Nizovi

Barunović, Barbara

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Nizovi

Završni rad

Mentor:
prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Student:
Barbara Barunović

Osijek, 2024

Sadržaj

1 Uvod 1

2 Uvodni pojmovi 3

3 Nizovi i konvergencija 5
3.1 Pojam niza 5
3.2 Nizovi u skupu $\mathbb{R}$ 6
3.3 Neki specijalni nizovi u skupu $\mathbb{R}$ 9
3.4 Nizovi u metričkom i topološkom prostoru 11
3.5 Nizovi u $\mathbb{R}^n$ 15

4 Broj e 19

5 Cauchyjev niz 21

6 Nizovi funkcija 25

Literatura 27

Sažetak 29

Summary 31

Životopis 33

1 | Uvod

Povijest nizova brojeva ima bogatu evoluciju kroz različite civilizacije i razdoblja. Još u antičkoj Grčkoj, matematičari poput Pitagore i Euklida bavili su se brojevima i nizovima. Matematičar Euklid je u svome najpoznatijem djelu "Elementi" razvio teoriju o aritmetičkim i geometrijskim nizovima. Srednjovjekovni matematičari, poput Fibbonaccija, pridonjeli su razvoju Fibbonaccijeva niza $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ koji ima brojne primjene u prirodi, umjetnosti i ekonomiji. U 17. stoljeću matematičari Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz razvili su diferencijalni i integralni račun, čime su otvorili vrata za analizu nizova brojeva i konvergenciju nizova. Nizovi brojeva važan su pojam u suvremenom svijetu, primjenjuju se u znanstvenim istraživanjima, financijama, strojnom učenju, analizi podataka, računalnoj znanosti, medicinskim istraživanjima i mnogim drugim područjima. Ovo su samo neki od primjera kako su nizovi neizostavan dio naše svakodnevnice.
Na početku rada ponovit ćemo osnovne pojmove koji su bitni za daljnje razumijevanje rada. Sljedeće poglavlje ovog rada govori o najvažnijem svojstvu nizova što je konvergencija. Najprije ćemo definirati pojmove niza, podniza, konvergencije niza i limesa te na primjeru ilustrirati kada niz konvergira i ima limes. Uvest ćemo pojmove ograničenosti i monotonosti niza, zatim dokazati tvrdnju koja povezuje konvergenciju niza i navedene pojmove. Vidjet ćemo da u skupu $\mathbb{R}$ za svaki niz postoji monoton podniz te da svaki ograničen i monoton niz konvergira. Definirat ćemo konvergenciju niza u jednom od bitnijih prostora analize, a to je metrički prostor. Definiciju konvergencije poopćit ćemo na topološki prostor. U sklopu ovog poglavlja dokazat ćemo jedinstvenost limesa u metričkom prostoru te ćemo pokazati da u topološkom prostoru limes ne mora biti jedinstven. Također, dokazat ćemo Bolzano-Weierstrassov teorem koji je jedan od najvažnijih teorema za nizove u $\mathbb{R}^n$. Četvrto poglavlje je o broju e čija definicija proizlazi iz konvergencije niza. Zatim, u petom poglavlju proučavamo nizove realnih brojeva pomoću kojih možemo ispitati konvergenciju bez poznavanja limesa. Takav niz naziva se Cauchyjev niz. Pokazat ćemo da je svaki konvergentan niz u metričkom prostoru Cauchyjev i da je svaki Cauchyjev niz ograničen. Na kraju rada, u zadnjem poglavlju proučavamo nizove funkcija. Navest ćemo definiciju konvergencije po točkama te primjer niza funkcija koji konvergira po točkama.

2 | Uvodni pojmovi

Pojam niza najprije ćemo obraditi u skupu sa kojim najčešće radimo, a to je skup $\mathbb{R}$. Zatim ćemo se nadograditi do metričkog prostora, a nakon toga i do topološkog prostora. Stoga uvodimo definicije spomenutih prostora.

Definicija 2.1. **Metrika** ili **udaljenost** na skupu X, gdje je X neki neprazan skup, je svako preslikavanje $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ za koje vrijede sljedeća svojstva:
(M1) $d(x,y) \geq 0$ $\quad$ $(nenegativnost)$
$(M2)$ $d(x,y) = 0 \iff x = y$ $\quad$ $(strogost)$
$(M3)$ $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad$ $(simetrija)$
$(M4)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\quad$ $(nejednakost\ trokuta)$

za sve $x, y, z \in X$.

Definicija 2.2. Funkciju d iz prethodne definicije nazivamo **funkcijom udaljenosti**, **razdaljinskom funkcijom** ili **metrikom** na skupu X. Za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor.** Uvjete (M1)-(M4) nazivamo aksiomi metrike.

Slijedeći pojmovi potrebni su kako bismo došli do pojma topologije.

Definicija 2.3. Neka je (X, d) metrički prostor. Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je **otvoren** ako za svaku točku $x_0 \in U$ postoji $a > 0$ tako da je otvorena kugla $K(x_0, a) \subseteq U$.

Propozicija 2.1. U metričkom prostoru otvorena kugla $K(x_0, a)$ je otvoren skup.

Dokaz se može pronaći u [5, str. 19].

Propozicija 2.2. Familija $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova iz metričkog prostora (X, d) ima sljedeća svojstva:
(T1) unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$,
(T2) presjek konačno članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$,
(T3) $\emptyset$, $X \in \mathcal{U}$.

Dokaz se može pronaći u [5, str. 21].

Definicija 2.4. Neka je $X \neq \emptyset$. Familija $\mathcal{U}$ podskupova od X sa svojstvima (T1)-(T3) naziva se **topološka struktura** ili **topologija** na skupu X. Uređeni par $(X, \mathcal{U})$ naziva se **topološki prostor.** Članove familije $\mathcal{U}$ zovemo otvoreni skupovi.

Definicija 2.5. Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je **zatvoren** ako je njegov komplement $F^C = X \setminus F$ otvoren.

Propozicija 2.3. Za familiju svih zatvorenih skupova iz metričkog prostora (X, d) vrijede sljedeća svojstva:
(T1)′ presjek svake familije zatvorenih skupova je zatvoren skup,
(T2)′ unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup,
(T3)′ $\emptyset$ i X su zatvoreni skupovi.

Definicija 2.6. Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i skup $A \subseteq X$. Točka $x_0 \in X$ je **gomilište skupa** A ako svaka okolina točke x_0 sadrži barem jednu točku skupa A različitu od x_0.

3 | Nizovi i konvergencija

3.1 Pojam niza

Jedan od osnovnih pojmova realne analize je pojam konvergencije niza. U nastavku ćemo prvo definirati niz te navesti nekoliko osnovnih svojstava nizova realnih brojeva.

Definicija 3.1. **Niz**, u skupu X, je svako preslikavanje $x\colon \mathbb{N} \to X$. Vrijednost $x(m) \in X$, gdje je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan, zove se opći ili m-ti član niza i obično se označava sa x_m.

Umjesto $x\colon \mathbb{N} \to X$ niz ćemo kraće zapisivati (x_m), a također niz možemo zapisati i u obliku $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$, tj. članove niza poredamo kao što su poredani prirodni brojevi.

