napravljene kako bi se kod učenika razvio algebarski način razmišljanja, a neke od njih su:

- Naglasak bi trebao biti na odnosima i relacijskim aspektima operacija, a ne samo na računanju.
- Usredotočenost na operacije, ali i njihove suprotne operacije (veza zbrajanja i oduzimanja), te na ideju raditi/poništavati.
- Fokusirati se na modeliranje i rješavanje problema, a ne samo na modeliranje.
- Usredotočiti se na slova (varijable) i brojeve, a ne samo na brojeve.
- Veći naglasak staviti na značenje znaka jednakosti kao opisa odnosa ili ekvivalencija nego kao uputu za rješavanje i dobivanje odgovora.

Učitelji koji uvedu ove promjene u svoje poučavanje olakšati će svojim učenicima bavljenje algebrom.

Postoje i brojni drugi problemi koji ometaju uspjeh učenika pri suočavanju s algebarskim problemima. Neki od tih problema javljaju se zbog same prirode algebarskih koncepata, a neki zbog lošeg predznanja.

Algebra je apstraktna kada gledamo da se radi o konceptu generalizacija, a ne o specifičnim problemima. Znati koliko iznosi $3 \cdot 4$ je nešto specifično, isto kao znati da je $6 \cdot 2 = 12$. Shvatiti da, kada pomnožimo bilo koja dva broja, prvi se može udvostručiti i drugi prepoloviti bez da se promijeni vrijednost produkta je generalizacija. Mnogi se učitelji usredotočuju na specifičnosti, a time i mnogi učenici ne napreduju s te faze.

Oni učenici koji problemima pristupaju na nesustavan način, bez generalizacija, vjerojatno će imati više poteškoća od onih koji pristupaju na sustavni način i dolaze do generalizacije. Također, oni učenici kojima je razmišljanje nepovezano i "raštkano" pri rješavanju zadataka jednostavno ne mogu prepoznati obrasce koje bi mogli generalizirati. U ovakvim slučajevima je bitno da im učitelji pomognu uvidjeti važnost organizacije i sistematizacije u otkrivanju odnosa.

Algebra zahtjeva mnogo više apstraktnog razmišljanja od rada s brojevima. Za razumijevanje crtanja grafova, za npr. $y = 5x - 2$ potrebno je razumijeti ulogu koeficijenta uz x te slobodnog člana. Za otkrivanje odgovarajuće jednadžbe iz dane tablice vrijednosti potrebna je sposobnost prepoznavanja uzoraka, a zatim i generalizacije. Ovakvo apstraktno razmišljanje može se razviti uz pažljiv pristup i pomoć učitelja, ovo se kod mnogih učenika neće razviti automatski.

Još jedna od bitnih stavki za usvajanje algebre je dobro razumijevanje računskih operacija kao što su zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Inače se učenici lako zbune i ne znaju problemski zadatak modelirati jednadžbom. Korisno je da učitelji pri zadavanju problemskih zadataka pripaze na to da se učenici susreću sa što više različitih tipova zadataka i da što češće imaju priliku modelirati problemske zadatke, tj. prevoditi svakodnevni govor u algebarske probleme.

Također, jedan od razloga učeničkih poteškoća s algebrom često je i manjak razumijevanja značenja znaka jednakosti. Mnogo učenika znak jednakosti shvaća kao uputu da trebaju nešto izračunati, a ne kao ekvivalenciju dvaju izraza. Na primjer, neki učenici će u zadatku $400 : 2 = \square \cdot 5$ zaključiti da vrijedi $\square = 200$, jer je to kvocijent pri dijeljenju $400 : 2$. Neće razumijeti da znak jednakosti označava ekvivalenciju dviju izraza i da je rješenje zapravo $\square = 40$, vrijednost za koju bi jedino vrijedila ekvivalencija.

Algebrasko razmišljanje zahtjeva i dedukciju, tj. razmatranje toga kako određena informacija vodi do druge. Učenici koji nemaju puno iskustva s ovim načinom razmišljanja mogu imati dodatnih poteškoća s algebarskim konceptima. Na primjer, učenici bi trebali razumijeti da ako znaju da $x + y = 20$, također implicitno znaju da $2x + 2y = 40$, znaju zašto ako je x cijeli broj to mora biti i y, zašto ako je y negativan cijeli broj, x mora biti pozitivan cijeli broj, itd. Učitelji mogu razviti naviku ovakvog razmišljanja kod učenika postavljanjem pitanja koja od njih zahtjevaju dedukciju.

Učenici mogu biti zbunjeni kada se varijable koriste na različite načine. Najčešće kada vide varijable u zadatku, prva asocijacija im budu jednadžbe, misle da se od njih očekuje da odrede jednu nepoznatu vrijednost. Neki učenici jednostavno ne znaju što trebaju napraviti ako varijabla treba biti uključena u rješenje zadatka kao na primjer "Opiši algebarski izraz koji označava tri puta veću vrijednost nekog broja." Ovo upućuje na to koliko bi korisno bilo kada bi učitelji uspjeli više vremena posvetiti algebarskim izrazima i objašnjavanju značenja varijabli u različitim tipovima zadataka.

Osim toga, još jedan problem koji učenicima otežava razumijevanje algebre može biti nedostatak susretanja s grafičkim prikazima. To je jedan od bitnih aspekata algebre nakog što učenici počnu istraživati odnose između dviju varijabli. Učitelji bi, osim crtanja grafova, trebali s učenicima vježbati i analizu grafičkih prikaza kako bi učenici stekli više iskustva i vještine u tom području.

2.3. Konkretni zadaci i izrazi s kojima učenici najčešće imaju problema

Učeničke pogreške dobro su dokumentirane, a postoji znatan broj konkretnih pogrešaka koje čine. Kao što je već spomenuto maloprije, te greške su većinom produkt krivih generalizacija, pogrešnog shvaćanja znaka jednakosti ili krivog tumačenja varijabli. Učitelji koji su svjesni tih konkretnih i češćih pogrešaka imaju mogućnost upozoriti učenike na to.

Jedna od grešaka je, na primjer, što mnogo učenika misli da je $n + 8$ uvijek veće od $4n$. Učenici se ovdje fokusiraju na brojeve, znaju da je 8 veće od 4 pa dolaze do krivog zaključka. Također, mnogo njih zaključi da je $2x + 4$ isto što i $6x$. Ovo je rezultat pogrešnih generalizacija aritmetike. Nejasne im budu i oznake kao na primjer $4x$, neki učenici ne shvaćaju da je to 4 pomnoženo s x.

Korisno je učenicima skrenuti pažnju na ovakve konkretne primjere kako bi ih naveli do točnog odgovora, tj. pravilnog zaključivanja. Također, učitelji bi trebali biti uporni i ne pretpostavljati da će svi učenici shvatiti i zapamtiti ovakve stvari nakon što im se prvi puta objasne.

Još neke konkretne pogreške koje učenici rade su:

- Zamijene 2 s a u izrazu $3a$ tako da dobiju broj 32.
- $12m$ interpretiraju kao 12 metara, a ne 12 puta više od broja m.
- Pretpostavljaju da slovo b ima vrijednost 2 jer je b drugo slovo abecede.
- Vjeruju da, ako žele prikazati neku veličinu, kao npr. sate, moraju koristiti slovo h.
- Pretpostavljaju da je x uvijek pozitivan broj, a $-x$ uvijek negativan.
- Vjeruju da u izrazima kao što su $3x + 5$, x mora biti cijeli broj jer se u izrazu nalaze samo cijeli brojevi.
- Vjeruju da je nemoguće da $a + b$ bude jednako $a + c$ jer slova nisu ista, ignorirajući to da vrijednosti mogu biti jednake.

Sve ove greške ukazuju na manjak razumijevanja pojma varijable. Učitelji mogu pripaziti na pojavljivanje ovakvih poteškoća i odmah upozoriti učenike na njih i ispraviti ih ili čak ilustirati ovakve pogreške i prije nego što ih uoče kod učenika.
Još neke od čestih grešaka su:

- Iz $3x + 3 = 15$ u idućem koraku zaključuju da je $3x = 15$, ili iz $x - 2 = 2x + 3$ da je $x = 2x + 3$, jednostavno ignorirajući 3 ili -2.
- Izraz $3(a + b)$ točno zapisuju kao $3a + 3b$, ali izraz $b(3 + a)$ ne znaju zapisati kao $3b + ab$.
- Ako im zadatak kaže da uvećaju h za 10 pišu $10h$, ili obrnuto, ako se traži da uvećaju h 10 puta pišu $h + 10$.

