Antička i srednjovjekovna kineska matematika

Špejić, Martina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Martina Špejić

Antička i srednjovjekovna kineska matematika

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Martina Špejić

Antička i srednjovjekovna kineska matematika

Diplomski rad
Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

Razvoj matematike u Kini je tijekom vrlo dugog razdoblja bio neovisan o razvojima u drugim civilizacijama. Geografska priroda zemlje omogućila je izoliranost zemlje. S druge strane kada je zemlja bila osvojena od strane stranih osvajača, oni su se radije asimilirani u kinesku kulturu nego da su je mijenjali prema kulturi svoje domovine. Posljedica toga je kontinuirani kulturni razvoj u Kini oko 1000 godina prije Krista, zbog čega je fascinantno pratiti i razvoj matematike u Kini u to vrijeme. Postoje razdoblja s brzim napredovanjem, razdoblja kada je održavana određena razina i razdoblja pada.

Kineska matematika je, kao i njihov jezik, vrlo sažeta. Bilo je jako puno problema motiviranih problemima vezanih uz kalendar, trgovinu, mjerenja zemljišta, arhitekturu, državne evidencije i porez. Kineska matematika nije deduktivnog tipa niti se temelji na aksiomima. Orijentirana je prema nalaženju algoritama za rješavanje konkretnih zadataka poput onih vezanih uz određivanje površine. Od 4. stoljeća prije Krista koristile su se ploče za računanje, jedinstven kineski izum koji niti jedna druga civilizacija nije koristila.

Prvo ćemo navesti kronološkim redom najznačajnije kineske matematičare i najpoznatija djela bitna za razvoj matematike u Kini. Potom ćemo se osvrnuti na zapisivanje brojeva te postignuća u izračunavanju korijena. Jedan dio rada posvećen je geometriji. Jedan od najvećih postignuća je rješavanje algebarskih jednadžbi proizvoljnog reda za koji su zaslužni Jia Xian, Qin Jiushao i Zhu Shije.

2 Najznačajniji matematičari i najpoznatiji matematički tekstovi

Car Qin Shi Huangdi vladao je Kinom 213. godine prije Krista. Legenda kaže da je navedene godine car naredio spaljivanje svih dotada nastalih knjiga kako bi suzbio neslaganja među pojedinim spisima. Zato je najstariji postojeći tekst kineske matematike knjiga *Suan shu shu (Knjiga o aritmetici)* iz oko 180. godine prije Krista, a otkrivena je 1984. godine. Navedena knjiga pisana je na oko 200 bambusovih traka i pronađena je u blizini grada Jiangling u pokrajini Hubei. Sljedeće važne knjige koje imamo evidentirane su rad sa 16 poglavlja *Suanshu (Računalni recepti)* kojeg je napisao Du Zhong i rad sa 26 poglavlja *Xu Shang suanshu (Računalni propisi Xu Shanga).* Niti jedan od tih tekstova nije ostao očuvan i malo se zna o njihovom sadržaju. Najstariji cjeloviti očuvani tekst je *Zhoubi suanjing (Zhouov priručnik sjene vodomjera)* koji je sastavljen između 100 godina prije i 100 godina poslije Krista. To je astronomski tekst u kojemu se pokazuje kako se mjere pozicije nebeskih tijela pomoću gnomona, dijela sunčevog sata koji baca sjenu, a sadrži i važne dijelove iz matematike. Knjiga *Zhoubi suanjing* sadrži Gougovo pravilo (kinesku verziju Pitagorinog teorema) te se koristi u mjerenju i astronomiji.

Naime, do mnogih postignuća u matematici u tom razdoblju došlo je zbog potrebe da se naprave izračuni za izradu kalendara i predviđanje položaja nebeskih tijela. Kineska riječ *„chouren"* odnosi se i na matematičara i na astronoma što ukazuje na blisku vezu između ta dva područja. Jedan rani *„choren"* bio je Luoxia Hong (oko 130. g. pr. Kr. – oko 70. g. pr. Kr.) koji je izradio kalendar baziran na ciklusu od 19 godina.

Najpoznatija kineska matematička knjiga ikad je *Jiuzhang suanshu (Devet poglavlja matematičkog umijeća).* U nastavku ćemo ovu knjigu kratko nazivati *Devet poglavlja.* Autor djela je nepoznat. Pretpostavlja se da je to bio Chang Tsang te da je nastala između 1. st. pr. Kr. i 1. st. n. Kr. Ovaj važan rad dominirao je matematičkim razvojem i stilom 1500 godina. Djelo je mnogo puta prerađivano i komentirano, no nepoznato je kakav je njegov originalan izgled bio. Jedan od prvih komentatora je Xu Yue (oko 160. – oko 227.), iako je i taj komentar izgubljen. *Devet poglavlja* sadrži 246 zadataka s rješenjima za mjerače, činovnike, trgovce i inženjere. Zadaci su iz područja određivanja kvadratnih i kubnih korijena, izračunavanje površina i volumena, rješavanja sustava linearnih jednadžbi, aritmetike razlomaka.

Značajan matematički napredak napravio je Liu Hui (oko 220. – oko 280.) koji je napisao komentar na *Devet poglavlja* oko 263. godine. Liu je dao više matematičkog pristupa nego ranijih kineski tekstovi, pružajući načela na kojima se temelje njegovi izračuni. Otkrio je aproksimaciju za π upisujući pravilne poligone s $3 \cdot 2^n$ stranica u krug. Njegova najbolja aproksimacija broja π bio je broj 3.14159 koji je dobio pomoću pravilnog poligona sa 3072 stranica. Liu je napisao *Haidao suanjing (O jednom otoku u moru)* koji je izvorno bio prilog njegovog komentara 9. poglavlja knjige *Devet poglavlja.* U njemu Liu koristi Pitagorin teorem za izračunavanje visine objekata i udaljenosti na predmete koji se ne mogu mjeriti izravno.

Pedesetak godina kasnije nakon Liua velik pomak napravljen je u astronomiji kada Yu Xi otkriva precesiju ekvinocija. U matematici je prošlo neko vrijeme prije nego je napredovala dalje od dubine koju je postigao Liu Hui. Na primjer, Sun Zi (oko 400. – oko 460.) je napisao matematički priručnik *Sunzi suanjing* koji u cjelini daje vrlo malo novoga. Međutim, sadrži problem riješen pomoću kineskog teorema o ostacima, što je najranija poznata pojava ove vrste problema.

Xiahou Yang (oko 400. – oko 470.) navodno je autor djela *Xiahou Yang suanjing (Matematički priručnik Xiahoua Yangova)* koji sadrži prikaze brojeva u decimalnom zapisu pomoću pozitivnih i negativnih potencija broja deset.

Zhang Qiujian (oko 430. – oko 490.) napisao je matematički tekst *Zhang Qiujian suanjing (Matematički priručnik Zhanga Qiujiana)* u razdoblju između 468. i 486. godine. Tekst sadrži 92 problema koji ilustriraju formulu za zbrajanje aritmetičke progresije. Možda je najpoznatije djelo u kojemu se spominje *„problem stotinu ptica"* koji predstavlja neodređeni problem s tri netrivijalna rješenja. Problemu ćemo se posvetiti kasnije u radu.

Jedan od najznačajnijih napredaka doprinijeli su Zu Chongzhi (429. – 501.) i njegov sin Zu Geng (oko 450. – oko 520.). Zu Chongzhi bio je astronom koji je napravio niz točnih zapažanja koji je upotrijebio za izradu kalendara pod nazivom *Tam-ing* kalendar (kalendar velike svjetline). Kalendar se temeljio na ciklusu od 391 godine. Napisao je djelo *Zhui shu (Metoda interpolacije)* u kojemu je dokazao da $3.1415926 < \pi < 3.1415927$. Preporučio je korištenje $\frac{355}{113}$ kao dobre aproksimacije za π i $\frac{22}{7}$ u manje preciznom radu. Sa sinom Zum Gengom izračunao je formulu za volumen kugle pomoću Cavalierijevog principa.

Počeci kineske algebre se vide u radu Wanga Xiaotonga (oko 580. – oko 640.). Napisao je *Jigu suanjing (Nastavak antičke matematike)*, tekst sa samo 20 problema koji je kasnije postao jedan od deset klasika kineskih matematičkih radova. Riješio je kubnu jednadžbu proširenjem algoritma za pronalaženje kubnog korijena. Na njegov rad se gleda kao na prvi korak prema *„tian yuan"*, *„metodi koeficijenta polja"* ili *„metodi nebeski nepoznatog"* Lia Zhia za računanje s polinomima.

Rana trigonometrija je opisana u nekim indijskim tekstovima koji su prevedeni na kineski jezik i također je utjecala na razvoj trigonometrije u Kini. Na primjer, Yi Xing (683. – 727.) je načinio tablicu tangensa.

Od šestog stoljeća matematika se učila u sklopu tečaja za ispit državne službe. Li Chunfeng (602. – 670.) imenovan je urednikom glavne zbirke matematičkih rasprava koja će se koristiti za takav tečaj, a mnoge od njih smo već spomenuli. Zbirka se sada zove *Deset klasika*. Ime joj je dodijeljeno 1084. godine. Zbirku čine sljedeći radovi: *Zhouov priručnik sjene vodomjera, Devet poglavlja matematičkog umijeća, O jednom otoku na moru, Matematički priručnik Suna Zia, Matematički priručnik pet upravnih odjela, Matematički priručnik Xiahoua Yanga, Matematički priručnik Zhanga Qiujiana, Aritmetičke metode u pet klasika, Nastavak antičke matematike, Napomene o tradiciji artimetičkih metoda, Metoda interpolacije, Umjetnost tri stupnja; Oznake velikih brojeva.*

U razdoblju od 10. do 12. stoljeća Kinezi su napravili nekoliko napredaka, međutim bez sačuvanih matematičkih tekstova. Za doprinose Jia Xiana (oko 1010. – oko 1070.) zna se samo kroz tekstove Yanga Huia budući da su njegovi spisi izgubljeni. Xian je poboljšao metodu za pronalaženje kvadratnih i kubnih korijena i proširio metodu za numeričko rješenje algebarskih jednadžbi računajući sumu potencija koristeći binomne koeficijente konstruirane na način sličan Pascalovu trokutu.

Sljedeći veliki matematički pomak omogućio je Qin Jiushao (1202. – 1261.), koji je napisao svoju poznatu matematičku raspravu *Shushu Jiuzhang (Rasprava o matematici u* 9 *poglavlja)*, koja je objavljena 1247. godine. On je bio prvi od velikih kineskih matematičara 13. stoljeća. To je bio period glavnih napredaka u matematici. Rasprava sadrži izuzetan rad o kineskom teorem o ostacima i Heronovu formulu za površinu trokuta. Jednadžbe do desetog stupnja su riješene pomoću Ruffini-Hornerove metode.

