

Određeni integral i primjene u fizici

Tompa, Lara

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:008490>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-01**



Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)





SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Određeni integral i primjene u fizici

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

**doc. dr. sc. Jelena Jankov
Pavlović**

Student:

Lara Tompa

Osijek, 2024.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Određeni integral	3
2.1	Problem površine	3
2.2	Riemannov integral ograničene funkcije na segmentu	4
2.3	Osnovna svojstva Riemannovog integrala	8
2.4	Integrabilnost monotonih i neprekidnih funkcija	10
2.5	Primitivna funkcija	12
2.6	Metode integracije	15
2.6.1	Direktna integracija	15
2.6.2	Metoda supstitucije	16
2.6.3	Parcijalna integracija	16
3	Primjene integralnog računa u fizici	19
3.1	Računanje duljine puta	19
3.2	Rad sile	20
3.3	Masa i težište	23
3.4	Volumen fluida	28
3.5	Fluks	29
	Literatura	33
	Sažetak	35
	Summary	37
	Životopis	39

1 | Uvod

Problemi računanja površine nekog područja stari su više od 4000 godina. Odgovor na taj problem daje integralni račun. Integral je jedan od ključnih pojmova matematike čiju su ideju računanja prvi oblikovali Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz, dok je prvu strogu definiciju određenog integrala dao Bernhard Riemann. Danas se tehnike integriranja primjenjuju u prirodnim znanostima, inženjerstvu, ekonomiji te brojnim drugim područjima. U fizici, određeni integrali omogućuju precizno računanje kompleksnih pojmova, počevši od klasične mehanike do elektromagnetizma i kvantne mehanike.

U prvom dijelu rada bit će objašnjeno kako procijeniti površinu nekog proizvoljnog lika što je zapravo motivacija za uvođenje integrala. Nadalje, uvest ćemo pojam Riemannovog integrala te ćemo kroz teoreme objasniti i dokazati neka njegova osnovna svojstva. Zatim ćemo dati odgovor na pitanje koje su to funkcije Riemann integrabilne te kako izračunati integrale takvih funkcija koristeći direktnu integraciju, metodu supstitucije i metodu parcijalne integracije. Te tri metode pripadaju metodama integracije.

U drugom dijelu rada fokusirat ćemo se na primjene integralnog računa u području fizike. Za početak, izvest ćemo formulu za računanje duljine puta koji je prešlo tijelo zadane brzine. Zatim ćemo objasniti kako izračunati rad neke sile te kako naći koordinate težišta tijela. Sljedeće ćemo pojasniti kako izračunati volumen fluida koji potpuno ispunjava cijev, ako znamo površinu poprečnog presjeka te cijevi. Naposljetku ćemo uvesti pojam fluksa te izvesti formulu za njegovo računanje. Sve navedene probleme potkrijepit ćemo primjerima iz stvarnog života.

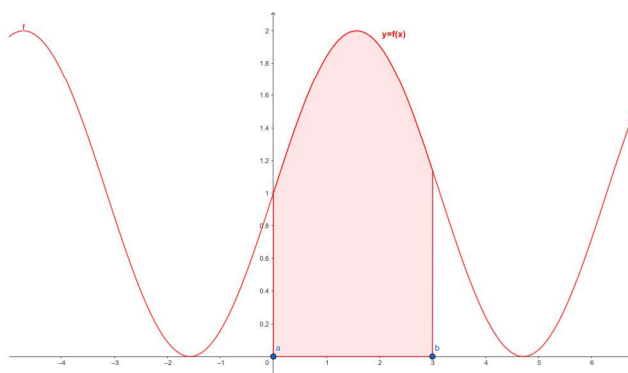
Cilj ovog rada je objasniti određeni integral te čitatelju približiti taj apstraktan matematički pojam preko opipljivog svijeta fizike. Poznavanje primjena integralnog računa u fizici uvelike pomaže razumjeti matematičke tehnike, kao i koncepte fizike, što pokazuje povezanost matematike i fizike.

2 | Određeni integral

2.1 Problem površine

Računati površinu jednostavnih geometrijskih likova poput pravokutnika, trokuta ili kruga naučili smo još u osnovnoj školi. Postavlja se pitanje kako računati površinu nekog općenitog lika u ravnini?

Na primjer, zanima nas dio ravnine omeđen grafom funkcije f na nekom segmentu $[a, b]$ i pravcima $x = a, x = b$ i $y = 0$ kao na Slici 2.1. Takve ćemo likove nazvati *krivolinijski trapez* ili *pseudotrapez*.



Slika 2.1: Površina ispod grafa funkcije f na segmentu $[0,3]$

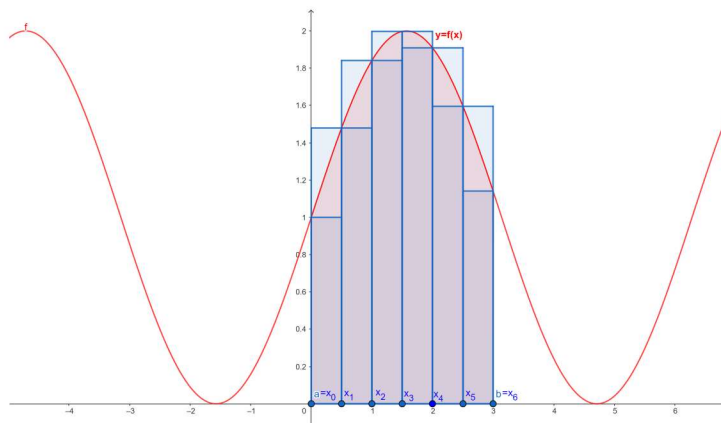
Označimo s P funkciju koja dijelu ravnine pridružuje njegovu površinu. Od te funkcije očekujemo sljedeća svojstva:

1. $P(p) \geq 0$
2. $p_1 \cap p_2 = \emptyset \Rightarrow P(p_1 \cup p_2) = P(p_1) + P(p_2)$
3. $p_1 \subseteq p_2 \Rightarrow P(p_1) \leq P(p_2)$.

Ideja je korištenjem poznatih formula odrediti površinu pseudotrapeza T sa Slike 2.1. Pokušamo li pseudotrapez podijeliti na pravokutnike vidimo da to nije moguće jer graf funkcije f nije "ravna linija".

Stoga, nastojimo približno odrediti površinu: podijelimo segment $[a, b]$ na $n \in \mathbf{N}$ dijelova točkama $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ kao što je to napravljeno na Slici 2.2. Time je lik T podijeljen na pseudotrapeze T_1, \dots, T_n . Kako je $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ po trećem svojstvu funkcije površine vrijedi

$$P(T) = P(T_1) + \dots + P(T_n). \quad (2.1)$$

Slika 2.2: Primjer raspodjele ($n = 6$)

Promotrimo proizvoljan segment $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$, te neka je

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\} \text{ i } M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}.$$

Nadalje, neka je p_k pravokutnik sa stranicama duljine I_k, m_k te P_k pravokutnik sa stranicama duljine I_k, M_k . Vrijedi $p_k \subseteq T_k \subseteq P_k$. Odatle, koristeći svojstva površine i formulu za površinu pravokutnika slijedi:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq P(T_k) \leq M_k(x_k - x_{k-1}). \quad (2.2)$$

Uvrštavajući dobivenu jednadžbu u (2.1) dobivamo ocjenu za površinu ispod grafa funkcije f:

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq P(T) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}). \quad (2.3)$$

Različitim raspodjelama segmenta dobijamo različite aproksimacije površine danog pseudotrapeza. Iz Slike 2.2 jasno je da, u pravilu, finija raspodjela segmenata daje bolju aproksimaciju površine ispod grafa funkcije f.

Motivirani ovim zaključcima uvodimo pojam Riemannovog¹ integrala funkcije i povezujemo ga s površinom ispod njezinog grafa.