Definicija 3.2. **Podniz** niza $x\colon \mathbb{N} \to X$ je svaki niz oblika $x \circ u\colon \mathbb{N} \to X$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo rastuća funkcija. Podniz $x \circ u\colon \mathbb{N} \to X$ označavamo s (x_{u_m}).

Funkcija u je strogo rastuća, pa slijedi:

$$\begin{aligned} u_1 = u(1) &\geq 1 \\ u_2 = u(2) > u_1 \geq 1 \Rightarrow u_2 &\geq 2 \\ u_3 = u(3) > u_2 \geq 2 \Rightarrow u_3 &\geq 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

induktivno zaključujemo da je

$$u_m \geq m, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

Primjer 3.1. *Zadan je niz svojim općim članom*

$$x_m = (-1)^m \cdot \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Izdvojimo dva podniza zadanog niza:

$$x_{2m} = \frac{1}{2m} \quad i \quad x_{2m-1} = -\frac{1}{2m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

★

3.2 Nizovi u skupu $\mathbb{R}$

Definicija 3.3. Niz (x_m) realnih brojeva nazivamo **konvergentnim** nizom ako postoji broj $x_0 \in \mathbb{R}$ koji ima svojstvo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 takav da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $|x_m - x_0| < \varepsilon$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \quad m \geq m_0 \quad \Longrightarrow \quad |x_m - x_0| < \varepsilon.$$

Realan broj x_0 iz definicije nazivamo **granična vrijednost** ili **limes** niza (x_m). Kažemo da je niz **divergentan** ako nije konvergentan. Limes niza (x_m) je broj x_0 i to ćemo označavati sa $x_m \to x_0$ ili $\lim x_m = x_0$. Kažemo da niz (x_m) konvergira prema x_0.

Primjer 3.2. *Pogledajmo primjer granične vrijednosti nekog niza.*
Neka je (x_m) niz zadan općim članom

$$x_m = \frac{2m-1}{m+2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Granična vrijednost niza je broj 2. ★

Primjer 3.3. *Pokažimo da niz zadan općim članom*

$$x_m = \frac{4m+1}{2m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

konvergira.
Ako niz (x_m) konvergira, onda on konvergira prema $x_0 = 2$. Iskoristimo definiciju konvergencije niza.
Pokažimo da postoji prirodan broj m_0 takav da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $|x_m - 2| < \varepsilon$.
Iz

$$|x_m - x_0| = \left|\frac{4m+1}{2m} - 2\right| = \left|\frac{4m+1-4m}{2m}\right| = \left|\frac{1}{2m}\right| = \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2m_0} < \varepsilon$$

slijedi $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(m_0 > \frac{1}{2\varepsilon})$ t.d. $\forall m \geq m_0 \Rightarrow |x_m - x_0| < \varepsilon$,
tj. pokazali smo da niz konvergira. ★

Primjer 3.4. *Niz (x_m) zadan općim članom*

$$x_m = 3m^2 + m, \quad m \in \mathbb{N},$$

je divergentan.
Iz

$$\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} (3m^2 + m) = +\infty$$

zaključujemo da niz (x_m) nema limes, tj. da niz ne konvergira nekom realnom broju. Kažemo da je niz (x_m) divergentan. ★

Za potpuno razumijevanje važnih teorema vezanih uz nizove potrebno je spomenuti pojmove ograničenosti niza i monotonog rasta.

Definicija 3.4. Niz realnih brojeva (x_m) je **ograničen** ako je skup svih njegovih članova $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ ograničen skup.
Niz realnih brojeva (x_m) **monotono raste** ako postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $x_m \leq x_{m+1} \quad$ za svaki $m \geq m_0$.
Niz realnih brojeva (x_m) **monotono pada** ako postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $x_m \geq x_{m+1} \quad$ za svaki $m \geq m_0$.

Propozicija 3.1. a) Konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedan limes.
b) Konvergentan niz realnih brojeva je ograničen.

Dokaz. a) Krenimo od pretpostavke da niz (x_m) ima dva limesa, tj. da konvergira prema x_1 i x_2, te da vrijedi $x_1 \neq x_2$. Prema definiciji konvergencije niza tada postoje prirodni brojevi m_1 i m_2 sa svojstvom da vrijedi

$$(m \geq m_1) \Longrightarrow |x_m - x_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(m \geq m_2) \Longrightarrow |x_m - x_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako s m_0 označimo veći od brojeva m_1 i m_2, tada za $m \geq m_0$ dobivamo

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - x_m + x_m - x_2| \leq |x_1 - x_m| + |x_m - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pri čemu je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali, što je kontradikcija. Zaključujemo da je $x_1 = x_2$, tj. da niz (x_m) ima jedan limes.

b) Pretpostavimo da niz realnih brojeva (x_m) konvergira prema točki x_0. Za svaki $\varepsilon > 0$, pa i za broj $\varepsilon = 1$ postoji prirodan broj m_0 tako da za $m \geq m_0$ vrijedi $|x_m - x_0| < 1$. Iz toga je

$$|x_m| = |x_m - x_0 + x_0| \leq |x_m - x_0| + |x_0| < 1 + |x_0|,$$

što pokazuje da se svi članovi niza (x_m), osim eventualno $x_1, \dots, x_{m_0-1}$ nalaze u intervalu $(-1 - |x_0|, 1 + |x_0|)$.
Označimo li s $M = |x_1| + \cdots + |x_{m_0-1}| + 1 + |x_0|$, slijedi da je $|x_m| \leq M$ za svaki $m \in \mathbb{N}$, iz čega zaključujemo da je skup $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ ograničen.

$\square$

Teorem 3.1. *Za svaki niz realnih brojeva (x_m) postoji monoton podniz.*

Dokaz. Definirajmo skup $A := \{m \in \mathbb{N} : x_l \geq x_m \quad \textit{za svaki } l \geq m\}$
Promotrimo dva slučaja: (1) A je konačan skup ili (2) A je beskonačan.
(1) Neka je $u_1 > \max A$ proizvoljan prirodan broj. Pretpostavili smo da je A konačan pa takav prirodan broj u_1 postoji. Kako $u_1 \notin A$, prema definiciji skupa A slijedi da postoji $u_2 > u_1$ tako da vrijedi $x_{u_2} < x_{u_1}$. Premda $u_2 \notin A$ iz definicije skupa A slijedi da postoji $u_3 > u_2$ tako da vrijedi $x_{u_3} < x_{u_2}$. Nastavljamo postupak i dolazimo do strogo rastućeg niza (u_m) i odgovarajućeg strogo padajućeg podniza (x_{u_m}).
(2) Uzmimo da je u_1 proizvoljan element skupa A. Pretpostavili smo da je A beskonačan, te slijedi da postoji $u_2 \in A$ tako da vrijedi $u_1 < u_2$. Iskoristimo definiciju skupa A iz koje zaključujemo da je $x_{u_1} \leq x_{u_2}$. Uzmimo $u_3 \in A$ takav da je $u_2 < u_3$ i $x_{u_2} \leq x_{u_3}$. Ponavljamo postupak i dolazimo do strogo rastućeg niza (u_m) i odgovarajućeg monotono rastućeg podniza (x_{u_m}). $\square$