Ove pogreške također ukazuju na neshvaćanje varijabli ili čak nerazumijevanja pojma jednadžbe.
Uočeno je i da učenici imaju problema s oduzimanjem i negativnim brojevima. Mnogo njih, na primjer, $4+n-2+5$ interpretira kao $4+n-7$, zbrajajući 2 i 5, a znak $-$ prepisujući ispred. Učitelj im može skrenuti pažnju na razliku između izraza $4 + n - 2 + 5$ i $4 + n - 2 - 5$.
Arcavi (1994.) objašnjava grešku koja se često javlja, a primjećena je u jednom od klasičnih matematičkih porblema. Od studenata se tražilo da napišu jednadžbu koristeći varijable S i P koja opisuje iduću izjavu: "Na ovom fakultetu je 6 puta više studenata nego profesora." Ovo pitanje bilo je postavljeno 150 studenata, a samo njih 45 je odgovorilo točno. Najčešći netočan odgovor bio je $6S = P$. Može se pretpostaviti da, barem kod većine studenata, do ove pogreške nije došlo zbog nerazumijevanja toga što varijable predstavljaju. Smatra se da je ovdje problem "prevođenje" u algebarski izraz doslovno čitajući tekst, tj. prateći izraz "6 puta više studenata" i odmah zapisujući to kao $6S$. Jako puno učenika, a ponekad i profesora padne u ovu zamku. Točan odgovor ovog zadatka bio bi $S = 6P$.

Slično ovome primjeru, većina učenika bi jednadžbom $s + 8 = r$ pogrešno zapisala da je s za 8 više od r, umjesto točnom jednadžbom $s = r + 8$. Ovakve pogreške se često javljaju zbog brzopletosti i povezivanja "6 puta više" ili "za 8 više" s varijablom koja je veća, umjesto obrnuto. Dobra uputa učenicima je da si prvo napišu izraz $s = r$ i zatim razmisle kojoj varijabli bi trebali npr. dodati 8 kako bi ovdje stvarno vrijedila jednakost.

Kada učenici dobiju zadatak u kojemu trebaju odrediti vrijedi li jednakost, npr. $3-x = (4+x)-(2x+1)$, neki od njih će to napraviti tako da umjesto varijable odaberu nekoliko vrijednosti i provjere vrijedi li jednakost za te konkretne vrijednosti. Izbjegavaju analiziranje algebarskog izraza i provođenje aritmetičkih operacija koje uključuju varijable. Učenici si odaberu, npr. $x = 0$ i provjere da vrijedi $3 = 4 - 1$, zatim $x = 1$, $2 = 5 - 3$, za $x = 2$, $1 = 6 - 5$. Na osnovi ta tri primjera, učenici zaključuju da su dani izrazi jednaki, tj. da jednakost vrijedi. Ovakvi zadaci, naravno, ne mogu se rješavati na taj način.

Učenici bi trebali moći obaviti aritmetičke operacije s varijablama kako bi uvidjeli da će takve jednakosti uvijek vrijediti, a ne samo za tih nekoliko vrijednosti koje su izabrali. Na taj učenici mogu krivo riješiti zadatak, dolaskom do zaključka da ako jednakost dvaju izraza vrijedi za nekoliko vrijednosti onda će vrijediti uvijek.

Ovakvi problemi mogu se izbjeći koristeći neke od pristupa poučavanju algebre koji će biti opisani u nastavku.

3. Pristupi poučavanja koji vode dubljem razumijevanje algebre

Učenici se često muče s razumijevanjem algebarskih koncepata i algebarskim zadacima. Zato je bitno da učitelji, imajući na umu standarde matematičke prakse, dekonstruiraju svoje razumijevanje algebre kako bi bili spremni na neki drugi način pokušati svojim učenicima prenijeti dublje razumijevanje algebarskih koncepata.

Neke od ideja i pristupa poučavanja biti će detaljnije objašnjeni u nastavku.

3.1. Korištenje jednadžbi za prikaz i rješavanje problema

Iako učenici nauče osnovne matematičke operacije poput zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, u problemskim zadacima često ne znaju kada trebaju primijeniti određenu operaciju. Ovo osobito može biti problem kada su u pitanju razlomci. Kada ima smisla oduzimati dva razlomka? Kada bi trebali pomnožiti razlomke? Kada dijeliti razlomak cijelim brojem? To je jedna od ključnih stvari koje moraju naučiti i razumijeti.

Pri zadacima koji se mogu rješavati postavljanjem jednadžbi, korisno je da jednadžba blisko odgovara situaciji opisanoj u problemu.

Na primjer, neka zadatak kaže da u spremniku goriva ima $\frac{1}{3}$ goriva i zanima nas koliko još moramo dodati ako želimo krenuti na put za koji nam treba $\frac{7}{8}$ spremnika. Jednadžba koja bi odgovarala ovom zadatku može izgledati ovako: $\frac{1}{3} + \square = \frac{7}{8}$.

Ako nas zanima kako četvero ljudi može na jednake dijelove podijeliti $\frac{2}{3}$ pizze, učenik može zapisati jednadžbu ovako: $\frac{2}{3} : 4 = \square$.

Također, bitno je da učenici shvate da se svaki problemski zadatak, koji se može riješiti postavljanjem jednadžbe, može zapisati na više različitih načina, tj. postoji više jednadžbi koje predstavljaju taj zadatak.

Na primjer, zadatak nam je odrediti koliko štapića duljine 25 cm možemo dobiti od štapa duljine 2 m. Takav problem možemo modelirati jednadžbom na idući način: $200 : 25 = \square$ ili $25 \cdot \square = 200$. Ali, ako kao mjernu jedinicu izaberemo metre, a ne centimetre jednadžba se može modelirati ovako: $2 : \frac{1}{4} = \square$ ili $\frac{1}{4} \cdot \square = 2$.

Kako bi im osvijestili ovu fleksibilnost u modeliranju, učenike je dobro poticati da pokušaju jednadžbu zapisati u nekom drugom obliku.

3.1..1 Primjeri zadataka

Prvi tip zadatka

Učenike pitamo da osmisle probleme iz svakodnevnog života koji bi odgovarali danim jednadžbama. Na primjer, tražimo od učenika da smisle situacije koje bi mogli zapisati pomoću jednadžbi na idući način:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \square$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \square$$

$$\frac{2}{3} + \square = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \square$$

$$3 : \frac{1}{4} = \square$$

$$\frac{4}{5} \cdot \square = 16$$

$$\frac{1}{8} : 3 = \square$$

Neki od mogućih odgovora su:

- U posudu sam stavio $\frac{3}{4}$ kg brašna i zatim sam dodao još $\frac{1}{3}$ kg. Koliko je brašna u posudi?
- Ostalo je $\frac{3}{4}$ pizze i netko je došao i uzeo $\frac{1}{3}$ cijele pizze. Koliko pizze će ostati za mene?
- Spremnik goriva bio mi je $\frac{2}{3}$ pun. Nisam imao puno novaca pa sam natočio još malo unutra. Nakon toga spremnik je bio $\frac{3}{4}$ pun. Koliki dio spremnika sam napunio?
- Ostalo je $\frac{3}{4}$ pizze i netko je došao i uzeo $\frac{1}{3}$ toga. Koliko pizze će ostati za mene?
- Pekao sam meso 3 sata i išao sam ga provjeriti svaku $\frac{1}{4}$ sata. Koliko puta sam išao provjeriti meso?
- Čak $\frac{4}{5}$ kuća u ulici imaju kamere. Ako 16 kuća u ulici ima kamere, koliko je ukupno kuća u ulici?
- Spremnik goriva bio je $\frac{1}{8}$ pun. Meni je za odlazak od kuće do trgovine trebala samo $\frac{1}{3}$ onoga što je u spremniku. Koliki dio spremnika je bio pun kada sam došao do trgovine?

Drugi tip zadatka

Učenicima zadamo nekoliko jednadžbi oblika $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \square$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \square$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \square$, $\frac{1}{b} : c = \square$ ili $c : \frac{1}{b} = \square$. Zatim tražimo od njih da za svaku jednadžbu napišu nekoliko ekvivalentnih jednadžbi.

Neki od mogućih odgovora su:

Ako im je, na primjer, dana jednadžba $3 : \frac{1}{4} = \square$, mogu ju u zapisati u drugačijem obliku ovako: $\square \cdot \frac{1}{4} = 3$. Jednadžbi $\frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \square$ je ekvivalentna jednadžba $\frac{1}{3} + \square = \frac{5}{8}$.

Treći tip zadatka

Učenicima objasnimo da je osmišljeno nekoliko problemskih situacija koje odgovaraju jednadžbi $10 : \frac{1}{5} = \square$. Zatim ih pitamo što bi moralo biti jednako u tim problemskim situacijama, a što bi moglo biti različito.

Neki od mogućih odgovora su:

Sve problemske situacije moraju uključivati broj 10, specifično 10 mora biti nekakva cjelina. Moraju uključivati i $\frac{1}{5}$ i to u smislu da moraju postojati nekakve grupe od $\frac{1}{5}$. Možda ćemo prebrojavati koliko grupa $\frac{1}{5}$ imamo, npr. ako recept zahtijeva $\frac{1}{5}$ čaše brašna, možemo ispitati koliko puta možemo napraviti taj recept s 10 čaša brašna. Druga opcija je da znamo veličinu $\frac{1}{5}$ nečega, a zanimam nas veličina te cjeline, npr. ako znamo da možemo obaviti 10 stvari u $\frac{1}{5}$ sata, zanima nas koliko stvari možemo obaviti u jednom cijelom satu.