2.2 Riemannov integral ograničene funkcije na segmentu

Neka je $[a, b]$ segment realnih brojeva i $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ograničena funkcija. Stoga, postoje realni brojevi

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ i } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, 17. rujan 1826. – Selasca, 20. srpanj 1866.) njemački matematičar

tj. infimum i supremum funkcije f . Uočimo, ako je $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ tada je i restrikcija od f na $[a_1, b_1]$ ograničena funkcija i iz

$$m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$$

slijedi

$$m \leq m_1 \leq f(x) \leq M_1 \leq M, x \in [a_1, b_1], \quad (2.4)$$

gdje su $m_1 = \inf_{x \in [a_1, b_1]} f(x)$ i $M_1 = \sup_{x \in [a_1, b_1]} f(x)$.

Napravimo sada analognu konstrukciju kao u problemu površine. Za prirodni broj n , segment $[a, b]$ podijelimo na n dijelova tako da je

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada konačan skup točaka $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ nazivamo **subdivizijom** ili **particijom** segmenta $[a, b]$. Za subdiviziju P^* kažemo da je **profinjenje** subdivizije P ako je $P^* \subseteq P$. **Dijametar subdivizije** je realan broj:

$$\delta(P) = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots, n\}.$$

Definicija 2.2.1. Neka je $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}$. Za subdiviziju $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ definirano s:

$$x_i := a + ih, h =: \frac{b-a}{n}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

kažemo da je **ekvidistantna**.

Neka je

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, 1 \leq k \leq n,$$

te $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljna točka. Definiramo Darbouxove² i integralnu sumu:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \text{ je donja Darbouxova suma,}$$

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ je integralna suma, te}$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \text{ gornja Darbouxova suma.}$$

Očito vrijedi:

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a). \quad (2.5)$$

Neka je dan segment $[a, b]$ te \mathcal{P} skup svih subdivizija na njemu. Nadalje, neka je $\mathcal{A} = \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$, $\mathcal{B} = \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$, te $\mathcal{C} = \{\sigma(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$. Zbog (2.5) ti skupovi su ograničeni pa postoje

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \sup \mathcal{A} \text{ i } \mathcal{I}^*(f; a, b) = \inf \mathcal{B}.$$

²Jean Gaston Darboux (Nimes, 14. kolovoz 1842. - Pariz, 23. veljača 1917.) francuski matematičar

Definicija 2.2.2. Broj \mathcal{I}_* naziva se **donji Riemannov integral** funkcije f na $[a, b]$, a broj \mathcal{I}^* **gornji Riemannov integral** funkcije f na $[a, b]$.

Iz pokazanog je jasno da svaka ograničena funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima gornji i donji Riemannov integral.

Teorem 2.2.1. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a, b]$ te neka su \mathcal{I}_* i \mathcal{I}^* donji i gornji Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$. Tada je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) \leq \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Dokaz. Dokaz se provodi u 3 dijela.

Prvo pokazujemo da se donja Darbouxova suma povećava ili ostaje jednaka dodavanjem jedne točke. Neka je $a = x_0 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ zadana subdivizija P . Nadalje, neka je P^* nova subdivizija nastala dodavanjem točke x^* takve da je $x_{k-1} < x^* < x_k$. Suma $s(f, P^*)$ nastaje tako što pribrojnik $m_k(x_k - x_{k-1})$ zamijenimo s $m_k^*(x^* - x_{k-1}) + m_k^{**}(x_k - x^*)$ gdje su m_k^*, m_k^{**} infimumi funkcije f na $[x_{k-1}, x^*]$, odnosno $[x^*, x_k]$. Budući da su $[x_{k-1}, x^*]$ i $[x^*, x_k]$ podsegmenti od $[x_{k-1}, x_k]$ iz (2.4) slijedi $m_k^* \geq m_k$ i $m_k^{**} \geq m_k$ pa je

$$m_k^*(x^* - x_{k-1}) + m_k^{**}(x_k - x^*) \geq m_k(x^* - x_{k-1}) + m_k(x_k - x^*) = m_k(x_k - x_{k-1}),$$

odnosno $s(f, P^*) \geq s(f, P)$. Analogno vrijedi $S(f, P^*) \leq S(f, P)$ tj. gornja Darbouxova suma se smanjuje ili ostaje jednaka. Uočimo da zaključak vrijedi za konačan broj novih točaka (svaki put dodajemo po jednu).

Sljedeće ćemo pokazati da je donja Darbouxova suma uvijek manja od gornje neovisno o izboru subdivizije. Neka su P_1, P_2 dvije subdivizije, te neka je P_3 subdivizija nastala unijom P_1, P_2 . P_3 nastala je dodavanjem konačno mnogo točaka iz P_1 u P_2 , ali i obrnuto (P_3 je nastala dodavanjem konačno mnogo točaka iz P_2 u P_1) pa iz prethodno pokazanog vrijedi $s(f, P_1) \leq s(f, P_3)$ i $S(f, P_3) \leq S(f, P_2)$, te $s(f, P_3) \leq S(f, P_3)$ jer su obje sume na istoj subdiviziji pa vrijedi:

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_3) \leq S(f, P_3) \leq S(f, P_2).$$

Pokazali smo

$$(\forall s \in \mathcal{A})(\forall S \in \mathcal{B}) s(f, P) \leq S(f, P),$$

gdje je P proizvoljna subdivizija. Odatle vrijedi $\sup \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}$, odnosno $\mathcal{I}_* \leq \mathcal{I}^*$. □

Definicija 2.2.3. Za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ograničenu na $[a, b]$ kažemo da je **R-integrabilna** ili **integrabilna u Riemannovom smislu** ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva **integral** ili **R-integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Napomena 2.2.1. Za integral funkcije f iz Definicije 2.2.3 koristimo neku od sljedećih oznaka:

$$\mathcal{I} = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Pri tome je $[a, b]$ područje integracije, funkcija f podintegralna funkcija, a x varijabla integracije.

Primjer 2.2.1. Za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ zadanu s $f(x) = x$ izračunajte gornju i donju Darbouxovu sumu te ispitajte je li Riemann integrabilna.

Za ekvidistantnu subdiviziju P

$$x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \dots, n$$

segmenta $[a, b]$ vrijedi

$$m_k = f(x_{k-1}) = a + (k-1)h$$

i

$$M_k = f(x_k) = a + kh.$$

Tada je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a + kh)h = \sum_{k=1}^n ah + kh^2 = nah + h^2 \sum_{k=1}^n k \\ &= nah + h^2 \frac{n(n-1)}{2} = na \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Analogno se dobije:

$$s_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{s_n : n \in \mathbf{N}\} = \left\{ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n} : n \in \mathbf{N} \right\}, \\ \mathcal{B} &= \{S_n : n \in \mathbf{N}\} = \left\{ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n} : n \in \mathbf{N} \right\}. \end{aligned}$$

Odatle je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \sup \mathcal{A} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \inf \mathcal{B} = \mathcal{I}^*(f; a, b),$$

tj. funkcija f je Riemann integrabilna.

Osim same definicije imamo i važan kriterij integrabilnosti naveden u sljedećem teoremu:

Teorem 2.2.2. *Neka je $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ ograničena funkcija na $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Funkcija f je integrabilna na $[\alpha, \beta]$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[\alpha, \beta]$ takva da za pripadne Darbouxove sume vrijedi $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.*

Dokaz. \Rightarrow Pretpostavimo da je f \mathbf{R} -integrabilna na $[\alpha, \beta]$, tj. da vrijedi $\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$. Iz svojstva supremuma i infimuma slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoje subdivizije P_1, P_2 za čije Darbouxove sume vrijedi:

$$S(f, P_1) < \mathcal{I}^* + \frac{\epsilon}{2} \text{ i } s(f, P_2) > \mathcal{I}_* - \frac{\epsilon}{2}.$$

Neka je $P = P_1 \cup P_2$. Iz dokaza Teorema 2.2.1 slijedi

$$s(f, P_2) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_1)$$

pa iz toga dobijemo:

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_1) - s(f, P_2) < \mathcal{I}^* + \frac{\epsilon}{2} - \mathcal{I}_* + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

\Leftarrow Neka za svaki $\epsilon > 0$ postoji subdivizija P od $[\alpha, \beta]$ t.d. za pripadne Darbouxove sume vrijedi

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon.$$

Tada je i

$$0 \leq \mathcal{I}^* - \mathcal{I}_* \leq S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

pa vrijedi $\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$. □

Vratimo se sada na problem površine s početka. Neka je $T = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : 0 \leq y \leq g(x), x \in [a, b]\}$ pseudotrapez ispod grafa funkcije $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^+$. Sada površinu pseudotrapeza $\mu(T)$ definiramo s

$$\mu(T) = \int_a^b g(x) dx$$

za integrabilnu funkciju f .