Teorem 3.2. *Svaki ograničen i monoton niz realnih brojeva je konvergentan.*

Dokaz. Neka je (x_m) niz realnih brojeva koji monotono raste. Pretpostavimo da je skup $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ odozgo ograničen. Tada je $x = \sup A$ realan broj takav da je $x_m \leq x \quad$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Iskoristimo li definiciji supremuma skupa A zaključujemo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x - \varepsilon < x_{m_0} \leq x$.
Iz monotonosti imamo $x_{m_0} \leq x_m \quad$ za svaki $m \geq m_0$, pa je prema tome

$$x - \varepsilon < x_m \leq x.$$

Iz toga dobivamo da je $|x_m - x| < \varepsilon \quad$ za svaki $m \geq m_0$, čime smo pokazali da je (x_m) konvergentan niz i da vrijedi

$$\lim_{m \to \infty} x_m = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\} = x.$$

Postupak provodimo analogno i ako niz (x_m) monotono pada. U tom slučaju dolazimo do konvergencije niza i da je

$$\lim_{m \to \infty} x_m = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

□

Primjer 3.5. *Niz ne mora nužno biti monoton kako bi konvergirao.*
Naime, lako se pokaže da je limes niza zadanog općim članom

$$x_m = \frac{(-1)^m}{3m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

nula, tj. da niz konvergira prema nuli, ali niz nije monoton. ★

Teorem 3.3. *Za konvergentne nizove realnih brojeva (x_m) i (y_m) vrijedi:*

1) *konvergentan je i niz $(x_m \pm y_m)$ te je*

$$\lim_{m \to \infty} (x_m \pm y_m) = \lim_{m \to \infty} x_m \pm \lim_{m \to \infty} y_m;$$

2) *za svaki realan broj L konvergentan je i niz $(L \cdot x_m)$ te je*

$$\lim_{m \to \infty} (L \cdot x_m) = L \cdot \lim_{m \to \infty} x_m;$$

3) *konvergentan je i niz $(x_m \cdot y_m)$ te je*

$$\lim_{m \to \infty} (x_m \cdot y_m) = \lim_{m \to \infty} x_m \cdot \lim_{m \to \infty} y_m;$$

4) *ako je $y_m \neq 0$ za svaki prirodan broj m i $\lim_{m \to \infty} y_m \neq 0$, onda je konvergentan i niz $\frac{x_m}{y_m}$ te je*

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{x_m}{y_m}\right) = \frac{\lim_{m \to \infty} x_m}{\lim_{m \to \infty} y_m};$$

5) *konvergentan je i niz* $(|x_m|)$ *te je*

$$\lim_{m\to\infty} |x_m| = |\lim_{m\to\infty} x_m|;$$

6) *svaki podniz* (x_{u_m}) *niza* (x_m) *konvergira i*

$$\lim_{m\to\infty} x_{u_m} = \lim_{m\to\infty} x_m;$$

7) *ako je* $x_m \leq y_m$ *za svaki prirodan broj* m, *onda je*

$$\lim_{m\to\infty} x_m \leq \lim_{m\to\infty} y_m.$$

Dokaz se može pronaći u [6, str. 70].

3.3 Neki specijalni nizovi u skupu $\mathbb{R}$

Kao najpoznatiji primjeri nizova u skupu realnih brojeva ističu se aritmetički i geometrijski niz, jer smo već u srednjoj školi uočili kako upravo oni imaju mnogobrojne primjene u stvarnom životu; od najjednostavnije primjene aritmetičkog niza, preciznije aritmetičke sredine u računanju prosjeka ocjena s čim se susreću svi učenici na kraju polugodišta, do nekih od složenijih primjena aritmetičkog niza kao što su štednja kroz naredne mjesece ili godine te geometrijskog niza kao što su razmnožavanje nekih poznatih bakterija koje se nalaze u čovjekovom organizmu, do primjene u složenom kamatnom računu. Više o spomenutim primjenama zainteresirani čitatelj može pronaći u nekom od srednjoškolskih udžbenika kao što su npr. [2, 3, 8]. U nastavku navodimo samo osnovne definicije i rezultate vezane uz ove nizove, kao i jedan primjer koji ih povezuje.

Definicija 3.5. Niz je aritmetički ako je razlika bilo kojeg člana i člana koji mu direktno prethodi stalna i iznosi d, odnosno vrijedi

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad n \geq 2.$$

Broj d naziva se *razlika* ili *diferencija* aritmetičkog niza.

Iz prethodnog slijedi da je $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, odnosno

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geq 2,$$

što potvrđuje da je svaki član aritmetičkog niza (osim prvog), aritmetička sredina susjedna dva člana.

Također, može se pokazati da je zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan formulom [1, str. 78]

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Definicija 3.6. Niz je geometrijski ako je kvocijent bilo kojeg člana i člana koji mu direktno prethodi stalan i iznosi q, odnosno vrijedi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \qquad n \in \mathbb{N}\,;$$

iz prethodnog dobivamo i

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Broj q naziva se *kvocijent* geometrijskog niza.
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q dan je s

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza, s kvocijentom $q \neq 1$ dan je formulom [1, str. 80]

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\,,$$

dok je za $q = 1$ očito

$$S_n = n \cdot a_1.$$

Pogledajmo u nastavku jedan primjer.

Primjer 3.6. *Tri broja čiji je zbroj* 124 *imaju svojstvo da su prva tri člana geometrijskog niza i istovremeno prvi, jedanaesti i trinaesti član aritmetičkog niza. Koliko iznosi umnožak tih brojeva?*
Zapišimo najprije pretpostavke koje su dane u primjeru: a_1, a_2, a_3 *su članovi geometrijskog niza, a* b_1, b_{11}, b_{13} *su članovi aritmetičkog niza, dok pri tome vrijedi*

$$a_1 = b_1 \tag{3.2}$$

$$a_2 = b_{11}, \quad tj. \quad a_1 q = b_1 + 10d \tag{3.3}$$

$$a_3 = b_{13}, \quad tj. \quad a_1 q^2 = b_1 + 12d. \tag{3.4}$$

Oduzimanjem jednakosti (3.4) *i* (3.3) *te zatim* (3.3) *i* (3.2) *dobivamo*

$$\begin{aligned} a_1 q(q-1) &= 2d \\ a_1(q-1) &= 10d, \end{aligned}$$

odakle očito slijedi $\frac{2d}{q} = 10d$, *odnosno* $q = \frac{1}{5}$, *uz pretpostavku da niz nije stacionaran, tj. da je* $d \neq 0$. *Iz uvjeta zadatka također vrijedi*

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = b_1 + b_1 + 10d + b_1 + 12d = 124,$$

tj.

$$a_1(1 + q + q^2) = 3b_1 + 22d = 124\,.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $q = \frac{1}{5}$, *iz prethodne jednakosti slijedi vrijednost prvog člana niza* $a_1 = 100$. *Nadalje, tada je*

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 = 100 \cdot \frac{1}{25} = 4. \end{aligned}$$