Li Zhi (koji se naziva i Li Yeh) (1192. – 1279.) bio je sljedeći od velikih kineskih matematičara 13. stoljeća. Njegovo najpoznatije djelo je *Ce yuan hai jing (Morsko ogledalo mjerenja kruga)* napisanog 1248. godine. Ono sadrži *„tian yuan"*, *„metodu koeficijenta polja"* ili *„metodu nebeski nepoznatog"*, tj. metodu za rad s algebarskom jednadžbom. Napisao je i *Yi gu yan duan (Novi koraci u računanju)* 1259. godine koji je više elementarni rad koji sadrži geometrijske probleme riješene algebrom.

Matematičar koji je djelovao u zlatnom dobu kineske matematike je i Yang Hui (oko 1238. – oko 1298.). Napisao je *Xiangjie jiuzhang suanfa (Detaljna analiza matematičkih pravila u devet poglavlja i njihove reklasifikacije)* 1261. godine, a njegovi ostali radovi prikupljeni su u knjigu *Yang Hui suanfa (Yang Huiove metode računanja)*, koja je objavljena 1275. godine. Opisao je množenje, dijeljenje, vađenje korijena, kvadratne jednadžbe, izračunavanje površine pravokutnika, trapeza, kruga i drugih likova. Dao je i prekrasan prikaz magičnih kvadrata i magičnih krugova.

Guo Shoujing (1231. – 1316.), iako obično nije uključen među glavne matematičare trinaestog stoljeća, napravio je važan doprinos. Načinio je *Shou shi li (Kalendar radova i dana).* Radio je na sfernoj trigonometriji te rješavanju jednadžbe pomoću Ruffini-Hornerove numeričke metode. Razvio je formulu kubne interpolacije stavljajući razlike u tablice.

Posljednji od matematičara iz tog zlatnog doba bio je Zhu Shijie (oko 1260. – oko 1320.) koji je napisao *Suanxue qimeng (Uvod u matematiku)* objavljenu 1299. godine te *Siyuan yujian (Dragocjeno ogledalo četiri elementa)* objavljenu 1303. godine. Nešto više reći ćemo o njegovom djelu u poglavlju o rješavanju algebarskih jednadžbi. Također je dao brojne rezultate za sumu niza. To predstavlja vrhunac drevne kineske matematike.

Pad kineske matematike u 14. stoljeću nije ni na koji način bio dramatičan. Knjiga *Devet poglavlja* i dalje je bila model za matematičko učenje te su se i dalje pojavljivali novi radovi temeljeni na tom djelu. Na primjer Ding Ju objavio je *Ding ju suan fa (Aritmetičke metode Dinga Juova)* 1355. godine, He Pingzi objavio je *Xiangming suan fa (Objašnjenja aritmetike)* 1373. godine, Liu Shilong objavio je *Jiu zhang tong ming suanfa (Metode obračuna u „Devet poglavlja")* 1424. godine i Wu Jing objavio je *Jiu zhang suan fa bi lei da quan (Kompletan opis „Devet poglavlja")* 1450. godine. Wu Jing je bio administrator u pokrajini Zhejing i njegova aritmetička enciklopedija sadržava svih 246 problema *Devet poglavlja.* Cheng Dawei (1533. – 1606.) objavio je rad *Suanfa tong zong (Generalni izvor računske metoda)* 1592. godine koji je napisan u stilu *Devet poglavlja*, ali pruža još veću zbirku od 595 problema.

3 Osnovno o brojevima

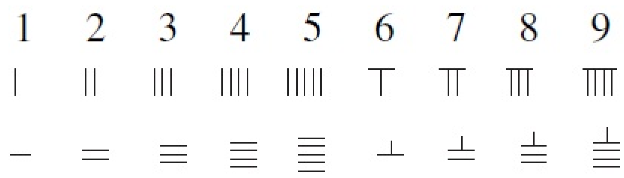
Iako postoje legende koje datiraju o kineskoj civilizaciji unatrag 5000 ili više godina, najstariji čvrsti dokazi prave civilizacije dala su iskapanja u Anyangu, u blizini rijeke Huang, koji su datirani oko 1600 godina prije Krista. Pronađene *„proročanske kosti”* povezane su s dinastijom Shang toga razdoblja. To su komadi kostiju ispisani drevnim pismima koje su koristili svećenici za proricanje. Kosti su izvor našeg znanja o ranom kineskom zapisivanju brojeva. Od najranijih zabilježenih vremena, Kinezi su koristili brojevni sustav u bazi 10. Oblici brojeva i način zapisivanja promijenili su se tijekom godina.

3.1 Simboli brojeva i razlomci

Kinezi iz dinastije Shang razvili su simbole za brojeve od 1 do 9, kao i za svaku potenciju broja 10. Na primjer, broj 659 bio je napisan korištenjem simbola za broj 6 pridruženog simbolu za broj 100, zatim simbola za broj 5 pridruženog simbolu za broj 10, i konačno simbola za broj 9:

Slika 1: Broj 659

Postoje zapisi iz 4. stoljeća prije Krista u kojima su predstavljeni brojevi brojanjem malih bambusovih štapića duljine oko 10 cm. Zapisani su na pločama za računanje na kojima su štapići postavljeni u okomitim stupcima za različite potencije broja 10. Postojale su dvije mogućnosti postavljanja štapića za predstavljanje brojeva manjih od 10:



Slika 2: Dva načina označavanja brojeva

Kako bi predstavili brojeve veće od 10, štapiće su postavljali u stupce tako da je krajnji desni stupac predstavljao jedinice, sljedeći desetice, sljedeći stotice, i tako dalje. Prazni stupac u određenom rasporedu predstavljao je nulu. Da bi se lako pročitalo brojeve, naizmjenično su koristili različita postavljanja štapova. Vertikalni raspored se koristio za obilježavanje stupaca jedinica, stupaca stotica i tako dalje.

(a) Broj 1156

(b) Broj 6083

Slika 3: Prikaz brojeva

Ovi prikazi također se javljaju u pisanom obliku na pločama za računanje. Postoje neki dokazi da se točka koristila u predstavljanju praznog stupaca (srednja nula) već u 8. stoljeću, ali nedvosmisleni dokazi upućuju na korištenje malog kruga koji predstavlja nulu u tim situacijama u 12. stoljeću. Dakle, samo do tog vremena možemo reći da je kineski brojevni zapis bio u obliku decimalnog sustava.

Negativni brojevi, koji su bili u uporabi najkasnije od 5. stoljeća naše ere, bili su zastupljeni na pločama za računanje pomoću značajke za razlikovanje „negativnih" štapića od „pozitivnih". Jedan od načina je korištenje crvenog štapića za pozitivne brojeve i crnog za negativne brojeve. U pisanim dokumentima je negativan broj prezentiran kosom crtom nacrtanom preko jedne od brojki u štapnom brojevnom zapisu.

Simple	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
Complex	壹	貳	参	肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾	佰	仟	萬
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000

Slika 4: Brojke klasičnog kineskog sustava

Najraniji zapisi o razlomcima u Kini su o običnim razlomcima koji su određeni simbolima, tj. riječima *„fen zhi"*. Na primjer, $\frac{2}{3}$ će biti napisan u obliku 3 *fen zhi* 2 i može se prevesti kao *„2 dijela od cjeline podijeljena su u* 3 *jednaka dijela"*. Do srednjeg vijeka Kinezi su također ponekad koristili decimalne razlomke. Pravila za računanje s razlomcima pojavila su se u razdoblju nastanka djela *Suan shu shu.* Na primjer, pravilo za skraćivanje razlomaka je sljedeće:

> Uzmite brojnik i oduzmite ga (sukcesivno) od nazivnika. Također uzmite nazivnik i oduzmite ga (sukcesivno) od brojnika. Ako su iznosi brojnika i nazivnika jednaki, to će pojednostaviti razlomak. Drugo pravilo za pojednostavljenje razlomka kaže: ako se može prepoloviti, prepolovite ga. Ako se može (sukcesivno) podijeliti određenim brojem, podijelite ga tim brojem. Još jedno pravilo kaže: brojnik danog razlomka oduzmite od nazivnika. Razliku koristite kao nazivnik i oduzmite ga (sukcesivno) od brojnika. Koristite ono što je jednako i brojniku i nazivniku kao djelitelj. Tada je moguće podijeliti i brojnik i nazivnik tim brojem. Ako nije moguće oduzeti, ali se može prepoloviti, prepolovite nazivnik i brojnik.

Primjer 3.1.1. $\frac{162}{2016}$ *pojednostavljeno je* $\frac{9}{112}$.
Objašnjenje: 162 možemo oduzeti 12 puta od 2016 s razlikom jednakoj 72. Tada se 72 može oduzeti dva puta od 162 s razlikom jednakoj 18. Kako je 72 višekratnik od 18, 18 je broj (najveći zajednički djelitelj) kojim dijelimo oba 2016 i 162 kako bi se skratio razlomak na $\frac{9}{112}$. Ovaj je postupak identičan Euklidovu algoritmu.

U pravilu za zbrajanje razlomaka osnovna ideja je korištenje produkta polaznih nazivnika kao zajedničkog nazivnika. Pravilo glasi:

> Ako su nazivnici jednaki brojevi, zbrojite brojnike. Ako su nazivnici različiti brojevi, ali neki od njih se mogu udvostručiti kako bi svi nazivnici bili jednaki, tada ih udvostručite. Ako se neki trebaju utrostručiti, učinite to… Isto tako i brojnik mora biti udvostručen. Ako su brojnici pomnoženi 3, 4 ili 5 puta

kao i nazivnici i ako su nazivnici jednaki, zbrojite brojnike. Ako nazivnici još uvijek nisu jednaki, onda se međusobno množe svi nazivnici zajedno kao djelitelj, a nakon unakrsnog množenja brojnika s nazivnicima, zbrojite ih zajedno kao djeljenike, a zatim podijelite.

Uz postavljanje osnovnih metoda u djelu *Suan shu shu* primjenjuju se metode za rješavanje raznih zanimljivih problema. Među njima je i onaj pod nazivom *„Žena tka"*.