2.3 Osnovna svojstva Riemannovog integrala

Osnovna svojstva integrala dana su sljedećim teoremima.

Teorem 2.3.1. *Neka su $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabilne funkcije na $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Za $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{R}$ funkcija $\alpha_1 f + \beta_1 g$ je integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi:*

$$\int_a^b (\alpha_1 f(x) + \beta_1 g(x)) dx = \alpha_1 \int_a^b f(x) dx + \beta_1 \int_a^b g(x) dx,$$

tj. linearnost integrala.

Ako vrijedi

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$$

onda je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

tj. vrijedi monotonost integrala.

Dokaz. Za dokaz teorema vidjeti [5]. □

Na temelju prethodnog teorema može se zaključiti da je $\mathcal{I}([a, b])$ (skup svih integrabilnih funkcija na segmentu $[a, b]$) realan vektorski prostor (zatvoren je na linearne kombinacije pa je potprostor prostora svih realnih funkcija na segmentu $[a, b]$).

Teorem 2.3.2. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ograničena funkcija na $[a, b] \subset \mathbf{R}$ i $c \in \langle a, b \rangle$. Ako je funkcija f integrabilna na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$, onda je f integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dokaz. Po Teoremu 2.2.2 za proizvoljni $\epsilon > 0$ postoji subdivizija P_1 segmenta $[a, c]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$$

takva da je

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{2},$$

te subdivizija P_2 segmenta $[c, b]$:

$$c = x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+m} = b$$

takva da je

$$S(f, P_2) - s(f, P_2) = \sum_{k=n+1}^{n+m} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sada uzemo subdiviziju P segmenta $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+m} = b$. Za pripadne Darbouxove sume subdivizije P vrijedi:

$$S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2) \text{ i } s(f, P) = s(f, P_1) + s(f, P_2).$$

Iz toga slijedi da je

$$S(f, P) - s(f, P) = S(f, P_1) - s(f, P_1) + S(f, P_2) - s(f, P_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pa je po Teoremu 2.2.2 f integrabilna na $[a, b]$. Sada po prethodno pokazanom imamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx &\leq S(f, P) - s(f, P_1) - s(f, P_2) \\ &= S(f, P_1) - S(f, P_2) - s(f, P_1) - s(f, P_2) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx &\geq s(f, P) - S(f, P_1) - S(f, P_2) \\ &= s(f, P_1) + s(f, P_2) - S(f, P_1) - S(f, P_2) \\ &> -\epsilon, \end{aligned}$$

odnosno $\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \right| < \epsilon$. Odatle slijedi aditivnost po području integracije. \square

Teorem 2.3.3. *Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabilna na $[a, b]$, onda je i funkcija $|f|$ integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \quad (2.6)$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [2]. \square

Međutim, treba napomenuti da nije svaka ograničena funkcija na segmentu Riemann integrabilna. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.3.1. *Neka je $f : [0, 7] \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} 7, & \text{ako je } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki segment $[c, d] \subseteq [0, 7]$ vrijedi:

$$\inf_{[c,d]} f = 0 \text{ i } \sup_{[c,d]} f = 7$$

što daje

$$\mathcal{I}_* = 0 \neq 7 = \mathcal{I}^*,$$

tj. funkcija f nije Riemann integrabilna.

2.4 Integrabilnost monotonih i neprekidnih funkcija

Prirodno je pitati se koji su to uvjeti na (ograničenu) funkciju na segmentu da ona bude Riemann integrabilna.

Teorem 2.4.1. *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ monotona funkcija na $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Tada je ona Riemann integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je funkcija f padajuća na $[a, b]$. Ako je $f(a) = f(b)$, onda je funkcija f konstantna na $[a, b]$ pa je integrabilna (za dokaz vidjeti [5]). Stoga, pretpostavimo da je $f(a) > f(b)$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan, te neka je $n \in \mathbf{N}$ takav da vrijedi

$$\frac{(f(a) - f(b))(b - a)}{n(b - a)} < \epsilon.$$

Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju:

$$x_k = a + kh, \quad k = 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

S obzirom da je funkcija f padajuća, za pripadne Darbouxove sume vrijedi:

$$s = \sum_{k=1}^n f(x_k)h,$$

$$S = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})h.$$

Tada je

$$S - s = \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k))h = (f(a) - f(b))\frac{b-a}{n} < \epsilon,$$

te je prema Teoremu 2.2.2 funkcija f Riemann integrabilna. \square

Primjer 2.4.1. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x$, iz Primjera 2.2.1 je rastuća:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y), \quad \forall x, y \in [a, b],$$

pa možemo direktno zaključiti da je ona i Riemann integrabilna bez računanja Darbouxovih suma.

Sljedeće što nas zanima je je li svaka neprekidna funkcija Riemann integrabilna. O tome nam govori **Riemannov teorem**:

Teorem 2.4.2. Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, onda je ona i integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz. Iz Teorema 2.2.2 slijedi da je dovoljno pokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[a, b]$ takva da vrijedi $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$. Ako je funkcija neprekidna na segmentu, onda je ona i uniformno neprekidna (za detalje između veze neprekidnosti i uniformne neprekidnosti vidjeti [2]) pa postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x, y \in [a, b]$ za koje je $|x - y| < \delta$ slijedi da je

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Neka je P proizvoljna subdivizija segmenta $[a, b]$ čiji je dijametar $\delta(P)$ manji od δ . Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu o neprekidnim funkcijama slika funkcije f je također segment (vidjeti [2], str. 148.) pa postoje $x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]$ takve da vrijedi

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Pri tome su:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_1) \quad \text{i} \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_2).$$

Kako je $|x_2 - x_1| \leq \delta(P) < \delta$, pa zbog toga što je f uniformno neprekidna slijedi

$$M_k - m_k = |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Sada je:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) = \epsilon.$$

□

Sljedeći korolar važna je posljedica Riemannovog teorema:

Korolar 2.4.1. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Dokaz. Neka je $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Tada za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Funkcija f je Riemann integrabilna pa zbog monotonosti integrala slijedi:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

odnosno

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Po Bolzano-Weierstrasseovom teoremu (vidjeti [2], str. 243.) postoji $c \in [a, b]$ takav da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Prethodni korolar naziva se **teorem srednje vrijednosti za određeni integral**.

2.5 Primitivna funkcija

Definicija 2.5.1. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. **Primitivna funkcija** funkcije f na skupu $[a, b]$ je svaka funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

S obzirom da smo pokazali da je neprekidna funkcija Riemann integrabilna za očekivati je da će postojati primitivna funkcija svake neprekidne funkcije.

