Usporedba metoda djelitelja u razmjernim izbornim sustavima

Matić, Viktorija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Viktorija Matić

Usporedba metoda djelitelja u razmjernim izbornim sustavima

Diplomski rad

Osijek 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Viktorija Matić

Usporedba metoda djelitelja u razmjernim izbornim sustavima

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek 2023.

Sadržaj

1 Izborni sustav

Izborni sustavi predstavljaju ključnu komponentu demokratskog upravljanja. Oni su temelj na kojem se ostvaruje pravo glasa građana te imaju ključnu ulogu u oblikovanju predstavljanja, legitimiteta i stabilnosti političkih institucija. Oni obuhvaćaju skup pravila, mehanizama i postupaka koji reguliraju provođenje izbora, raspodjelu mandata(broj mjesta koja su dodijeljena političkim strankama, kandidatima ili listama na temelju rezultata izbora). Glavni ciljevi izbornog sustava su osigurati pravičnost, inkluzivnost i legitimnost u demokratskom procesu. Cilj je olakšati točno odražavanje preferencija birača, pružiti mogućnosti za raznoliko političko predstavljanje te promovirati stabilnost i učinkovito funkcioniranje političkih institucija. Kroz istraživanje i analizu izbornih sustava, otvaramo vrata za bolje razumijevanje njihove uloge u demokratskom upravljanju. Suvremeni izborni sustavi imaju značajan utjecaj na oblikovanje političke scene i pružaju priliku za izgradnju inkluzivnijih, predstavničkijih i legitimnijih političkih institucija.

Osnovni elementi svakog izbornog sustava su stranke, kandidati, glasovi te broj raspoloživih mjesta. Političke stranke su organizirane grupe pojedinaca koji dijele slične političke ideologije, ciljeve ili interese. Stranke sudjeluju na izborima postavljanjem kandidata i predstavljanjem svojih politika i programa biračima. One se natječu za mjesta ili mandate u zakonodavnim tijelima. Kandidati su pojedinci koji se kandidiraju za izabrane pozicije u vladi. Oni predstavljaju političke stranke ili se kandidiraju kao neovisni kandidati. Glasovi predstavljaju izražavanje preferencija od strane birača koji imaju pravo glasa. Birači glasaju za kandidata ili stranku koju podržavaju, iskazujući svoj izbor u izbornom procesu. Glasovi se broje kako bi se odredila raspodjela mjesta ili mandata među natjecateljskim strankama ili kandidatima. Broj raspoloživih mjesta odnosi se na ukupan broj pozicija ili mandata koji trebaju biti popunjeni u određenom zakonodavnom tijelu ili izbornom okrugu. To predstavlja prilike za političke stranke i kandidate da ostvare svoje predstavništvo. Stranke ciljaju osigurati dovoljan broj mjesta kako bi imali utjecaj i doprinosili procesu donošenja odluka.

1.1 Faze izbornog procesa

Četiri su faze izbornog procesa koje možemo istaknuti kao fundamentalne:

1. definiranje izbornih pravila
2. glasanje
3. prijenos glasova u mjesta
4. formiranje vlade.

Definiranje izbornih pravila ključno je za osiguravanje transparentnog, pravednog i inkluzivnog izbornog procesa koji poštuje demokratske principe i osigurava jednak tretman svim sudionicima te je stoga preliminarna faza u kojoj se definira broj, veličina te granice izbornih jedinica, tj. koliko će izbornih jedinica biti razmotreno, koliko je glasača dodijeljeno pojedinoj izbornoj jedinici te koliko zastupničkih mjesta će biti izabrano u svakoj jedinici. Kad se ustanove kandidati i različite političke stranke, svaki glasač daje svoj glas na glasačkom listiću za kandidata kojeg preferira. Kad su definirane stranke, izborno tijelo, izborna mjesta te kad su dani glasovi, započinje prevođenje glasova u mjesta. Različiti izborni sustavi imaju različite mehanizme za raspodjelu zastupničkih mjesta na temelju glasova. Nakon dodjele mjesta, proces nije gotov. Ishod izbora može proizvesti različite alternative prije nego se formira vlada: najčešće je potrebno ujediniti nekoliko stranki u jednu koaliciju tako da bi osigurali većinu zastupničkih mjesta.

1.2 Vrste izbornih sustava

Iako postoji mnogo različitih vrsta izbornih sustava, možemo ih klasificirati u tri osnovne grupe:

- razmjerni (proporcionalni) izborni sustav
- većinski izborni sustav
- mješoviti izborni sustav.

Većinski izborni sustav funkcionira na način da kandidat može dobiti mandat postizanjem najviše glasova u izbornoj jedinici. Većinski izborni sustav s apsolutnom većinom zahtijeva više od 50% glasova da bi kandidat pobijedio. Ukoliko se to ne dogodi, organizira se drugi izborni krug. S druge strane, većinski sustav s relativnom većinom znači da kandidat, da bi pobijedio, mora osvojiti najveći broj glasova, ali on može biti ispod 50%. Razmjerni tj. proporcionalni izborni sustav je onaj koji nastoji postići da udio dodijeljenih mjesta bude razmjeran (podjednak) udjelu broja dobivenih glasova za stranke koje sudjeluju u izborima. Npr. ako je stranka osvojila 30% glasova, u smislu razmjernosti bilo bi idealno da dobije 30% mjesta u parlamentu, ali savršena razmjernost za sve stranke uglavnom se ne može postići. Mješoviti izborni sustav kombinira elemente većinskog i proporcionalnog izbornog sustava. Za svaki od ovih sustava, postoje različite metode raspodjele mjesta političkim strankama na izborima, a u ovom radu fokusirat ćemo se na razmjerne izborne sustave i metode djelitelja u takvim sustavima.

1.2.1 Razmjerni izborni sustavi

Većina država koristi razmjerne izborne metode čija je svrha reducirati, što je više moguće, nesklad koji je nastao prenošenjem glasova u mjesta. Generalno, razmjerne metode dijelimo na:

- metode količnika (tj. metode kvocijenta)
- metode djelitelja (tj. metode divizora).

Temelj metoda djelitelja je rastući slijed djelitelja $d(0) < d(1) < \ldots < d(S-1)$. Tada se za svakog djelitelja i svaku stranku promatra omjer broja glasova v_i kojeg je dobila pojedina stranka te odgovarajućeg divizora $d(s)$: $\frac{v_i}{d(0)} > \frac{v_i}{d(1)} > \frac{v_i}{d(2)} > ... > \frac{v_i}{d(S-1)}, \forall i = 1, 2, ..., n, \forall s = 0, 1, ..., S-1$, nakon čega se S mjesta dodjeljuje strankama koje imaju S najvećih takvih omjera. Kod nekih metoda djelitelja (npr. Adamsove - metoda najmanjih djelitelja) prvi djelitelj jednak je nuli, tj. $d(0) = 0$. U tom slučaju svaka stranka dobiva barem jedno mjesto bez obzira na broj dobivenih glasova. Tablica 1. prikazuje najčešće korištene metode djelitelja te njihove djelitelje:

Metoda	**Djelitelji**
metoda najmanjih djelitelja (SD)	$d(k) = k$ $(0, 1, 2, \ldots)$
danska metoda (DA)	$d(k) = 1 + 3k$ $(1, 4, 7, \ldots)$
metoda harmonijske sredine (HM)	$d(k) = \frac{2k(k+1)}{2k+1}$ $(0, \approx 1.33, 2.4, \ldots)$
metoda jednakih razmjera (EP)	$d(k) = \sqrt{k(k+1)}$ $(0, \approx 1.41, \ldots)$
metoda Sainte-Laguë/Webster (SL)	$d(k) = 1 + 2k$ $(1, 3, 5, \ldots)$
modificirana Sainte-Laguë (MS)	$(1.4, 3, 5, 7, \ldots)$
metoda d'Hondt (DH)	$d(k) = k + 1$ $(1, 2, 3 \ldots)$
belgijska (BE)	$d(k) = 1 + \frac{k}{2}$ $(1, 1.5, 2, 2.5, \ldots)$

Tablica 1: Metode djelitelja

Algoritam 1 Metoda djelitelja

Input: ukupan broj mjesta S, broj stranaka n, vektor dobivenih glasova $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, kriterij djelitelja $d(s)$ - monotono rastuća funkcija td. $d(s) \in [s, s+1]$

Output: vektor alociranih mjesta strankama $s = (s_1, \ldots, s_n)$

function METODA DJELITELJA$(S, n, v, d\,)$
    for $i \leftarrow 1$ to n **do**
        $s_i \leftarrow 0$
    end for
    for $i \leftarrow 1$ to n **do**
        $\rho_i = \frac{v_i}{d(s_i)})$
    end for
    $l \leftarrow 0$
    while $S - l \neq 0$ **do**
        $l \leftarrow l + 1$
        odaberi l^* takav da $\rho_{j^*} = \max\{\rho_h : 1 \leq h \leq n\}$
        $s_{j^*} = s_{j^*} + 1$
        ažuriraj $\rho_{j^*} = \frac{v_{j^*}}{d(s_{j^*})}$
    end while
    return $s = (s_1, \ldots, s_n)$

Algoritam 1: Algoritamska procedura za metode djelitelja

Primjer :
Pretpostavimo da imamo sljedeće podatke:
broj stranaka $n = 5$, dobiveni glasovi: $g_1 = 1182, g_2 = 3319, g_3 = 5259, g_4 = 7179, g_5 = 9061$, ukupno glasova $G = 26000$, ukupno mjesta $M = 26$.
Naprimjer, primjenom D'Hondtove metode (čiji su djelitelji 1,2,3,...,26) prvo mjesto dodjeljuje se stranci broj 5 jer ona posjeduje najveći broj među omjerima $\frac{g_i}{1}, i = 1, ..., 5$. Za dodjelu drugog mjesta omjer $\frac{g_5}{1}$ zamjenjujemo s $\frac{g_5}{2}$ te promatramo petorku $(1182, 3319, 5259, 7179, 4530.5)$ i dodjeljujemo 4. mjesto stranci s najvećim omjerom. Za dodjelu trećeg mjesta omjer $\frac{g_4}{1}$ zamjenjujemo sa sljedećim pripadnim omjerom $\frac{g_4}{2}$ te promatramo petorku $(1182, 3319, 5259, 3589.5, 4530.5)$ iz čega se mjesto dodjeljuje stranci broj 3 jer ona ima najveći omjer. Postupak nastavljamo sve do $M = 26$-tog mjesta.

Primjenom spomenutih metoda djelitelja u ovakvom slučaju dobili bismo sljedeće raspodjele mjesta po strankama:

Metoda	Raspodjela mjesta $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$
BE	(0,3,5,8,10)
DH	(1,3,5,7,10)
SL, MS	(1,3,5,8,9)
EP	(1,3,6,7,9)
HM,DA	(1,4,5,7,9)
SD	(2,3,5,7,9)

1.2.2 Svojstva razmjernih metoda

Metode djelitelja zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- **Svojstvo monotonosti skupštinskog doma**
  Ako se broj raspoloživih mjesta ("veličina skupštinskog doma") poveća sa S na S+1 , svojstvo monotonosti skupštinskog doma garantira da nijedna stranka neće biti oštećena dobivanjem manjeg broja mjesta (Alabama paradoks povijesni je primjer kada to svojstvo nije ispunjeno). Zadovoljavanjem ovog pravila, metode djelitelja doprinose pravednosti i dosljednosti raspodjele mjesta u proporcionalnim izbornim sustavima. Pomažu održavanju logičnog i predvidljivog odnosa između udjela glasova i udjela mjesta, osiguravajući da rezultat bude u skladu s načelom proporcionalnosti.