Traženi umnožak iznosi

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8\,000.$$

★

3.4 Nizovi u metričkom i topološkom prostoru

Definicija 3.7. Neka je (x_m) niz u metričkom prostoru (X, d). Za niz (x_m) kažemo da **konvergira** prema točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 takav da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $d(x_m, x_0) < \varepsilon$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \quad t.d. \quad \forall m \geq m_0 \quad \Longrightarrow \quad d(x_m, x_0) < \varepsilon.$$

Napomena 3.1. Neka je (X, d) metrički prostor. Uočimo da $x_m \to x_0$ ako i samo ako
$d(x_m, x_0) \to 0$.
Ako (x_m) konvergira u metričkom prostoru prema x_0 to prema definiciji konvergencije znači da je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \quad t.d. \quad \forall m \geq m_0 \quad \Longrightarrow \quad d(x_m, x_0) < \varepsilon.$$

Prema tome je

$$d(x_m, x_0) < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |d(x_m, x_0)| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |d(x_m, x_0) - 0| < \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow \quad d(x_m, x_0) \to 0.$$

Kako bi definiciju 3.7 poopćili na topološki prostor potrebno ju je iskazati na ekvivalentan način koristeći otvorene skupove. U tu svrhu uvodimo sljedeći teorem:

Teorem 3.4. *Niz (x_m) iz metričkog prostora (X, d) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu U točke x_0 postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_m \in U$ za svaki $m \geq m_0$.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je U proizvoljna otvorena okolina točke x_0. Pretpostavimo da niz (x_m) iz metričkog prostora (X, d) konvergira prema točki $x_0 \in U$. Budući da je U otvoren skup slijedi da postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Iskoristimo definiciju konvergencije jer znamo da $x_m \to x_0$,

$$tj. \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \quad t.d. \quad \forall m \geq m_0 \quad \Longrightarrow \quad d(x_m, x_0) < \varepsilon,$$

$$tj. \quad x_m \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Iz prethodnog slijedi da je $x_m \in U$, za svaki $m \geq m_0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Uzmimo da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za svaku otvorenu okolinu U točke x_0, pa tako i za otvorenu okolinu $K(x_0, \varepsilon)$, s obzirom da je otvorena kugla otvoren skup, postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da je za svaki $m \geq m_0$

$x_m \in K(x_0, \varepsilon)$, tj. $d(x_m, x_0) < \varepsilon$, tj. prema definiciji konvergencije $x_m \to x_0$.

□

Sada možemo poopćiti definiciju konvergencije niza na topološki prostor.

Definicija 3.8. Neka je (x_m) niz u topološkom prostoru $(X, \mathcal{U})$. Za niz (x_m) kažemo da **konvergira** prema točki $x_0 \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu $U \in \mathcal{U}$ od x_0 postoji prirodan broj m_0 takav da je $x_m \in U$ za svaki $m \geq m_0$.

Tijekom školovanja naučili smo kako je limes niza realnih brojeva jedinstven. Dokažimo jedinstvenost limesa i u metričkom prostoru.

Teorem 3.5. *Ako u metričkom prostoru (X, d) niz (x_m) konvergira prema točki $x_0 \in X$ i prema točki $\overline{x_0} \in X$, onda je $x_0 = \overline{x_0}$.*

Dokaz. Krenimo od pretpostavke da niz (x_m) konvergira prema točkama $x_0 \in X$ i $\overline{x_0} \in X$. Primjenimo definiciju konvergencije nizova u metričkom prostoru.

Iz $x_m \to x_0$ dobivamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_1 \in \mathbb{N}) \quad t.d. \quad \forall m \geq m_1 \quad d(x_m, x_0) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad tj. \quad x_m \in K(x_0, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Iz $x_m \to \overline{x_0}$ slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_2 \in \mathbb{N}) \quad t.d. \quad \forall m \geq m_2 \quad d(x_m, \overline{x_0}) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad tj. \quad x_m \in K(\overline{x_0}, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Pretpostavimo da $x_0 \neq \overline{x_0}$, tj. da je $d(x_0, \overline{x_0}) = \varepsilon > 0$.
Nadalje, neka je $x \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ proizvoljna točka. Primjenom nejednakosti trokuta dobivamo:

$$d(x_0, \overline{x_0}) \leq d(x_0, x) + d(x, \overline{x_0})$$

iz čega slijedi

$$d(\overline{x_0}, x) \geq d(x_0, \overline{x_0}) - d(x_0, x) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

što daje zaključak da $x \notin K(\overline{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$.
Pokazali smo da se kugle $K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ i $K(\overline{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$ ne sijeku. Kako $x_m \to x_0$ i $x_m \to \overline{x_0}$, prema definiciji konvergencije postoji $m_0 = \max\{m_1, m_2\} \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $x_m \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ i $x_m \in K(\overline{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$, pa bi se kugle $K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ i $K(\overline{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$ morale sjeći. Došli smo do kontradikcije i time je pokazano da je limes u metričkom prostoru jedinstven. □

Analiziramo li prethodni dokaz, uočit ćemo da je metrika korištena jedino da se za različite točke x_0 i $\overline{x_0}$ konstruiraju disjunktne okoline $K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ i $K(\overline{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$. Dakle, zaključak o jedinstvenosti limesa ostaje valjan i u topološkim prostorima koji imaju navedeno svojstvo. Definiramo ih na sljedeći način:

Definicija 3.9. Topološki prostor $(X, \mathcal{U})$ je **Hausdorffov** ili T_2**-prostor** ako za svaki par različitih točaka $x_0 \neq \overline{x_0}$ iz X postoje disjunktne okoline O od x_0 i $\overline{O}$ od $\overline{x_0}$.

Primjer Hausdorffovih prostora su metrički prostori. Ako u Hausdorffovu prostoru niz (x_m) konvergira, onda je limes tog niza jedinstveno određena točka $x_0 \in X$.
Općenito, u topološkom prostoru limes ne mora biti jedinstven. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 3.7. *Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Uzmimo da je $X = \{5, 6\}$ i $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ trivijalna topologija na X.*
Svaki niz u X za limes ima 5 i 6. ★

U sljedećem teoremu vidjet ćemo kako u metričkom prostoru možemo okarakterizirati zatvorene skupove pomoću konvergentnih nizova.

Teorem 3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako svaki niz (x_m) u F koji konvergira u X ima limes u F.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka vrijedi da je skup F zatvoren i (x_m) je niz u F koji konvergira prema točki $x_0 \in X$. Pokažimo da je $x_0 \in F$. Pretpostavimo suprotno onome što trebamo pokazati, tj. da $x_0 \notin F$, pa je $x_0 \in F^C$. Skup F^C je otvoren. Kako je x_0 limes niza (x_m), otvorena okolina F^C sadrži sve osim eventualno konačno mnogo članova niza (x_m) što je kontradikcija s pretpostavkom da je (x_m) niz iz F. Pokazali smo da je $x_0 \in F$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka F sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Trebamo pokazati da je skup F zatvoren. Krenimo od pretpostavke da skup F nije zatvoren, tj. njegov komplement F^C nije otvoren. To znači da postoji točka $x_0 \in F^C$ takva da ni za jedan $a > 0$ otvorena kugla $K(x_0, a)$ nije cijela sadržana u F^C, tj. $K(x_0, a) \cap F \neq \emptyset$. Zamijenimo li redom a s $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ dolazimo do $x_m \in K(x_0, \frac{1}{k}) \cap F$. Niz (x_m) je u F. Budući da vrijedi $d(x_m, x_0) < \frac{1}{k}$ to povlači da je $x_0 \in F^C$, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Prema tome, došli smo do zaključka da je F zatvoren skup. □

Definicija 3.10. U metričkom prostoru (X, d) niz (x_m) je **ograničen** ako postoje točka $x_0 \in X$ i realan broj $a > 0$ takav da je $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, a)$.