Teorem 2.5.1. *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ te $c \in [a, b]$. Tada postoji primitivna funkcija od f na $[a, b]$ definirana izrazom:*

$$F(x) = \int_c^x f(\tau) d\tau, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dokaz. Trebamo pokazati da je F primitivna funkcija od f na $[a, b]$, tj. da je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$. Svaka restrikcija neprekidne funkcije je neprekidna pa za proizvoljnu točku $d \in [a, b]$ iz teorema srednje vrijednosti za određeni integral i Teorema 2.3.2 slijedi:

$$F(x) - F(d) = \int_c^x f(\tau) d\tau - \int_c^d f(\tau) d\tau = \int_d^x f(\tau) d\tau = f(d + \Delta_x(x - d))(x - d)$$

Odatle imamo

$$\frac{F(x) - F(d)}{x - d} = f(d + \Delta_x(x - d)),$$

gdje je $\Delta_x \in [0, 1]$. Sada iz neprekidnosti funkcije f slijedi:

$$F'(d) = \lim_{x \rightarrow d} \frac{F(x) - F(d)}{x - d} = \lim_{x \rightarrow d} f(d + \Delta_x(x - d)) = \lim_{x \rightarrow d} f(d) = f(d).$$

□

Sljedeće što nas zanima je jedinstvenost primitivne funkcije:

Teorem 2.5.2. *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Ako su F i G bilo koje primitivne funkcije od f na $[a, b]$, onda postoji konstanta $\alpha \in \mathbf{R}$ takva da vrijedi*

$$G(x) = F(x) + \alpha, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dokaz. Kako su F i G primitivne funkcije od f vrijedi

$$F'(x) = f(x) \text{ i } G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Tada je

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

odnosno funkcija $G - F$ je konstantna pa postoji $\alpha \in \mathbf{R}$ tako da je

$$G(x) = F(x) + \alpha, \quad \forall x \in [a, b].$$

□

Dakle, primitivna funkcija jedinstvena je do na konstantu.

Sada ćemo dokazati **Newton-Leibnizovu formulu** koja nam daje važnu poveznicu između Riemannovog integrala funkcije na segmentu i primitivne funkcije:

Teorem 2.5.3. *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a, b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Ako su F i G primitivne funkcije od f na $[a, b]$ onda po prethodnom teoremu postoji konstanta $c \in \mathbf{R}$ takva da je $G(x) = F(x) + c$ za svaki $x \in [a, b]$. Po Teoremu 2.5.1 slijedi da postoji primitivna funkcija od f zadana s

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

a kako vrijedi

$$G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a),$$

za neku drugu primitivnu funkciju G , možemo pretpostaviti da je primitivna funkcija F dana izrazom $F(x) = \int_d^x f(\tau)d\tau$ gdje je $d \in [a, b]$. Slijedi:

$$F(b) - F(a) = \int_d^b f(t)dt - \int_d^a f(t)dt = \int_d^b f(t)dt + \int_a^d f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Kod upotrebe Newton-Leibnizove formule često se koristi oznaka:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Napomena 2.5.1. Može se pokazati da na segmentu $[a, b]$ postoji derivabilna funkcija F za koju vrijedi: $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, ali da f nije Riemann integrabilna. To znači da postojanje primitivne funkcije ne povlači integrabilnost, a onda i Newton-Leibnizova formula nema smisla. Stoga zaključujemo da je uvjet neprekidnosti u prethodnim teoremima vrlo važan. Na primjer, neka je $F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ zadana s

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Funkcija F je derivabilna na $[0, 1]$ pa neka je $f = F'$ tj

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Funkcija f nije ograničena oko 0 pa nije Riemann integrabilna.

Naći primitivnu funkciju nije uvijek jednostavno. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.5.1. *Neka je funkcija $f : [7, 21] \rightarrow \mathbf{R}$ zadana formulom*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Funkcija f je neprekidna pa prema Teoremu 2.5.1 ona ima primitivnu funkciju F , za koju se može pokazati da nije elementarna funkcija.

2.6 Metode integracije

S obzirom da nije uvijek lako naći primitivnu funkciju pa time ni izračunati integral, u ovom poglavlju proučit ćemo metode koje olakšavaju pronalaženje primitivne funkcije. Cilj je od početne funkcije doći do jednostavnije čija nam je primitivna funkcija poznata.

Tablica nekih elementarnih funkcija i njezinih primitivnih funkcija:

$f(x)$	$F(x)$
$c, c \in \mathbf{R}$	$cx + C$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Napomenimo da je u prethodnoj tablici $C \in \mathbf{R}$ proizvoljna konstanta.

2.6.1 Direktna integracija

Ova metoda svodi se na transformaciju početne funkcije na nekoliko elementarnih funkcija za čiju integraciju koristimo prethodnu tablicu. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.6.1. *Izračunajte integral:*

$$\int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Primjenom formule za kvadrat zbroja dobijemo

$$(x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9,$$

te iz linearnosti integrala i Newton-Leibnitzove formule slijedi:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx &= \int_0^2 (x^4 + 6x^2 + 3) dx = \int_0^2 x^4 dx + 6 \int_0^2 x^2 dx + 9 \int_0^2 1 dx \\ &= \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 + 6 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + 9x \Big|_0^2 = \frac{32}{5} + 6 \frac{8}{3} + 18 = \frac{202}{5}.\end{aligned}$$

2.6.2 Metoda supstitucije

Druga metoda je **metoda supstitucije** ili metoda uvođenja nove varijable. Ta metoda posljedica je derivacije kompozicije funkcije.

Teorem 2.6.1. *Neka su $K, L \subseteq \mathbf{R}$ otvoreni intervale, $\rho : L \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilna funkcija i $F : K \rightarrow \mathbf{R}$ primitivna funkcija od f . Neka je $\rho(L) \subseteq K$. Tada je $G = F \circ \rho$ primitivna funkcija od $(f \circ \rho)\rho'$ na J . Također, za $\alpha_1, \beta_1 \in J$ vrijedi*

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\rho(t))\rho'(t)dt = \int_{\rho(\alpha_1)}^{\rho(\beta_1)} f(x)dx. \quad (2.7)$$

Dokaz. Zbog $\rho(L) \subseteq K$ funkcija $G = F \circ \rho$ je dobro definirana i derivabilna je na L . Vrijedi

$$G'(x) = F'(\rho(x))\rho'(x) = f(\rho(x))\rho'(x)$$

što daje

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\rho(t))\rho'(t)dt = G(\beta_1) - G(\alpha_1) = F(\rho(\beta_1)) - F(\rho(\alpha_1)) = \int_{\rho(\alpha_1)}^{\rho(\beta_1)} f(x)dx.$$

□

Primjer 2.6.2. *Izračunajte integral*

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx.$$

Supstitucijom $t = \ln x$ dobijemo $dt = \frac{1}{x} dx$ pa slijedi

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^2 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = 2.$$

2.6.3 Parcijalna integracija

Treća metoda posljedica je derivacije produkta funkcija, a naziva se **metoda parcijalne integracije**.

Teorem 2.6.2. *Za funkcije $u, v : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ te za svaki $\alpha, \beta \in I$ vrijedi*

$$\int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t)dt.$$

Dokaz. Iz pravila derivacije produkta funkcija vrijedi da je $F(t) = u(t)v(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$. Iz toga imamo da je

$$u(t)v(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t) dt,$$

što je i trebalo pokazati. □

Primjer 2.6.3. *Izračunajte integral*

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Neka je $u'(x) = e^x$ i $v(x) = x$. Tada je

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1.$$

Iz prethodno pokazanih teorema možemo zaključiti da je skup integrabilnih funkcija vrlo bogat. Primjenom metoda integracije mogu se integrirati brojne klase funkcija poput racionalnih, binomnih, trigonometrijskih te neke iracionalne funkcije. Za više informacija kako riješiti takve integrale vidjeti [2].

3 | Primjene integralnog računa u fizici

Sada kada smo se malo bolje upoznali s integralnim računom ostaje vidjeti što sve u području fizike možemo računati preko integrala.

Napomena 3.0.1. U svim sljedećim primjerima podrazumijevamo da su funkcije pomoću kojih definiramo neki pojam, integrabilne.

3.1 Računanje duljine puta

Promotrimo prvo tijelo koje se giba jednoliko pravocrtno. Ako se tijelo giba brzinom v , put koje je ono prešlo do trenutka t definira se kao: $s := vt$. Sada uvedimo tijelo koje se giba, ne nužno jednoliko pravocrtno. Na pravac po kojem se giba tijelo uvedimo koordinatni sustav i početak gibanja označimo s 0 te označimo s $v(t)$ brzinu tijela u trenutku t . Želimo odrediti put koje je tijelo prešlo do trenutka t , tj. $s(t)$.