- **Svojstvo monotonosti populacije**
  Svojstvo monotonosti populacije odnosi se na promjene u raspodjeli mjesta kada se mijenja biračka podrška. Dakle, odnosi se na načelo prema kojem stranka ili država s rastućim utjecajem ili težinom ne bi trebala izgubiti zastupnička mjesta u korist stranke ili države s opadajućim utjecajem ili težinom. Točnije, zamislimo dva problema, prvi s distribucijom glasova (ili populacije) $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ i S dostupnih zastupničkih mjesta te drugi $(p'_1, p'_2, ...p'_n)$ i S'. Metoda je populacijski monotona ako za svaki par (i, h) takav da $p_i \leq p'_i$ i $p_h \geq p'_h$ vrijedi jedan od sljedeća tri uvjeta:

  1. broj mjesta koja prima stranka i s rastućim utjecajem se ne smanjuje, tj. $s'_i \geq s_i$

2. broj mjesta koja prima stranka h s padajućim utjecajem se ne povećava, tj. $s'_h \leq s_h$
3. sve (utjecaj i mjesta) ostaje nepromijenjeno za obje stranke, stoga $p'_i = p_i$, $p'_h = p_h$, $s'_i = s_i$ te $s'_h = s_h$.

- **Svojstvo konzistentnosti**
Pretpostavimo da postoje dvije stranke, stranka i s p_i glasova te stranka h s p_h glasova te da alokacijska metoda, kad broj dostupnih mjesta poraste sa S na $S+1$, dodjeljuje dodatno mjesto stranci i. Nadalje, pretpostavimo da postoji neka druga distribucija glasova gdje i te h i dalje dobivaju p_i te p_h glasova redom, iako se broj glasova koje su primile druge stranke možda promijenio. Ako se broj mjesta poveća npr. sa S' na $S'+1$, onda bi metoda, kad bi bila konzistentna, i dalje dodijelila dodatno mjesto i-toj stranci.

- **Svojstvo stabilnosti**
Pretpostavimo da izborna metoda dodjeljuje s' mjesta stranci koja je primila v' glasova te s'' mjesta stranci s v'' glasova. Ako se te dvije stranke ujedine imajući onda $v' + v''$ glasova, stabilna izborna metoda dodijelit će s mjesta "novoj" stranci td. $s' + s'' - 1 \leq s \leq s' + s'' + 1$. Sve metode djelitelja stabilne su uz uvjet da za svaki par stranki (i, h) vrijedi $d(s_i + s_h) \leq d(s_i) + d(s_h) \leq d(s_i + s_h + 1)$.
Ovo svojstvo nije presudan kriterij za procjenu učinkovitosti metoda djelitelja jer u kontekstu političkih stranaka i formiranja vlada, prioritetnije je analizirati kako izborne formule potiču suradnju ili koaliciju stranki zbog postizanja zajedničkih ciljeva ili osiguravanja veće predstavljenosti u vladi.

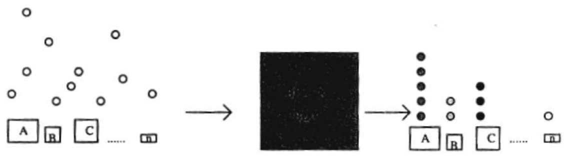
Svojstvo koje metode djelitelja ne zadovoljavaju je svojstvo ispunjavanja kvote. Ono zahtijeva da je broj mjesta koja dobiva svaka stranka što bliže moguće (pod ili strop), egzaktnom razlomku tj. kvoti: $q_i(v, S) = \frac{v_i S}{\sum_{h=1}^{n} v_h}, i = 1, 2, ..., n$. Stoga, alokacijska metoda "zadovoljava kvotu" (Hareovo načelo) ako za broj mjesta dodijeljenih svakoj stranci i vrijedi: $q_i - 1 \leq s_i \leq q_i + 1$ za svaki i, što znači da mora vrijediti $s_i = \lfloor q_i \rfloor$ ili $s_i = \lceil q_i \rceil$ (ako je $q_i \in \mathbb{Z}$, onda $s_i = q_i = \lfloor q_i \rfloor = \lceil q_i \rceil$. Ovo svojstvo možemo podijeliti u dva odvojena zahtjeva:

1. metoda zadovoljava Hareov minimum ako $q_i - 1 \leq s_i$ za svaku i-tu stranku
2. metoda zadovoljava Hareov maksimum ako $s_i \leq q_i + 1$ za svaku i-tu stranku.

2 Cjelobrojni optimizacijski pristup

U prethodnim poglavljima upoznali smo se s metodama djelitelja (razmjerne izborne metode). Iako ih često nazivamo "formulama" koje prenose glasove u mjesta, one se generalno ne mogu izraziti samo analitičkim formulama. Na izbornu formulu možemo gledati kao na "crnu kutiju" koja prima ulazne vrijednosti (broj glasova koje je dobila svaka stranka i fiksni broj mjesta koji se pripisuje) i generira izlazne vrijednosti (distribuciju mjesta po strankama). Ono što se događa unutar crne kutije bolje se opisuje popisom elementarnih operacija koje se ponavljaju sve dok sva mjesta nisu dodijeljena, nego nezgrapnom matematičkom formulom.

Drugim riječima, izborne formule su algoritmi, a algoritamski jezik najbolji je za koristiti kad definiramo izbornu formulu obzirom da nudi formalni zapis izbornih sustava, a pritom



Slika 1: Transformacija glasova u mjesta gledana kao dodjela S loptica u n kutija različitih volumena

izbjegava nepotrebne i komplicirane zapise te nam dopušta da direktno razumijemo što se događa kada se glasovi prevode u mjesta. Ipak, to nije jedini razlog zašto se preporuča algoritamski pristup. Pokazat ćemo kako su izborne formule algoritmi koji rješavaju specifične "probleme cjelobrojnog programiranja" pomoću određenih funkcija cilja.

2.1 Razmjerni algoritmi

Neka je v_{ij} broj glasova koje je stranka i dobila u okrugu j, neka je n ukupan broj stranki, S broj mjesta u pitanju, a s_i broj mjesta dodijeljenih stranci i. Algoritam 1 u potpunosti opisuje algoritamsku proceduru za metode djelitelja. Primijetimo kako se razmjerne formule odnose na dodjelu svih mjesta S u jedinstvenom višečlanom okrugu. Također, primijetimo kako se algoritam koji je već definiran koristi kao potprogram za definiranje kompliciranije izborne formule. Metode djelitelja prethodno smo opisali kao one koje odabiru S najvećih omjera $\frac{v_i}{d(s)}, s = 0, 1, \ldots, S-1, i = 1, 2, \ldots, n$ i koje dodjeljuju jedno mjesto stranci i za svaki odabrani omjer. Algoritam 1 radi istu stvar, što možemo opravdati na sljedeći način:
uzmimo u obzir nS eventualno ponovljenih brojeva; stavimo ih jedan po jedan u multiskup (jer je dopušteno ponavljanje) prema sljedećem postupku: u početku je (multi)skup prazan; u svakom koraku stavimo u multiskup najveći broj koji još nismo odabrali, proizvoljno; nakon s koraka, $s = 1, 2, \ldots, S$, u multiskupu se nalazi s najvećih elemenata (dopušteno je ponavljanje). Da bismo dovršili ovaj argument, prisjetimo se kako je $n \cdot S$ omjera $\frac{v_i}{d(s)}, s = 0, 1, \ldots, S-1, i = 1, 2\ldots, n$, takvih da $\frac{v_i}{d(0)} < \frac{v_i}{d(1)} < ... < \frac{v_i}{d(S-1)}$, obzirom da $d(0) > d(1) > ... > d(S-1)$. Slijedi da se najveći element izvan multiskupa u danom koraku dobiva razmatranjem, za svaku stranku i, prvog neodabranog omjera u poretku zadanim s $\frac{v_i}{d(0)} < \frac{v_i}{d(1)} < ... < \frac{v_i}{d(S-1)}$, obzirom da $d(0) > d(1) > ... > d(S-1)$, a zatim odabirom maksimuma između ovih n omjera. Zapravo, prvi neodabrani omjer za stranku i u određenom koraku najveći je među svim neodabranim omjerima za istu stranku i ne može ga slijediti, prema gore navedenom redoslijedu, nijedan odabrani omjer u vezi sa strankom i.

2.2 Skriveni kriterij

Provjera razine proporcionalnosti dobivene različitim razmjernim metodama jedna je od glavnih rasprava u teoriji izbornih sustava. Vrijednosti odgovarajućih indeksa inače najčešće računamo na bazi izbornih ishoda promatranih u različitim vremenima i zemljama. U ovom poglavlju promotrit ćemo cjelobrojni optimizacijski pristup za rješavanje problema proporcionalne zastupljenosti te ispitati njegove posljedice na debatu o proporcionalnosti. Posebno, argumentirat ćemo kako pokušaj uspostave ranga za različite izborne formule u smislu njihovog stupnja proporcionalnosti može biti u potpunosti pogrešan. Činjenica je da su razmjerne izborne metode i mnoge mjere nerazmjernosti međusobno neraskidivo povezane: može se pokazati da je svaka formula algoritam koji daje cjelobrojno rješenje problema razmjerne zastupljenosti koja minimizira odgovarajući, ne nužno jedinstveni, indeks nerazmjernosti. S jedne strane, pristup cjelobrojne optimizacije vodi nas ka naknadnom otkrivanju funkcije cilja koja je "skriveni" kriterij koji svaka formula minimizira. Ipak, omogućuje nam osmišljavanje novih izbornih formula koje odgovaraju odgovarajućim mjerama nerazmjernosti. Pretpostavimo da imamo n stranki i S mjesta. Neka je $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ...v_n)$ vektor glasova koje dobije svaka stranka te neka je $\sum_{i=1}^{n} v_i = P$. Tada se problem proporcionalne zastupljenosti sastoji od određivanja $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ takvog da