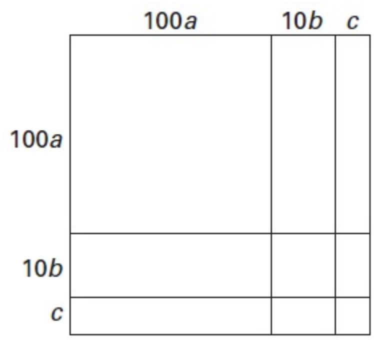
Primjer 3.1.2. (Žena tka) *Jedna žena je svaki dan udvostručavala svoje tkanje. U pet dana je istkala* 5 *chia* (= 50 *cuna). Koliko je istkala u prvom danu, a koliko svakog drugog dana nakon toga?*
Odgovor: Prvi dan je istkala $1\frac{38}{62}$ cuna, zatim $3\frac{14}{62}$ cuna, onda $6\frac{28}{62}$ cuna te $12\frac{56}{62}$ cuna i naposljetku $25\frac{50}{62}$ cuna. Metoda kaže: uzmite vrijednosti $2, 4, 8, 16, 32$. Zbrojite ih i postavite kao djelitelja. Uzmite 5 chia, pomnožite ga svakim od njih $(2, 4, 8, 16, 32)$ i postavite kao djeljenike. Dijeljenjem djeljenika djeliteljem dobivamo iznos u vrijednost chia. Ako iznos u vrijednosti chia nije cijeli broj, pomnožite ga s 10 i izrazite rješenje u vrijednosti cuna. Ako iznos u vrijednosti cuna nije cijeli, koristite rješenje za određivanje djelomičnog iznosa razlomka.

3.2 Korjenovanje

U 4. poglavlju knjige *Devet poglavlja* detaljno je opisano određivanje kvadratnih i kubnih korijena. Algoritam računanja kvadratnog korijena temelji se na algebarskoj formuli

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

ali vjerojatno je autor imao na umu dijagram kao na slici 5.



Slika 5: Dijagram za određivanje kvadratnog korijena

Primjer 3.2.1. (Problem 12 u 4. poglavlju knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*) *Traži se duljina stranice kvadrata površine* 55225.
Odgovor: Ideja je da se pronađu znamenke a, b, c tako da se odgovor može napisati u obliku $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$. Prvo je potrebno naći najveći broj a tako da vrijedi $(100a)^2 < 55225$. U ovom slučaju je $a = 2$. Razlika između površine velikog kvadrata (55225) i površine kvadrata stranice duljine $100a$ (40000) je veliki gnomon na slici 5. Ako je vanjski tanki gnomon zapostavljen, jasno je da b mora zadovoljiti $55225 - 40000 > 2(100a)(10b)$ ili $15225 > 4000b$. Dakle, sigurno je $b < 4$. Da biste provjerili kako je $b = 3$ točno, tj. da je uz pridruženi kvadrat stranice duljine $10b$ područje velikog gnomona još uvijek manje od 15225, potrebno

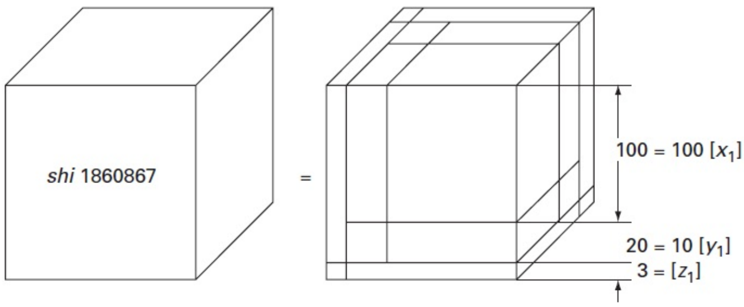
je provjeriti da $2(100a)(10b) + (10b)^2 < 15225$. Budući da je to točno, isti postupak se može ponoviti kako bi pronašli c: $55225 - 40000 - 30(2 \cdot 200 + 30) > 2 \cdot 230c$ ili $2325 > 460c$. Očito $c < 6$. Jednostavna provjera pokazuje da se za $c = 5$ dobiva ispravan korijen: $\sqrt{55225} = 235$.

Ova metoda daje niz odgovora. U navedenom slučaju: 200, 230, 235, svaki bolji od prethodnog u približavanju točnom rezultatu. Iako se čini jasno današnjem čitatelju da ukoliko odgovor nije cijeli broj, postupak bi se mogao nastaviti u nedogled pomoću decimalnih razlomaka, kineski autor koristi običan razlomak kao rješenje u slučajevima gdje nije bilo cjelovitog kvadratnog korijena.

Algoritam određivanja kubnog korijena temeljen je na binomnom razvoju

$$(r + s)^3 = r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + s^3,$$

vjerojatno misleći geometrijski kao na slici 6.



Slika 6: Dijagram za određivanje kubnog korijena

Primjer 3.2.2. (Zadatak iz 4. poglavlja knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*) *Traži se kubni korijen broja* 1860867.
Odgovor: Počinjemo primjećivati da je rješenje troznamenkasti broj kojemu je prva znamenka 1. Drugim riječima, cijeli broj koji je najbliži rješenju može se zapisati kao $x = 100 + 10b + c$. Ne obazirući se privremeno na c, moramo naći najveći b tako da

$$(100 + 10b)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 10b + 3 \cdot 100 \cdot (10b)^2 + (10b)^3 \leq 1860867$$

ili

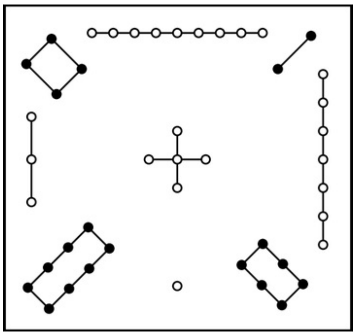
$$3 \cdot 100^2 \cdot 10b + 3 \cdot 100 \cdot 100b^2 + 1000b^3 = b(300000 + 30000b + 1000b^2) \leq 860867.$$

Pokušavajući redom za $b = 1, 2, 3, \ldots$ otkrivamo da je $b = 2$ najveća vrijednost koja može zadovoljiti nejednakost. Budući da je $2(300000 + 60000 \cdot 2 + 1000 \cdot 2^2) = 728000$, oduzimamo taj broj od 860867 i dobivamo sličnu nejednakost za c: $c(3 \cdot 120^2 + 3 \cdot 120c + c^2) \leq 132867$. Ovu nejednakosti zadovoljava $c = 3$ tako da je kubni korijen $x = 123$.

Imajte na umu da su u oba ova algoritama rješenja kvadratne ili kubne jednadžbe (ili, u najmanju ruku, nejednakosti) dijelovi procesa. Kinezi su na kraju razvili ove ideje u detaljan postupak za rješavanje algebarske jednadžbe proizvoljnog stupnja o čemu ćemo raspravljati u nastavku.

3.3 Magični kvadrati

Poseban interes u Kini bio je za magične kvadrate. Postoji legenda o nastanku magičnih kvadrata koja govori da je oko 2800. g. pr. Kr. u Kini zavladala velika poplava te je narod nudio žrtvu bogu rijeke Lo. U tom trenutku iz rijeke je isplivala kornjača na čijem je oklopu bila vidljiva tablica s tri reda i tri stupca u kojoj su bili brojevi $1, \dots, 9$ poredani tako da je zbroj u svakom retku, stupcu ili na dijagonali jednak 15. Broj 15 je i broj dana u svakom od 24 ciklusa kineske sunčane godine. Navedena tablica, koja je do na rotaciju ili zrcaljenje jedinstveni magični kvadrat, naziva se *„Lo Shu kvadrat"*. Kasnije su ga prozvali i *„čarobni kvadrat"* jer su mu zbog neobično lijepog rasporeda brojeva ljudi pripisivali magična svojstva. Često su ljudi nosili oko vrata takve kvadrate kako bi se zaštitili od bolesti ili siromaštva. Prvi magični kvadrat, *Lo Shu*, doveo je do razvoja dualističke teorije Yina i Yang. Yang predstavlja neparne brojeve $(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$, a Yin predstavlja parne brojeve $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Slika 7: Lo Shu kvadrat

4 Geometrija

Kineska geometrija uglavnom je praktične prirode, no kineski matematičari su u posebnim slučajevima razvili važne teorijske principe koji su omogućili rješavanje problema različite težine.

4.1 Površina i volumen

Kinezi su razvili brojne formule za izračunavanje površine i volumena geometrijskih likova i tijela poput onih za površinu pravokutnika i trokuta te za volumen paralelepipeda. U knjizi *Devet poglavlja* stoji točna formula za volumen piramide. Mi ćemo razmotriti formule za površinu kruga i obujam kugle.

Primjer 4.1.1. (Problem 32 u 1. poglavlju knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*) *Postoji okruglo polje čiji opseg je* 181 *jardi i čiji promjer je* $60\frac{1}{3}$ *jardi. Kolika je površina polja?*
Odgovor: $2730\frac{1}{12}$ kvadratnih jardi.

Za izračun površine kruga Kinezi su predstavili nekoliko verzija. Prva stvar koju treba primijetiti u prethodnom primjeru je promjer polja koji je jednak $\frac{1}{3}$ opsega. U vrijeme kada je knjiga *Devet poglavlja* napisana, broj koji se koristio za omjer opsega i promjera kruga uvijek je bio jednak 3, a istu vrijednost koristili su i Babilonci. Kineski pisac naveo je četiri zasebne formule po kojima bi se mogla izračunati površina kruga:

1. Polovica opsega i polovica promjera zajedno pomnožene daju površinu.

2. Produkt opsega i promjera djeljiv je sa 4.

3. Promjer pomnožite sa njim samim. Pomnožite rezultat sa 3, a zatim podijelite sa 4.

4. Opseg pomnožite sa njim samim. Rezultat tada podijelite sa 12.

Budući da se za π uzima 3, sve formule su ekvivalentne. Četvrto pravilo uobičajeno je babilonsko pravilo, međutim, isto kao i Babilonci, autor *Devet poglavlja* ne otkriva zašto te formule funkcioniraju.

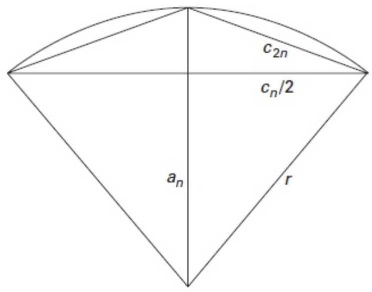
Liu Hui istaknuo je u svom komentaru knjige *Devet poglavlja* kako korištenje vrijednosti „3" za omjer opsega naprema promjeru kruga nije ispravno. Objasnio je to na primjeru površine kruga. Kineska formula za površinu kruga polumjera 1 daje vrijednost 3 pri čemu se lako može izračunati da je površina pravilnog dvanaesterokuta upisanog tom krugu također jednaka 3. Prema tome Liu je zaključio da površina kruga mora biti veća. On zatim nastavlja tražiti približnu vrijednost površine koristeći argument koji uključuje upisivanje poligona u krug sa sve više i više stranica, što je argument koji nas podsjeća na Arhimedovo određivanje broja π pomoću opsega poligona. Liu je napisao: *„Što je veći broj stranica poligona, to je manja razlika između površine kruga i površine upisanog poligona. Dodajemo sve više stranica dok god ne dobijemo da nam se pravilni poligon podudara s krugom, bez ijednog izostavljenog dijela."* Iako nije korišten formalni *reductio ad absurdum* argument kao u Eudoksovoj metodi ekshaustije, Liu pretpostavlja se da će na kraju poligoni „ispuniti" krug.