Neka je dana funkcija brzine $v : [0, t] \rightarrow \mathbf{R}$ gdje je $t > 0$. Uzmimo subdiviziju

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \quad n \in \mathbf{N}$$

segmenta $[0, t]$. Na proizvoljnom podsegmentu $[t_{k-1}, t_k], k < n, k \in \mathbf{N}$, brzinu tijela aproksimiramo s $v(x_k^*)$ pri čemu je $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljna točka. Tada se na tom podsegmentu tijelo giba jednoliko pravocrtno pa vrijedi da je $s_k \approx v(x_k^*)(t_k - t_{k-1})$, odnosno

$$s \approx \sum_{k=1}^n v(x_k^*)(t_k - t_{k-1}).$$

Ova suma je upravo jednaka integralnoj sumi funkcije v pa ima smisla definirati:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Primjer 3.1.1. Brzina čestice dana je funkcijom $v(t) = 2t + 1, t > 0$, gdje je vrijeme mjereno u sekundama. Koliko je metara prešla čestica za 10 sekundi?

Prema prethodno izvedenoj formuli imamo da je

$$s(10) = \int_0^{10} (2\tau + 1) d\tau = \tau^2 \Big|_0^{10} + \tau \Big|_0^{10} = 110.$$

Čestica je za 10 sekundi prešla 110 m.

Napomena 3.1.1. Umjesto definiranja prijedrenog puta preko brzine, može se definirati i brzina preko puta. Tada je

$$v(t) = s'(t), \quad (3.1)$$

za neki trenutak t (vidjeti [1]). Uočimo da je to u skladu s našom definicijom puta preko brzine uz prirodan zahtjev $s(0)=0$ m (tijelo za 0 sekundi prijeđe 0 metara). Integrirajući (3.1) od 0 do t te primjenom Newton-Leibnitzove formule dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_0^t s'(\tau) d\tau &= \int_0^t v(\tau) d\tau \\ s(t) - s(0) &= \int_0^t v(\tau) d\tau \\ s(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Napomena 3.1.2. Akceleracija čestice definira se kao promjena brzine u vremenu, tj.

$$a(t) = v'(t).$$

Tada primjenom Newton-Leibnitzove formule i integriranjem obje strane dobivamo:

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + v(0),$$

tj. ako nam je poznata početna brzina možemo izračunati brzinu u proizvoljnom trenutku kao integral akceleracije.

3.2 Rad sile

Ako za početak pretpostavimo da na tijelo djeluje konstantna sila F u istome smjeru tada se tijelo pod utjecajem sile F giba jednoliko pravocrtno i prijeđe put s . Tada se *rad* sile F definira se kao $W := F \cdot s$.

No, iz iskustva znamo da sila ne mora uvijek biti konstantna. Primjerice, sila može biti zadana funkcijom $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ pri čemu segment $[a, b]$ predstavlja put koje je tijelo prešlo uslijed djelovanja sile f . Da bi smo izračunali rad te sile, napravimo subdiviziju

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbf{N},$$

segmenta $[a, b]$. Ako promotrimo proizvoljni podsegment $[x_{k-1}, x_k], k < n, k \in \mathbf{N}$, silu na tom segmentu aproksimirat ćemo s $f(x'_k)$ pri čemu je $x'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljna točka. Tada je sila na tom podsegmentu konstantna, tj. gibanje je jednoliko pravocrtno pa je rad sile na tom podsegmentu

$$W_k \approx f(x'_k)(x_k - x_{k-1}),$$

odnosno na cijelom putu:

$$W \approx \sum_{k=1}^n f(x'_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Primijetimo da je gornji izraz zapravo integralna suma funkcije f na zadanom segmentu $[a, b]$ pa rad sile ima smisla definirati kao integral funkcije f tj.

$$W := \int_a^b f(x) dx.$$

Promotrimo kako izračunati rad u nekim konkretnim situacijama.

Primjer 3.2.1. *Ako je poznato da je potrebna sila od 50 N da bi se opruga prirodne duljine 10 cm rastegnula na 20 cm, izračunajmo koliko je rada potrebno uložiti da bi se opruga rastegnula s 12 na 15 cm.*

Prema Hookeovom zakonu iznos sile koju treba uložiti za produljenje opruge jednak je umnošku koeficijenta elastičnosti k i produljenja opruge x . Možemo iskoristiti Hookeov zakon da izračunamo konstantu elastičnosti k te zadane podatke; $x = 10\text{cm} = 0.1\text{m}$ i sila $f = 50\text{N}$. Iz toga slijedi $k = 500\text{N/m}$, odnosno sila opruge je dana funkcijom $f(x) = 500x$. Stoga je traženi rad jednak:

$$W = \int_{0.02}^{0.05} 500x dx = 500 \frac{x^2}{2} \Big|_{0.02}^{0.05} = 0.525 \text{ J}.$$

Treba napomenuti da je osim samog iznosa sile važno i njezino usmjerenje. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 3.2.2. *Dječak uzme igračku koja se sastoji od užeta i loptice na kraju te ju vrta u zraku. Uže na kojem je loptica dugo je 5 cm, loptica je teška 0.1 kg, a sestra mu je pomogla izmjeriti brzinu vrtnje loptice koja je stalna i iznosi 15m/s. Koliki rad obavi centripetalna sila ako znamo da je loptica napravila 5 krugova?*

Centripetalna sila pri stalnoj brzini v iznosi

$$F_c = m \frac{v^2}{r},$$

gdje je m masa tijela, a r polumjer kružnice po kojoj se to tijelo giba. U ovom slučaju ona iznosi:

$$F_c = 0.1 \frac{15^2}{0.05} = 450 \text{ N}.$$

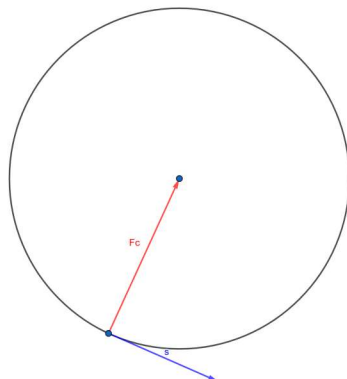
Loptica ukupno prijeđe put od 5 krugova, odnosno 5 puta prijeđe opseg kruga (koji iznosi $2r\pi$) pa ne uzimajući u obzir usmjerenje centripetalne sile dobijemo:

$$W = F_c \cdot s = 450 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 0.05\pi \approx 706,86 \text{ J}.$$

Međutim, rad sile definiran je kao skalarni produkt, a za njega je bitno i usmjerenje vektora za koje ga računamo. Znamo da je centripetalna sila usmjerena prema središtu kružnice po kojoj se tijelo giba (Slika 3.1),

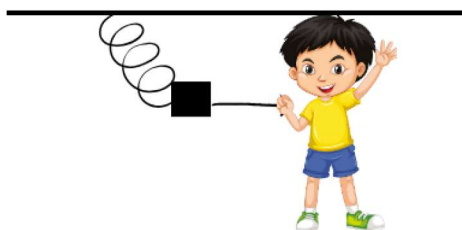
pa je ona okomita na putanju iz čega slijedi $W = F_c \cdot s = 0 \text{ J}$, tj. centripetalna sila ne obavlja rad.

Sada kada smo vidjeli važnost usmjerenja sile s obzirom na putanju promotrimo sljedeći primjer.



Slika 3.1: Odnos centripetalne sile i putanje u proizvoljnoj točki

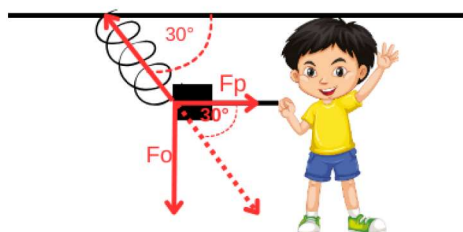
Primjer 3.2.3. Dječak vuče lagani blok na opruzi konstante elastičnosti $k = 800 \text{ N/m}$ kao na Slici 3.2. Pri tome je blok postavljen ukoso pod kutom od 30° prema horizontali.