3.2. Korištenje koordinatnog sustava za vizualizaciju algebarskih veza

Kada učenici uče ucrtavati uređeni par (a, b) u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, trebali bi razumijeti da imaju različite opcije pomicanja iz točke ishodišta do tražene pozicije. Te opcije su:

- Početi u $(0, 0)$, pomaknuti se a mjesta udesno i zatim b mjesta prema gore
- Početi u $(0, 0)$, pomaknuti se b mjesta prema gore i zatim a mjesta udesno
- Početi u $(a, 0)$ i pomaknuti se b mjesta prema gore
- Početi u $(0, b)$ i pomaknuti se a mjesta udesno

Iako neki učitelji ovdje inzistiraju na konzistentnosti, učenici nakon nekog vremena žele fleksibilnost u izboru načina pomicanja i nalaženja tražene točke u koordinatnom sustavu.

Nakon što to svladaju, učenici mogu početi pomicanje od jedne točke (različite od ishodišta) do neke druge. Na primjer, učenici mogu doći iz točke $(5, 1)$ do točke $(7, 4)$ ucrtavanjem obiju točaka i zatim analiziranjem i shvaćanjem da su se iz točke $(5, 1)$ pomaknuli za 2 mjesta udesno i 3 prema gore. Neki će ucrtati točku $(5, 1)$ i odmah shvatiti koliko se gdje trebaju pomaknuti da bi došli do točke $(7, 4)$.

Ipak, jedna od najbitnijih stvari koje učenici moraju razumijeti je razlika između točaka (a, b) i (b, a). Naravno, jedina iznimka je kada imamo slučaj u kojemu vrijedi $a = b$.

Problemske situacije koje bi se mogle prikazati grafom u prvom kvadrantu uključuju situacije u kojima su vrijednosti dviju varijabli povezane te su obje pozitivne. Svrha takvog grafa je prikazati odnos tih dviju veličina te takav graf služi kao alat za rješavanje problema vezanih uz varijable koje su u vezi.

Često se za opis specifičnih dijelova odnosa koriste tablice vrijednosti (Slika 2). Zatim se te vrijednosti (uređeni parovi) ucrtavaju u koordinatni sustav iz čega se dobije graf.

Na primjer, ako želimo prikazati vezu između toga koliko je minuta prošlo u određenom broju sati, učenici mogu prvo napraviti tablicu vrijednosti u kojoj će upariti određeni broj sati s određenim brojem minuta koje su prošle. Zatim te vrijednosti mogu kao uređene parove ucrtati u koordinatni sustav, koristeći dvije vrijednosti u svakom retku tablice kao dvije koordinate.

Sati	Minute
1	60
2	120
3	180
4	240
5	300
6	360

Slika 2: Tablica vrijednosti odnosa sati i minuta

Učenici moraju znati da sami mogu izabrati koju varijablu žele staviti u koji stupac, ali i da njihov izbor utječe na izgled grafa.

Također bi trebali znati da sami biraju za koliko će se mijenjati varijable u stupcima, ali da je jednostavnije uočiti vezu ako se te varijable mijenjaju dosljedno, na primjer za 1 svaki put ili za 2 svaki put.

Pogledajmo tablice vrijednosti na donjoj slici (Slika 3). Niti jedna od njih nije netočna, ali iz nekih je lakše uočiti uzorak i vezu između varijabli, tj. između sati i minuta.

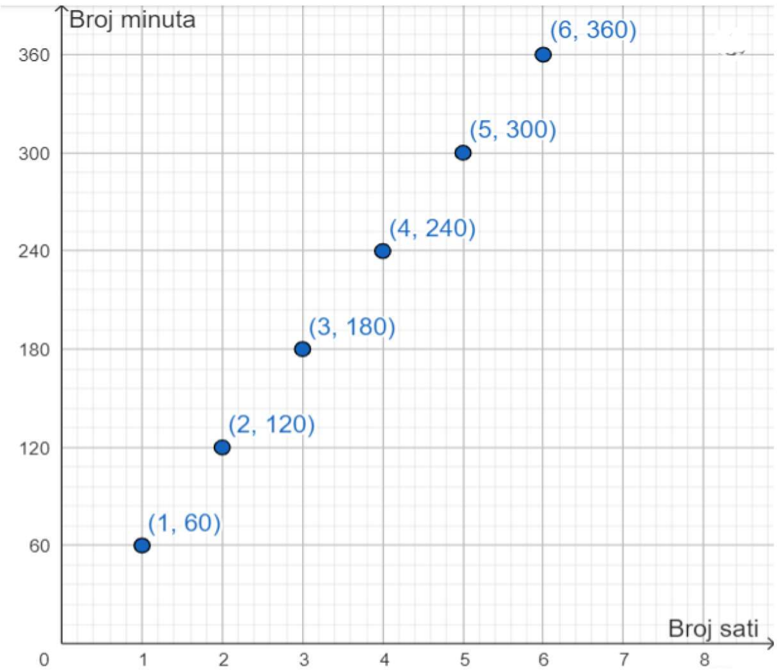
Minute	Sati
60	1
120	2
180	3
240	4
300	5
360	6

Sati	Minute
1	60
3	180
5	300
7	420
9	540
11	660

Sati	Minute
1	60
2	120
4	240
6	360
7	420
9	540

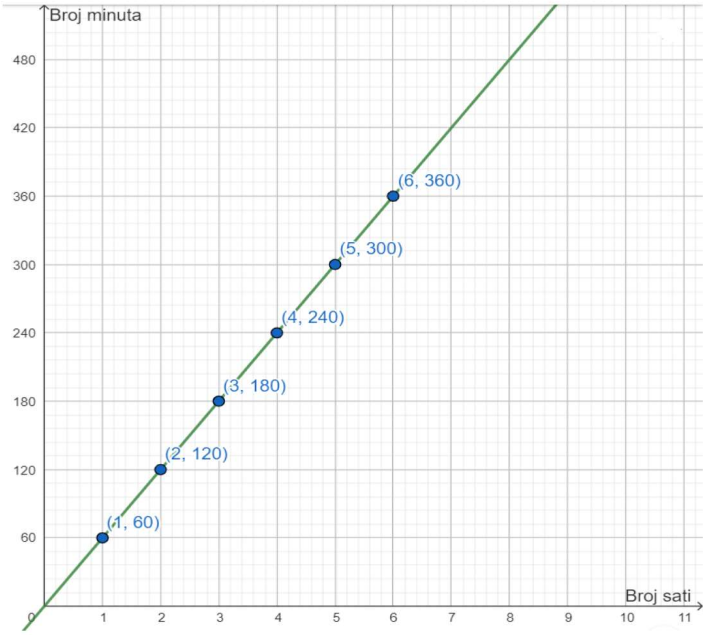
Slika 3: Različite tablice vrijednosti odnosa sati i minuta

Nakon što ucrtaju uređene parove iz tablice vrijednosti (Slika 4), učenici će lako vidjeti linearnu vezu i moći će ju iskoristiti kako bi nacrtali graf koji prikazuje ovu linearnu ovisnost.



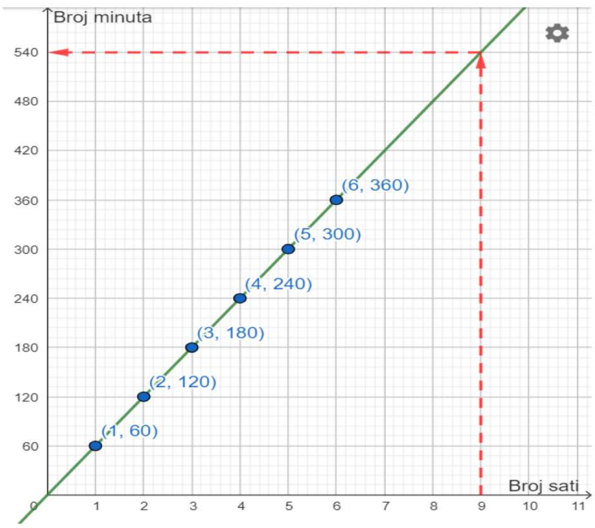
Slika 4: Grafički prikaz tablice vrijednosti sa Slike 2

Spajanjem ucrtanih točaka učenici dolaze do grafičkog prikaza linearne ovisnosti sati i minuta (Slika 5). Taj grafički prikaz vrlo je koristan jer iz njega sada brže i lakše mogu očitati specifične vrijednosti ovih varijabli.



Slika 5: Grafički prikaz linearne ovisnosti sati i minuta

Ako nas, na primjer, zanima koliko će minuta proći u vremenu od 9 sati, takav podatak sad učenici lako mogu očitati s grafa. Iz točke $(9, 0)$ pomaknu se ravno prema ucrtanom pravcu. Kada dođu do pravca, učenici se pomiču ulijevo i traže koordinatu na osi "Broj minuta", ta koordinata nam govori da će u 9 sati proći 540 minuta. Ilustracija ovog procesa je na Slici 6



Slika 6: Grafički prikaz linearne ovisnosti sati i minuta

Ovakvi zadaci mogu se postaviti i na malo drugačiji način, može nas zanimati koliko sati bi prošlo u 480 minuta. U ovom slučaju učenici bi prolazili sličan proces, ali početna točka bi bila $(0, 480)$. Učenici bi iz te točke prvo išli udesno do pravca, a zatim prema dolje do osi koja označava broj sati. Rješenje bi u ovom slučaju bilo 8 sati.