Luiev argument promotrit ćemo na upisanom pravilnom n-terokutu krugu polumjera r. Neka je c_n duljina stranice upisanog n-terokuta, a_n duljina okomice iz središta kruga na stranicu i S_n ukupna površina n-terokuta (slika 8). Započnimo sa $c_6 = r$. Općenito,

$$a_n = \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2} \quad \text{i} \quad c_{2n} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + (r - a_n)^2}.$$

Tada je

$$S_{2n} = 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c_n}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot n \cdot r \cdot c_n.$$



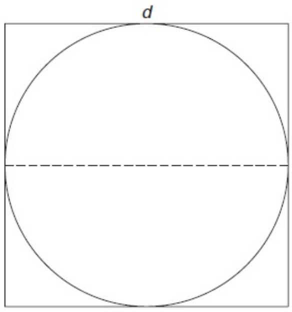
Slika 8: Pravilni n-terokut upisan krugu radijusa r

Liu je izračunao da je S_{2n} za $n = 96$ i $r = 10$ jednak $314\frac{64}{625}$, što je ekvivalentno vrijednosti za π od 3.141024, a potom je istaknuo da je „zgodno" uzeti 3.14 kao aproksimaciju za π. Dva stoljeća kasnije Zu Chongzhi odlučio je provesti daljnje izračune. Otkrio je da je bolja aproksimacija za π broj 3.1415926 korištenjem S_{24576}.

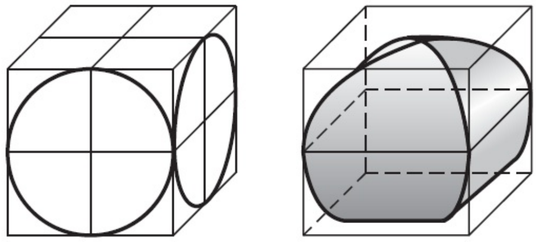
Poglavlje 4 u knjizi *Devet poglavlja* daje pravilo za određivanje promjera d kugle određenog volumena V, što je ekvivalentno predlaganju formule za volumen kugle: *„Postavite vrijednost V. Pomnožite ju sa 16, podijelite sa 9, izlučite kubni korijen rezultata."* Drugim riječima, pravilo je da je $d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$, što je ekvivalentno formuli volumena $V = \frac{9}{16}d^3$ ili $V = \frac{9}{2}r^3$, gdje je r polumjer. Čak i ako se uzme uobičajena aproksimacija $\pi = 3$, ovaj rezultat je neispravan i Liu Hui je opisao u svom komentaru kako je to shvatio.

Zamislite valjak upisan u kocku brida duljine d i presjek ravninom okomitom na os valjka (slika 9a). Ravnina siječe valjak u krugu promjera d i kocku u kvadratu stranice duljine d. Omjer površina ovih dvaju geometrijskih likova je $\pi : 4$. Budući da ovo vrijedi za svaki presjek, omjer volumena mora biti isti, tako da je volumen valjka $\frac{\pi}{4}d^3$. Ovaj princip, slično kao kod Arhimedova postupka u djelu *Metoda*, je ono što je danas poznato kao Cavalierijev princip. Razmotrimo kuglu upisanu u valjak. Ako je omjer volumena kugle i valjka također $\pi : 4$, tada je volumen kugle $\frac{\pi^2}{16}d^3$, a ako je za π uzeta vrijednost 3, to točno odgovara vrijednostima danima u *Devet poglavlja*. No, Liu je znao da je to netočno, da u stvari omjer volumena kugle i valjka nije $\pi : 4$. Njegov argument bio je kako slijedi: upišite drugi valjak u kocku, čija je os okomita na os prvog valjka te razmotrite sjecište dvaju valjaka (slika 9b). Prozvao je ovo križanje: *„dvostruki poklopac kutije"*.

Zamislimo kuglu koju čini mnoštvo krugova različitih radijusa čija središta leže na istom pravcu, na kojemu leži jedan od promjera kugle (slika 10a). Zatim zamijenimo svaki krug



(a) Presjek valjka upisanog u kocku



(b) Sjecište dvaju valjaka upisanih u istu kocku

Slika 9

sa kvadratom jednakog opsega kao odgovarajući krug. Dobivena figura je upravo dvostruki poklopac kutije (slika 10b). Još izrazitiji prikaz navedenog preobražaja kugle u dvostruki poklopac kutije vidjljiv je na slici 10c. Razlozi zašto su presjeci ovako dva okomito postavljena valjka kvadrati jesu potpuno jednake duljine radijusa i visine valjaka. Ako svaki krug/kvadrat zamislimo kao *sloj* odgovarajuće kugle/poklopca, tada poklopac kutije i njemu upisana kugla imaju jednak broj slojeva. Sada kada znamo za svaki odgovarajući par slojeva, omjer površine kvadrata naprama površine njemu upisanog kruga jednak je $4 : \pi$. Dakle, volumen poklopca kutije je $\frac{4}{\pi}$ volumena kugle. Zato nakon što otkrijemo formulu za volumen poklopca kutije znamo i formulu za volumen kugle.

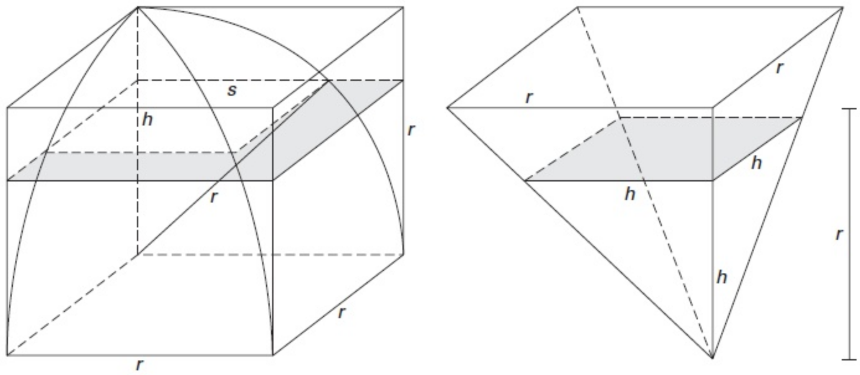
(a)

(b)

(c)

Slika 10

Liu Hui nije mogao pronaći formule za volumene. Napisao je: *„Ostavimo problem onome koji može reći istinu."* Ta osoba je Zu Geng. On je formalizirao Cavalierijev princip na sljedeći način: *„Ako su odgovarajuće površine područja dviju krutih tvari svugdje jednake, onda njihovi volumeni ne mogu biti nejednaki."* U slučaju dvostrukog poklopca kutije, njegov argument je ovakav: razmotrite $\frac{1}{8}$ poklopca kutije i upišite ga u kocku brida duljine $r = \frac{d}{2}$ (slika 11). Ako promotrimo ravninu kroz poklopac kutije na visini h, presjek je kvadrat stranice duljine s gdje je $s^2 = r^2 - h^2$. Budući da ravnina presijeca obavijajuću kocku u kvadratu površine r^2, razlika između dva presjeka jednaka je h^2. Ali znamo da ako uzmemo obrnutu piramidu visine r i kvadratne baze stranice duljine r te promotrimo kroz nju ravninu na visini h (od vrha), presjek je također kvadrat površine h^2. Iz toga slijedi da je volumen tog dijela upisane kocke izvan okvira poklopca kutije jednak volumenu piramide, tj. $\frac{1}{3}r^3$. Oduzimanjem ovoga od volumena same kocke dobit ćemo da je volumen $\frac{1}{8}$ poklopca kutije jednak $\frac{2}{3}r^3$, a time i volumen cijelog poklopca kutije što je jednako $\frac{16}{3}r^3$. Omjer volumena kugle i poklopca kutije jednak je $\pi : 4$. Stoga je volumen kugle jednak $\frac{4}{3}\pi r^3$.



Slika 11: $\frac{1}{8}$ poklopca kutije upisanog u kocku duljine brida r

4.2 Pitagorin teorem

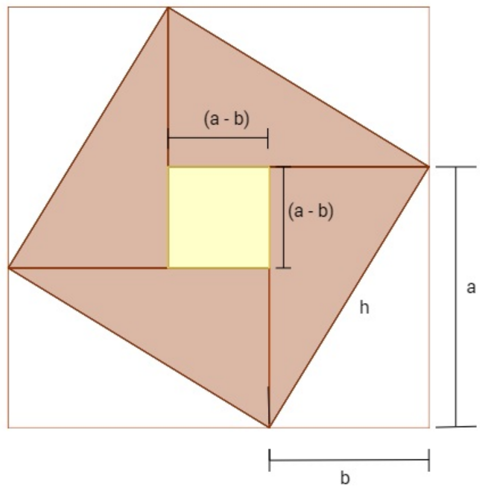
Devet poglavlja i drugi drevni kineski dokumenti sadrže zapise o poznavanju Pitagorinog poučka. Komentari Zhaoa Shuanga na *Aritmetički klasik o gnomonu* i Liua Hua na 9. poglavlje u knjizi *Devet poglavlja* sadrže argumente za teorem. Oba argumenata opisuju reproducirane dijagrame za koje se vjeruje da su blizu onima od izvornih autora.

Argument Zhaoa Shuanga je sljedeći (pri čemu slika 12 prikazuje pripadni *„dijagram hipotenuze”*):

> Duljine baze i visine su pomnožene svake sa samom sobom. Zbrojite rezultate kako biste dobili kvadrat duljine hipotenuze. Odredite kvadratni korijen i dobili ste duljinu hipotenuze. U skladu s dijagramom hipotenuze, možete spojiti bazu i visinu te napraviti dva crvena područja. Udvostručite to kako biste dobili četiri crvena područja. Pomnožite razliku od duljina osnovice i visine sa samim tim da biste dobili središnje žuto područje. Ako se doda jedno takvo područje razlike (na četiri crvena područja), područje hipotenuze je upotpunjeno.