Slika 3.2: Dječak vuče blok

Izračunajmo rad koji dječak treba obaviti kako bi povukao blok i oprugu za 10cm ako zanemarujemo masu bloka.

Primijetimo da je ovdje elastična sila usmjerena pod kutom s obzirom na smjer putanje pa je potrebno rastaviti silu na komponente.



Slika 3.3: Rastav elastične sile

Neka je F_o komponenta okomita na putanju, a F_p komponenta paralelna putanji bloka. Iz

trigonometrijskih jednakosti slijedi:

$$F_o = F \sin 30^\circ \quad i \quad F_p = F \cos 30^\circ.$$

U prethodnom smo primjeru vidjeli da je rad sile okomite na putanju jednak 0 pa nam samo preostaje izračunati rad sile F_p . Sada koristeći Hookeov zakon dobivamo ukupan rad:

$$W = \int_0^{0.1} F_p(x) dx = \int_0^{0.1} 800x \cos 30^\circ dx = 800 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.1} \approx 3.46 \text{ J}.$$

3.3 Masa i težište

Neka je dan tanki¹ ravni štap duljine l , te funkcija $\rho : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ koja predstavlja linijsku gustoću njegove mase. Ukoliko je ona konstantna kažemo da je štap **homogen**, a u suprotnom je **nehomogen**. Tada je masa tog štapa dana s:

$$m = \int_0^l \rho(x) dx.$$

Napomena 3.3.1. Umjesto računanja mase cijelog štapa možemo računati masu dijela $[0, x] \subseteq [0, l]$ danog štapa. Tada je:

$$m(x) = \int_0^x \rho(\tau) d\tau.$$

Primjer 3.3.1. Na raspolaganju imamo štap duljine 5 m, linijske gustoće mase $\rho : [0, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ zadane s $\rho(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Kolika je težina dijela štapa između pravaca $x = 2$ i $x = 3$?

Kako bi izračunali težinu prvo moramo izračunati masu štapa:

$$m = \int_2^3 (x^3 + 2x^2 + 1) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_2^3 + 2 \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 + x \Big|_2^3 = \frac{359}{12}.$$

Sada je težina jednaka:

$$F = mg \approx 293.5 \text{ N}.$$

Pojam momenta i težišta objasniti ćemo na jednostavnom primjeru. Neka je dan sustav koji se sastoji od tanke šipke zanemarive mase i 2 utega mase m_1 i m_2 na koordinatama x_1 i x_2 . Želimo naći koordinatu točke \bar{x} u kojoj dobijemo klackalicu u ravnoteži. Tu točku nazivamo **težište**. Koristeći Arhimedov zakon poluge:

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}),$$

dobivamo da je:

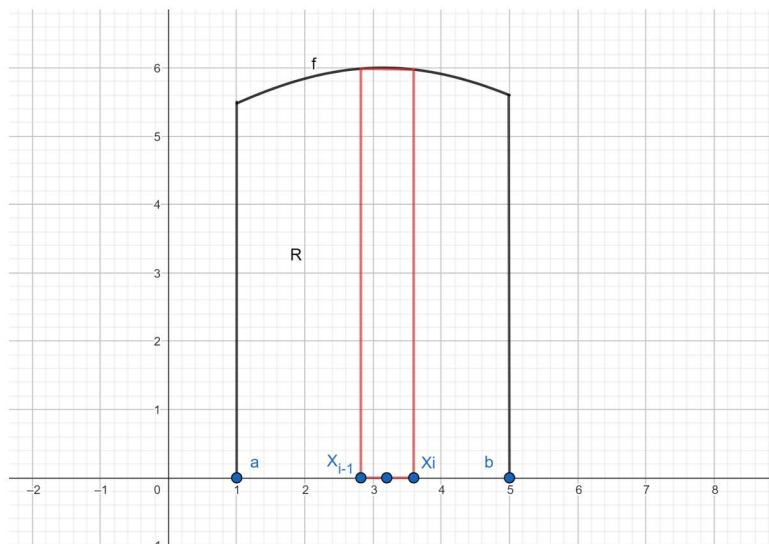
$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

¹smatramo da je štap jednodimenzionalan

Veličina mx naziva se **moment mase m** koja se nalazi u koordinati x , a $m_1x_1 + m_2x_2$ naziva se moment sustava u odnosu na ishodište.

Težište, moment i masu možemo računati i za općenitije slučajeve.

Neka je nadalje dana tanka, homogena ploča R , linijske gustoće ρ koja se nalazi ispod grafa funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^+$ kao na Slici 3.4.



Slika 3.4: Homogena ploča R ispod grafa funkcije f

Koristimo *princip simetrije*: ukoliko je homogena ploča R simetrična s obzirom na l , onda je težište ploče na l . Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbf{N}$$

segmenta $[a, b]$ te s $\Delta x := x_k - x_{k-1}, k < n, k \in \mathbf{N}$, označimo širinu svakog segmenta. Neka je nadalje $\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ središte tog segmenta. Tada je po principu simetrije težište k -tog pravokutnika u točki $(\bar{x}_k, \frac{1}{2}f(x_k))$ i masa mu jednaka: $m_k = \rho f(\bar{x}_k)\Delta x$. Sada moment ploče s obzirom na os x možemo aproksimirati s:

$$M_x \approx \sum_{k=1}^n \rho \frac{1}{2} (f(\bar{x}_k))^2 \Delta x,$$

odnosno profinjenjem subdivizije dobivamo

$$M_x := \frac{1}{2} \rho \int_a^b f^2(x) dx.$$

Analogno definiramo moment s obzirom na os y :

$$M_y := \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

Primjer 3.3.2. Izračunajte moment sustava koji se sastoji od tanke ploče linijske gustoće 2, koja se nalazi ispod grafa funkcije $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ zadane formulom $g(x) = \cos x$, s obzirom na x i y os.

Prema prethodno izvedenim formulama imamo:

$$\begin{aligned} M_y &= 2 \int_0^{2\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u=x \\ v'=\cos x dx \\ u'=dx \\ v=\sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$M_x = \frac{1}{2} 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Momenti sile se ne mijenjaju premještanjem ukupne mase u težište pa slijedi da koordinate težišta (\bar{x}, \bar{y}) zadovoljavaju jednakosti

$$m\bar{x} = M_y \text{ i } m\bar{y} = M_x,$$

gdje je

$$m = \rho P = \rho \int_a^b f(x) dx$$

ukupna masa ploče R. Sada lako dobijemo izraze za koordinate težišta:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}. \quad (3.2)$$

Uočimo da koordinate težišta ovise isključivo o funkciji f , tj. o obliku same ploče, a ne o gustoći ρ .

Ako se područje R za koje tražimo težište nalazi između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdje je $f(x) \geq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, može se pokazati da su koordinate težišta (\bar{x}, \bar{y}) dane s

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}. \quad (3.3)$$

Primjer 3.3.3. Odredite koordinate težišta područja između krivulja:

a) $f(x) = \ln x, x = 1, x = e, y = 0,$

b) $g(x) = x, h(x) = x^2.$

a) Traženo područje prikazano je na Slici 3.5.

Za ovaj dio zadatka koristit ćemo formulu (3.2).

Površina zadanog područja jednaka je

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x \\ v'=dx \\ u'=1/x \\ v=x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1,$$



Slika 3.5: Područje između zadanih krivulja

iz čega slijedi

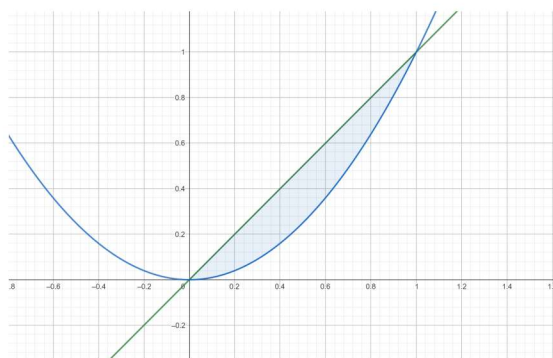
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} dx \\ v' = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4},\end{aligned}$$

te

$$\bar{y} = \int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ v' = dx \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2.$$

Zaključujemo da su koordinate težišta $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{e^2+1}{4}, e-2 \right)$.

b) Traženo područje prikazano je na Slici 3.6.