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} s_i = S, \\ &s_i \geq 0, s_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, ..., n, \\ &s_i \approx v_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje oznaka $s_i \approx v_i$ znači da broj dobivenih mjesta za stranku i jest što je više moguće proporcionalan broju dobivenih glasova stranke i. Da bi broj mjesta bio točno proporcionalan broju glasova, i-ta stranka mora zadobiti točno $s_i = v_i \frac{S}{P}, i = 1, 2, ..., n$ mjesta. Nažalost, količina koju nazivamo "egzaktna kvota" obično je razlomak, zbog čega dolazi do zaokruživanja. Dakle, ne postoji jedinstveno rješenje za problem (1).
Alokacija mjesta koja je točno proporcionalna savršeno je pravedna prema svim strankama. Pravednost ili neutralnost podrazumijevaju da se prema svim strankama mora odnositi na isti način te da se nikome ne pokazuje naklonost u pogledu mjesta ako to može oštetiti druge. Ipak, cjelobrojno ograničenje broja mjesta koja svaka stranka može dobiti općenito će uzrokovati odstupanja ili nejednakost u podjeli. Problem utvrđivanja egzaktno proporcionalne alokacije mjesta (1) jednak je pokušaju pronalaska učinkovite procedure za minimizaciju nejednakosti u zastupljenosti među pojedinačnim strankama. Kako bismo usporedili stranke u smislu nejednake zastupljenosti, potrebno je precizno definirati indeks nejednakosti, koji mjeri koliko je dana raspodjela mjesta "manje nejednaka" od drugih. Za najčešće formule proporcionalne raspodjele takvu mjeru nepravednosti lako je pronaći i možemo na nju gledati kao na preciznu matematičku interpretaciju koncepta reprezentacije koji je u osnovi pojedinih metoda. Rješenja problema (1) dana raznim formulama raspodjele u drugim terminima optimalna su rješenja sljedećeg optimizacijskog problema:

$$\begin{aligned} &\min \ \varphi(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{v}) \\ &\sum_{i=1}^{n} s_i = S, \\ &s_i \geq 0, \quad s_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, ..., n, \end{aligned} \tag{2}$$

gdje je funkcija cilja $\varphi(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{v})$ "mjera nepravednosti" (indeks nerazmjernosti) specifičan za svaku metodu, koja ima nenegativne vrijednosti. Ako se promatra funkcija cilja takva da vrijedi $\varphi(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{v}) = 0$ ako i samo ako je $s_i = v_i \frac{S}{P}, i = 1, 2, \ldots, n$, onda metoda najvećih ostataka (s prirodnom kvotom) daje rješenje problema cjelobrojne minimizacije. Postoji nekolicina klasa zanimljivih mjera nepravednosti, od kojih se većina temelji na L_p–normi nekog apsolutnog ili relativnog odstupanja od idealne raspodjele. U Tablici 3 prikazane su neke uobičajene funkcije cilja $\varphi(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{v})$ i razmjerne metode djelitelja koje sačinjavaju optimizacijski algoritam za odgovarajući problem alokacije mjesta formuliran u (2).

	$\varphi(\boldsymbol{s};\boldsymbol{v})$	**Metoda djelitelja**
1	$\sum_{i=1}^{n} v_i \left\lvert \frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right\rvert^{\rho}$	Sainte-Laguë za $\rho = 2$
2	$\sum_{i=1}^{n} s_i \left\lvert \frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S} \right\rvert^{\rho}$	Metoda jednakih razmjera za $\rho = 2$
3	$\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S} \right)$	Metoda jednakih razmjera
4	$\sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right)$	Sainte-Laguë
5	$\max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{s_i}{v_i}$	d'Hondt
6	$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \right)^{+}$, $\mathrm{z}^{+} = \max(z,0)$	d'Hondt
7	$\max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{v_i}{s_i}$	Metoda najmanjih djelitelja
8	$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i-q_i)^2}{q_i}$	Sainte-Laguë $\Leftrightarrow 1, \rho = 2$
9	$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i-q_i)^2}{s_i}$	Metoda jednakih razmjera

Tablica 3: Mjere nerazmjernosti i metode djelitelja koje ih minimiziraju (vidi [2])

Primijetimo kako funkcija (4) poprima jedino nenegativne vrijednosti, obzirom da je $min\{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{v_i} : \sum_{i=1}^{n} s_i = S\} = \frac{S^2}{P}$, što se može pokazati sa standardnom metodom Lagrangeovog multiplikatora za uvjetni ekstrem. Zamijenivši s_i i v_i za svaki i , možemo zaključiti kako je funkcija (3) također nenegativna. Saint-Lague metoda minimizira funkciju cilja 1 za $\rho = 2$, dok metoda jednakih razmjera minimizira funkciju cilja 2 za $\rho = 2$. Funkcije 5 i 6 optimizirane su d'Hondtovom metodom, a funkcija 7 metodom najmanjih djelitelja.

2.2.1 Pohlepni algoritmi za razmjernu raspodjelu

Na problem razmjerne zastupljenosti (2) možemo gledati kao na problem diskretne alokacije resursa. Za danu ukupnu količinu resursa S (mjesta) želimo ih alocirati na n pojedinaca ili aktivnosti (stranki) tako da je vrijednost neke funkcije cilja što manja, uzimajući u obzir da količina resursa s_i dodijeljena i može poprimiti jedino nenegativne cjelobrojne vrijednosti (obzirom da nijedna stranka ne može primiti necjelobrojni dio mjesta). Teško je računalno riješiti ovaj opći problem raspodjele resursa, osim za neke klase funkcija cilja. Razmotrimo sljedeći problem diskretne raspodjele resursa:

$$\begin{aligned} &\min\ \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\ &\sum_{i=1}^{n} s_i = S, \\ &s_i \geq 0, \quad s_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

Funkcija $\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *separabilna* je ako ju možemo zapisati kao sumu n funkcija jednog argumenta:

$$\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \varphi_1(s_1) + \varphi_2(s_2) + \ldots + \varphi_n(s_n).$$

Neka je e_i n-dimenzionalan vektor s jedinicom na poziciji i, a ostalo su nule. *Diskretna derivacija* funkcije $\varphi(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$, u smjeru i razlika je između vrijednosti funkcije φ u točki

$\boldsymbol{s}+e_i$ i njezine vrijednosti u $\boldsymbol{s}$, tj. $\varphi(\boldsymbol{s}+e_i)-\varphi(\boldsymbol{s})$. Očito, ako je $\varphi(\boldsymbol{s})$ separabilna, njezina diskretna derivacija u smjeru i funkcija je jednog argumenta za svaki $i=1,2,\ldots,n$ te vrijedi $\varphi(\boldsymbol{s}+e_i)-\varphi(\boldsymbol{s})=\varphi_i(s_i+1)-\varphi_i(s_i)$. Stoga, funkciju $\varphi(\boldsymbol{s})$ možemo zapisati kao sumu konstante i funkcije njenih prvih razlika unaprijed kako slijedi:

$$\varphi(\boldsymbol{s})=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(s_i)=\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(0)+h_i(s_i)|,$$

gdje

$$h_i\left(s_i\right)=\begin{cases}0 & \text{, ako } s_i=0\\ \rho_i(0)+\rho_i(1)+\cdots+\rho_i\left(s_i-1\right), & \text{ako } s_i\geq 1.\end{cases}$$

Neka je $K=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(0)$ i $h(\boldsymbol{s})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}h_i(s_i)$. Tada je $\varphi(\boldsymbol{s})=K+h(\boldsymbol{s})$. Pretpostavimo da je svaka diskretna derivacija φ_i nepadajuća: $\varphi_i(y)\geq\varphi_i(y-1), y=1,2,...,S-1$. Razmotrimo svih nS vrijednosti $\varphi_i(y)$ (neke od njih mogu se podudarati) i proizvoljan neopadajući poredak takvih vrijednosti sa svojstvom da, kada je $\varphi_i(y)=\varphi_i(y-1)$, onda $\varphi_i(y-1)$ prethodi $\varphi_i(y)$ u ovom poretku. Dalje, razmotrimo multiskup L_S koja sadrži prvih S vrijednosti $\varphi_i(y)$ (moguća su ponavljanja), u odabranom poretku. Primijetimo da, iako poredak nije nužno jedinstven zbog mogućih ponavljanja, multiskup L_S jedinstven je ako pogledamo njegove elemente i njihovu višestrukost. Slijedi da su i suma l_s i maksimum λ_S od S elemenata od L_S dobro definirani. Očito, ako više od jednog elementa u skupu svih diskretnih derivacija ima vrijednost λ_S, moguće je da nisu svi od njih uključeni u L_S, obzirom da je $|L_S|=S$. Sljedeći rezultati vrijede za bilo koju separabilnu funkciju $\varphi(s)$ s neopadajućim diskretnim derivacijama ($\rho_i(0)\leq\rho_i(1)\leq...\leq\rho_i(S-1),\forall i$), pružajući jednostavnu metodu za rješavanje problema cjelobrojne alokacije resursa s takvom funkcijom cilja.

Lema 1. (vidi [2])
Ako je $\varphi(\boldsymbol{s})$ separabilna funkcija i njezina prva razlika unaprijed $\rho_i(\boldsymbol{s})$ je neopadajuća za svaki $i=1,2,...,n$, onda $\varphi(\boldsymbol{s})\geq K+l_S$ za svaku raspodjelu $\boldsymbol{s}$ zadovoljavajući uvjet kardinalnosti $\sum_{i=1}^{n}s_i=S$.

Dokaz. Obzirom da je $\varphi(\boldsymbol{s})=K+h(\boldsymbol{s})$, trebamo pokazati samo da $h(\boldsymbol{s})\geq l_S$ za svaki $\boldsymbol{s}$, gdje $\sum_{i=1}^{n}s_i=S$. Po konstrukciji, L_S sadrži S najmanjih vrijednosti (moguća ponavljanja) u promatranom skupu $\{\rho_i(y):0\leq y\leq S-1,1\leq i\leq n\}$. Stoga, $l_S\leq h(\boldsymbol{s})$ za bilo koji $\boldsymbol{s}$ koji uzimamo u obzir. □

Lema 2. (vidi [2])
Ako postoji raspodjela $\boldsymbol{s}^*$ takva da $h(\boldsymbol{s}^*)=l_S$, onda je $\boldsymbol{s}^*$ optimalno rješenje problema diskretne raspodjele resursa s $\varphi(\boldsymbol{s})$ kao funkcijom cilja.

Dokaz. Očito tvrdnja slijedi iz Leme 1., obzirom da je minimiziranje $\varphi(\boldsymbol{s})$ ekvivalentno minimiziranju $h(\boldsymbol{s})$. □

Lema 3. (vidi [2])
Ako je raspodjela $\boldsymbol{s}$ takva da $h(\boldsymbol{s})>l_S$, onda postoje dvije stranke i i j, $s_i\geq 1$, tako da $\rho_j(s_j)<\rho_i(s_i-1)$.

Dokaz. Razmotrimo podmultiskup od L_S definiran s $L_S^-\equiv\{\rho_h(y)\in L_S:\rho_h(y)<\lambda_S\}$. Primijetimo da je L_S formiran od $p=|L_S^-|$ elemenata od L_S^- i od

$$(|S|-p)\geq 1$$

pojavljivanja λ_S. Neka je sad $\boldsymbol{s}$ raspodjela takva da $h(\boldsymbol{s}) > l_S$. Obzirom da neka stranka mora dobiti barem jedno mjesto, multiskup $H(\boldsymbol{s}) = \{\rho_h(y) : s_h \geq 1; y = 0, 1, \dots, s_h - 1\}$ nije prazan. Ima $|H(\boldsymbol{s})| = \sum_{h=1}^{n} s_h = S$ elemenata i $h(\boldsymbol{s})$ je upravo suma svih elemenata od $H(\boldsymbol{s})$, ubrajajući vrijednosti koje se ponavljaju. Neka je μ maksimum od $H(\boldsymbol{s})$. Obzirom da su prve razlike unaprijed neopadajuće, vrijedi $\mu = \rho_i(s_i - 1)$ za neku stranku i takvu da $s_i \geq 1$. Također, vrijedi da je $\mu \geq \lambda_S$, inače bi $H(\boldsymbol{s})$ sadržavao najviše $p < S$ elemenata. Tvrdimo da mora postojati stranka j te cijeli broj, $y \geq 0$ tako da $\rho_j(y) \in L_S \setminus H(\boldsymbol{s})$ i $\rho_j(y) < \mu$. Razlikujemo dva slučaja:

- Pretpostavimo $H(\boldsymbol{s}) \supseteq L_S^-$. U ovom slučaju mora vrijediti $\mu > \lambda_S$, u suprotnom bi se L_S i $H(\boldsymbol{s})$ sastojali od p elemenata od L_S^- te od $S - p$ pojavljivanja λ_S, implicirajući $h(\boldsymbol{s}) = l_S$. Ipak, obzirom da bi tada najviše $S - 1$ elemenata od $H(\boldsymbol{s})$ pripadalo L_S te $|L_S| = |H(\boldsymbol{s})|$, mora postojati $\rho_j(y) \in L_S \setminus H(\boldsymbol{s})$. Slijedi $\rho_j(y) \leq \lambda_S < \mu$.