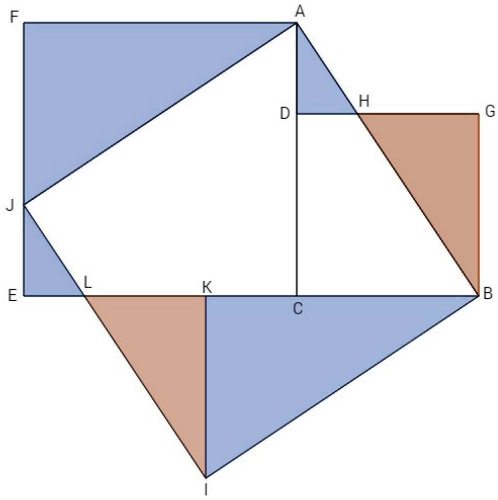
Čini se kako je Zhao tvrdio da vrijedi: $c^2 = a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$. Liuoev argument je malo drugačiji, a odnosi se na dijagram vjerojatno sličan onome na slici 13:

> Kraća stranica od okomitih stranica naziva se *gou*, a duža stranica *gu*. Stranica nasuprot pravog kuta zove se *hipotenuza*. Gou je kraća od gu. Gu je kraća od hipotenuze. One se primjenjuju u raznim problemima. Stoga sam ih spomenuo ovdje kako bih pokazao čitatelju njihovo podrijetlo. Neka je kvadrat nad gou crvene boje, a kvadrat nad gu plave boje. Neka se manjak i višak dijelovi međusobno



Slika 12: Zhaov dijagram hipotenuze

zamijene u odgovarajuće pozicije, a ostali dijelovi ostaju nepromijenjeni. Oni se kombiniraju kako bi se formirao kvadrat nad hipotenuzom. Izračunamo drugi korijen za dobivanje duljine hipotenuze.

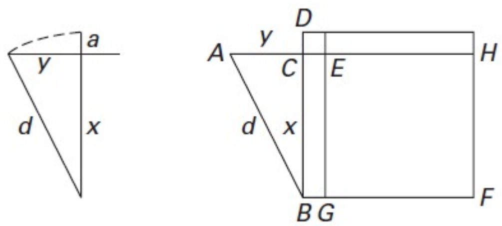


Slika 13: Dijagram koji predstavlja Liuoev argument

Kako bi zadovoljili suvremene standarde dokazivanja, bit će potrebno pokazati da su svi likovi koji se pojavljuju kao kvadrati uistinu kvadrati i da su svi parovi područja za koje se pretpostavlja da su jednaki uistinu jednaki. Međutim Kinezima je to očito. Nisu znali iz kojeg neospornog sustava mogu izvesti teorem. Njima "dokaz" znači jednostavno uvjerljiv argument. Naime, grčka riječ *„teorem"* dolazi od „*theorein*" što znači *„pogledati"*. Dakle, ako se pogleda na dijagrame, odmah se vidi teorem. Deveto poglavlje u knjizi *Devet poglavlja* sadrži brojne probleme koji uključuju pravokutni trokut.

Primjer 4.2.1. (Problem 6 u 9. poglavlju knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*) *Postoji ribnjak kvadratnog oblika obale duljine* 10 *stopa te s trskom koja raste u sredini čiji vrh je jednu stopu iznad vode. Ako je trska povučena prema obali, samo vrh dodirne obalu.*

Treba pronaći dubinu vode i dužinu trske.
Odgovor: Na slici 14 je prikazano da $y = 5$ i $x + a = d$, gdje je u ovom slučaju y polovina duljine obale te $a = 1$. Suvremeno rješavanje počinje postavljanjem problema $d^2 = x^2 + y^2$. Kratak algebarski izračun daje $x = \frac{y^2-a^2}{2a}$. S navedenim vrijednostima dobivamo $x = 12$ i zbog toga $d = 13$. Međutim, kinesko pravilo kaže: *„Pomnožite polovicu duljine strane jezera sa samom sobom. Smanjite rezultat za produkt duljine trske iznad vode dobiven množenjem sa samim sobom. Podijelite razliku sa dvostrukom duljinom trske iznad vode. To daje dubinu. Dodajte to duljini trske iznad vode. To daje duljinu trske."* Nije jasno je li kineski autor pronašao rješenje algebarskom ili ekvivalentnom geometrijskom metodom gdje je $y^2 = AC^2 = AB^2 - BC^2 = BD^2 - EG^2 = DE^2 + 2 \cdot CE \cdot BC = a^2 + 2ax$. No, ono što je sigurno je da je autor bio točan u korištenju Pitagorinog teorema.



Slika 14: Problem 6 u 9. poglavlju knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*

4.3 Trigonometrija

Kineski carevi, kao i drugi vladari, uvijek su bili zainteresirani za probleme vezane uz kalendar, tj. za predviđanje raznih nebeskih događanja kao što je pomrčina. Nažalost, kineski astronomi nisu bili vrlo uspješni u predviđanju pomračenja jer nisu u potpunosti razumjeli kretanja Sunca i Mjeseca. Indijski astronomi, zbog grčkog utjecaja u stvaranju geometrijskih modela, bili su uspješniji. Dakle, u 8. stoljeću kada je budizam bio jednako jak kako u Indiji tako i u Kini pri čemu su budistički redovnici mnogo putovali kroz te zemlje, kineski carevi dinastije Tang doveli su indijske učenjake kako bi doši do novih spoznaja. Ovi učenjaci na čelu s Chutanom Hsitom pripremili su astronomski rad na kineskom jeziku u 718. godini pod nazivom *Chiu-chih li (Devet planeta [sunce, mjesec, pet običnih planeta i dva nevidljiva])* temeljen na indijskim izvorima. Konkretno, ovaj rad je sadržavao opis izrade tablice sinusa u koracima od $3°45'$ pomoću radijusa kruga od $3438'$.

Godine 724. državni astronomski zavod u dinastiji Tang započeo je opsežan program terenskog istraživanja kako bi se utvrdile duljine sjena standardnog gnomona (dužine 8 stopa) u širinama u rasponu od $29°$ do $52°$ duž istog meridijana ($114°E$), u vrijeme ljetnog i zimskog solsticija i tijekom ekvinocija. Ova zapažanja je zatim analizirao glavni astronom Yi Xing, ujedno i budistički redovnik. Xingov cilj bio je da koristi ova i druga promatranja te razne tehnike interpolacije kako bi izračunao duljine sjena, trajanje dnevnog svjetla i noći te pojavu Sunca, sve bez obzira na položaj promatrača. Nije bio svjestan zaobljenosti zemlje i stoga nije mogao koristiti klasični grčki model. Među tablicama koje je Xing napisao za ove namjene u svom djelu *Ta yen li* je i tablica sjena na temelju sunčevih udaljenosti zenita α. Njegova tablica daje dužinu sjena gnomona od 8 stopa za svaku cjelobrojnu vrijednost kuta zenita α od $1°$ do $79°$. U suvremenim uvjetima to je tablica funkcije $s(\alpha) = 8\text{tg}\alpha$ i najranija zabilježena verzija tablice tangensa.

Nije poznato kako je Xing izračunao podatke u tablici, ali detaljna usporedba Xingovog rada sa standardnim indijskim astronomskim radovima i uz tablicu sinusa u djelu *Chiu-chih li* vodi do zaključka da je interpolirao podatke u tablicu sinusa i koristio dobivene vrijednosti za izračunavanje duljine sjena formulom $s(\alpha) = 8\frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)}$. U svakom slučaju, iako su *Ta yen li* pa čak i *Chiu-chih li* sačuvani u kineskim priručnicima, Xingova ideja o tablici tangensa nije raširena u toj zemlji. Trigonometrijske metode nisu se ponovno javile u Kini do pojave općih kontakta sa zapadom u 17. stoljeću. S druge strane, sljedeće pojavljivanje tablice duljina sjena (tangensa) bilo je u islamskim izvorima u 9. stoljeću. Nije poznato je li prosljeđivanje ove ideje došlo preko središnje Azije tijekom tog stoljeća.

5 Rješavanje jednadžbi

Kinezi koriste dva osnovna algoritma za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Za rješavanje jednadžbi višeg stupnja razvili su različite numeričke postupke.

5.1 Sustav linearnih jednadžbi

U knjizi *Devet poglavlja* sadržana su oba algoritma za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Prva metoda naziva se *metoda viška i manjka*, a koristi se uglavnom za rješavanje problema koje bismo preveli u sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Nalazi se u 7. poglavlju knjige *Devet poglavlja*. Danas je ova metoda poznata pod nazivom *„metoda lažne postavke”*. Počinje s „pogađanjem” mogućih rješenja i zaključivanjem podešavanjem pokušaja kako bi dobili pravo rješenje. Upotreba ove metode pokazala je da su Kinezi shvatili koncept linearnog odnosa.

Primjer 5.1.1. (Problem 17 u 7. poglavlju knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*) *Cijena* 1 *jutra dobre zemlje je* 300 *komada zlata, a cijena* 7 *jutara lošeg zemljišta je* 500. *Jedan čovjek je kupio sveukupno* 100 *jutara zemlje. Cijena je bila* 10000 *komada zlata. Koliko je dobrog zemljišta kupio, a koliko lošega?*
Odgovor: Suvremeni prijevod ovog problema bio bi sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ 300x + \frac{500}{7}y &= 10000. \end{aligned}$$

Kinesko pravilo za rješenje je sljedeće: *„Recimo da ima* 20 *jutara dobre zemlje i* 80 *loše. Zatim je višak* $1714\frac{2}{7}$. *Ako ima* 10 *jutara dobre zemlje i* 90 *loše, nedostatak je* $571\frac{3}{7}$.*”* Kineski autor objasnio je postupak rješavanja na sljedeći način: pomnožite 20 sa $571\frac{3}{7}$, 10 sa $1714\frac{2}{7}$, zbrojite rezultate te konačno podijelite ovaj iznos zbrojem brojeva $1714\frac{2}{7}$ i $571\frac{3}{7}$. Rezultat $12\frac{1}{2}$ jutara je količina dobre zemlje. Iznos lošeg zemljišta, $87\frac{1}{2}$ jutara, onda je lako naći.

Autor nije objasnio kako je došao do ovog algoritma, koji se pojavio u islamskom svijetu, a zatim i u zapadnoj Europi više od tisuću godina kasnije. Možemo izraziti algoritam pomoću formule $x = \frac{b_1x_2+b_2x_1}{b_1+b_2}$, gdje b_1 je višak određen pogađanjem broja x_1 i b_2 je nedostatak određen pogađanjem broja x_2.

Svaki od 20 problema u 7. poglavlju knjige *Devet poglavlja* je riješen pomoću modifikacija navedenog algoritma. Na primjer, dva različita nagađanja mogu oba dati višak ili nedostatak. U svakom slučaju, autor je dao objašnjenje odgovarajućeg izračuna. Svakako je moguće uz korištenje suvremene notacije pisati svaki od tih problema u istom obliku i dobiti jedinstveno (algebarsko) rješenje. U 8. poglavlju navedene knjige opisuje se druga metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi, ponovno prikazujući različite primjere s ponešto promijenjenim zapletima. U ovom slučaju suvremene metode nisu jednostavnije. U stvari, postupak kineskog rješavanja gotovo je identičan postupku Gaussove metode eliminacije i prikazan je u matričnom obliku na ploči za računanje.