Slika 3.6: Područje omeđeno zadanim funkcijama

Za početak trebamo odrediti sjecište ove dvije krivulje kako bi mogli odrediti područje integracije, zato promatramo rješenja jednadžbe $x = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Rješenja ove jednadžbe su $x = 0$ i $x = 1$ pa je područje integracije $[0, 1]$.

S obzirom da je $x > x^2$ za svaki $x \in [0, 1]$, koristit ćemo formulu (3.3). Budući da je

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

dobijemo

$$\bar{x} = 6 \int_0^1 x(x - x^2) dx = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 6 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2},$$

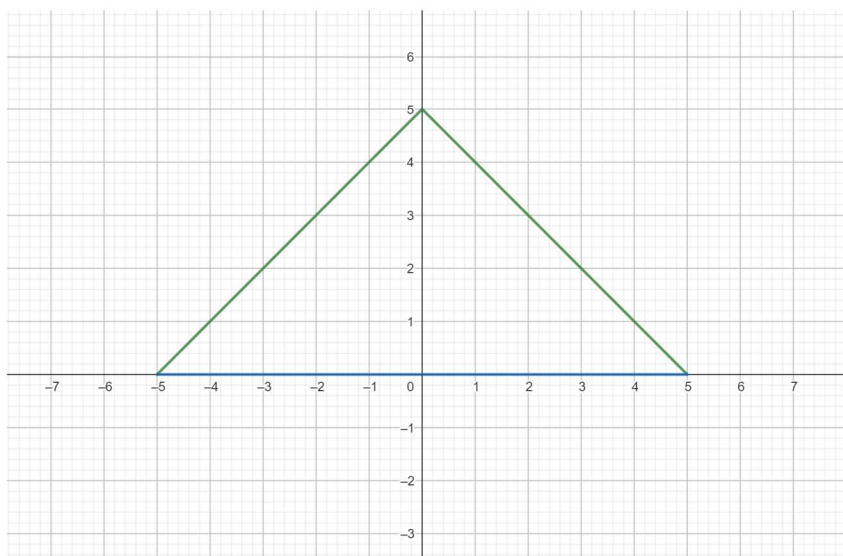
$$\bar{y} = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = 3 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{5}.$$

Koordinate težišta su $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$.

Primjer 3.3.4. Markov tata odlučio je napraviti kućicu za vrapce. Krov kućice modelirao je funkcijom $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -|x| + 5$, pod kućice je paralelan podlozi te su bočne strane ispunjene. Gdje Marko mora zakačiti konac na kućici kako bi ona stajala ravno na drvetu?

Budući da kućica mora biti u ravnoteži zaključujemo da Marko treba zakačiti konac u koordinatama težišta.

Pod kućice je paralelan podlozi i zato ćemo uzeti pravac $y = 0$ kao jednu stranu kućice. Zatim, određujemo njegova sjecišta s funkcijom f , što lako vidimo da su $x = -5$ i $x = 5$. Ako promotrimo grafički prikaz ovog područja (Slika 3.7) vidimo da je simetrično s



Slika 3.7: Kućica koju je izgradio Markov tata

obzirom na os y , pa je prema principu simetrije $\bar{x} = 0$.

Sada još trebamo izračunati \bar{y} :

$$\begin{aligned} P &= \int_{-5}^5 f(x) dx = \int_{-5}^0 (x + 5) dx + \int_0^5 (-x + 5) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_{-5}^0 + 5x \Big|_{-5}^0 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 + 5x \Big|_0^5 = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-5}^5 f^2(x) dx &= \int_{-5}^0 (x + 5)^2 dx + \int_0^5 (-x + 5)^2 dx \\ &= \int_{-5}^0 (x^2 + 10x + 25) dx + \int_0^5 (x^2 - 10x + 25) dx = 50, \end{aligned}$$

te je

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 50}{10} = 2.5.$$

Slijedi da Marko treba okačiti konac na koordinatama $(0, 2.5)$.

3.4 Volumen fluida

Sada ćemo umjesto nekog općenitog tijela promatrati **fluid**. Fluid je bilo koja tekućina ili plin, odnosno bilo koja tvar kojoj molekule lako mijenjaju svoj relativni položaj. Promatrat ćemo fluid u cijevi duljine l te želimo odrediti njegov volumen. Neka je dana funkcija $P : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ koja opisuje površinu poprečnog presjeka cijevi, te pretpostavimo da je cijev u potpunosti ispunjena fluidom. Napravimo subdiviziju segmenta $[0, l]$:

$$0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n = l, \quad n \in \mathbf{N}.$$

S obzirom da znamo da je volumen cilindra s konstantnom bazom i visinom jednak $V = Ph$, gdje je P površina baze cilindra, a h njegova visina, možemo aproksimirati površinu baze podsegmenta $[l_{k-1}, l_k], k \leq n, k \in \mathbf{N}$ s vrijednosti $P(l_k)$ pa je volumen fluida na tom podsegmentu jednak $P(l_k)(l_k - l_{k-1})$. Tada volumen cilindra iznosi:

$$V \approx \sum_{k=1}^n P(l_k)(l_k - l_{k-1}),$$

što je integralna suma funkcije V pa ima smisla definirati volumen cilindra kao:

$$V = \int_0^l P(x) dx. \quad (3.4)$$

To znači da možemo izračunati volumen bilo koje tekućine ili plina poznavajući samo površinu poprečnog presjeka cijevi ili posude u kojoj se fluid nalazi.

Napomena 3.4.1. Kao i kod mase, možemo računati samo dio volumena unutar cijevi kao:

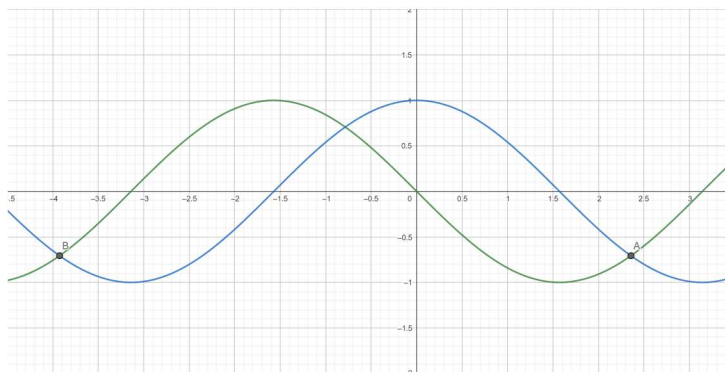
$$\int_{x_1}^{x_2} P(x) dx, \quad (3.5)$$

gdje je $[x_1, x_2]$ dio cijevi nad kojim promatramo volumen.

Primjer 3.4.1. Izračunajte volumen tekućine koja se nalazi u dijelu cijevi između 2 i 3 metra ako je površina poprečnog presjeka dana funkcijom $P : [0, 5] \rightarrow \mathbf{R}, P(x) = x^2 \pi$. Koristimo formulu (3.5):

$$V = \int_2^3 \pi x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \approx 19.9 m^3,$$

odnosno otprilike 1990 litara.



Slika 3.8: Područje između zadanih funkcija

Primjer 3.4.2. Odredite volumen vode koja se nalazi u tijelu čiji se poprečni presjek nalazi između funkcija $f : \left[\frac{-5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -\sin x$ te $g : \left[\frac{-5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \cos x$.