Propozicija 3.2. Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je ograničen.

Dokaz se može pronaći u [5, str. 48].

Propozicija 3.3. Ako niz (x_m) iz metričkog prostora (X, d) konvergira prema točki $x_0 \in X$ onda i svaki njegov podniz konvergira prema točki x_0.

Dokaz. Pretpostavimo da niz (x_m) konvergira prema točki x_0. Primjenom definicije konvergencije niza, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $d(x_m, x_0) < \varepsilon$. Neka je (x_{u_m}) podniz niza (x_m). Iz ranije pokazanog slijedi $u_m \geq m \geq m_0$ te je

$$d(x_{u_m}, x_0) < \varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

Pokazano je da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da je za svaki $u_m \geq m \geq m_0 \quad d(x_{u_m}, x_0) < \varepsilon$, tj. podniz niza (x_m) konvergira prema točki x_0. □

Pomoću konvergencije nizova u metričkom prostoru moguće je karakterizirati zatvarač skupa. Definirajmo u nastavku pojam zatvarača i dokažimo njegovu povezanost s konvergencijom niza.

Definicija 3.11. Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. **Zatvarač** skupa A, u oznaci ClA, je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A.

Teorem 3.7. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Ako je niz (x_m) iz A koji konvergira u X prema točki x_0, onda je $x_0 \in ClA$. Obratno, ako je $x_0 \in ClA$, onda postoji niz (x_m) iz A za koji je $\lim x_m = x_0$.*

Dokaz. Neka je (x_m) niz iz A koji konvergira prema točki $x_0 \in X$, tj. $\lim x_m = x_0$. Tada

$$d(x_m, x_0) \to 0$$

pa je stoga

$$\inf\{d(x_m, x_0) : m \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Prema definiciji udaljenosti točke do skupa u metričkom prostoru je $d(x_0, A) = 0$. Za točku $x_0 \in X$ znamo da je $x_0 \in ClA$ ako i samo ako je $d(x_0, A) = 0$. Kako je udaljenost točke do skupa jednaka nuli imamo tvrdnju koju smo trebali dokazati. Kako bi dokazali obrat uzmimo da je $x_0 \in ClA$. Koristeći istu tvrdnju slijedi da je udaljenost $d(x_0, A) = 0$ pa za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji $x_m \in A$ takav da vrijedi

$$d(x_0, x_m) < \frac{1}{m}.$$

Kako je

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} = 0$$

slijedi da

$$d(x_0, x_m) \to 0,$$

tj. da niz (x_m) konvergira prema $x_0 \in X$. □

Korolar 3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Skup A je zatvoren ako i samo ako za svaki niz (x_m) iz A koji konvergira prema x_0, povlači da je $x_0 \in A$.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Uzmimo da je A zatvoren skup te (x_m) niz iz A koji konvergira prema točki x_0. Prema prethodnom teoremu znamo $x_0 \in ClA = A$ pa je $x_0 \in A$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Krenemo li od pretpostavke da je $x_0 \in ClA$ onda prema teoremu 3.7 postoji niz (x_m) iz A koji konvergira prema x_0 iz čega je $x_0 \in A$. Dolazimo do zaključka da je

$$ClA \subseteq A,$$

tj. da je A zatvoren skup. □

3.5 Nizovi u R^n

Niz (x_m) iz $\mathbb{R}^n$ možemo zapisati kao $x_m = (x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^n)$ gdje su (x_m^i) $i = 1, 2, \ldots, n$ **koordinatni nizovi realnih brojeva**.

Opišimo konvergenciju nizova u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Teorem 3.8. *U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ niz (x_m), $x_m = (x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^m)$, konvergira prema točki $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^m)$ ako i samo ako $x_m^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Krenimo od pretpostavke da niz (x_m) konvergira prema točki x_0. Prema definiciji konvergencije niza za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $d(x_m, x_0) < \varepsilon$. Kako je

$$|x_m^i - x_0^i| \leq d(x_m, x_0) \quad i = 1, \ldots, m$$

za svaki $m \geq m_0$ dobivamo da je

$$|x_m^i - x_0^i| < \varepsilon \quad i = 1, \ldots, m.$$

Zaključujemo da $x_m^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, m$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka $x_m^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, m$.
Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi m_0^i, $\quad i = 1, \ldots, m$, sa svojstvom da za sve $m \geq m_0^i$ vrijedi

$$\left|x_m^i - x_0^i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Odaberimo $m_0 = \max\{m_0^1, \ldots, m_0^m\}$. Prema tome, za svaki $m \geq m_0$ vrijedi da je

$$d(x_m, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_m^i - x_0^i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Prethodna nejednakost nas dovodi do konvergencije niza (x_m) prema točki x_0. $\square$

Primjer 3.8. *Niz u $\mathbb{R}^2$ zadan općim članom*

$$x_m = \left(\frac{m^4}{m^6 + 1}, \frac{2}{m^3}\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

konvergira prema točki $(0, 0)$.
Niz u $\mathbb{R}^2$ zadan općim članom

$$y_m = \left(m^{\frac{1}{m} - 1}, \frac{(-1)^m}{3}\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

ne konvergira jer njegov drugi koordinatni niz $y_m^2 = \frac{(-1)^m}{3}$ ne konvergira. ★

Definicija 3.12. Kažemo da je točka $x_0 \in X$ **gomilište** ili **točka gomilanja** niza (x_m) u metričkom prostoru (X, d) ako se u svakoj otvorenoj okolini točke x_0 nalazi beskonačno mnogo članova niza (x_m).

Primjer 3.9. *Niz*

$$x_m = \left(\frac{1}{m^5}, \frac{1-4m^2}{m^4+2}\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

za gomilište ima točku $(0,0)$.
Niz

$$x_m = \begin{cases} m, & m \text{ neparan} \\ -m, & m \text{ paran} \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}$$

nema gomilište. ★

Napomena 3.2. Primjetimo sljedeće:

1) Gomilište podniza (x_{u_m}) u proizvoljnom metričkom prostoru je i gomilište niza (x_m). Pokažimo primjerom da obrat ne vrijedi.
Neka je (x_m) niz dan općim članom $x_m = 5 + (-1)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Gomilišta niza su 4 i 6. Uzmemo li podniz zadanog niza s parnim indeksima njegovo gomilište je 6. Očito je da 4 nije gomilište takvog podniza te da je gomilište niza općenito različito od gomilišta podniza.

2) Konvergentan niz, u metričkom prostoru, ima samo jedno gomilište koje je ujedno i njegov limes.