Primjer 5.1.2. (Problem 1 u 8. poglavlju knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*) *Postoje tri vrste žitarica od kojih su tri paketa prve klase, dva druge, a jedan treće i čine ukupno* 39 *mjera. Dva paketa prve klase, tri druge, a jedan paket treće klase čine ukupno* 34

mjere. Jedan paket prve klase, dva druge, a tri treće čine ukupno 26 *mjere. Kolika mjera žita je sadržana u jednom paketu za svaku klasu?*
Odgovor: Problem se može prevesti u sustav

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Algoritam za rješavanje problema je sljedeći: *„Složite snopove* 3, 2 *i* 1 *u tri klase i* 39 *mjera žitarica na desnu stranu. Rasporedite i druge uvjete po sredini i na lijevu stranu."* Ovaj aranžman je prikazan u donjem dijagramu:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39. \end{array}$$

„Prvu klasu u desnom stupcu pomnožiti s trenutno srednjim stupcem i dobivene rezultate ostaviti u srednjem stupcu." Tj. množi se srednji stupac sa 3 (prvom klasom desne strane), a zatim oduzima višekratnik (u ovom slučaj, 2) broja u desnom stupcu, tako da prvi broj u srednjem stupcu postaje 0. Isti postupak se tada vrši u lijevom stupcu. Rezultati su prikazani kako slijedi:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39. \end{array}$$

„Onda s onim što je ostalo kao broj druge klase u srednjem stupcu napravimo isto na prvom stupcu." To je obavljanje istog postupka koristeći srednji i lijevi stupac. Rezultat je:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39. \end{array}$$

Budući da je ovaj dijagram ekvivalentan trokutastom sustavu:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99, \end{aligned}$$

autor je objasnio kako riješiti taj sustav metodom koja se naziva *„zamjena unatrag"*, počevši od $z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$.

Iako izvorni autor nije objasnio zašto je ovaj algoritam radio niti kako je izveden, Liu Hui je dao opravdanje u svom komentaru: *„Ako se stope u jednom stupcu oduzimaju od* *onih u drugom, to neće utjecati na omjere rezultata."* Drugim riječima, Liu je opravdao postupak navodeći „aksiom" da kada jednom oduzima jednake s jednakima, rezultati su jednaki.

S obzirom na ovaj postupak oduzimanja stupaca, može se postaviti pitanje što se dogodilo kad je takva manipulacija matrice dovela do negativne količine u jednoj od kutija. Pogled na problem 3 istog poglavlja pokazuje da to nije ograničenje. Postupak je proveden savršeno ispravno za sustav

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + 4z &= 1, \end{aligned}$$

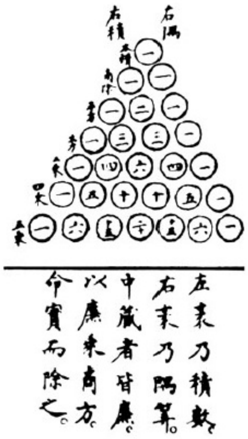
sustav u kojem se pojavljuju negativne vrijednosti u postupku dovršavanja algoritma. Naime, autor je dao ovdje pravila za dodavanje i oduzimanje s pozitivnim i negativnim vrijednostima: *„Za oduzimanje vrijedi: vrijednosti s istim predznacima oduzmite jednu od druge, a s različitim predznacima dodajte jednu drugoj. Pozitivno oduzeto od ničega čini negativno, dok negativno oduzeto od ničega čini pozitivno. Za zbrajanje: vrijednosti s različitim predznacima oduzmite jednu od druge, a s istim predznacima dodajte jednu drugoj. Pozitivno i ništa čine pozitivno, dok negativno i ništa čine negativno."* Dakle, pravila za postupanje s negativnim brojevima nastala u Kini nisu u kontekstu rješavanja jednadžbi koje nemaju pozitivno rješenje, nego kao međukorak u upotrebi poznatih algoritama konstruiranih za rješavanje problema koji nemaju pozitivnih rješenja.

Nažalost, nije poznato jesu li Kinezi promatrali različita rješenja jednadžbi ili implikacije beskonačnog broja rješenja. Općenito, Kinezi su proučavali samo probleme s jednakim brojem jednadžbi i nepoznanica. Ne postoje zapisi o bilo kakvim raspravama o tome zašto takva situacija stvara jedinstveno rješenje ili što se događa u drugim situacijama.

5.2 Jia Xian, Qin Jiushao i algebarske jednadžbe

Podsjetimo da je knjiga *Devet poglavlja* sadržavala barem neke naznake rješavanja kvadratnih i kubnih jednadžbi u opisu postupka za određivanje kvadratnih i kubnih korijena. Druge algebarske jednadžbe pojavile su se na drugim mjestima u Kini tijekom stoljeća. Na primjer, u *Matematičkom klasiku Zhanga Quijiana*, ali opis metode rješavanja nedostaje u navedenom rukopisu. Kubna jednadžba pojavila se u radu Wanga Xiaotonga (početkom 7. stoljeća), ali opet nema načina njenog rješavanja osim navoda za rješavanje prema pravilu određivanja kubnog korijena. Očito je da je postojala metoda za rješavanje takvih jednadžbi tijekom prvog tisućljeća.

Sredinom 11. stoljeća Jia Xian napisao je rad u kojemu je generalizirao rješavanje algebarskih jednadžbi na postupcima određivanja kvadratnih i kubnih korijena pomoću niza brojeva sličnome današnjem Pascalovom trokutu. Xianove metode opisane su u djelu Yanga Huia pisanog oko 1261. godine. Xianova osnovna ideja potekla je od izvornih algoritama za određivanje kubnog i kvadratnog korijena koji su koristili binomni razvoj za potencije 2 i 3. Shvatio je da se taj postupak rješavanja može generalizirati za n-ti korijen za $n > 3$ određivanjem binomnog razvoja $(r + s)^n$. Ne samo da je napisao binomne koeficijente do šestog reda, nego je i razvio uobičajenu metodu stvaranja Pascalova trokuta (slika 15): *„Zbrojite brojeve koji su na dva mjesta gore kako bi se pronašao broj za donje mjesto."*

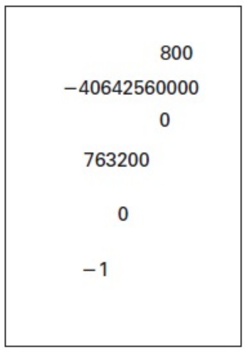


Slika 15: Trokut binomnih koeficijenata Jia Xiana

Prvi detaljan prikaz Jianove metode za rješavanje jednadžbi, vjerojatno nešto prepravljen, pojavljuje se u knjizi Qina Jiushaoa pod nazivom *Shushu jiuzhang (Matematička rasprava u devet poglavlja).* Pogledat ćemo njegovu metodu u kontekstu jednadžbe

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0.$$

Početni koraci u rješavanju takve jednadžbe su isti kao i oni u rješavanju jednadžbe $x^n = b$. Naime, prvo treba utvrditi broj znamenaka u odgovoru, potom pogoditi odgovarajuću prvu znamenku. U ovom slučaju odgovor je pronađen iskustvom ili metodom pokušaja i pogrešaka te treba biti troznamenkasti broj koji počinje s 8. Qinov pristup, kao i kod starog algoritma za određivanje kubnog korijena, bio je postaviti $x = 800 + y$, uvrstiti tu vrijednost u jednadžbu, a zatim izvesti novu jednadžbu za y čije rješenje će biti samo dvoznamenkasti broj. Onda se može pogoditi prva znamenka broja y i ponoviti postupak. S obzirom na decimalnu prirodu kineskog brojevnog sustava, Kinezi su mogli ponoviti ovaj algoritam koliko god puta su htjeli u želji da se približe odgovoru na bilo koju željenu razinu točnosti. Qin je dao odgovore na neke probleme s jednim ili dva decimalna mjesta, ali u drugim slučajevima kada rješenje nije bilo cijeli broj, naveo je ostatak kao razlomak. Kinezi nisu koristili suvremene tehnike algebre kako bi „zamjenili” $x = 800 + y$ u originalnu jednadžbu. Problem je bio postavljen na ploču za računanje gdje svaki redak stoji za određenu nepoznanicu (slika 16).



Slika 16: Quinova inicijalna ploča za brojanje

Zbog ograničenosti prostora ovdje je naveden vodoravan prikaz koeficijenata. Dakle, za dani problem, početna konfiguracija je

$$-1 \quad 0 \quad 763200 \quad 0 \quad -40642560000.$$

S obzirom da je početna aproksimacija korijena broj 800, Qin je opisao ono što se zove ponavljanje podjele prvobitnog polinoma sa $x - 800 (= y)$. Prvi korak daje sljedeće:

$$\begin{array}{cccccc}
800 & -1 & 0 & 763200 & 0 & -40642560000 \\
 & & -800 & -640000 & 98560000 & 78848000000 \\
 & -1 & -800 & 123200 & 98560000 & 38205440000.
\end{array}$$

Na primjer, kako bi dobili treći redak -1 pomnožite sa 800 i rezultatu dodajte 0. Rezultat (-800) zatim pomnožite sa 800, a umnožak oduzmite od 763200. U algebarskoj notaciji, prvi korak pokazuje da je izvorni polinom zamijenjen sa

$$(x - 800)(-x^3 - 800x^2 + 123200x + 98560000) + 38205440000$$

$$= y(-x^3 - 800x^2 + 123200x + 98560000) + 38205440000.$$

Qin postupak ponavlja još tri puta, dijeleći svaki kvocijent polinoma sa istim $y = x - 800$. Rezultat je na kraju:

$$\begin{aligned}
0 &= -x^4 + 763200x^2 - 40642560000 \\
&= yy[y(-y - 3200) - 3076800] - 826880000 + 38205440000,
\end{aligned}$$

odnosno

$$-y^4 - 3200y^3 - 3076800y^2 - 826880000y + 38205440000 = 0.$$

Qin na ploči za računje označava samo brojeve. Njegovi dijagrami (jedan za svaki korak) ovdje su kombinirani u jednoj velikoj shemi:

$$\begin{array}{cccccc}
800 & -1 & 0 & 763200 & 0 & -40642560000 \\
 & & -800 & -640000 & 98560000 & 78848000000 \\
800 & -1 & -800 & 123200 & 98560000 & 38205440000 \\
 & & -800 & -1280000 & -925440000 & \\
800 & -1 & -1600 & -1156800 & -826880000 & \\
 & & -800 & 1920000 & & \\
800 & -1 & -2400 & -3076800 & & \\
 & & -800 & & & \\
800 & -1 & -3200 & & & \\
 & -1 & & & & \\
40 & -1 & -3200 & -3076800 & -82688000 & 38205440000 \\
 & & -40 & -129600 & -128256000 & -38205440000 \\
 & -1 & -3240 & -3206400 & -955136000 & 0.
\end{array}$$

Treći redak od dna sadrži koeficijente Qinove jednadžbe za y zajedno sa pogotkom broja 4 kao prve znamenke dvoznamenkastog odgovora. (Do toga se došlo jednostavnom podjelom broja 38205440000 sa 826880000.) U primjeru jednadžba za y je upravo djeljiva sa $y - 40$. Rješenje polazne jednadžbe je onda $x = 840$.