- Pretpostavimo da postoji $\rho_j(y) \in L_S^- \setminus H(\boldsymbol{s})$. U ovom je slučaju $\rho_j(y) < \lambda_S \leq \mu$.

Stoga, tvrdnja vrijedi u bilo kojem slučaju. Ako je $s_j = 0$, onda $\rho_j(s_j) \leq \rho_j(y) < \rho_i(s_i - 1)$. Ako je $s_j \geq 1$, onda ne može vrijediti $s_j - 1 \geq y$, jer bi tada $\rho_j(y)$ pripadao $H(\boldsymbol{s})$. Stoga, $s_j \leq y$, zbog čega vrijedi $\rho_j(s_j) \leq \rho_j(y) < \rho_i(s_i - 1)$. □

Procedura funkcionira na "pohlepan" način jedino ako se bavi *marginalnim raspodjelama*, tj. izabire raspodjelu koja minimizira (ili maksimizira) funkciju cilja u svakom koraku. Preciznije, pohlepni algoritam definiramo na sljedeći način: polazeći od raspodjele $\boldsymbol{s} = (0, \dots, 0)$, u svakom koraku algoritam dodjeljuje još jedno mjesto stranci i tako da za trenutnu raspodjelu vrijedi $\rho_i(s_i) = \min\{\rho_h(s_h) : 1 \leq h \leq n\}$. Algoritam se zaustavlja kad je raspodijeljeno svih S mjesta. Ovo je ekvivalentno dodjeli mjesta za S najmanjih elemenata multiskupa $\{\rho_i(y) : y = 0, 1, ..., S - 1; i = 1, 2..., n\}$.

Teorem 4. (vidi [2])
Ako je $\varphi(\boldsymbol{s})$ separabilna funkcija i njena prva razlika unaprijed $\rho_i(\boldsymbol{s})$ je neopadajuća za svaki $i = 1, 2, \dots, n$, tada pohlepna procedura pruža optimalno rješenje za problem diskretne raspodjele resursa s $\varphi(\boldsymbol{s})$ kao funkcijom cilja.

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{s}^*$ rješenje koje dobijemo pohlepnim postupkom, Prema lemi 1. slijedi da je $h(\boldsymbol{s}^*) \geq l_S$. Pretpostavimo da vrijedi stroga nejednakost, tj. $h(\boldsymbol{s}^*) > l_S$. Prema lemi 3., slijedi da postoje dvije stranke i i j, $s_i \geq 1$, tako da $\rho_j(s_j) < \rho_i(s_i - 1)$. Ipak, u ovom slučaju $\boldsymbol{s}^*$ ne bi bilo rješenje dano pohlepnom procedurom, jer bi pohlepni algoritam preferirao dodijeliti dodatno mjesto stranci j umjesto stranci i, dajući stranci j ukupno $s_j^* + 1$ mjesta umjesto s_j^* te stranci i ukupno $s_i^* - 1$ mjesta umjesto s_i^*. □

Pohlepna procedura optimizacijski je algoritam za široku klasu funkcija cilja navedenih u Tablici 3. Možemo uočiti veliku sličnost između pohlepnih algoritama te metoda djelitelja. Zapravo, obje su iterativne procedure koje dodjeljuju jedno po jedno mjesto, kako bi se u svakom koraku postigao najveći mogući "profit" stranke. U pohlepnim algoritmima profit je samo apsolutna vrijednost smanjenja mjere nejednakosti koja se razmatra. Kod metoda djelitelja, profite se definira omjerom $v_i/d(s_i)$. Prisjetimo se kako kriterij djelitelja uvijek zadovoljava nejednakosti $x \leq d(x) \leq x+1$. Dva ekstrema, $d(x) = x+1$ i $d(x) = x$ odgovaraju d'Hondtovoj i Adamsovoj metodi (tj. metodi najmanjih djelitelja), tim redom. D'Hondtova metoda maksimizira $v_i/(s_i+1)$, prosječni broj glasova po zastupničkom mjestu nakon dodjele trenutnog mjesta, dok Adamsova metoda (tj. metoda najmanjih djelitelja) maksimizira v_i/s_i,

prosječan broj glasova po mjestu prije dodjele zastupničkog mjesta. Svaka druga metoda djelitelja je takva da $\frac{v_i}{s_i+1} \leq \frac{v_i}{d(s_i)} \leq \frac{v_i}{s_i}$.
Zamislimo da se broj mjesta stranke i mijenja od s_i do s_i+1 neprekidno. Negdje tijekom ove transformacije omjer glasova prema mjestima jednak je $\frac{v_i}{d(s_i)}$. Ukratko, dobit u svakoj metodi djelitelja uvijek se može interpretirati kao prosječan broj glasova po mjestu. Da zaključimo, ako algoritam koji dodaje elemente skupu jedan po jedan kako bi u svakom koraku postigao najveću dobit (za odgovarajući kriterij profita) definiramo kao "pohlepan", onda metode djelitelja zaista možemo smatrati pohlepnima. Pohlepna metoda raspodjele objedinjujući je faktor u dokazu rezultata optimalnosti za proporcionalne metode raspodjele. Tablica 4 prikazuje prve razlike unaprijed relevantnih mjera pravednosti te odgovarajući kriterij djelitelja. Ipak, metode djelitelja prate pohlepnu proceduru koja ne garantira ispunjavanje kvote u finalnoj raspodjeli mjesta. Za neke funkcije cilja koje nisu navedene u Tablici 3 svojstvo ispunjenja kvote neophodno je za postizanje minimalne moguće vrijednosti pod ograničenjima raspodjele (takve funkcije nazivamo *funkcijama svojstva kvote*). Za te funkcije, za svako rješenje koje ne poštuje donje i gornje granice, uvijek možemo pronaći bolje rješenje za koje vrijedi $\lfloor q_i \rfloor \leq s_i \leq \lceil q_i \rceil$.

$\varphi(s;v)$	$\rho_i(s_i)$	**Metoda djelitelja**
$\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)^2$	$\frac{2s_i+1}{v_i} - \frac{2S}{P}$	$s+\frac{1}{2}$ Sainte-Laguë
$\sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S}\right)^2$	$\frac{P^2}{S^2} - \frac{v_i^2}{s_i(s_i+1)}$	$\sqrt{s(s+1)}$ Metoda jednakih proporcija
$\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{P}{S}\right)$	$-\frac{v_i^2}{s_i(s_i+1)}$	$\sqrt{s(s+1)}$ Metoda jednakih proporcija
$\sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)$	$\frac{2s_i+1}{v_i} - \frac{S}{P}$	$s+\frac{1}{2}$ Sainte-Laguë
$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P}\right)^+$	$\begin{cases} \frac{1}{v_i}, & \text{ako } \frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{P} \geq 0 \\ 0, & \text{ako } \frac{s_i+1}{v_i} - \frac{S}{P} \leq 0 \\ \frac{s_i+1}{v_i} - \frac{S}{P}, & \text{inače} \end{cases}$	$s+1$ d'Hondt
$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i-q_i)^2}{q_i}$	$\frac{P}{S}\frac{2s_i+1}{v_i} - 2$	$s+\frac{1}{2}$ Sainte-Laguë
$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i-q_i)^2}{s_i}$	$1 - \frac{S^2}{P^2}\frac{v_i^2}{s_i(s_i+1)}$	$\sqrt{s(s+1)}$ Metoda jednakih proporcija

Tablica 4: Funkcije cilja, prve razlike unaprijed i odgovarajuće metode djelitelja

Također, može se pokazati da sve metode djelitelja daju optimalna rješenja uzimajući u obzir neku *funkciju uskog grla*, kako je opisano sljedećim teoremom. U ovome što slijedi, pretpostavit ćemo da kriterij djeljivosti $d(\boldsymbol{s})$ poprima isključivo pozitivne vrijednosti. U izrazima poput $min_i \frac{v_i}{d(s_i-1)}$ podrazumijeva se da se uzima minimum svih stranki i takvih da $s_i \geq 1$. Čak i u metodama djelitelja (poput Adamsove, tj. metode najmanjih djelitelja) u kojima je $d(0) = 0$ teorem koji slijedi, kao i njegov dokaz, ostaju pravovaljani, uz uvjet poštovanja konvencije da vrijedi: $\frac{v_i}{0} = +\infty$.

Teorem 5. (vidi [2])
Svaka metoda djelitelja s pozitivnim rastućim kriterijem djeljivosti $d(s)$ daje optimalno rješenje problema proporcionalne reprezentacije sa sljedećom funkcijom cilja: $\max_s \min_i \dfrac{v_i}{d(s_i - 1)}$.

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{s}^*$ rješenje dobiveno primjenom metode djelitelja s kriterijem djeljivosti $d(s)$ te neka je $\frac{v_l}{d(s_l^*-1)} = \min_i \frac{v_i}{d(s_i^*-1)}$. Primijetimo da, koju god metodu djelitelja primjenjivali, posljednji omjer koji uzimamo u obzir pri raspodjeli S mjesta je upravo $\frac{v_i}{d(s_i^*-1)}$ za svaki i, ako je $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ posljednja raspodjela. Pretpostavimo da postoji neka druga raspodjela $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}^*$ koja i dalje zadovoljava ograničenja problema (2) te neka vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i^* = S, \tag{4}$$

što pruža veću vrijednost za funkciju cilja. Ovo znači da postoji stranka h takva da vrijedi

$$\frac{v_h}{d(s_h - 1)} = \min_i \frac{v_i}{d(s_i - 1)} > \min_i \frac{v_i}{d(s_i^* - 1)} = \frac{v_l}{d(s_l^* - 1)}. \tag{5}$$

Obzirom da je kriterij djeljivosti monotono rastuća funkcija, mora vrijediti $s_l < s_l^*$. U suprotnom, ako bi vrijedilo $s_l \geq s_l^*$, onda bi vrijedilo $d(s_l - 1) \geq d(s_l^* - 1)$ te stoga $\frac{v_h}{d(s_h-1)} > \frac{v_l}{d(s_l^*-1)} \geq \frac{v_l}{d(s_l-1)}$, što je očito kontradikcija s činjenicom da je $\frac{v_h}{d(s_h-1)} = \min_i \frac{v_i}{d(s_i-1)}$, kako je navedeno u (7). Nadalje, budući da je $s_l < s_l^*$, te obzirom da ograničenje (6) mora vrijediti za $\boldsymbol{s}$, mora postojati stranka, recimo, j, takva da $s_j > s_j^*$ te, obzirom da su varijable cjelobrojne, ovo znači da $s_j \geq s_j^* + 1$.
Za nastavak dokaza potrebna nam je pomoćna lema:

Lema (vidi [2]):
Metoda raspodjele mjesta je metoda djelitelja ako i samo ako daje raspodjelu $\boldsymbol{t}$ takvu da

$$\min_i \frac{v_i}{d(t_i - 1)} \geq \max_i \frac{v_i}{d(t_i)}. \tag{6}$$

Stoga, primjenjujući pomoćnu lemu i prisjetivši se da vrijedi $s_j \geq s_j^* + 1$ $(tj.\ s_j - 1 \geq s_j^*)$ dobivamo

$$\frac{v_l}{d(s_l^*-1)} = \min_i \frac{v_i}{d(s_i^*-1)} \geq \max_i \frac{v_i}{d(s_i^*)} \geq \frac{v_j}{d(s_j^*)} \geq \frac{v_j}{d(s_j-1)} \geq \min_i \frac{v_i}{d(s_i-1)} = \frac{v_h}{d(s_h-1)} > \frac{v_l}{d(s_l^*-1)}.$$

(7)

Stoga, zaključujemo kako (7) ne može vrijediti. □

2.3 Posljedice optimizacijskog pristupa na razmjernu zastupljenost

Dosad smo u osnovi pokazali kako su razmjerne izborne formule algoritmi te kako minimiziraju određene i ne nužno jedinstvene funkcije cilja. Svaka funkcija cilja može se smatrati skrivenim kriterijem koji leži u osnovi odgovarajuće razmjerne formule. Osim što nudi algoritamski okvir za mnoge razmjerne metode putem pohlepnih postupaka raspodjele, ovakav pristup ima važne posljedice za procjenu i dizajn izbornih sustava, koje možemo ukratko izraziti na sljedeći način:

1. pruža nedvosmislenu interpretaciju razlike između razmjernih metoda, što lako možemo prevesti u političke pojmove kako bismo razumjeli različit koncept zastupljenosti koji svaka metoda prati te kako bi objasnili trendove uočene u njihovom ponašanju;

2. omogućuje nam kreiranje novih izbornih metoda tako da izaberemo neke druge kriterije nepravednosti ili nerazmjernosti, za koje se može ispostaviti da su jednako dobre kao i one već poznate metode;

3. može se koristiti za usporedbu razmjernih metoda na temelju njihove složenosti.

Prvo, pokažimo kako funkcije cilja navedene u Tablici 3 nude koristan uvid u različita značenja koja svaka izborna formula pridaje konceptu zastupljenosti:

- **Sainte – Laguë metoda**
  Ova metoda kreirana je s namjerom da svakom biraču garantira istu moć ili dio zastupljenosti. Kad je $\rho = 2$, funkcija cilja 2 u Tablici 3 mjeri nerazmjernost raspodjele mjesta u smislu moći svakog pojedinog birača. Pravednost između glasača znači da svih P glasača mora imati istu moć ili utjecaj na rezultat izbora, tako da ako je ukupni broj zastupnika S, svaki glasač mora imati moć nad $\frac{S}{P}$ zastupnika. S druge strane, glasači v_i koji svoj glas daju stranci i zapravo imaju moć nad $\frac{s_i}{v_i}$ zastupnika, obzirom da je s_i broj mjesta dodijeljen stranci i. Stoga, razlike između $\frac{s_i}{v_i}$ i $\frac{S}{P}$ određuju grešku tj. devijaciju svakog glasača od idealne raspodjele. Prirodno je vjerovati da, ako su takve devijacije uzrokovane neutralnom metodom, moraju biti dopuštene samo ako su slučajne, a ne sustavne. Sainte - Laguë metoda je "poštena" jer minimizira ove devijacije pod pretpostavkom Gaussove ili normalne distribucije grešaka. Primijetimo da je minimiziranje funkcije 1 uz $\rho = 2$ ekvivalentno minimiziranju funkcije 8, tj. $\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - q_i)^2}{q_i}$,, gdje je q_i točna kvota i-te stranke, budući da se razlikuju jedino pozitivnim višekratnikom (od $\frac{P}{S}$). Ova funkcija predstavlja sumu kvadrata odstupanja između stvarnog broja mjesta dodijeljenih svakoj stranci te idealnog broja mjesta, podijeljeno s tim idealnim brojem. Relativne greške ove vrste uobičajene su u procjeni približnih rješenja. S druge strane, kad je $s_i + \ldots + s_n = S$, funkcija 4 razlikuje se od funkcije 1 s $\rho = 2$ po aditivnoj konstanti te se stoga također minimizira Sainte – Laguë metodom.

- **Metoda jednakih proporcija**
  Metoda jednakih proporcija koristi se u SAD-u više od 50 godina (gdje se naziva Hillovom metodom) za dodjelu broja zastupnika u Zastupničkom domu SAD-a različitim državama na osnovu njihove populacije. Isti uspjeh nije doživjela u Europi gdje je problem najčešće dodjeljivanje mjesta strankama na temelju njihovih glasova. Razlog je taj što svakoj stranci automatski dodjeljuje najmanje jedno mjesto bez obzira na broj glasova zbog čega stvara vrlo visoku frakcijalizaciju (razmrvljenost) mjesta u zakonodavnom tijelu. Ovakva bi metoda bila vrlo prikladna i za europski kontekst kada bi doveli prvog djelitelja s nule na malu pozitivnu vrijednost, čime bi se izbjegla velika frakcijalizacija. Tri različite funkcije cilja navedene su za ovu metodu u

Tablici 3. Primijetimo kako je za sve njih količina $\frac{v_i}{s_i}$ cijena , u smislu glasova, po kojoj je i-ta stranka "kupila" (dobila) jedno mjesto. Ako sve stranke tretiramo na isti način, cijena po mjestu trebala bi biti jednaka za sve stranke. Zapravo, ovaj trošak trebao bi biti jednak $\frac{P}{S}$. Ova metoda minimizira relativnu grešku između stvarne raspodjele mjesta i one idealne, normaliziranu s obzirom na broj mjesta stvarno dodijeljenih svakoj stranci (funkcija 9). Nadalje, funkcija 3 u skladu s metodom jednakih proporcija minimizira ponderirani zbroj razlika između cijene po mjestu koju svaka stranka plaća te stvarne cijene mjesta, gdje se dodatni trošak (pozitivna odstupanja) ocjenjuje nepoželjnijim što je veća stranka, obzirom da je težina dodijeljena svakom odstupanju jednaka $v_i, i = 1, 2 \ldots, n$. Primijetimo da se, obzirom da je $s_1+s_2+...+s_n = S$, funkcija 2 uz $\rho = 2$ razlikuje od funkcije 3 u aditivnoj konstanti te od funkcije 9 po pozitivnom konstantnom faktoru.

- **D'Hondtova metoda**
  D'Hondtova metoda jedna je od najčešće korištenih metoda u Europi. Iako je oštro kritizirana kao "najmanje razmjerna metoda", pristup cjelobrojne optimizacije koji smo predložili za usvajanje pokazuje kako ova metoda utjelovljuje vrlo važan kriterij razmjernosti. Dodjela mjesta koju daje d'Hondtova metoda maksimizira funkciju uskog grla 5, koja se odnosi na minimalnu cijenu koju stranka plaća kako bi dobila jedno mjesto ($\frac{v_i}{s_i}$). Ako raspodjela mjesta daje maksimalnu vrijednost za ovu vrstu funkcije, znači da je razlika između cijene po mjestu plaćene od strane različitih stranki izglađena što je više moguće. Štoviše, takvo svojstvo optimalnosti pruža direktno objašnjenje činjenice da ova metoda teži dati prednost većim strankama te biti stroga prema manjima. Zapravo, prisiljavanjem minimalne cijene po mjestu da postigne najveću moguću vrijednost automatski ćemo odbaciti manje stranke koje nisu u mogućnosti platiti ju. Također, d'Hondtova metoda minimizira i Schultzov indeks (funkcija 6) koji se koristi u ekonomiji za mjerenje dohodovne nejednakosti. U ovom slučaju, funkcija mjeri ukupnu količinu prekomjerne zastupljenosti koja je nastala dodjelom mjesta. Stoga, iako će neka stranka morati biti prezastupljena budući da se ne može dodijeliti točna kvota, ideja razmjernosti utjelovljena u ovoj metodi garantira da, među svim raspodjelama, odabrana je ona koja daje najmanju moguću ukupnu prekomjernu zastupljenost.

- **Metoda najmanjih djelitelja**

  Obrazloženje na kojemu se temelji metoda najmanjih djelitelja komplementarno je onome utjelovljenom u d'Hondtovoj metodi. Zapravo, ova metoda analogno će pokušati izgladiti razliku između troškova (tj. broja glasova) po dobivenom zastupničkom mjestu što je više moguće, ali ovaj će put proces izravnavanja prisiliti najvišu plaćenu cijenu da bude što manja (funkcija 7). Zbog ovog svojstva, metoda najmanjih djelitelja težit će uključivanju svih stranki u zastupnički sustav. Jednako kao metoda jednakih proporcija, ova metoda trenutno nije prihvaćena u Europi iako se o njoj temeljito raspravljalo u povijesti raspodjele u SAD-u.

2.3.1 Indeksi nerazmjernosti

Važna politička posljedica izbornih sustava upravo je utjecaj na razmjernost ili nerazmjernost izbornih rezultata. *Nerazmjernost* označava odstupanje udjela mjesta stranaka od udjela glasova. Savršena razmjernost je situacija u kojoj svaka stranka dobiva točno isti udio mjesta kao i udio glasova koji dobiva. Pokušavamo minimizirati nerazmjernost i stvoriti ishod koji je, što je više moguće, blizak savršenoj razmjernosti. Ipak, ona nije moguća. Neki sustavi postižu više razmjerne rezultate od drugih. U tu svrhu proučavamo koncepte razmjernosti i nerazmjernosti.
Iako se čine kao jednostavni koncepti, pitanje pronalaska najboljeg načina za mjerenje razmjernosti ili nerazmjernosti puno je teže za odgovoriti. Sve ove mjere imaju isto polazište: započinju bilježenjem razlika između postotka mjesta i postotka glasova koje je dobila svaka stranka. Oni se razlikuju u načinu zbrajanja odstupanja u broju mjesta i glasova. Pri korištenju mjera razmjernosti tražimo velike vrijednosti tih mjera kako bismo zadobili najpošteniji, tj. najviše razmjeran sustav. S druge strane, kad koristimo mjere nerazmjernosti, tražimo male vrijednosti mjere kako bismo zadobili najpošteniji sustav. Zapravo, mjere nerazmjernosti i razmjernosti dvije su strane potpuno istog novčića.
U nastavku ćemo koristiti izraz "mjere nerazmjernosti" jer vrijednosti svih indeksa u nastavku rastu kad se nerazmjernost povećava. Dakle, ti indeksi alternativni su načini mjerenja ovog fenomena i dovode do korisnih informacija o robusnosti pojedinih metoda. Metoda je *robusna* ako u dovoljno velikom broju slučajeva istodobno daje dobre vrijednosti za različite indekse razmjernosti. Najčešće korišteni indeksi nerazmjernosti su sljedeći:

- **Rae indeks**
  Ovo je najstarija mjera nerazmjernosti koja koristi prosjek odstupanja. Točnije, zbrajamo apsolutne razlike između udjela glasova $V_i = \frac{v_i}{P}$ (P - ukupan broj glasova) te udjela mjesta $S_i = \frac{s_i}{S}$ (S - ukupan broj zastupničkih mjesta koja treba raspodijeliti), a rezultat dijelimo s brojem nesitnih političkih stranaka n:

$$R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |V_i - S_i|\,,$$

  gdje se uzimaju one stranke i koje imaju veći udio glasova od 0.005, tj. gledaju se one stranke koje nisu sitne. Raeov indeks poprima vrijednost 0 u slučaju potpune razmjernosti te vrijednost 1 u slučaju potpunog nerazmjera. Problem ovog indeksa je njegova osjetljivost na postojanje malih stranki jer zbog njih indeks podcjenjuje stvarnu nerazmjernost izbornog sustava. Stoga, postojanje puno takvih stranki s malim postotkom glasova i bez mjesta u parlamentu dovelo bi do manjih vrijednosti Raeovog indeksa i izborni sustav bi izgledao da je proporcionalniji nego što zapravo jest.