3) Jednočlani skup $B = \{b\}$ nema gomilište, dok stacionaran niz $x_m = b, m \in \mathbb{N}$ ima gomilište.
Uzmemo li stacionaran niz $x_m = b$, $m \in \mathbb{N}$, čiji su članovi $b, b, b, b, \ldots$, koju god okolinu od b uzeli tu se nalaze svi članovi niza pa i beskonačno mnogo njih. Gomilište tog stacionarnog niza je b.
Pogledamo li jednočlani skup $B = \{b\}$ on nema gomilište jer bi svaka okolina od b trebala sadržavati barem još jednu točku iz skupa B različitu od b, a skup B nema drugih točaka.

4) Točka x_0 je gomilište niza (x_m) ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu U oko x_0 i za svaki prirodan broj m postoji barem jedan $l \in \mathbb{N}$, $l > m$, takav da je $x_l \in U$.

Teorem 3.9. *Neka je (x_m) niz točaka u prostoru X. Skup svih gomilišta niza (x_m) je zatvoren podskup od X.*

Dokaz. Neka je A skup gomilišta niza (x_m). Pokažimo da $y_0 \in ClA$ povlači $y_0 \in A$. Uzmimo proizvoljnu otvorenu okolinu V točke y_0 i neka je m prirodan broj. Znamo da je točka iz zatvarača danog skupa ako i samo ako svaka okolina oko te točke siječe taj skup (vidi [7, str. 98, Teorem 17]). Koristeći tu tvrdnju zaključujemo da postoji barem jedna točka $x_0 \in A \cap V$. Točka $x_0 \in A$ je točka gomilanja niza (x_m), a V otvorena okolina od x_0 pa postoji prirodan broj $l > m$ takav da je $x_l \in V$. Prema tome, pokazano je da je y_0 točka gomilanja niza (x_m). □

Predhodno smo zaključili kako je gomilište podniza ujedno i gomilište niza. Sljedećim teoremom pokažimo uz koje uvjete vrijedi obrat te tvrdnje.

Teorem 3.10. *Neka je (X, d) metrički prostor. Točka $x_0 \in X$ je gomilište niza (x_m) ako i samo ako postoji podniz (x_{u_m}) koji konvergira prema x_0.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka niz (x_m) za gomilište ima točku x_0. Konstruirajmo podniz koji konvergira prema x_0. Definirajmo strogo rastući niz prirodnih brojeva (u_m) takav da je $x_{u_m} \in K\left(x_0, \frac{1}{m}\right)$. Primjenom definicije 3.12 slijedi da postoji $u_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{u_1} \in K(x_0, 1)$. Uzmimo sada $u_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $u_2 > u_1$ i $x_{u_2} \in K\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$. Nastavljajući postupak dolazimo do niza $x_{u_m} \in K\left(x_0, \frac{1}{m}\right)$ za koji vrijedi

$$0 \leq d(x_{u_m}, x_0) < \frac{1}{m},$$

pa je prema sendvič teoremu $d(x_{u_m}, x_0) \to 0$, a znamo da tada $x_{u_m} \to x_0$, tj. konstruirali smo podniz koji konvergira prema x_0.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka podniz (x_{u_m}) konvergira prema x_0. Treba pokazati da se u svakoj otvorenoj okolini oko x_0 nalazi beskonačno mnogo članova niza (x_m). Uzmimo proizvoljnu otvorenu okolinu U oko x_0. Prema definiciji otvorene okoline postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Kako $x_{u_m} \to x_0$ prema definiciji konvergencije je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \quad \forall m \geq m_0 \quad \Longrightarrow \quad d(x_{u_m}, x_0) < \varepsilon,$$

tj.

$$x_{u_m} \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Dakle, okolina U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_m), pa je x_0 gomilište niza (x_m). □

Iskažimo i dokažimo jedan od važnijih teorema za nizove u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 3.11. **(*Bolzano*[1]*-Weierstrassov*[2] *teorem*)**
Svaki ograničen niz (x_m) iz prostora $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.

Dokaz. Provedimo metodu matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$ kako bi dokazali navedenu tvrdnju.

- *Baza indukcije:*
  Odaberimo $n = 1$. Niz (x_m) u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz. Niz (x_m) je ograničen te prema Teoremu 3.2 zaključujemo da niz (x_{u_m}) konvergira.

- *Pretpostavka indukcije:*
  Pretpostavimo da svaki ograničen niz $x_m = (x_m^1, \ldots, x_m^n)$, $m \in \mathbb{N}$ ima konvergentan podniz.

- *Korak indukcije:*
  Pokažimo valjanost tvrdnje u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka je $x_m = (x_m^1, \ldots, x_m^n, x_m^{n+1})$, $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan ograničen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Koristeći pretpostavku indukcije možemo

[1] Bernhard Bolzano (5. listopada 1781. - 18. prosinca 1848.), češki filozof i matematičar
[2] Karl Weierstrass (31. listopada 1815. - 19. veljače 1897.), njemački matematičar

zaključiti da ograničen niz $x_m^{'} = (x_m^1, \dots, x_m^n)$, $m \in \mathbb{N}$ ima konvergentan podniz, tj. niz $(x_{u_m}^{'})$ je konvergentan. Niz u $\mathbb{R}^n$ je konvergentan ako su mu sve koordinate konvergentne. Za niz (x_m^{n+1}) znamo da je ograničen, ali ne znamo ništa o njegovoj konvergenciji. Prema bazi indukcije, za $n = 1$ niz (x_m^{n+1}) ima konvergentan podniz $(x_{u_m}^{n+1})$. Dakle, $x_{u_m} = (x_{u_m}^1, \dots, x_{u_m}^n, x_{u_m}^{n+1})$ je konvergentan niz i to je konvergentan podniz niza (x_m) u $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\square$

4 | Broj e

U matematičkoj analizi, broj e ima ključnu ulogu. Definicija broja e proizlazi iz konvergencije niza. Broj e je jednak limesu niza $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$, što ćemo i dokazati u nastavku.

Primjer 4.1. *Pokažimo da niz realnih brojeva $x_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$ strogo raste i da je odozgo ograničen.*
Prema binomnoj formuli vrijedi

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{m-n};$$

sređivanjem dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right). \tag{4.1}$$

Iz (4.1) zapažamo da je

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}. \tag{4.2}$$

Matematičkom indukcijom lako se dokaže da je $n! \geq 2^{n-1}$ za svaki prirodan broj n pa je

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4.3}$$

Iz (4.2), (4.3) i formule

$$(1-x)\sum_{n=1}^{m} x^{n-1} = 1 - x^m, \quad x \in \mathbb{R},$$

uvrštavanjem $x = \frac{1}{2}$ dobivamo

$$x_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq 1 + 2\left(1-\frac{1}{2^m}\right) < 3, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

te je niz (x_m) odozgo ograničen. Za $m+1$ formula (4.1) je oblika

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} \cdot \left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m+1}\right). \tag{4.5}$$

Uspoređivanjem (4.5) *sa* (4.1) *dobivamo*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}, \tag{4.6}$$

stoga zaključujemo da niz (x_m) *strogo raste. Kako je* $x_1 = 2$*, prema izrazu* (4.4) *je*

$$2 < e \leq 3.$$

★

5 | Cauchyjev niz

U ovom poglavlju bavit ćemo se posebnom vrstom nizova koji imaju bitnu ulogu u realnoj analizi, a to su Cauchyjevi nizovi. Cauchyjev niz nam, u skupu realnih brojeva, omogućava da ispitamo konvergenciju niza bez poznavanja njegova limesa. Definirajmo Cauchyjev niz te dokažimo bitna svojstva takvog niza.