Nekim učenicima je lakše koristiti samo tablice vrijednosti, ali grafički prikazi su vrlo korisni i u kasnijem školovanju neophodni. Zato bi se takve učenike trebalo poticati na korištenje grafičkih prikaza kako bi se što prije navikli na njih.

3.2..1 Primjeri zadataka

Prvi tip zadatka

Učenike pitamo kako bi se pomaknuli:

- Do točke $(3, 4)$ iz točke $(0, 0)$
- Iz točke $(3, 4)$ do točke $(0, 0)$
- Do točke $(5, 1)$ iz točke $(4, 0)$
- Do točke $(6, 3)$ iz točke $(8, 4)$

Drugi tip zadatka

Učenike pitamo da objasne zašto je točka $(2, 4)$ različita od točke $(4, 2)$.
Neki od mogućih odgovora su:
Točka $(4, 2)$ nalazi se dalje (više udesno) i niže od točke $(2, 4)$.

Treći tip zadatka

Učenike tražimo da razmisle o vezi između broja ljudi u nekoj prostoriji i broja očiju koje ti ljudi imaju. Zatim ih pitamo da naprave tablicu vrijednosti i grafički prikažu te vrijednosti, a onda i nacrtaju graf koji opisuje danu vezu. Nakon toga učenici moraju samostalno osmisliti i riješiti zadatak koristeći svoj graf.

Mogući odgovor:

Nakon što učenici odrede nekoliko uređenih parova (npr. $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$,...) i skiciraju graf, mogu si postaviti pitanje tipa: Koliko je ljudi u prostoriji ako znamo da je 28 očiju?

Četvrti tip zadatka

Od učenika tražimo da naprave tablicu vrijednosti koja opisuje vezu broja kovanica od 20 centi i vrijednosti tih kovanica u eurima. Zatim im je zadatak zamijeniti varijable, ono što su predstavili npr. varijablom x, sada neka bude predstavljeno varijablom y, i obratno. Nakon toga, postavimo im pitanje može li se problem vezan uz te veličine riješiti pomoću bilo kojeg grafa i zašto.

Mogući odgovor:

Učenici bi trebali primijetiti da se mogu koristiti bilo kojim grafom. Na primjer, da bi znali koliko eura imamo ako imamo 6 kovanica od 20 centi, na jednom grafu počinjemo od točke $(6, 0)$, a na drugom počinjemo od točke $(0, 6)$ i postupkom koji je objašnjen ranije dolazimo do točnog rješenja.

3.3. Opisivanje uzoraka (generalizacija) varijablama

”Prevođenje” iz svakodnevnog jezika u matematički

Vrlo rano tijekom školovanja, učenici se susreću s ”prevođenjem” svakodnevnog govora u matematičke izraze, specifično, jednadžbe. U nižim razredima osnovne škole najčešće se koriste simboli i likovi (poput □) umjesto slova, koja se kasnije polako uvode. Ono s čim učenici češće imaju problema je ”prevođenje” u algebarske izraze. Mnogo njih svlada jednadžbe tipa $3 + n = 10$, znaju da time traže broj koji pri zbrajanju s 3 daje 10. Ipak, puno manje učenika razumije da $3 + n$, generalizirano, opisuje rezultat zbrajanja nekog broja s trojkom.

Ponekad učitelji upoznaju učenike s ”ključnim riječima” koje će im pomoći u ”prevođenju” svakodnevnog govora u matematički zapis. Na primjer, korisno je uputiti učenike na to da ”za 3 veći” označava zbrajanje s 3, ”3 puta veći” označava množenje s 3, ”trostruko manji” označava dijeljenje s tri, itd. Ipak, ovo nije dovoljno i treba biti oprezan.

Jedna od najčešćih pogrešaka koju učenici čine je to da pomiješaju algebarske izraze za ”oduzmi broj od 10” i ”oduzmi 10 od broja”. Neki smatraju da ovdje dolazi do problema zbog redoslijeda riječi u izrazu, tj. da je problem u tome što učenici automatski zapisuju redoslijedom kojim im je nešto zadano (”oduzmi broj od 10” mnogi netočno zapišu kao $n - 10$). Učitelji bi u ovakvim slučajevima mogli uputiti učenike na čitanje s razumijevanjem i objasniti im da je korisno uvijek nakon što zapišu algebarski izraz, provjeriti još jednom odgovara li to tekstu koji su ”prevodili”.

Algebarske notacije

Učenici moraju usvojiti i određene notacije koje utječu na njihovo snalaženje u pisanju i interpretiranju algebarskih izraza. Jedna od njih je činjenica da se znak za množenje ne piše kada varijablu množimo konstantom, tj. da umjesto $3 \cdot x$, pišemo $3x$. Kada se u školstvu dođe do ovakvih problema, dobro je učenike upoznati s terminom *koeficijenta*. Također, mlađim učenicima je bitno više puta naglasiti da je $3 \cdot x$ jednako što i $3x$ te ih poticati da koriste uobičajenu notaciju, $3x$.

Osim toga, bitno je da učenici shvate da $\frac{x}{4}$ znači $x : 4$. Ovo je nepoznanica mnogim učenicima koji ne razmiju vezu između razlomaka i dijeljenja, da je $a : b$ isto što i $\frac{a}{b}$ ili a/b.

Bitno je i razumijeti značenje eksponenata, na primjer, da 3^5 znači $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ ili da x^3 znači $x \cdot x \cdot x$.

Još jedna od notacija na koju treba obratiti pozornost je to da zagrade služe tome da se više elemenata pretvori u jedan. Na primjer, izraz $4(n + 3)$ nam govori da $n + 3$ tretiramo kao jedan element. Čak i pri učenju redoslijeda računskih operacija učimo da ”prvo radimo ono što je u zagradi”, upravo zbog toga što se elementi u zagradi trebaju tretirati kao jedan element. Učenici moraju biti svjesni ovoga.

Također, moraju znati baratati ugniježđenim zagradama, tj. da je bitno zagrade rješavati od unutarnjih prema vanjskima. Jedino ako znaju primijenjivati sve ove koncepte mogu pravilno zapisati izraz tipa ”Kreni od nekog broja. Uvećaj ga za tri. To udvostruči. Zatim oduzmi 5 i na kraju udvostruči rezultat.” kao $2[2(n + 3) - 5]$.

Osim kod operacija sa zagradama, redoslijed operacija je bitan u interpretaciji izraza poput $3x^2 - 4$. Ovakav izraz označava da broj prvo moramo kvadrirati, zatim pomnožiti s 3 i na kraju tome oduzeti 4. Učenici to lako zamijene za izraz koji nam govori da broj prvo pomnožimo s 3, zatim to kvadriramo i rezultatu oduzmemo 4. To bi pak zapisali kao $(3x)^2 - 4$. Ovo je poteškoća koja se često javlja i kod starijih učenika, tako da je vrlo korisno usporediti im izraze $3x^2$ i $(3x)^2$, te detaljno objasniti razliku između ta dva izraza i kako zagrada ovdje utječe na računske operacije. Dobro je i pitati ih koji od ta dva izraza mogu još raspisati, a koji trenutno ne mogu dalje sređivati. Ovdje učenici trebaju shvatiti da je $(3x)^2$ zapravo isto što i $9x^2$.

"Prevođenje" iz matematičkih izraza u svakodnevni jezik

Kao što je bitno da učenci znaju prevoditi svakodnevni jezik u matematički zapis, jednako je bitno da barataju i obrnutim procesom. Na primjer, pogledajmo izraz $3x+8$. Možemo taj izraz interpretirati kao niz instrukcija: "pomnoži broj s 3 i zatim mu dodaj 8." Ovdje nam nije bitno kakav je x broj. Ipak, želimo li koristiti samo prirodne brojeve, izraz možemo interpretirati i kao "broj koji je za 8 veći od višekratnika broja 3". Ovakva interpretacija ne djeluje kao set instrukcija, nego kao opis "vrste" broja. Idealno bi bilo kad bi učenici razvili mogućnost interpretirati izraz na oba načina.

Još jedan sličan primjer može biti izraz $30 - 2j$. Taj izraz najčešće bi interpretirali kao niz uputa: "Izaberi broj, udvostruči ga i zatim rezultat oduzmi od 30." Primijetimo da bi u interpretaciji ovog izraza morali razmišljati na malo drugačiji način. Ovdje nam je prirodnije opisati izraz tako da krenemo od varijable j iako se ona pojavljuje na kraju izraza, a ne ići doslovno "prevoditi". Neki učenici tako bi riješili zadatak, to bi zvučalo: "Počnimo od 30 i od toga oduzmemo dvostruku vrijednost nekog broja". Primijetimo da je i ovo potpuno točan "prijevod" danog izraza, ali većini učenika početni prijevod ipak zvuči prirodnije.

Korisno je razviti kod učenika naviku korištenja pojma *monom* za opis odvojenih komponenata algebarskog izraza. Sve te komponente zbrojene daju nam taj određeni algebarski izraz. Na primjer, izraz $3j - 2$ sastoji se od dva monoma, $3j$ te -2, jer je to zapravo $3j$ dodano broju -2.