Qin ne daje teorijska opravdanja svog postupka. No, budući da je riješio ovom metodom 26 različitih jednadžbi u djelu *Shushu jiuzhang* i kako je nekoliko njegovih suvremenika riješilo slične jednadžbe istom metodom, očito je da su on i kineska matematička zajednica u cjelini koristili ispravan algoritam za rješavanje ovakvih problema. Kako je ovaj algoritam pronađen u Europi više od 5 stoljeća nakon Qinovog vremena, navest ćemo još nekoliko komentara vezanih uz navedeni algoritam.

1. Tekstovi samo ukratko iznose kako su pronađene pogođene vrijednosti znamenki korijena. Može se samo pretpostaviti da su matematičari u Kini posjedovali opsežne tablice potencija koje bi se mogle koristiti za različita pogađanja.

2. Nema spomena u tekstovima o više riješenja. Prethodno navedena Qinova jednadžba četvrtog stupanja ima još jedno pozitivno riješenje, 240, kao i dva negativna. Riješenje 240 moglo se lako pronaći istom metodom, pod uvjetom da je pogođen broj 2 za početnu znamenku. No, u ovom slučaju geometrijski problem iz kojeg je izvedena ova jednadžba ima samo jedno rješenje, a to je 840.

3. Operacije s negativnim brojevima su izvedene jednako jednostavno kao i one s pozitivnim. Sjetite se da su Kinezi koristili različite boje za štapiće za računanje što je predstavljalo dvije vrste brojeva i mnogo prije su imali otkrivene ispravne aritmetičke algoritme za računanje. S druge strane, ne pojavljuju se negativni korijeni, ponovno iz razloga što problemi iz kojih jednadžbe proizlaze imaju pozitivna rješenja.

4. Pošto su znali računati s negativnim brojevima, Kinezi su uglavnom predstavljali jednadžbe u obliku $f(x) = 0$. To predstavlja osnovnu razliku u pristupu u odnosu na drevnu babilonsku ili srednjovjekovnu islamsku metodu. Na kraju se čini da je kineska metoda rješavanja kvadratne jednadžbe bila potpuno različita od babilonske. Babilonci su razvili formulu koja bi se mogla primijeniti samo na takve jednadžbe, dok su Kinezi razvili numerički algoritam koji su u konačnici generalizirali za rješavanje jednadžbi bilo kojeg stupnja.

5.3 Djela Lia Yeha, Yanga Huia i Zhua Shijiea

Tri suvremenika Qina Jiushaoa također su dala značajan doprinos u rješavanju jednadžbi: Li Yeh, Yang Hui i Zhu Shijie. Zbog rata između Mongola i dvije kineske dinastije Jin i Song, koji je trajao veći dio stoljeća, postoji sumnja da niti jedan od tih matematičara nije imao utjecaja na preostalu dvojicu.

Li Yeh je napisao dva velika matematička djela vezana uz algebarske jednadžbe: *Ceyuan haijing (Morsko ogledalo mjerenja kruga)* i *Yigu yanduan (Stara matematika u proširenim poglavljima)*. U svojim djelima Li se bavio geometrijskim problemima kvadrata, krugova, pravokutnika i trapeza, ali njegov glavni cilj bio je razmatranje metoda za postavljanje odgovarajuće kvadratne jednadžbe za rješavanje problema.

Primjer 5.3.1. (Problem 8 iz knjige *Yigu yanduan*) *Postoji ribnjak kružnog oblika unutar kvadratnog polja, a izvan ribnjaka je* 3300 *kvadratnih stopa. Zbroj opsega kvadrata i kruga je* 300 *stopa. Pronađite oba opsega.*
Odgovor: Li je postavio da je x promjer kruga i $3x$ opseg ($\pi = 3$). Zatim je $300 - 3x$ opseg kvadrata. Kvadriranjem te vrijednosti dobio je da je $90000 - 1800x + 9x^2$ površina

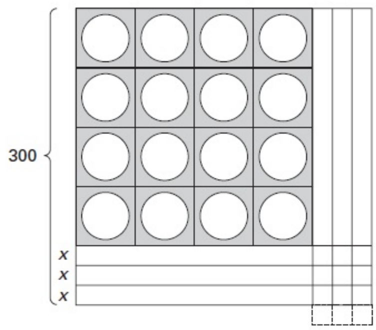
od 16 kvadratnih polja. Također, kako je $\frac{3x^2}{4}$ površina ribnjaka kružnog oblika, $12x^2$ je površina od 16 takvih ribnjaka. Razlika ova dva izraza, $90000 - 1800x - 3x^2$, jednaka je 16 dijelova područja izvan ribnjaka, odnosno $16 \cdot 3300 = 52800$. Željena jednadžba je onda $37200 - 1800x - 3x^2 = 0$. Za razliku od Qinova rada, Li je samo potvrdio da je 20 rješenje jednadžbe te je onda opseg kruga jednak 60 i opseg kvadrata jednak 240. Zanimljivo je da je Li gotovo uvijek slijedio algebarsko izvođenje s geometrijskim (slika 17). Ovdje je duljina stranice velikog kvadrata jednaka 300, zbroj danih opsega. Osjenčana područja predstavljaju $16 \cdot 3300$. Kako je $300x$ površina svake duge trake, x^2 površina svakog malog kvadrata, a $12x^2$ ukupna površina od 16 kružnih ribnjaka, onda je izvedena jednadžba

$$300^2 - 16 \cdot 3300 = 6 \cdot 300x - 9x^2 + 12x^2 = 1800x + 3x^2$$

ili

$$37200 = 1800x + 3x^2,$$

kao i prije.



Slika 17: Dijagram primjera Lia Yea

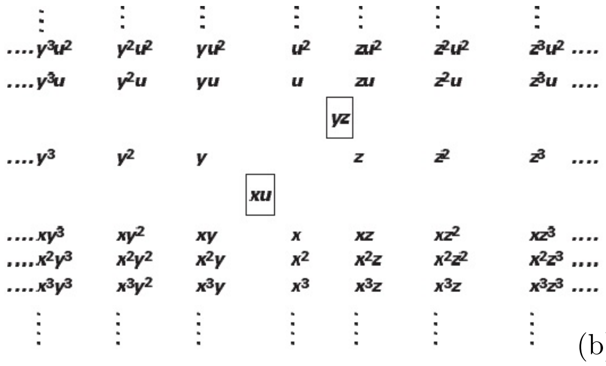
Djelo *Yigu yanduan* vrlo je bitno za razvoj matematike u Kini. Ne samo da Liova metoda rješavanja izvorno ima geometrijsku osnovu, nego je on i vrlo dobro postavio probleme. Budući da su numerički rezultati zabilježeni i izračunati na pločama za računanje, kineski znanstvenici konačno su prepoznali uzorke na toj ploči i razvili su ih u numeričke algoritme. U isto vrijeme, oni su vjerojatno počeli sažimati geometrijski pojam, na primjer kvadrata, u jednostavan položaj na ploči za računanje, a potom stvarati algebarsku ideju kvadrata nepoznate numeričke vrijednosti. Nakon što je pojam kvadrata nepoznanice postao apstraktan nije bilo zapreke za jednadžbe proizvoljnog stupnja. Qinove jednadžbe su se temeljile na stvarnim, pa čak i geometrijskim problemima, ali nije oklijevao u upotrebi potencije nepoznatoga, koja nije imala geometrijski smisao.

Dva glavna djela o kvadratnim jednadžbama Yanga Huia još uvijek postoje, a to su knjiga *Xiangjie jiushang suanfa (Detaljna analiza aritmetičkih pravila u Devet poglavlja)* i zbirka poznata kao *Yang Hui suanfa (Yang Huiova metoda izračuna)*. Za razliku od Liovog rada, Hui je dao detaljan prikaz svojih metoda. Općenito, Hui je koristio isti postupak kao Qin, ali je dao i alternativne metode koje više podsjećaju na ranije opisanu kinesku metodu određivanja kvadratnog korijena. Hui je predstavio geometrijski dijagram koji se sastoji od kvadrata i pravokutnika koji prikazuju različite numeričke metode koje je koristio.

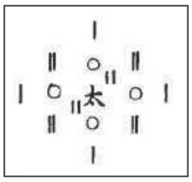
U djelu *Dragocjeno ogledalo četiri elementa* Zhua Shijiea postoji važna nova metoda, Shijieva adaptacija Qinove metode rješavanja algebarske jednadžbe u postupku za rješavanje sustava jednadžbi s nekoliko nepoznanica. U stvari, on je bio u mogućnosti koristiti tu metodu do jednadžbi sa četiri nepoznanice, povezujući regije ploča za računanje za svaku moguću kombinaciju potencija jedne ili dvije nepoznanice (slika 18a). Koeficijent dane kombinacije se zatim stavi u područje povezano s tim pojmom. Na primjer, izraz

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2xy + 2xz + 2xu + 2yz + 2yu + 2zu$$

prikazan je na slici 18b. Shijie je tada bio u mogućnosti manipulirati koeficijentima svojih jednadžbi tako što bi promijenio položaj štapića za brojanje čime bi sustav bio sveden na jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Ta jednadžba se tada može riješiti standardnim postupcima.