Definicija 5.1. Niz (x_m) iz metričkog prostora (X, d) nazivamo **Cauchyjevim** [1] ili **fundamentalnim** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da je $d(x_l, x_m) < \varepsilon$ za sve $l, m \geq m_0$ tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \quad t.d. \quad \forall l, m \geq m_0 \quad \Longrightarrow \quad d(x_l, x_m) < \varepsilon.$$

Primjer 5.1. *Pokažimo da je niz (x_m), zadan općim članom*

$$x_m = 3 + \frac{2}{m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

Cauchyjev.
Neka je dan proizvoljan $\varepsilon > 0$ i pokažimo da postoji prirodan broj m_0 takav da za svaki $l, m \geq m_0$, vrijedi da je $|x_m - x_l| < \varepsilon$. Bez smanjenja općenitosti neka je $m \leq l$. Sada je

$$|x_m - x_l| = \left|3 + \frac{2}{m} - 3 - \frac{2}{l}\right| = \left|\frac{2}{m} - \frac{2}{l}\right| \leq \frac{2}{m} - \frac{2}{l} \leq \frac{2}{m} \leq \frac{2}{m_0} < \varepsilon.$$

Dakle,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})\left(m_0 > \frac{2}{\varepsilon}\right) \quad t.d. \quad \forall l, m \geq m_0, \quad m \leq l \quad \Longrightarrow \quad |x_m - x_l| < \varepsilon$$

tj. niz (x_m) je Cauchyjev.

★

Primjer 5.2. *Pokažimo da niz (x_m), zadan općim članom*

$$x_m = (-1)^m + \frac{3}{2m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

nije Cauchyjev.
Kako bi pokazali da niz nije Cauchyjev zapišimo negaciju definicije 5.1:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall m_0 \in \mathbb{N}) \quad \exists m, l \geq m_0 \quad i \quad |x_m - x_l| \geq \varepsilon$$

[1] Augustin Louis Cauchy (21. kolovoza 1789. - 23. svibnja 1857.), francuski matematičar

te ju primjenimo.
Neka je $m_0 \in \mathbb{N}$ proizvoljan, $m, l \in \mathbb{N}$ takvi da $m, l \geq m_0$ i $m = 2l$.
Treba pokazati da postoji $\varepsilon > 0$ t.d. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$.
Slijedi da je

$$|x_m - x_l| = \left|(-1)^{2l} + \frac{3}{4l} - (-1)^l - \frac{3}{2l}\right|. \tag{5.1}$$

Kako je $(-1)^{2l}$ uvijek jednako 1, izraz (5.1) postaje:

$$|x_m - x_l| = \left|1 - (-1)^l - \frac{3}{4l}\right|. \tag{5.2}$$

Promotrimo dva slučaja.

- *l paran*
  Uvrštavanjem parnog broja l u izraz (5.2) dobivamo:

  $$|x_m - x_l| = \left|1 - 1 - \frac{3}{4l}\right| = \frac{3}{4l} \leq \frac{3}{4m_0} < \varepsilon$$

  te ne možemo ništa zaključiti.

- *l neparan*
  Uvrstimo u izraz (5.2) neparan broj l. Tada iz izraza (5.2) slijedi:

  $$|x_m - x_l| = \left|1 + 1 - \frac{3}{4l}\right| = \left|2 - \frac{3}{4l}\right| = 2 - \frac{3}{4l} \geq \frac{5}{4} = \varepsilon.$$

Zaključujemo da

$$(\exists \varepsilon > 0)(\varepsilon = \frac{5}{4}) \quad t.d. \quad (\forall m_0 \in \mathbb{N})(\exists m, l \geq m_0)(m = 2l)(l \ neparan)$$
$$i \quad |x_m - x_l| \geq \varepsilon,$$

tj. niz (x_m) nije Cauchyjev. ★

Teorem 5.1. *Neka je (x_m) Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d). Ako neki podniz (x_{u_m}) niza (x_m) konvergira prema točki $x_0 \in X$, onda i niz (x_m) konvergira prema toj točki.*

Dokaz. Krenimo od pretpostavke da podniz (x_{u_m}) niza (x_m) konvergira prema točki $x_0 \in X$. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci teorema niz (x_m) je Cauchyjev stoga postoji prirodan broj m_0 takav da za $l, m \geq m_0$ vrijedi

$$d(x_l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iz pretpostavke da podniz (x_{u_m}) konvergira prema x_0, primjenom definicije konvergencije slijedi da postoji prirodan broj m_0 takav da je $u_m \geq m_0$ i vrijedi da je

$$d(x_{u_m}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako je $m \geq m_0$, onda slijedi da je

$$d(x_m, x_0) \leq d(x_m, x_{u_m}) + d(x_{u_m}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, niz (x_m) konvergira prema $x_0 \in X$. □

Teorem 5.2. *Svaki konvergentan niz (x_m) u metričkom prostoru je Cauchyjev.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz (x_m) konvergira prema točki x_0. Iz definicije limesa niza znamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_0 takav da svaki $m \geq m_0$ povlači

$$d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka su $m, l \geq m_0$. Primjenom nejednakosti trokuta dobiva se:

$$d(x_m, x_l) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zaključujemo da je (x_m) Cauchyjev niz. □

Primjer 5.3. *Općenito, obrat prethodnog teorema ne vrijedi, tj. svaki Cauchyjev niz u svakom metričkom prostoru ne mora konvergirati. Uzmimo prostor $X = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Niz*

$$x_m = \frac{1}{m}$$

je Cauchyjev niz.
Lako se pokaže da niz (x_m) ne konvergira u prostoru X, jer $x_m \to 0$, a $0 \notin X$. ★

Teorem 5.3. *Svaki Cauchyjev niz (x_m) iz metričkog prostora (X, d) je ograničen.*

Dokaz. Krenimo od pretpostavke da je niz (x_m) Cauchyjev. Tada za $\varepsilon = 1$ postoji prirodan broj m_0 takav da $m \geq m_0$ povlači

$$d(x_m, x_{m_0}) < 1.$$

Definirajmo

$$L = \max\{1, d(x_1, x_{m_0}), \ldots, d(x_{m_0 - 1}, x_{m_0})\} + 1.$$

Prema tome, otvorena kugla $K(x_{m_0}, L)$ sadrži sve članove niza (x_m). Zaključujemo da je niz (x_m) ograničen. Time je teorem dokazan. □

Teorem 5.4. *Niz realnih brojeva (x_m) je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Krenimo od pretpostavke da je niz (x_m) konvergentan. U teoremu 5.2 pokazali smo da je onda niz i Cauchyjev u proizvoljnom metričkom prostoru pa onda i u skupu realnih brojeva.
Dakle, niz (x_m) je Cauchyjev.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je niz (x_m) Cauchyjev. Prethodno smo dokazali da je svaki Cauchyjev niz ograničen i da svaki ograničen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz. Neka niz (x_{u_m}) konvergira prema x_0. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_1 sa svojstvom da

$$\forall m \geq m_1 \quad \Longrightarrow \quad |x_{u_m} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je niz (x_m) Cauchyjev, tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m_2 sa svojstvom da

$$\forall l, m \geq m_2 \quad \Longrightarrow \quad |x_l - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako je m_0 veći od brojeva m_1 i m_2, onda za $m \geq m_0$, zbog $u_m \geq m$ dobivamo

$$|x_m - x_0| = |x_m - x_{u_m} + x_{u_m} - x_0| \leq |x_m - x_{u_m}| + |x_{u_m} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Time smo pokazali konvergenciju niza (x_m). $\square$

6 | Nizovi funkcija

Nakon poglavlja o nizovima realnih brojeva možemo promatrati i nizove funkcija. U ovom poglavlju bavit ćemo se konvergencijom po točkama.