Primijetimo da je $3j$ jedan monom iako se sastoji od koeficijenta 3 i varijable j koji su pomnoženi. Mnoge učenike ovo zbunjuje, čini im se čudnim što u izrazu $j + 3$ imamo 2 monoma, a u izrazu $3j$ samo jedan. Korisno je da učitelji usporede ovakve konkretne primjere pred učenicima i detaljno im objasne u čemu se ovi izrazi razlikuju.

Vrednovanje učinkovitosti varijabli

Učenici bi trebali i sami shvatiti kako su algebarski izrazi u većini slučajeva učinkovitiji od našeg svakodnevnog govora. Kada kažemo da su učinkovitiji mislimo na samu duljinu zapisa i duljinu izraza. Napisati jednostavno $2n - 4$ mnogo je jednostavnije i zauzima manje prostora nego "Udvostruči broj i zatim mu oduzmi 4." Ovo je jedna od prednosti algebarskih izraza i većini učenika poticaj za korištenje varijabli.

Osim toga, ono što učenici nekad ne primijete, a trebalo bi im se pomoći u tome, je činjenica da opisivanje situacija algebarskim izrazima može doprinijeti bržem uočavanju novih uzoraka, tj. generalizacija. Na primjer, znati da je $3c+4 = 6$ može navesti učenika na ostale veze putem zbrajanja, oduzimanja, množenja ili dijeljenja obje strane jednadžbe. Učenik može primijetiti da vrijedi, na primjer, $3c = 2$ ili pak $6c + 8 = 12$.

Supstitucija u algebarskim izrazima

Učenici se često susreću sa zadacima u kojima moraju izračunati vrijednost algebarskog izraza za određene vrijednosti varijabli. Na primjer, traži se od njih da izračunaju vrijednost izraza $40 - x^2$ za nekoliko različitih vrijednosti $x - a$. Iako se ovakvi zadaci nekima čine vrlo lagani, ovdje često dolazi do problema.

Kao što je već spomenuto malo ranije, u ovakvim zadacima je bitno da učenici razumiju kojim redoslijedom trebaju provoditi računske operacije. Na primjer, ako im je zadano da je $x = 10$, izraz $40 - x^2$ ima vrijednost $40 - 100 = -60$, a ne $(40 - 10)^2 = 30^2 = 900$.

Primjena supstitucije je ključna prilikom izrade tablica vrijednosti pomoću kojih dolazimo do određenih uzoraka. Na primjer, supstitucijom različitih vrijednosti za x, učenici si mogu olakšati i steći bolji uvid u to zašto x^2 opisuje kvadrate brojeva, ako je x cijeli broj primijtiti će da su vrijendosti x^2 zapravo 0,1,4,9,16,... Isto tako, izraz $2m + 1$ je jedan od načina kojim označavamo sve neparne cijele brojeve ako je m cijeli broj (supstitucija nam daje 1,3,5,7,... ako koristimo pozitivne cijele brojeve te -1,-3,-5,-7,... ako koristimo negativne cijele brojeve umjesto m).

Učenici bi, također, uvijek trebali obratiti pozornost na to ima li smisla supstituirati određene vrijednosti u određenom algebarskom izrazu. Na primjer, ima li smisla da varijabla bude razlomak ili ne, ima li smisla da bude negativan broj, itd?

Algebarski izrazi kao generalizacije

Iako mnogi vide izraz poput, na primjer, $2n + 3$ kao izraz koji koristimo za supstituiranje varijabli brojevima, učenici bi uvijek trebali gledati na izraz kao na generalizaciju ili pravilo. U ovom konkretnom slučaju, neovisno o tome s kojim brojem ćemo krenuti supstituirati, pravilo kaže da taj broj moramo udvostručiti i dodati mu 3. To je jedan od načina kojima opisujemo beskonačan skup brojeva. Slično, izraz $3x^2 - 4$ opisuje beskonačan skup brojeva, bez obzira na koji broj mislimo, moramo ga kvadrirati, pomnožiti s 3 i zatim tome oduzeti 4.

Gledanje na algebarske izraze kao na generalizacije omogućava učenicima da misle na skup brojeva. Na primjer, ako je n cijeli broj, zapisati izraz $3n - 5$ je drugi način opisivanja svih brojeva koji su za 5 manji od višekratnika broja 3. To su također svi brojevi za 2 manji od višekratnika broja 3 $(-17, -14, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, ...)$.

Neki algebarski izrazi opisuju skupove brojeva s kojima su učenici upoznati kroz neku drugu terminologiju. Na primjer, brojeve oblika $3n$, pri čemu je n cijeli broj, učenici češće zovu "višekratnici broja 3". Brojeve oblika $2n + 1$, gdje je n cijeli broj, zovu "neparni brojevi".

Algebarski izraz kao pravilo uzorka

Učenicima može biti od velike koristi, pogotovo u kasnijem školovanju kada budu učili o nizovima, prepoznati da algebarske izraze možemo gledati kao pravila nekog uzorka kada se prirodni brojevi zamijene varijablama.

Na primjer, pogledajmo uzorak $2, 4, 6, 8, 10, ...$ koji se povećava za 2 svaki put. Svaki element ovog uzorka može se izračunati množenjem broja njegove pozicije s 2. Uzmimo 15-ti broj u uzorku, $15 \cdot 2$ (tj. 30). Stoga, pravilo ovog uzorka je da je n-ti član $2n$. Gledano s druge strane, algebarski izraz $2n$ može se povezati s uzorkom $2, 4, 6, 8, 10, ...$ jer je to pravilo tog uzorka.

Izraz $4j-2$ može se povezati s uzorkom $2, 6, 10, 14, 18, ...$, izraz j^2+8 s uzorkom $9, 12, 17, 24, ...$ te izraz $5j$ s uzorkom $5, 10, 15, 20, ...$ Neki učenici će primijetiti da se uzorak pravila $4j - 2$ povećava za 4 svaki put, $5j$ se povećava za 5, a uzorak $6k + 3$ (9, 15, 21, 27, ...) se povećava za 6 svaki put. Takvi učenici mogu shvatiti da nam koeficijent varijable govori kako će se uzorak povećavati kada se radi o varijabli koja nema eksponent.

3.3..1 Primjeri zadataka

Prvi tip zadataka

Pitamo učenike: Po čemu su algebarski izrazi kojima bi opisali dane parove slični, a po čemu su različiti?

- Oduzmi 30 od dvostruke vrijednosti broja, u usporedbi s udvostruči broj i tome oduzmi 30.
- Pomnoži broj s 4 i dodaj tome 3, u usporedbi s dodaj 3 broju i zatim to pomnoži s 4.
- Dodaj 5 trostrukoj vrijednosti broja, u usporedbi s dodaj 3 peterostrukoj vrijednosti broja.

Mogući odgovori:
U prvom slučaju, ta dva izraza su potpuno ista. Oba možemo opisati matematičkim izrazom na idući način: $2n - 30$.

U drugom primjeru, jedan izraz zapisujemo kao $4n + 3$, a drugi kao $4(n + 3)$. Oba izraza uključuju zbrajanje i množenje te brojeve 3 i 4. Ipak, drugi izraz (dodaj 3 nekom broju i zatim to pomnoži s 4) će uvijek biti za 9 veći od prvoga. Na primjer, za $n = 2$, prvi izraz će imati vrijednost $4 \cdot 2 + 3 = 11$, ali drugi izraz će biti vrijednosti $4(2 + 3) = 4 \cdot 5 = 20$.

U zadnjem primjeru, prvi izraz bio bi $3n + 5$, a drugi izraz $5n + 3$. Oba izraza uključuju zbrajanje i množenje te brojeve 3 i 5. Ipak, u prvom izrazu množimo s brojem 3, a dodajemo broj 5. U drugom izrazu je obrnuto, množimo s 5 i dodajemo broj 3.

Drugi tip zadataka

Učenicima objasnimo neka zamisle da su preveli algebarski izraz u svakodnevni jezik. Neke riječi koje su morali iskoristiti su "trostruko", "manje" i "pet". Zatim ih pitamo koji je algebarski izraz mogao biti u pitanju i potaknemo ih na to da osmisle nekoliko različitih odgovora.

Mogući odgovori:
Izrazi poput $3n - 5$ ili $20 - 5(3n)$ su točna rješenja. Prvi izraz čita se kao "za 5 manje od trostruke vrijednosti broja". Drugi izraz možemo čitati kao "za pet puta trostuke vrijednosti broja manje od 20".

Treći tip zadataka

Učenike pitamo što misle, je li dobra ideja zapisati $4k + 1 = 17$ umjesto "ako dodaš 1 četverostrukoj vrijednosti broja, dobiješ 17".

Mogući odgovori:

- Mislim da je bolje koristiti simbole jer zauzima manje prostora.
- Mislim da je bolje koristiti riječi jer tako znam točno što to znači.
- Mislim da je jednadžba dobra jer ju odmah mogu riješiti.

Četvrti tip zadataka

Učenike tražimo da napišu algebarske izraze za koje bi se ostvarile iduće situacije:

- Ako izračunamo za vrijednost $n = 5$, dobit ćemo 30.