- **Loosemore-Hanby indeks**
  Ovaj indeks jedna je od najčešće korištenih mjera nerazmjernosti. Dan je zbrojem apsolutnih razlika između udjela glasova V_i te udjela mjesta S_i, a taj se zbroj onda dijeli s 2:

$$LH = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} |V_i - S_i|\,.$$

Dok Raeov indeks mjeri prosječno odstupanje, Loosemore-Hanbyjev indeks mjeri ukupno odstupanje. Jedan od nedostataka Loosemore-Hanby indeksa njegova je osjetljivost na broj stranaka, kad ima velik broj relativno malih stranaka; tada će vrijednost Loosemore-Hanby biti veća što je veći broj stranaka, čak i ako su neke od njih tako male da se mogu smatrati kao beznačajne stranke.

- **Indeks najmanjih kvadrata**:
  Ključna značajka ovog indeksa je da registrira nekoliko većih odstupanja puno jače nego puno manjih. Podrazumijeva kvadriranje razlika udjela glasova i mjesta za svaku stranku, zbrajanje tih vrijednosti, dijeljenje sume s 2 te uzimanje korijena te vrijednosti:

  $$LS = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(V_i - S_i)^2}.$$

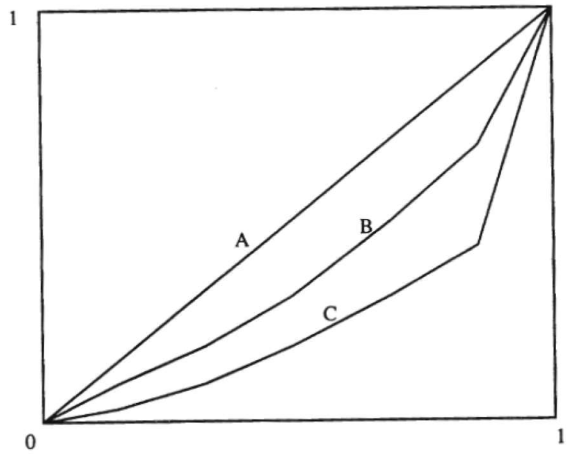
  Ovaj indeks mjeri nerazmjernost po svim strankama i poprima vrijednost između 0 i 1. Drugi način shvaćanja ovog indeksa je da ponderira odstupanja prema njihovim vrijednostima, čineći veća odstupanja značajnijima od manjih odstupanja. U slučaju postojanja samo dvije stranke, ovaj indeks daje jednake vrijednosti kao i prethodna dva, dok u drugim slučajevima daje približno srednju vrijednost tih dviju mjera.

3 Pretjerana i nedostatna zastupljenost u razmjernim izbornim sustavima

U prethodnom poglavlju zaključeno je kako problem raspodjele mjesta razmjerno glasovima (ili populaciji) nije jedinstven. Izborne formule i metode kreirane su kako bi minimizirale udaljenost između udjela glasova i mjesta, no problem je što se takva udaljenost može mjeriti na mnogo različitih načina. Svaka formula odgovara određenoj mjeri (ne)razmjernosti te daje optimalan rezultat za problem razmjerne zastupljenosti gdje se takva mjera odabire kao cilj. Unatoč tome, jednom kad su mjesta dodijeljena, neke stranke dobiju veći broj mjesta od onoga kojeg su trebale dobiti, dok neke dobiju manji od onoga kojeg zaslužuju obzirom da je zbog cjelobrojne prirode zastupničkih mjesta obično nemoguće postići potpuno pravedno dodjeljivanje mjesta. U ovom poglavlju analiziramo nejednakost koja proizlazi među strankama nakon dodjele mjesta. Predstavit ćemo novi način karakterizacije razmjernih metoda dodjele mjesta temeljen na konceptu "majorizacije", ukazujući na sličnosti između mjerenja nerazmjernosti te mjerenja dohodovne nejednakosti.

3.1 Upravljanje pretjeranom i nedostatnom zastupljenošću

Za danu distribuciju mjesta s, stranka i je *prezastupljena* ako je omjer između mjesta te glasova koje dobiva i-ta stranka veći nego omjer ukupnog broja mjesta i ukupnog broja glasova: $\frac{s_i}{v_i} > \frac{S}{P}$, odnosno ako je cijena koju je stranka i platila za svako mjesto manja nego stvarni trošak po mjestu, $\frac{v_i}{s_i} < \frac{P}{S}$. S druge strane, stranka i je *podzastupljena* kad vrijede suprotne nejednakosti. Očito, pravedna dodjela mjesta znači da nema prezastupljenosti ni podzastupljenosti. Ona sugerira kako omjer $\frac{s_i}{v_i}$ daje istu vrijednost za svaki i, odnosno da vrijedi $\frac{s_i}{v_i} = \frac{S}{P}, \ \forall i$.
Na omjer dodijeljenih mjesta i primljenih glasova pojedine stranke možemo gledati kao na kvalitetu zastupljenosti te stranke u sustavu. Ipak, omjer između ukupnog broja mjesta



Slika 2: Lorenzove krivulje

te ukupnog broja glasova može se smatrati koeficijentom razmjera usvojenim za pretvorbu težine svake stranke u zemlji u njezinu težinu u parlamentu. Stranka je savršeno zastupljena samo ako je njen omjer broja mjesta i broja glasova jednak fiksnom koeficijentu razmjera $\frac{S}{P}$. Stoga, ideja o globalnoj kvaliteti zastupljenosti dobivenoj izbornom procedurom može se izvesti pomoću takozvanog *vektora zastupljenosti*: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, gdje je $y_i = \frac{s_i}{v_i}, i = 1, 2, \ldots, n$. Pojedinačni elementi vektora omogućuju nam identificirati tko je kažnjen, a tko nagrađen trenutnom raspodjelom mjesta. Postavlja se sljedeće pitanje: može li se kvaliteta zastupljenosti, ili ekvivalentno, pravednost raspodjele mjesta poboljšati prebacivanjem nekih mjesta od prezastupljenih stranki onim podzastupljenim? Odgovor je povezan s indeksom koji se koristi za mjerenje takve nejednakosti.

3.2 Lorenzove krivulje

Prvi pokušaj metodičke analize dohodovne nejednakosti pripada Maxu Lorenzu koji 1905. formalno definira koncept "pravednih" distribucija bogatstva i uspoređuje ih metodom danas poznatom pod nazivom *Lorenzove krivulje.* Lorenzove krivulje predstavljaju kumulativne udjele bogatstva koji odgovaraju rastućoj populaciji. Ako je $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ...y_n)$ distribucija bogatstva n osoba te ako su te osobe poredane od najsiromašnije do najbogatije, tada Lorenzova krivulja prolazi točkama (h, T_h) za $h = 0, 1, \ldots, n$, gdje je

$$T_h = \frac{\sum_{i=1}^{h} y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{h} y_i}{T},$$

a T je ukupna količina bogatstva ili prihoda. Ako je bogatstvo između n pojedinaca raspodijeljeno na najpravedniji način, gornje točke u potpunosti su poredane tako da je krivulja zapravo ravna linija. U suprotnom, dobit ćemo konveksnu krivulju koja leži ispod ravne linije te s istim krajnjim točkama. Što je krivulja više savijena, raspodjela je više koncentrirana ili nerazmjerna. Na Slici 2 distribucija bogatstva koja odgovara krivulji B manje je koncentrirana, tj. pravednija je nego ona koja odgovara krivulji C, dok je najpravednija raspodjela uvijek predstavljena krivuljom A.

U vezi s tim možemo promatrati i *Ginijev koeficijent koncentracije* ili *Ginijev indeks*, statističku mjeru koja se koristi za predstavljanje raspodjele dohotka ili bogatstva unutar neke populacije, a koji dobijemo dijeljenjem površine između Lorenzove krivulje i linije potpune jednakosti s ukupnom površinom ispod linije potpune jednakosti. Indeks može poprimiti vrijednosti iz segmenta $[0, 1]$, gdje je:

- 0 – potpuna jednakost (svaka osoba u populaciji ima jednak udio u dohotku, tj. bogatstvu)

- 1 – potpuna nejednakost (jedna osoba ili skupina posjeduje sav dohodak, tj. bogatstvo, dok ostatak populacije ničime ne raspolaže).

Neki empirijski rezultati za Ginijev indeks pokazuju različito ponašanje različitih metoda u ovisnosti o pojedinim slučajevima. Ipak, "prosječni" uvjetni zaključak mogao bi biti sljedeći:

EP=SL $\leq MS \leq DA \leq HM \leq DH \leq SD \leq BE$, u smislu da metoda jednakih razmjera (EP) i Saint-Laguë metoda (SL) prikazuju najbolji Gini omjer među metodama djelitelja.

3.3 Koncept majorizacije

Problem zastupljenosti mogli bismo promatrati i s gledišta koncepta majorizacije. Pretpostavimo da vektori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ imaju jednak broj komponenti te jednaku ukupnu sumu njihovih komponenti. Također, neka je T ukupna količina nekog resursa. Kažemo da je vektor $\boldsymbol{a}$ *majoriziran* pomoću vektora $\boldsymbol{b}$ ako je za svaki $h = 1, 2, \ldots, n$ suma h najvećih komponenti u $\boldsymbol{a}$ uvijek manja ili jednaka sumi najvećih h komponenti u $\boldsymbol{b}$, a jednakost vrijedi za $h = n$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{h} a_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{h} b_{[i]}, h = 1, 2, ..., n-1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} b_{[i]} = T, \end{aligned} \tag{8}$$

gdje su $a_{[1]}, a_{[2]}, ..., a_{[n]}$ komponente vektora $\boldsymbol{a}$ poredane u nerastućem redoslijedu. Nejednakosti u (8) jedan su od mnogih načina za formulaciju koncepta majorizacije. Problem primjene koncepta majorizacije na vektore raspodjele dobivene različitim metodama alokacije mjesta leži u tome što ukupna suma komponenti vektora mora biti jednaka za sve vektore. Ali, ukupne sume $T = \sum_{i=1}^{n} y_i$ za vektore raspodjele dobivene različitim metodama generalno nisu jednake (iako je ukupna suma mjesta dodijeljenih različitim metodama ista, jednaka S). Možemo usporediti kumulativne omjere komponenti vektora raspodjele kad su komponente poredane u padajućem redoslijedu. Ali, empirijski primjeri za različite metode ne pokazuju striktno majoriziranje (osim što metoda djelitelja BE majorizira sve druge metode). Za različite slučajeve dobivamo i različite rezultate za različite metode.