Definicija 6.1. Neka je T skup i (x_m) niz realnih funkcija $x_m : T \to \mathbb{R}$ definiran na skupu T. Neka je $x_0 : T \to \mathbb{R}$ funkcija. Za **niz funkcija** (x_m) kažemo da **konvergira** prema funkciji x_0 u točki $t_0 \in T$ ako niz realnih brojeva $x_m(t_0)$ konvergira prema broju $x_0(t_0)$. Ako je $A \subseteq T$ neki podskup i niz funkcija (x_m) konvergira prema funkciji x_0 u svakoj točki $t \in A$, onda kažemo da (x_m) **konvergira po točkama** ili **obično** prema x_0 na skupu A.

Neka je T proizvoljan skup, $\mathbb{R}^T$ skup svih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$. Neka je $t \in T$ točka i $V \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. U svrhu tvrdnji koje ćemo imati u nastavku, uvedimo sljedeću oznaku

$$U(t;V) = \{x \in \mathbb{R}^T : x(t) \in V\}.$$

Preciznije, vrijedi da je $x \in U(t;V)$ ako i samo ako je $x(t) \in V$. Sa $U(t_1,\dots,t_m;V_1,\dots,V_m)$ označimo presjek skupova $U(t_1;V_1) \cap \dots \cap U(t_m;V_m)$.

Primjer 6.1. *Promotrimo niz funkcija (x_m) definiran s*

$$x_m(t) = \frac{mt}{m+5}.$$

Vrijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{mt}{m+5} = t,$$

te polazni niz funkcija konvergira po točkama prema funkciji $x(t) = t$. ★

Teorem 6.1. *Neka je T proizvoljan skup i neka je $\mathbb{R}^T$ skup svih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$ te $\mathcal{U}$ topologija na $\mathbb{R}^T$ čiju bazu čine svi skupovi oblika $U(t_1,\dots,t_m;V_1,\dots,V_m) = \{x \in \mathbb{R}^T : x(t_i) \in V_i, i = 1,\dots,m\}$ gdje t_i pripada točkama skupa T, a V_i otvorenim skupovima od $\mathbb{R}$. Niz (x_m) funkcija $x_m \in \mathbb{R}^T$ konvergira obično prema funkciji $x_0 \in \mathbb{R}^T$ ako i samo ako (x_m) konvergira prema x_0 u topološkom prostoru $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U})$.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Krenimo od pretpostavke da niz funkcija (x_m) konvergira prema funkciji x_0 u prostoru $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U})$. Tada za svaki $t \in T$ i za svaki otvoreni skup $V \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži $x_0(t)$ vrijedi da je $x_0 \in U(t;V)$. Dakle, postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi

$$x_m \in U(t;V), \quad tj. \quad x_m(t) \in V.$$

Time smo pokazali da je

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = x_0(t) \quad \forall t \in T,$$

tj. da (x_m) konvergira prema x_0 obično.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Krenimo s pretpostavkom da (x_m) konvergira prema x_0 obično. Označimo s $U = U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k)$ i neka U sadrži x_0. Tada je $x_0(t_i) \in V_i$ za svaki $i = 1,\dots,k$. Kako $x_m(t_i) \to x_0(t_i)$ onda postoji prirodan broj m_0 sa svojstvom da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi

$$x_m(t_i) \in V_i, \quad i = 1,\dots,k \quad tj. \quad x_m \in U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k) = U,$$

što dokazuje da $x_m \to x_0$ s obzirom na topologiju $\mathcal{U}$. $\square$

Napomena 6.1. Primjetimo, prostor $(\mathbb{R}^T,\mathcal{U})$ je Hausdorffov.

Literatura

[1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, Udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred tehničkih škola*, 1. izdanje, Element, Zagreb, 2001.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, Zbirka zadataka za IV. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1999.

[4] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[5] D. Jukić, *Realna analiza*, Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[6] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[7] S. Mardešić, *Matematička analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[8] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Srnec, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4 - udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje - 5, 6 i 7 sati tjedno - 1. i 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[9] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF MO, Zagreb, 2002.

Sažetak

U ovom radu bavimo se nizovima realnih brojeva te navodimo bitna svojstva nizova. Najprije je definiran pojam niza i podniza. Većina rada se bavi konvergencijom niza što je jedan od osnovnih pojmova realne analize. Definiran je limes, ograničenost i monotonost niza te su dokazani bitni teoremi koji povezuju te pojmove s konvergencijom. Pomoću konvergencije niza u metričkom prostoru okarakterizirali smo zatvarač skupa. Pokazano je da definicija broja e proizlazi iz konvergencije niza. Zatim je uveden pojam Cauchyjevog niza i dokazana su bitna svojstva Cauchyjevog niza. Na samom kraju rada bavili smo se nizovima funkcija i konvergencijom po točkama.

Ključne riječi

niz, podniz, konvergencija, limes niza, monotonost, ograničenost, metrički prostor, topološki prostor, Cauchyjev niz, Bolzano-Weierstrassov teorem, nizovi funkcija.

Sequences

Summary

In this paper, we deal with sequences of real numbers and highlight important properties of sequences. First, the concepts of a sequences and a subsequences is defined. Most of the paper is focused on the convergence of sequences, which is one of the fundamental concepts of real analysis. The limit, boundedness, and monotonicity of sequences are defined, and essential theorems that connect these concepts with convergence are proven. Using the convergence of a sequence in a metric space, we characterized the closure of a set. It has been shown that the definition of the number e arises from the convergence of a sequence. Then the concept of a Cauchy sequence was introduced and important properties of Cauchy sequences were proven. At the very end of the paper, we dealt with sequences of functions and pointwise convergence.

Keywords

sequence, subsequence, convergency, limit of a sequence, monotonicity, boundedness, metric space, topological space, Cauchy sequence, Bolzano-Weierstrass theorem, sequences of functions.

Životopis

Moje ime je Barbara Barunović. Rođena sam 19.05.1997. godine u Novoj Gradiški. U razdoblju od 2004. do 2012. godine pohađala sam Osnovnu školu "Vladimir Nazor" u Adžamovcima. Opću gimnaziju u Novoj Gradiški završila sam 2016. godine te nakon toga upisala Sveučilišni prijediplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, sada Fakultet primijenjene matematike i informatike.
Tijekom studiranja radila sam studentske poslove te aktivno volontirala s djecom i mladima pružajući im podršku u učenju matematike i fizike za osnovnu i srednju školu.