Promotrimo grafički prikaz zadanog područja:

Pronađimo najprije sjecišta funkcije f i g na danom intervalu:

$$-\sin x = \cos x, \quad x \in \left\langle \frac{-5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle.$$

Rješenje te jednadžbe je $x = \frac{-\pi}{4}$, te vidimo da je površina poprečnog presjeka dana funkcijom

$$P(x) = \begin{cases} -\sin x - \cos x, & x \in \left[\frac{-5\pi}{4}, \frac{-\pi}{4} \right] \\ \cos x + \sin x & , x \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]. \end{cases}$$

Stoga se volumen računa kao

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{-5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} P(x) dx = \int_{\frac{-5\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{4}} (-\sin x - \cos x) dx - \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos x + \sin x) dx \\ &= \cos x \Big|_{\frac{-5\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{4}} - \sin x \Big|_{\frac{-5\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{4}} + \sin x \Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \cos x \Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3.5 Fluks

Ako promatramo laminarni tok viskoznog nekompresibilnog fluida² kroz cilindričnu cijev radijusa R Poiseuilleov zakon tvrdi da je brzina njegovog toka jednaka

$$v(r) = \frac{P}{4vl(R^2 - r^2)}, \quad (3.6)$$

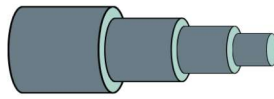
²Tok fluida ovisi samo o udaljenosti od središta cijevi, a fluid ne mijenja svoj volumen prilikom kompresije te postoji trenje između njegovih slojeva.

gdje je $r \in [0, R]$ vertikalna udaljenost točke za koju promatramo tok od centra cijevi, P pad tlaka, ν viskoznost fluida, a l duljina cijevi.

Znajući to možemo izračunati pripadni **fluks** koji se definira kao volumen fluida koji protječe kroz poprečni presjek u jedinici vremena. To ćemo napraviti tako što ćemo uzeti ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0, R]$:

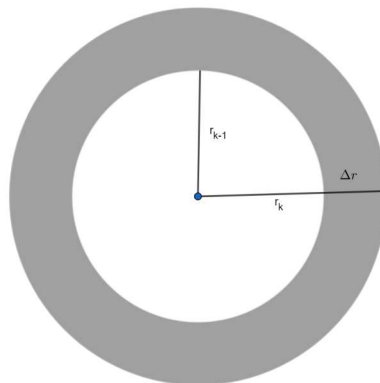
$$0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = R, \quad n \in \mathbf{N},$$

pri čemu s $\Delta r := r_k - r_{k-1}, k \leq n, k \in \mathbf{N}$ označavamo širinu svakog podsegmenta. Brzinu fluida na tom podsegmentu aproksimirat ćemo s $v(r_k)$. Kako je $r_k > r_{k-1}$ približni volumen fluida jednak je volumenu tijela na Slici 3.7.



Slika 3.9: Tijelo čiji je volumen približno jednak volumenu fluida

Stoga, možemo izračunati volumen svakog pojedinog dijela te ih potom zbrojiti kako bi dobili konačnu aproksimaciju volumena. Približna površina svakog pojedinog dijela tijela na Slici 3.9 jednaka je



Slika 3.10: Poprečni presjek valjka V_k

$P_k = r_k^2 \pi - r_{k-1}^2 \pi = \pi(r_k + r_{k-1})(r_k - r_{k-1}) = \pi(r_k + r_{k-1})\Delta r \approx 2\pi r_k \Delta r$,
pa je volumen približno jednak

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\pi r_k v(r_k) \Delta r. \quad (3.7)$$

Izraz (3.7) predstavlja integralnu sumu funkcije $f : [0, R] \rightarrow \mathbf{R}$ zadane formulom $f(r) = 2\pi r v(r)$ pa je fluks jednak

$$\begin{aligned} F &= \int_0^R 2\pi r v(r) dr = 2\pi \int_0^R r \frac{P}{4\nu l} (R^2 - r^2) dr = \frac{2\pi P}{4\nu l} \int_0^R (rR^2 - r^3) dr \\ &= \frac{2\pi P}{4\nu l} \left(R^2 \frac{r^2}{2} \Big|_0^R - \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{2\pi P}{4\nu l} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{2\pi}{8\nu l} R^4. \end{aligned}$$

Dobiveni izraz naziva se Poiseuilleov zakon koji tvrdi da je fluks proporcionalan četvrtoj potenciji radijusa.

Primjer 3.5.1. *Koliki volumen krvi prođe kroz ruku čovjeka u jedinici vremena ako je poznato da je promjer d krone žile jednak 0.05 mm, viskoznost krvi je $4 \text{ m}^2/\text{s}$, a duljina čovjekove ruke je 0.5 metra.*

Trebamo izračunati pripadni fluks za podatke $r = \frac{d}{2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $\nu = 4 \text{ m}^2/\text{s}$, $l = 0.5 \text{ m}$. Sada slijedi da je fluks jednak:

$$F = \frac{2\pi}{8 \cdot 4 \cdot 0.5} (2.5 \cdot 10^{-5})^4 \approx 3.8 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3.$$

Napomena 3.5.1. Iz prikazanih primjera, možemo zaključiti da integrali imaju široku primjenu u fizici. Ostala područja primjena integrala u fizici koja nisu obrađena su računanje hidrostatskog tlaka fluida, računanje kinetičke energije fluide, volumen rotacijskog tijela itd.

Literatura

- [1] Krešimir Burazin, Jelena Jankov, Ivana Kuzmanović, Ivan Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Osijek, 2017.
- [2] Dr. Miljenko Crnjac, Mr. Dragan Jukić, Dr. Rudolf Scitovski, *Matematika*, Osijek, 1994.
- [3] Dimitrije Hajduković, *Matematika 1*, Glas, Banja Luka, 1989.
- [4] Svetozar Kurepa, *Matematička analiza 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
- [5] Šime Ungar, *Matematička analiza 1 i 2*, skripta, Zagreb, 2018. (javno dostupno na:
https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf)

Sažetak

U ovom radu promatrat ćemo integrale funkcije jedne varijable te njihovu primjenu u području fizike. Najprije ćemo definirati pojam Riemannovog integrala i navesti neka njegova osnovna svojstva. Nadalje, pokazat ćemo koje su funkcije integrabilne i kako izračunati integrale takvih funkcija. Primjenu integrala u području fizike započinjemo računanjem duljine puta, rada sile te određivanjem koordinata težišta nekog tijela. Naposljetku promatramo volumen i fluks fluida.

Ključne riječi

određen integral, neprekidnost, derivabilnost, primitivna funkcija

Definite integral and its applications in physics

Summary

In this paper, we will look at the integral of a single variable functions and its application in the field of physics. Firstly, we will define the term Riemann integral and state some of its basic properties. Then we will show which functions are integrable and how to calculate integrals for these functions. The application of integrals in the field of physics begins with the calculation of the path length, the work of a force, and finding coordinates of center of mass. Finally, we will observe the volume and fluid flux.

Keywords

definite integral, continuity, derivability, primitive function

Životopis

Ime mi je Lara Tompa i rođena sam 23. rujna 2002. godine u Osijeku.

Od 2009. do 2017. pohađala sam Osnovnu školu Ivana Filipovića u Osijeku. Zatim sam, od 2017. do 2021. pohađala III. (Prirodoslovno-matematičku) gimnaziju u Osijeku. Upisala sam prijediplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, 2021. te sam, nakon završene prve godine, nastavila studij na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku, smjer: Prijediplomski studij Matematika, koji sam završila 2024. godine.

Od ožujka 2023. do lipnja 2024. radila sam kao demonstratorica za kolegij "Teorija brojeva" na Fakultetu primijenjene matematike i informatike.

26. veljače 2024. godine dobila sam pohvalu za uspješnost u studiranju po akademskim godinama studija na Fakultetu primijenjene matematike i informatike za akademsku godinu 2022./23.

Tečno govorim engleski jezik, te posjedujem IELTS diplomu. Njemački jezik sam učila 10 godina tijekom školovanja, a završila sam i tečaj slovenskog jezika (razina A2).