4 Pogodovanje velikim državama

Metode djelitelja možemo uspoređivati s određene točke gledišta, takozvanog "pogodovanje velikim državama" (engl. favouring large states). Ovaj pojam opisuje činjenicu da, za dane populacije, različite metode djelitelja mogu dodijeliti različit broj mjesta odgovarajućim državama, u smislu da određena metoda dodjeljuje više mjesta većim državama nego manjim s obzirom na dodjelu mjesta drugom metodom djelitelja (koristimo izraze "država" i populacija" umjesto "stranka" i "glas", tim redom). Ovaj koncept spominju Balinski i Young (vidi [1]), gdje su aksiomatskim pristupom dane sljedeće definicije i teorem. Temelji se na usporedbi omjera između odgovarajućih djelitelja u nizovima (ili S-torkama) pozitivnih realnih brojeva koji definiraju metode djelitelja. Neka $\boldsymbol{s'}$ (i $\boldsymbol{s''}$, tim redom) označava vektor mjesta dodijeljenih odgovarajućim državama, a neka $\boldsymbol{v}$ označava vektor populacije svih država. Sa S označavamo ukupan broj zastupničkih mjesta, tj. "veličinu parlamenta".

Definicija 4.1. (vidi [1])
Neka su $v_i > v_j$ populacije dviju država i i j. Nadalje, neka alokacija mjesta $\boldsymbol{s'}(\boldsymbol{v}, S')$ metode djelitelja M' dodjeljuje s_i te s_j mjesta i-toj i j-toj državi, tim redom, te neka alokacija mjesta $\boldsymbol{s''}(\boldsymbol{v}, S'')$ metode djelitelja M'' dodjeljuje $s_i + s_j$ mjesta ovom paru država (i, j). Tada $\boldsymbol{s''}$ *pogoduje velikoj državi* u odnosu na $\boldsymbol{s'}$ ako dodjeljuje najmanje s_i mjesta i-toj državi veličine parlamenta S'', za svaki izbor v_i, v_j, S' te S''.

Definicija 4.2. (vidi [1])
Metoda djelitelja M'' *pogoduje velikim državama* nad metodom M' ako bilo koje rješenje $\boldsymbol{s''} \in M''$ pogoduje velikoj državi prema bilo kojem rješenju $\boldsymbol{s'} \in M'$.

Teorem 6. (vidi [1])
Neka su M' i M'' metode djelitelja određene kriterijima djelitelja d' i d'' tim redom, gdje za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$ vrijedi $\frac{d''(k)}{d''(m)} < \frac{d'(k)}{d'(m)}$. Tada metoda M'' pogoduje velikim državama nad metodom M'. □

Budući da učinci metode djelitelja ovise o omjeru između uzastopnih djelitelja, možemo usporediti različite metode djelitelja pomoću omjera $\frac{d(k+1)}{d(k)}, k = 1, 2, \ldots, S-1$ (slično, možemo gledati postotak povećanja djelitelja koji se koristi za dodjelu svakog sljedećeg mjesta, tj. $\frac{d(k+1)-d(k)}{d(k)} * 100\%$).
U Tablici 6 možemo vidjeti ove omjere za razne, dobro poznate metode djelitelja. Poredani su u smislu pogodovanja velikim državama: prva je metoda belgijska metoda (BE) koja pogoduje velikim državama nad ostalim spomenutim metodama. Napomenimo da, ako je u metodi djelitelja njezin prvi djelitelj $d(1)$ jednak nuli, to znači da ta metoda svakoj državi (ili stranci) automatski dodjeljuje barem jedno mjesto bez obzira na broj stanovnika (ili glasova).

Pokazat ćemo kako je moguće na uređen način uvesti nove metode djelitelja između bilo koje dvije metode djelitelja koje imaju svojstvo da jedna pogoduje velikim državama nad drugom. Ovo slijedi iz nekoliko nejednakosti nizova, koje se temelje na omjerima harmonijske, geometrijske, aritmetičke te kvadratne sredine.

Metoda djelitelja i njeni djelitelji	**2./1.**	**3./2.**	**4./3.**	**5./4.**	**6./5.**
Belgijska, $d(k) = \frac{k+1}{k}$ (1,1.5,2,2.5,...)	1.50	1.3333	1.25	1.20	1.1667
D'Hondt, $d(k) = k$ (1,2,3,...)	2	1.5	1.3333	1.25	1.20
Modificirana Sainte-Lague (1.4,3,5,7...)	2.1429	1.6667	1.40	1.2857	1.2222
Sainte-Lague, $d(k) = 2k - 1$ (1.4,3,5,7...)	3	1.6667	1.40	1.2857	1.2222
Jednake proporcije, $d(k) = \sqrt{k(k-1)}$ $(0, \approx 1.41, ...)$	∞	1.7321	1.4142	1.291	1.2247
Danska, $d(k) = 3k - 2$ (1,4,7,...)	4	1.75	1.4286	1.30	1.2308
Najmanji djelitelji, $d(k) = k - 1$ (0,1,2,...)	∞	2	1.5	1.333	1.25

Tablica 6: Omjeri $d(k+1)/d(k), k = 1, 2, ..., 5$ djelitelja

4.1 Uređeno uvođenje novih metoda djelitelja

Uzimajući u obzir koncept "pogodovanja velikim državama" i Teorem 6., možemo promatrati pozitivne, rastuće n-torke (ili nizove) realnih brojeva. Uz pretpostavku da su (b_n) i (c_n) dva rastuća niza pozitivnih realnih brojeva sa svojstvom

$$\frac{b_k}{b_m} < \frac{c_k}{c_m}, \quad \forall k > m \geq 1, \tag{9}$$

slijedi da niz (b_n) određuje metodu djelitelja koja "pogoduje velikim državama" nad metodom djelitelja definiranom nizom (c_n).

Primjer:
Sljedeća dva niza iz Tablice 6,

$$b_n = \frac{n+1}{2} \qquad \text{(tj. } 1, 1.5, 2, 2.5, \ldots) \text{ - djelitelji u belgijskoj metodi (BE)}, \tag{10}$$

$$c_n = 3n - 2 \qquad \text{(tj. } 1, 4, 7, 10, \ldots) \text{ - djelitelji u danskoj metodi (DA)} \tag{11}$$

zadovoljavaju nejednakost (9), tj. vrijedi

$$\frac{k+1}{m+1} < \frac{3k-2}{3m-2}, \tag{12}$$

za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$.

Može doći do nejednakosti među nizovima pozitivnih realnih brojeva s obzirom na ova svojstva, koristeći pojmove harmonijske, geometrijske, artimetičke te kvadratne sredine. Ove nejednakosti daju mogućnost uvođenja nekih nizova između dva niza na uređeni način. U vezi s nejednakošću (9), možemo izreći sljedeću tvrdnju, pri čemu nizovi ne moraju nužno biti monotoni.

Propozicija 1. Neka su (b_n) i (c_n) nizovi pozitivnih realnih brojeva takvi da $\frac{b_k}{b_m} < \frac{c_k}{c_m}$, za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$. Tada postoji niz (a_n) takav da

$$\frac{b_k}{b_m} < \frac{a_k}{a_m} < \frac{c_k}{c_m}, \quad \text{za sve cijele brojeve } \ k > m \geq 1. \tag{13}$$

Dokaz. Definirajmo niz (a_n) izrazom za njegov opći član: $a_n = \frac{b_n + c_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog pretpostavke vrijedi $b_k c_m < c_k b_m$ za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$. Stoga, vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\frac{b_k}{b_m} < \frac{b_k + c_k}{b_m + c_m} \qquad \text{i} \qquad \frac{b_k + c_k}{b_m + c_m} < \frac{c_k}{c_m}, \tag{14}$$

što dokazuje (13), obzirom da je $\frac{a_k}{a_m} = \frac{b_k + c_k}{b_m + c_m}$. □

Napomena 1:
Za dane pozitivne nizove (b_n) i (c_n) takve da vrijedi nejednakost (9), u Propoziciji 1. možemo konstruirati novi niz (a_n) na način da je svaki element od (a_n) aritmetička sredina odgovarajućih elemenata od (b_n) i (c_n), tj.

$$a_n = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Analogno, možemo formirati nizove $(h_n), (g_n), (q_n)$ na način da je svaki element tih nizova harmonijska, geometrijska te kvadratna sredina odgovarajućih elemenata od (b_n) i (c_n), tim redom. Dakle,

$$h_n = \frac{2}{\frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}} = \frac{2 b_n c_n}{b_n + c_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

$$g_n = \sqrt{b_n c_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$q_n = \sqrt{\frac{b_n^2 + c_n^2}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Teorem 7. Neka su (b_n) i (c_n) nizovi pozitivnih realnih brojeva tako da

$$\tfrac{b_k}{b_m} < \tfrac{c_k}{c_m}, \quad \text{za sve cijele brojeve} \quad k > m \geq 1.$$

Neka su nizovi (h_n), (g_n), (a_n) i (q_n) konstruirani pomoću izraza (16), (17), (15) te (18), tim redom. Tada vrijedi:

1. Ako $b_k b_m < c_k c_m, \qquad \forall k > m \geq 1$, tada
   $\frac{b_k}{b_m} < \frac{h_k}{h_m} < \frac{g_k}{g_m} < \frac{a_k}{a_m} < \frac{q_k}{q_m} < \frac{c_k}{c_m}$.
2. Ako $b_k b_m > c_k c_m, \qquad \forall k > m \geq 1$, tada
   $\frac{b_k}{b_m} < \frac{q_k}{q_m} < \frac{a_k}{a_m} < \frac{g_k}{g_m} < \frac{h_k}{h_m} < \frac{c_k}{c_m}$.

Dokaz. Prvo, dokažimo kako nejednakost $\frac{b_k}{b_m} < \frac{h_k}{h_m} < \frac{c_k}{c_m}$ vrijedi za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$. Zbog (16) vrijedi

$$\tfrac{h_k}{h_m} = \tfrac{b_k}{b_m} \tfrac{c_k}{c_m} \tfrac{b_m + c_m}{b_k + c_k} > \tfrac{b_k}{b_m},$$

obzirom da $\frac{c_k}{c_m} \frac{b_m + c_m}{b_k + c_k} > 1$, kako slijedi zbog (14). Analogno, imamo

$$\tfrac{h_k}{h_m} = \tfrac{c_k}{c_m} \tfrac{b_k}{b_m} \tfrac{b_m + c_m}{b_k + c_k} < \tfrac{c_k}{c_m},$$

obzirom da $\frac{b_k}{b_m} \frac{b_m + c_m}{b_k + c_k} < 1$. Nadalje, dokažimo kako vrijedi nejednakost $\frac{b_k}{b_m} < \frac{q_k}{q_m} < \frac{c_k}{c_m}$. Iz (18) vrijedi

$$\tfrac{q_k}{q_m} = \tfrac{\sqrt{b_k^2 + c_k^2}}{\sqrt{b_m^2 + c_m^2}} = \tfrac{b_k}{b_m} \tfrac{\sqrt{1 + (\frac{c_k}{b_k})^2}}{\sqrt{1 + (\frac{c_m}{b_m})^2}} > \tfrac{b_k}{b_m}$$

obzirom da $\frac{c_m}{b_m} < \frac{c_k}{b_k}$ (vrijedi iz pretpostavke teorema). Analogno,

$$\tfrac{q_k}{q_m} = \tfrac{\sqrt{b_k^2 + c_k^2}}{\sqrt{b_m^2 + c_m^2}} = \tfrac{c_k}{c_m} \tfrac{\sqrt{(\frac{b_k}{c_k})^2 + 1}}{\sqrt{(\frac{b_m}{c_m})^2 + 1}} < \tfrac{c_k}{c_m}$$

obzirom da $\frac{b_k}{c_k} < \frac{b_m}{c_m}$. Dokažimo sada nejednakosti u teoremu pod 1. i 2.