- Ako izračunamo za vrijednost $n = 5$, dobit ćemo -3.
- Ako izračunamo za vrijednost $n = 10$, dobit ćemo manji broj nego za $n = 5$.
- Ako izračunamo za vrijednost $n = 10$, dobit ćemo dvostruko više nego za $n = 5$.

Mogući odgovori:

- $6n$ ili $4n + 10$
- $n - 8$ ili $3n - 18$
- $20 - n$ ili $\frac{2}{n}$
- $3n$ ili $8n$

Još nekoliko tipova zadataka

- Učenike pitamo da napišu uzorak koji opisuje svaki od algebarskih izraza: $4n - 2$, $6n + 1$, $3n^2$.

  Rješenje: $2, 6, 10, 14, 18, ...; 7, 13, 19, 25, 31, ...; 3, 12, 27, 48, ...$
- Učenike pitamo kako moguće vrijednosti izraza $5n - 2$ mogu biti drugačije, ovisno o tome uzimamo li za n prirodne brojeve ili razlomke.

  Moguće rješenje: Ako je n prirodan broj, jedine vrijednosti koje možemo dobiti iz danog izraza su brojevi za 3 veći od višekratnika broja 5. To su na primjer 3, 8 i 13, i primijetimo da su oni udaljeni za 5. Ako je n razlomak, vrijednost danog izraza može biti bilo koja, kao npr. i 1 i 10, uzmemo li pravi razlomak.
- Učenike pitamo kada mogu interpretirati izraz $1 - 2n$ kao skup negativnih neparnih cijelih brojeva?

  Rješenje: Kada supstituiramo n s prirodnim brojevima.
- Učenike pitamo kako bi korištenjem algebarskih izraza opisali sve višekratnike broja 5.

  Mogući odgovor: S $5n$, kada je n prirodan broj.

3.4. Ekvivalentni izrazi

Korištenje svojstava računskih operacija za stvaranje ekvivalentnih izraza

Poznavanje različitih svojstava računskih operacija omogućava učenicima da stvaraju ekvivalentne izraze. Na primjer, zbog komutativnosti zbrajanja, izraz $2j + 5$ jednak je izrazu $5 + 2j$. Zbog asocijativnosti množenja, izraz $5(3c)$ je ekvivalentan izrazu $15c$, tj. izrazu $(5 \cdot 3)c$. Zbog neutralnog elementa za množenje, izraz $1 \cdot (4x)$ je ekvivalentan izrazu $4x$. Zbog svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju, izraz $5(x + 2)$ jedan je izrazu $5x + 10$. Ponekad se ekvivalentni izrazi sastoje od manje elemenata, a ponekad ne, kao što smo mogli primijetiti u primjerima.

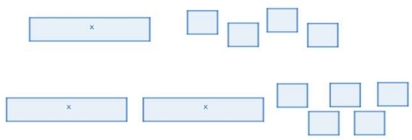
Često su svojstva zbrajanja, množenja, itd. korištena kako bi se napisali ekvivalentni izrazi. Učenicima se može činiti napornim svaki put navoditi svako svojstvo koje su koristili, ali taj proces, pogotovo u početku, može biti vrlo koristan. Na primjer, možemo zaključiti da je $(j + 4) + (2j + 5) = 3j + 9$ koristeći kombinaciju svojstva asocijativnosti, distributivnosti i komutativnosti:

- $(j + 4) + (2j + 5) = (j + 4) + (5 + 2j)$, koristeći svojstvo komutativnosti zbrajanja
- $(j + 4) + (5 + 2j) = j + (4 + (5 + 2j))$, koristeći asocijativnost zbrajanja
- $j + (4 + (5 + 2j)) = j + ((4 + 5) + 2j) = j + (9 + 2j)$, koristeći asocijativnost zbrajanja
- $j + (9 + 2j) = j + (2j + 9)$, koristeći komutativnost zbrajanja
- $j + (2j + 9) = (j + 2j) + 9$, koristeći asocijativnost zbrajanja
- $(j + 2j) + 9 = (1j + 2j) + 9 = (1 + 2)j + 9 = 3j + 9$, koristeći svojstvo distributivnosti

Ako su dva izraza ekvivalentna, kada se jedan izraz procjenjuje za određenu vrijednost varijable, rezultat je jednak kao i kad bi drugi izraz procjenjivali koristeći tu istu vrijednost varijable, bez obzira o kojoj vrijednosti se radi. Na primjer, izraz $3j - 2$ ekvivalentan je izrazu $-2 + 3j$, pa primijetimo da za $j = 0$, oba izraza daju vrijednost -2. Za $j = 1$, također oba izraza daju isti rezultat, 4, a i za $j = 10$, oba izraza daju 28.

Korištenje modela

U određenim trenucima, učenici mogu koristiti konkretne modele kako bi im pomogli u stvaranju ekvivalentih izraza. Na primjer, ako imamo za 4 više od nekog broja i za 5 više od dvostruke vrijednosti tog broja, možemo reći da imamo za 9 više od tog broja dodanog dvostrukoj vrijednosti tog broja, ili za 9 više od trostruke vrijednosti tog broja. Matematički, $(x + 4) + (2x + 5) = 3x + 9$. Ovo možemo modelirati na način prikazan na donjoj slici(Slika 7):



Slika 7: Model izraza $(x + 4) + (2x + 5)$, tj. izraza $3x + 9$

Ovo je odličan način da se učenicima približe algebarski izrazi, pogotovo onima koji najbolje zapamte vizualizacijom. Ipak, modele je najbolje koristiti kada radimo su vrijednosti varijabli i konstanti prirodni brojevi.

Pojednostavljivanje izraza

Kada korištenje svojstva zbrajanja, množenja, itd. za stvoranje ekvivalentnih izraza uključuje reduciranje broja monoma u izrazu, možemo koristiti pojam "pojednostavljivanje". Na primjer, jer je $j + j$ zapravo isto što i $1j + 1j = (1 + 1)j$, tj. $2j$, možemo reći da je $j + j$ pojednostavljeno izrazom $2j$, ono što je prije imalo dva elementa sada ima samo jedan.

Često učenici pojednostavljuju izraze kako bi bolje razumijeli što ti izrazi zapravo predstavljaju. Na primjer, teško je prepoznati da je $2m - 6 + 3(2m + 2)$ zapravo broj m pomnožen s 8, $8m$, dok ne pojednostavimo izraz. Trebalo bi nam puno više vremena za izračunavanje vrijednosti početnog izraza nego istog izraza u njegovom pojednostavljenom obliku, $8m$.

Ponekad učenici pojednostavljuju izraze kako bi im bilo lakše riješiti jednadžbe. Korištenjem ekvivalentnih izraza koje smo maloprije spominjali, vidimo da je puno jednostavnije i brže riješiti jednadžbu $8m = 64$, nego jednadžbu $2m - 6 + 3(2m + 2) = 64$.

Bitno je učenicima demonstrirati i objasniti zašto je korisno pojednostaviti izraz, a ne jednostavno im reći da to moraju napraviti bez da uvide svrhu toga.

Korištenje modela učenicima može pomoći u pojednostavljivanju, kao je objašnjeno u prethodnom odjeljku gdje smo $(x + 4) + (2x + 5)$ pojednostavili kao $3x + 9$.

Ispitivanje ekvivalencije

Ključno je da učenici shvate kada su dva izraza ekvivalentna. To je u slučaju da oba izraza daju jednaku vrijednost prilikom njihova izračunavanja koristeći neku vrijednost varijable, neovisno o vrijednosti varijable koju koristimo. Na primjer, izrazi $3m + 2$ i $2m + 4$ imaju jednaku vrijednost kada za varijablu m uzmemo $m = 2$, ali to nije slučaj za mnogo drugih slučajeva (npr. za $m = 0$ ili $m = \frac{1}{2}$) pa zato ne možemo reći da su izrazi $3m + 2$ i $2m + 4$ ekvivalentni.

Zbog činjenice da za svaku supstituciju varijable izrazi moraju dati jednake vrijednosti da bi ih mogli zvati ekvivalentnima, nemoguće je provjeriti ekvivalenciju dvaju izraza samo koristeći supstituciju.

Za testiranje ekvivalencije izraza moramo koristiti svojstva računskih operacija. Zato je, na primjer, $3m - 2$ ekvivalentno $2m + (m - 2)$, ne zbog toga što oni daju jednaku vrijednost kada za varijablu m uzmemo $m = 0$ ili 1 ili 2, nego zbog toga što koristeći asocijativnost zbrajanja dobivamo $2m+(m-2) = (2m+m)-2$, što je, zbog distributivnosti $(2+1)m-2$, tj. $3m-2$. Ovo je primjer standarda matematičke prakse kojeg zovemo apstraktno i kvantitativno zaključivanje.