Ad 1. Prvo, iz (16) i (17) slijedi da za sve cijele brojeve $k > m \ (\geq 1)$ vrijedi

$$\frac{h_k}{h_m} < \frac{g_k}{g_m} \iff \frac{b_k c_k}{b_k + c_k} \frac{b_m + c_m}{b_m c_m} < \frac{\sqrt{b_k c_k}}{\sqrt{b_m c_m}} \tag{19}$$

$$\iff \frac{\sqrt{b_k c_k}}{\sqrt{b_m c_m}} < \frac{b_k + c_k}{b_m + c_m} \tag{20}$$

$$\iff \frac{g_k}{g_m} < \frac{a_k}{a_m}.$$

Tada slijedi:

$$
\begin{aligned}
\frac{g_k^2}{g_m^2} < \frac{a_k^2}{a_m^2} &\iff \frac{b_k c_k}{b_m c_m} < \frac{b_k^2 + 2b_k c_k + c_k^2}{b_m^2 + 2b_m c_m + c_m^2} \\
&\iff b_k c_k b_m^2 + b_k c_k c_m^2 < b_m c_m b_k^2 + b_m c_m c_k^2 \qquad (21) \\
&\iff b_m c_k (b_m b_k - c_k c_m) + c_m b_k (c_m c_k - b_k b_m) < 0 \\
&\iff (b_m b_k - c_k c_m)(b_m c_k - c_m b_k) < 0, \qquad (22)
\end{aligned}
$$

a nejednakost (22) vrijedi jer $(b_m b_k - c_k c_m) < 0$ i $(b_m c_k - c_m b_k) > 0$ po pretpostavci prvog slučaja te po pretpostavci teorema. Stoga, zbog ekvivalentnosti (koju dobijemo korjenovanjem izraza), vrijede nejednakosti (19) i (20). Također, iz (15) i (18) slijedi kako za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$ vrijedi

$$
\frac{a_k}{a_m} < \frac{q_k}{q_m} \iff \frac{b_k + c_k}{b_m + c_m} < \frac{\sqrt{b_k^2 + c_k^2}}{\sqrt{b_m^2 + c_m^2}} \qquad (23)
$$

$$
\iff 2b_k c_k (b_m^2 + c_m^2) < 2b_m c_m (b_k^2 + c_k^2). \qquad (24)
$$

Lako je vidljivo da je nejednakost (24) ekvivalentna nejednakosti (21), stoga slijedi kako vrijedi i nejednakost (23).

Ad 2. Pretpostavljamo da vrijedi $b_k b_m > c_k c_m$ za sve cijele brojeve $k > m \geq 1$. Lako je vidljivo, iz nejednakosti (22), kako možemo dokazati sve nejednakosti u ovom slučaju analogno kao u prvom slučaju, uz pretpostavku $b_k b_m > c_k c_m$ i zamjenjujući znak nejednakosti " $<$ " iz prvog slučaja znakom nejednakosti " $>$ ".

□

Napomena 2:
Iz gornjih razmatranja nije teško vidjeti kako Propozicija 1. i Teorem 7. također vrijede i za nizove negativnih realnih brojeva (pod uvjetom da u izrazima (17) i (18) za geometrijsku i kvadratnu sredinu, tim redom, uzmemo negativni predznak kvadratnog korijena) obzirom da koristimo omjere elemenata niza. U vezi s metodama djelitelja i konceptom pogodovanja velikim državama, možemo zaključiti kako Propozicija 1. i Teorem 7. daju mogućnost uvođenja novih odgovarajućih varijanti metoda djelitelja između bilo koje dvije metode djelitelja koje zadovoljavaju svojstvo pogodovanja velikim državama, na uređen način, što se radi pomoću harmonijske, geometrijske, aritmetičke te kvadratne sredine njihovih nizova djelitelja.

Primjer:
Ilustrirajmo uvođenje, na uređen način, odgovarajućih novih varijanti metoda djelitelja između bilo koje dvije metode djelitelja koje zadovoljavaju svojstvo pogodovanja velikim državama:

a) Prethodno smo vidjeli kako je kriterij djelitelja belgijske metode (BE) kao i danske metode (DA) dan s $d''(k) := d_{BE}(k) = 0.5 * (k+1), k = 1, 2, ...$ i $d'(k) := d_{DA}(k) = 3k-2$, tim redom, te kako BE preferira velike države nad DA. Lako je za primijetiti kako ove dvije metode predstavljaju slučaj 1. Teorema 7. Odgovarajuće metode djelitelja i njihovi omjeri djelitelja prikazani su u Tablici 7., poredani obzirom na pogodovanje velikim državama: BE - HM$_{BE-DA} - GM - AM - QM - DA$.

Metode djelitelja i njihovi djelitelji	2./1.	3./2.	4./3.	5./4.	6./5.
Njihova harmonijska sredina (1,$\approx 2.18, 3.11, ...$)	2.182	1.4259	1.2857	1.2188	1.1782
Njihova geometrijska sredina (1,$\approx 2.45, 3.74, ...$)	2.449	1.5275	1.3363	1.249	1.1983
Njihova aritmetička sredina (1,2.75,4.5,...)	2.75	1.6364	1.3889	1.28	1.2188
Njihova kvadratna sredina (1,$\approx 3.02, 5.15...$)	3.021	1.7041	1.4159	1.2943	1.2276
Danska (1,4,7,10,...)	4	1.75	1.4286	1.30	1.2308
Belgijska (1,1.5,2,2.5,...)	1.5	1.333	1.25	1.20	1.1667

Tablica 7: Omjeri uvedenih uzastopnih djelitelja

b) Lako je uočljivo kako d'Hondtova metoda (DH) s kriterijem djeljivosti $d''(k) := d_{DH}(k) = k$ kao i metoda najmanjih djelitelja (SD) s kriterijem djeljivosti $d'(k) := d_{SD}(k) = k - 1$ odgovaraju slučaju 2. Teorema 7. (vidjeti Tablicu 6). Na primjer, metoda harmonijske sredine (HM) je harmonijska sredina od SD i DH, metoda jednakih proporcija (EP) geometrijska je sredina od SD i DH, dok je Sainte – Lague metoda (SL) aritmetička sredina (pomnožena faktorom 2, ali ekvivalentna) od SD i DH. Dodatno, kvadratna sredina od SD i DH ima odgovarajuće omjere: $2.2361, 1.6124, 1.3867, 1.2806, 1.2198$. Dakle, vrijedi sljedeći poredak u smislu pogodovanja velikim državama:

$$DH - \text{kvadratna sredina}_{DH-SD} - AM(\equiv SL) - GM(\equiv EP) - HM - SD.$$

5 Zaključak

Iz ovog diplomskog rada možemo zaključiti kako izbor metoda, u ovom slučaju metoda djelitelja, ima velike posljedice za demokratsko predstavljanje. U radu je vidljivo kako svaka pojedina metoda sadrži i prednosti i mane, što utječe na razmjernost rezultata izbora. Neke metode rezultiraju raspodjelama zastupničkih mjesta koji adekvatno odražavaju raspodjelu glasova, a neke prikazuju značajna odstupanja. Stručnjaci bi svakako trebali pomno razmotriti kako osigurati da izbori budu najpošteniji i najreprezentativniji.
Također, razmatrajući koncept "pogodovanja velikim državama" za metode djelitelja u razmjernim izbornim sustavima, a koji se temelji na uspoređivanju omjera djelitelja pokazali smo kako je moguće, na uređen način, uvoditi nove metode djelitelja između bilo kojih dviju metoda djelitelja koje imaju svojstvo da jedna pogoduje velikim državama nad drugom, što slijedi iz nekolicine nejednakosti harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine nizova.

Literatura

[1] M.L. Balinski, H.P. Young: *The quota method of apportionment*, Amer. Math. Monthly 82(1975), 701-729

[2] P.G. Cortona et al.: *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, SIAM, Philadelphia, 1999.

[3] T. Marošević: *Over - and Underrepresentation in Proportional Electoral Systems - an Empirical Study*, Mathematical Communications, Supplement, 1(2001), 33 - 41

[4] T. Marošević, R. Scitovski: *An application of a few inequalities among sequences in electoral systems*, Applied Mathematics and Computation 194 (2007), 480 - 485 (http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.050)

[5] J. Panaretos, A. Kalogirou: *Analysis and Comparison of Greek Parliamentary Electoral Systems of the Period 1974-1999*, Athens, Greece, 1999.

[6] A.D. Taylor, A.M. Pacelli: *Mathematics and Politics – Strategy, Voting, Power and Proof*, Springer-Verlag, New York, 2008.

Sažetak

Kad uspoređujemo metode djelitelja u razmjernim izbornim sustavima, stavljamo fokus na različite tehnike koje koristimo pri dodjeli zastupničkih mjesta u zakonodavnim tijelima, što se temelji na broju glasova koje su pojedine političke stranke dobile. Glavni cilj razmjernih izbornih sustava je osigurati da spomenuta dodjela mjesta odražava preference birača što je točnije moguće.
Metode djelitelja matematički su algoritmi koje koristimo u tom slučaju, tj. kako bismo odredili koliki će broj mjesta pojedina stranka dobiti obzirom na broj dobivenih glasova. Ove metode osiguravaju poštenost izbornih procesa. Kad govorimo o uspoređivanju metoda djelitelja, zapravo ispitujemo i ocjenjujemo pojedine metode u svrhu procjene njihove učinkovitosti u postizanju razmjerne zastupljenosti.

Ključne riječi:
razmjerne izborne metode, metode djelitelja, indeks nerazmjernosti, pohlepni algoritmi, cjelobrojna optimizacija, podzastupljenost, prezastupljenost

A comparison of divisor methods in proportional electoral systems

Summary

When we compare divisor methods in proportional electoral systems, we focus on different techniques used for allocating legislative seats based on the number of votes received by individual political parties. The primary goal of proportional electoral systems is to ensure that this allocation of seats reflects the preferences of voters as accurately as possible. Divisor methods are mathematical algorithms used in this context to determine the number of seats a particular party will receive based on the number of votes they have obtained. These methods ensure the fairness of the electoral process. When we talk about comparing divisor methods, we are actually examining and evaluating these methods to assess their effectiveness in achieving proportional representation.

Keywords:
proportional allocation methods, divisor methods, disproportionality index, convex functions, greedy algorithm, integer optimization, underrepresentation, overrepresentation

Životopis

Rođena sam 7.10.1995. u Slavonskom Brodu gdje sam završila Osnovnu školu Hugo Badalić. Srednjoškolsko obrazovanje nastavila sam u Klasičnoj gimnaziji fra Marijana Lanosovića u Slavonskom Brodu. Upisala sam preddiplomski studij matematike na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku te ga završavam 2020. godine s temom završnog rada Polinomi, pod mentorstvom prof. dr. sc. Ivana Matića. Nakon toga upisujem diplomski studij Financijska matematika i statistika na istoimenom fakultetu. Tijekom diplomskog studija radila sam u tvrtki Gideon Brothers kao anotator podataka te u knjigovodstvenom servisu M3-M.A.J kao knjigovođa.