3.4..1 Primjeri zadataka

Prvi tip zadataka

Učenicima zadamo algebarski izraz i zatim ih pitamo da zapišu nekoliko njemu ekvivalentnih izraza, uz navođenje svojstava koje koriste da bi došli do ekvivalentnog izraza.

$$3m + 8$$

$$5 - 4m$$

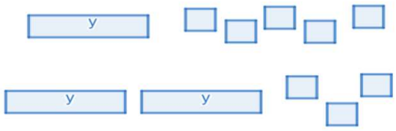
$$6m$$

Moguća rješenja: Možemo pokazati da je prvi izraz ekvivalentan izrazu $(2m + 3) + (m + 5)$. Koristeći svojstvo asocijativnosti dobivamo $2m + (3 + (m + 5))$, a zatim koristeći komutativnost $2m + ((m + 5) + 3)$. Primjenjujući opet svojstvo asocijativnosti dobivamo $2m + (m + 8)$, tj. $(2m + m) + 8$. Koristeći distributivnost, na kraju dolazimo do izraza $(2 + 1)m + 8$, tj. do počentog izraza $3m + 8$.

Drugi izraz ekvivalentan je izrazu $3 + (2 - 4m)$, a koristeći svojstvo asocijativnosti zbrajanja dobivamo $5 - 4m$.

Koristeći distributivnost množenja prema zbrajanju možemo pokazati da je trećem izrazu ekvivalentan izraz $5m + m$.

Drugi tip zadataka
Od učenika tražimo da korištenjem modela pojednostave izraz $(3 + 2y) + (5 + y)$.
Moguće rješenje:
Pojednostavljeni izraz bio bi $3y + 8$, kao što možemo vidjeli na donjoj slici (Slika 8).



Slika 8: Model izraza $(3 + 2y) + (5 + y)$, tj. izraza $3y + 8$

Treći tip zadatka
Učenike pitamo kako bi pokazali da izrazi $2k + 3$ i $3k + 4$ nisu ekvivalentni.
Moguća rješenja:
Možemo, koristeći supstituciju $k = 0$, vidjeli da izrazi neće imati jednaku vrijednost i stoga nisu ekvivalentni.
Koristeći modele, možemo vidjeli da jedan od izraza ima 2 pravokutnika koji predstavljaju varijable i 3 pravokutnika koji predstavljaju broj 1, a drugi izraz ima 3 pravokutnika koji predstavlja varijable. Zaključujemo da izrazi nisu ekvivalentni.
Koristeći svojstva zbrajanja i množenja, možemo pokazati da je $3k + 4$ zapravo $2k + 3$ zbrojeno s $k + 1$. $2k + 3$ ne može biti jednako $2k + 3$ kojemu je dodano još nešto.

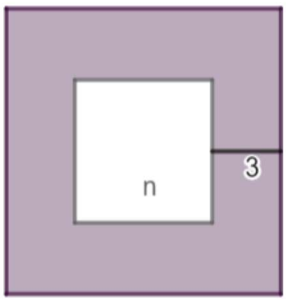
Četvrti tip zadatka
Učenike pitamo da, koristeći donju sliku (Slika 3.4..1), objasne kako svaki od danih izraza ekvivalentno opisuje površinu osjenčanog lika.

$$3(n + 6) + 3n + 3(n + 6) + 3n$$

$$6(n + 6) + 6n$$

$$(n + 6)(n + 6) - n^2$$

$$4 \cdot \frac{3[(n + 6) + n]}{2}$$



Moguća rješenja

Prvi izraz dijeli lik na 4 pravokutnika: veći pravokutnik koji se nalazi na vrhu, čija je površina $3 \cdot (n+6)$; manji pravokutnik desno čija je površina $3 \cdot n$; veći pravokutnik koji se nalazi pri dnu lika čija je površina $3 \cdot (n + 6)$; pravokutnik lijevo čija je površina $3 \cdot n$.

U drugom izrazu zamišljamo da su gornji i donji pravokutnik spojeni u jedan veći pravokutnik površine $6 \cdot (n + 6)$, te da su desni i lijevi pravokutnik spojeni i pravokutnik površine $6 \cdot n$.

U trećem izrazu promatramo dva kvadrata koja su dana. Uzimamo duljinu $\cdot$ širinu velikog kvadrata (tj. površinu velikog kvadrata) koja je $(n + 6) \cdot (n + 6)$ i od te površine oduzimamo površinu unutarnjeg, bijelog kvadrata koja iznosi $n \cdot n$, tj. n^2.

Posljednji izraz dijeli osjenčani dio na 4 jednaka trapeza. Kraća osnovica trapeza je stranica bijelog kvadrata, a dulja osnovica je stranica osjenčanog kvadrata. Osnovice su duljine n i $n+6$, a visina trapeza je 3.

4. Algebra u kurikulumu

U kurikulumu predmeta matematika nalazimo 5 domena. To su Brojevi, Alebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje, te Podaci, statistika i vjerojatnost.

Iako domene povezuju srodne koncepte, konstantno se može primijetiti da ih se ne može podijeliti jer je razumijevanje i usvojenost koncepata jedne domene ključno za usvajanje koncepata druge domene.

U Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika, algebra je objašnjena na idući način: "Algebra je jezik za opisivanje pravilnosti u kojemu slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se upotrebljavaju pri rješavanju matematičkih problema."

Također, sadržaj domene Algebra i funkcije objašnjen je:

"U domeni Algebra i funkcije učenici se služe različitim vrstama prikaza; grade algebarske izraze, tablice i grafove radi generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija. Uočavaju nepoznanice i rješavaju jednadžbe i nejednadžbe računski provođenjem odgovarajućih algebarskih procedura, grafički i služeći se tehnologijom kako bi otkrili njihove vrijednosti i protumačili ih u danome kontekstu. Određenim algebarskim procedurama koriste se i za primjenu formula i provjeravanje pretpostavki.

Prepoznavanjem pravilnosti i opisivanjem ovisnosti dviju veličina jezikom algebre učenici definiraju funkcije koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. Modeliraju situacije opisujući ih algebarski, analiziraju i rješavaju matematičke probleme i probleme iz stvarnoga života koji uključuju pravilnosti ili funkcijske ovisnosti."

4.1. Osnovna škola

Niži razredi osnovne škole

Odgojno obrazovni ishodi koji spadaju u domenu Algebra i funkcije u nižim razredima osnovne škole su:

- MAT OŠ B.1.1. Zbraja i oduzima u skupu brojeva do 20.
- MAT OŠ B.1.2. Prepoznaje uzorak i nastavlja niz.
- MAT OŠ B.2.1. Prepoznaje uzorak i kreira niz objašnjavajući pravilnost nizanja. MAT OŠ B.2.2. Određuje vrijednost nepoznatoga člana jednakosti.
- MAT OŠ B.3.1. Rješava zadatke s jednim nepoznatim članom koristeći se slovom kao oznakom za broj.
- MAT OŠ B.4.1. Određuje vrijednost nepoznate veličine u jednakostima ili nejednakostima.

Kao što možemo primijetiti, većina ovih ishoda zapravo se odnosi na znanja iz aritmetike. To možemo vidjeti i na primjerima zadataka:

Izračunaj vrijednost izraza $234 + a$, ako je $a = 48$.

Zapiši matematičkim znakovima račun i izračunaj nepoznati član ako je djeljenik 63, a količnik 9.

$63 : \square = 9$, $63 : 7 = 9$ jer je $7 \cdot 9 = 63$.

Viši razredi osnovne škole

Odgojno obrazovni ishodi koji spadaju u domenu Algebra i funkcije u višim razredima osnovne škoel su:

- MAT OŠ B.5.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.
- MAT OŠ B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.

U 5.razredu učenici se upoznaju s linearnim jednadžbama oblika $ax = b$, gdje su a i b prirodni ili decimalni brojevi. Učenici su se s ovakvim tipovima zadataka već susreli, ali se umjesto nepoznanice najčešće koristio kvadratić.

Linearne jednadžbe najčešće se uvode kroz različite problemske zadatke - matematičke priče.

Također, učenici se susreću s pojmom skupa i njihovih odnosa te uče prikazivati odnose pomoću Vennovih dijagrama (presjek, unija, podskup).

- MAT OŠ B.6.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.

U 6. razredu osnovne škole, učenici proširuju znanje o linearnim jednadžbama. Također, susreću se s pojmom apsolutne vrijednosti pa uče rješavati i osnovne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću.

Koristeći vezu između računskih operacija učenici izražavaju nepoznatu veličinu iz jednostavnih jednadžbi poput $ax = b$, $a = \frac{b}{x}$, $x = \frac{b}{a}$, gdje su a i b nenegativni racionalni ili cijeli brojevi. To im služi i kao priprema za ostale nastavne predmete poput kemije i fizike.

- MAT OŠ B.7.1. Računa s algebarskim izrazima u skupu racionalnih brojeva.
- MAT OŠ B.7.2. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.
- MAT OŠ B.7.3. Primjenjuje proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost.
- MAT OŠ B.7.4. Primjenjuje linearnu ovisnost.

U 7. razredu učenici se upoznaju s pojmovima monom i binom, te se uvode algebarski izrazi u skupu racionalnih brojeva. Pojednostavljuju algebarske izraze zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem, primjenjujući svojstva računskih operacija. Osim toga, množe monom binomom i binom binomom.

Također, ponavljaju i dodatno proširuju znanje o lineranim jednadžbama. Analiziraju problemske situacije te ih zapisuju linearnim jednadžbama. Gradivo povezuju s geometrijom pa se koriste opsegom i površinom geometrijskih likova kako bi izračunali duljine njihovih stranica, visina, polumjera i promjera kruga.

Susreću se s proporcionalnosti i obrnutom proporcionalnosti te ih u situacijama iz stvarnog života prepoznaju i objašnjavaju.

Učenici sedmog razreda uče i o linearnoj ovisnosti te ju zapisuju formulom $y = ax + b$. Prikazuju linearnu ovisnost grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.

- MAT OŠ B.8.1. Računa s algebarskim izrazima u skupu realnih brojeva.
- MAT OŠ B.8.2. Primjenjuje razmjer.
- MAT OŠ B.8.3. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.
- MAT OŠ B.8.4. Rješava i primjenjuje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.
- MAT OŠ B.8.5. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.

Kao što možemo primijetiti, na algebru se najviše stavlja naglasak u 8. razredu osnovne škole. Sada se računanje s algebarskim izrazima proširuje sa skupa racionalnih na skup realnih brojeva. Učenici uče izlučivati zajendički faktor, pojednostavljivati izraze te prikazivati veličine matematičkim formulama.

Sada su učenici već upoznati s linearnim jednadžbama pa proširuju svoje znanje te sve više rade problemske zadatke iz svakodnevnog života. Osim toga, upoznaju se sa sustavima dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Analiziraju rješenje sustava te ga uvrštavanjem dobivenih vrijendosti provjeravaju, prikazuju rješenje kao uređeni par te raspravljaju o egzistenciji dobivenog rješenja.

Učenici se upoznaju s kvadratnom jednadžbom oblika $x^2 = k$, gdje je k nenegativan racionalni broj.

4.2. Srednja škola

Odgojno - obrazovni ishodi koji spadaju u domenu Algebra i funkcije u srednjoj školi prikazani su na donjoj slici (Slika 9).

RAZRED	ODGOJNO – OBRAZOVNI ISHODI
1.	MAT SŠ B.1.1. Primjenjuje potencije s cjelobrojnim eksponentima. MAT SŠ B.1.2. Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima. MAT SŠ B.1.3. Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave. MAT SŠ B.1.4. Primjenjuje linearne nejednadžbe. MAT SŠ B.1.5. Povezuje različite prikaze linearne funkcije. MAT SŠ B.1.6. Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema. MAT SŠ B.1.7. Prikazuje operacije sa skupovima i rješenja nejednadžbi s pomoću intervala.
2.	MAT SŠ B.2.1. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu. MAT SŠ B.2.2. Analizira funkciju. MAT SŠ B.2.3. Analizira grafički prikaz funkcije. MAT SŠ B.2.4. Primjenjuje kvadratnu funkciju.
3.	MAT SŠ B.3.1. Primjenjuje pravila za računanje s potencijama racionalnoga eksponenta. MAT SŠ B.3.2. Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju. MAT SŠ B.3.3. Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju. MAT SŠ B.3.4. Modelira eksponencijalnom i logaritamskom jednadžbom. MAT SŠ B.3.5. Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija. MAT SŠ B.3.6. Analizira graf trigonometrijske funkcije. MAT SŠ B.3.7. Primjenjuje trigonometrijske funkcije. MAT SŠ B.3.8. Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe. MAT SŠ B.3.9. Primjenjuje jednadžbu pravca. MAT SŠ B.3.10. Primjenjuje jednadžbu kružnice.
4.	MAT SŠ B.4.1. Primjenjuje aritmetički i geometrijski niz. MAT SŠ B.4.2. Računa limes niza. MAT SŠ B.4.3. Analizira svojstva funkcija. MAT SŠ B.4.4. Tumači značenje limesa funkcije u točki. MAT SŠ B.4.5. Povezuje definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine. MAT SŠ B.4.6. Primjenjuje derivaciju funkcije u problemskim situacijama. MAT SŠ B.4.7. Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.

Slika 9: Odgojno - obrazovni ishodi iz domene Algebra i brojevi u srednjoj školi

Algebra u gradivu srednje škole zauzima značajno veći postotak gradiva naspram algebre u gradivu osnovne škole.

Kao što možemo vidjeti, u prvom razredu srednje škole učenici se susreću s potenciranjem, linearnim nejednadžbama te linearnim funkcijama. Linearna funkcija im neće biti toliko strana jer su u osnovnoj školi učili o linearnoj ovisnosti te su naučili formulu $y = ax + b$. Ostalo gradivo nadovezuje se na gradivo osnovne škole.

U drugom razredu srednje škole učenici se susreću s kvadratnom jednadžbom oblika $ax^2 + bx + c = 0$, te s kvadratnom funkcijom. Uče primjenjivati kvadratnu jednadžbu u zadacima iz svakodnevnog života.

U trećem razredu srednje škole naglasak se stavlja na potencije, te eksponencijalne i logaritamske funkcije. Opet se radi sa zadacima iz svakodnevnog života, učenici modeliraju eksponencijalnom i logaritamskom nejednažbom. Osim toga, uvodi se pojam trigonometrijskih funkcija, analiziraju se grafovi tih funkcija te se trigonometrijske funkcije i jednadžbe primjenjuju u problemskim zadacima.

Četvrti razred srednje škole fokusira se na nizove, učenici se upoznaju s aritmetičkim i geometrijskim nizom, te limesom niza. Nakon toga, uvodi se pojam derivacije. Učenici povezuju derivaciju funkcije u točki s problemom tangente, uče tablicu osnovnih derivacija, te primjenjuju derivaciju funkcije u problemskim zadacima. U nekim gimnazijama, osim derivacija, rade se i integrali.

5. Zaključak

Razviti matematički način razmišljanja kod učenika vrlo je izazovan i ponekad težak posao. Ipak, matematičko mišljenje je vještina koju svatko može naučiti uz dovoljno truda. Primjeri zadataka iz ovoga rada mogu poslužiti kako bi potaknuli učeničku znatiželju i drugačiji način razmišljanja.

Iako se učenici često pate s matematikom, a pogotovo algebrom, poznato nam je zbog čega najčešće dolazi do takvih problema i to možemo iskoristiti kao bi ih savladali.

Mnogo učitelja nikada nije čulo za neke od strategija koje mogu koristiti kako bi učenicima pomogli shvatiti algebarske koncepte. Iako ih postoji još mnogo, u ovom radu navedeni su neki od njih.

Primjeri zadataka koji su navedeni u radu zapravo traže od učenika dublje razmišljanje o algebarskim konceptima te razvijaju standarde matematičke prakse kod učenika, što je ključno za daljnje školovanje. Cilj puočavanja matematike je naučiti učenike razmišljati o matematičkim idejama, a ne da samo dođu do rješenja proceduralnim znanjima. Ovakvi zadaci potiču učenike da razmišljaju o matematici, a ne samo da je rade.

Literatura

[1] A. Arcavi, *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*, For the Learning of Mathematics, 1994.

[2] J. J. Kaput, *Teaching and learning a new algebra with understanding*, University of Massachuseutts, Dartmouth, 1999. K. Petričević, *Podučavanje matematičkog mišljenja*, Odjel za matematiku, Diplomski rad, 2020.

[3] C. Kieran, *Algebraic thinking in the early grades*, The Mathematics Educator, 2004.

[4] M. Small, *Teaching mathematical thinking*, Teachers College Press, New York, 2017.

[5] M. Small, *Uncomplicating algebra to meet common core standards in math, K-8*, Teachers College Press, New York, 2014.

[6] Z. Usiskin, *Conceprions of school algebra and uses of variables*, National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

[7] Kurikulum nastavnog predmeta Matematika
`https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf`

Životopis

Rođena sam 17.12.1997. u Zagrebu. Pohađala sam osnovnu školu Frana Krste Frankopana u Osijeku. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2016. godine u Isusovačkoj klasičnoj gimnaziji s pravom javnosti u Osijeku. Nakon završetka srednje škole, upisala sam Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku koji sam završila 2021. godine. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer: nastavnički, na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja radila sam razne studentske poslove, konobarila sam, radila u McDonalds-u, te sam radila kao animatorica na dječjim rođendanima. Osim toga, kontinuirano sam radila kao instruktorica matematike i informatike, te sam kraće vrijeme radila kao zamjena nastavnice matematike u Elektrotehničkoj i prometnoj školi Osijek i Isusovačkoj klasičnoj gimnaziji s pravom javnosti u Osijeku.

Sažetak: Bitno je da učenici rano izgrade dobre temelje kako bi im kasnije bilo lakše razumijeti algebarske koncepte. U ovom radu osvrnuti ćemo se na to koji su uopće algebarski koncepti, koji su najčešći problemi s kojima se učenici susreću, te strategijama koje učitelji mogu koristiti kako bi im približili algebru. Vidjeti ćemo i što se konkretno uči u kojem razredu osnovne i srednje škole.

Ključne riječi: matematičko mišljenje, algebra, poučavanje, varijable

Algebra in mathematics classes

Abstract: It is essential that students build a good foundation early so that it is easier for them to understand algebraic concepts later. In this paper, we will look at what algebraic concepts are, what are the most common problems that students face, and strategies that teachers can use to introduce algebra to them. We will also see what is specifically taught in which grade of primary and secondary school.

Key words: matematical thinking, algebra, teaching, variables