(a) Shijieov prikaz ploče za računanje s jednadžbom sa 4 nepoznanice



(b) Izraz $x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+2yz+2yu+2zu$ na Shijeovoj ploči za računanje

Slika 18: Shijieove ploče za računanje

Primjer 5.3.2. (Problem 2 u knjizi *Dragocjeno ogledalo četiri elementa*) *Oduzmite od kvadrata duljine visine pravokutnog trokuta razliku duljine hipotenuze i razliku duljina visine i baze što je jednako produktu duljina visine i baze. Također je poznato da je kvadrat duljine baze dodan zbroju duljina hipotenuze i razlike duljina visine i baze što je jednako umnošku duljina baze i hipotenuze. Nađite duljinu visine.*
Odgovor: Problem se odnosi na pravokutni trokut pri čemu je duljina osnovice a, duljina visine b, a duljina hipotenuze c. Dani podaci daju jednadžbe:

$$\begin{aligned} b^2 - [c - (b - a)] &= ba \\ a^2 + c + b - a &= ac. \end{aligned}$$

Osim toga, imamo jednadžbu Pitagorinog teorema: $a^2 + b^2 = c^2$. Shijieov prvi korak bio je postavljanje $x = b$ i $y = a + c$, a zatim kombiniranje tri navedene jednadžbe u sljedeće dvije:

$$x^3 + 2yx^2 + 2xy - xy^2 - 2y^2 = 0 \quad (5.3.1)$$
$$x^3 + 2yx - xy^2 + 2y^2 = 0. \quad (5.3.2)$$

Shijie je ponavljao idući postupak kako bi uklonio izraz y^2. Dakle, on oduzima jednadžbu (5.3.2) od jednadžbe (5.3.1) i pojednostavljuje kako bi dobio

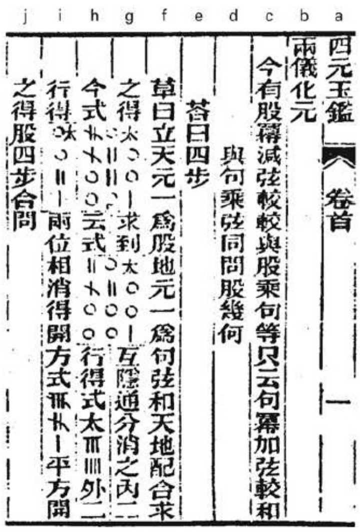
$$x^2 - 2y = 0. \quad (5.3.3)$$

Tada je pomnožio jednadžbu (5.3.3) sa x i zamjenjuje $2yx$ za x^3 u jednadžbi (5.3.1). To pojednostavljuje do

$$2x^2 + 4x - xy - 2y = 0. \tag{5.3.4}$$

Konačno, nastavio je s eliminacijom izraza y između jednadžbi (5.3.3) i (5.3.4) prvo prepisivanjem njih dvije u oblik $A_1y + A_2 = 0$ i $B_1y + B_2 = 0$, gdje A_i i B_i ne sadrže y, a zatim množenjem prve jednadžbe sa B_1, druge jednadžbe sa A_1 te potom oduzimanjem. Ono što ostaje je polinom bez izraza y: $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$. Naime, jednadžba (5.3.3) postaje $(-2)y + x^2 = 0$ i jednadžba (5.3.4) postaje $(x + 2)y - 2x^2 - 4x = 0$. Tada jednadžba $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ postaje $(x^3+2x^2)-(4x^2+8x) = 0$, što se pojednostavljuje do $x^2-2x-8 = 0$. Shije je onda mogao riješiti kvadratnu jednadžbu kako bi dobio željeni odgovor $x = b = 4$.

U složenijim problemima Shijie je često primjenjivao ovu tehniku eliminacije, ponekad kako bi se uklonio kvadrat nepoznate vrijednosti prije njene upotrebe, kako bi se eliminirala i sama nepoznanica. Bio je u mogućnosti s vremenom smanjiti dani sustav jednadžbi sve do jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom koja se onda može lako riješiti. Nažalost, njegov opis metode je vrlo zagonetan i u svojim raspravama o nekoliko problema samo je napisao neke od brojnih pomoćnih jednadžbi pomoću kojih je dovršio rješenje zadatka. Na slici 19 prikazana je stranica njegove knjige. Na njoj se jednadžba (5.3.1) pojavljuje u stupcima g i h pri samom vrhu, jednadžba (5.3.2) u istim stupcima u sredini, A_1B_2 pri dnu stupca h, A_2B_1 pri vrhu stupca i, dok se konačna kvadratna jednadžba pojavljuje pri dnu stupca i.



Slika 19: Problem 2 iz knjige *Dragocjeno ogledalo četiri elementa*

Iako su Shijie, Qin i drugi koristili ploču za računanje, njena upotreba ima svoje granice. Jednadžbe su ostale numeričke te nije moglo biti razvoja bilo kakve teorije rješavanja jednadžbi do kojih je došlo nekoliko stoljeća kasnije na zapadu. Nadalje, političke promjene u Kini povezane s Mongolskom dinastijom i dinastijom Ming rezultirale su padom matematičke aktivnosti, tako da se uskoro čak i ti radovi iz 13. stoljeća više nisu proučavali.

6 Kongruencije

Problemi vezani uz kalendare doveli su matematičare u Kini do pitanja rješavanja sustava neodređenih linearnih jednadžbi. Na primjer, Kinezi su pretpostavljali da se u određenom trenutku u vremenu pod nazivom *Shang juan* pojavio istovremeno početak 60-dnevnog ciklusa koji se koristi u kineskom obilježavanju datuma, zimski solsticij i mladi mjesec. Ukoliko se u nekoj drugoj godini zimski solsticij dogodi u r dana u 60-dnevnom ciklusu i s dana nakon mladog mjeseca, onda je ta godina bila N-ta godina nakon trenutka *Shang juan*, gdje N istovremeno zadovoljava kongruencije

$$aN \equiv r \pmod{60} \quad \text{i} \quad aN \equiv s \pmod{b}$$

pri čemu je a broj dana u godini i b broj dana od mlađaka do mlađaka. U sačuvanim zapisima drevnih kalendara nema naznaka kako su kineski astronomi riješili takve probleme.

6.1 Kineski teorem o ostacima

Jednostavnije verzije problema kongruencija javljaju se u raznim matematičkim radovima. Najpoznatija matematička tehnika koja dolazi iz Kine je *Kineski teorem o ostacima.* Ovaj rezultat je tako nazvan prema opisu nekih problema kongruencija koji su se pojavili u jednom od prvih izvješća na zapadu o kineskoj matematici, tj. u članku Alexandera Wyliea objavljenog 1852. godine u radu *North China Herald.* Članak je ubrzo preveden na njemački i francuski jezik te objavljen u europskim časopisima. Najraniji primjer navedenog postupka za rješavanje sustava linearnih kongruencija u matematici u Kini je u djelu *Sunzi suanjing (Matematički klasik majstora Suna).*

Primjer 6.1.1. *Imamo nekoliko stvari ali ne zna im se broj. Ako ih brojimo po tri, ostanu nam* 2 *stvari; ako ih brojimo po pet, ostatak je* 3*; ako ih brojimo po sedam, ostatak je* 2*. Koliko je uistinu stvari?*
Odgovor: U suvremenoj notaciji, treba pronaći N koji istovremeno zadovoljava

$$\begin{aligned} N &= 3x+2 \\ N &= 5y+3 \\ N &= 7z+2 \end{aligned}$$

za prirodne brojeve x, y i z, odnosno vrijednost koja zadovoljava kongruencije

$$\begin{aligned} N &\equiv 2 \pmod{3} \\ N &\equiv 3 \pmod{5} \\ N &\equiv 2 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Sun Zi je dao odgovor 23 kao i način rješavanja: *„Ako brojite po tri i imate ostatak* 2, *zapišite* 140. *Ako brojite po pet i imate ostatak* 3, *zapišite* 63. *Ako brojite po sedam i imate ostatak* 2, *zapišite* 30. *Zbrojite ove brojeve i dobit ćete* 233. *Od toga oduzmite* 210 *i dobivate* 23.*"*
Sun Zi objašnjava dalje: *„Za svaki jedinstveni ostatak pri brojanju po trojkama, zapišite* 70. *Za svaki jedinstveni ostatak pri brojanju po pet, zapišite* 21. *Za svaki jedinstveni ostatak pri brojanju po sedam, zapišite* 15. *Ako je zbroj* 106 *ili više, oduzmite* 105 *od toga i dobili ste*

rezultat." Naime, Sun Zi napominje da je:

$$\begin{aligned} 70 &\equiv 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 7 \\ 21 &\equiv 1 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 7 \\ 15 &\equiv 1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

Dakle, $2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 233$ zadovoljava željenu kongruenciju. Budući da je bilo koji višekratnik broja 105 djeljiv sa 3, 5 i 7, od 233 oduzmemo 105 dva puta kako bi dobili najmanju pozitivnu vrijednost.

Budući da je ovaj problem jedini od svoje vrste koji je predstavio Sun Zi, ne zna se da li je razvio opću metodu pronalaženja cijelih brojeva kongruentnih 1 modulo m_i, ali kongruentnih 0 modulo m_j, $j \neq i$, za dane prirodne brojeve $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$, što je najteži dio cjelovitog rješenja.

Dva stoljeća nakon Suna Zia u djelu *Matematički priručnik Zhanga Quijana* po prvi puta se pojavljuje poznati *„problem stotinu ptica"*. Problem se također pojavio u različitim oblicima u matematičkim tekstovima u Indiji, islamskom svijetu i Europi.

Primjer 6.1.2. (Zhangov izvorni *„problem stotinu ptica"*) *Pijetao vrijedi* 5 *kovanica, kokoš* 3 *kovanice, a* 3 *pilića* 1 *kovanicu. Sa* 100 *kovanica kupili smo* 100 *ptica. Koliko pijetlova, kokoši i pilića smo kupili?*
Odgvor: U suvremenoj notaciji sa x označimo broj pijetlova, sa y broj kokoši, a sa z broj pilića te problem postavimo u dvije jednadžbe sa tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 5x + 3y + \frac{1}{3}z &= 100 \\ x + y + z &= 100. \end{aligned}$$

Zhang je dao tri odgovora: 4 pijetla, 18 kokoši, 78 pilića; 8 pijetlova, 11 kokoši, 81 pilić; 12 pijetlova, 4 kokoši, 84 pilića. Međutim, on je samo ukazivao na metodu: *„Povećati broj pijetlova svaki put za* 4*, smanjiti broj kokoši svaki put za* 7 *i povećati broj pilića svaki put za* 3*."* Naime, Zhang je naveo da se promjenom vrijednosti na taj način čuvaju i troškovi i broj ptica. Moguće je riješiti ovaj problem modifikacijom Gaussove metode eliminacije poznate iz *Jiuzhang suanshu* i dobiva se opće rješenje $x = -100 + 4t$, $y = 200 - 7t$ i $z = 3t$. Zhangovi odgovori su samo oni u kojima su sve tri vrijednosti pozitivne. Nije poznato je li Zhang koristio ovu metodu ili neku drugu.

Nekoliko kineskih autora tijekom sljedećih stoljeća su komentirali *„problem stotinu ptica"*, ali nitko nije uspio dati razumno objašnjenje metode ili načina kako ju generalizirati na druge probleme.

6.2 Qin Jiushao i pravilo *Ta-Yen*

Qin Jiushao prvi je objavio opću metodu za rješavanje sustava linearnih kongruencija u djelu *Matematička rasprava u devet poglavlja.* U tome djelu je opisao pravilo *Ta-Yen* za rješavanje sustava linearnih kongruencija pisanih u suvremenoj notaciji na sljedeći način:

$$N \equiv r_i \pmod{m_i}, \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n.$$

U *Matematičkoj raspravi* je zapisano 10 problema ovoga tipa. Mi ćemo pratiti Qinovu metodu za rješavanje prvog problema u navedenom djelu u kojemu su brojevi m_i u parovima relativno prosti.

Primjer 6.2.1. (Problem 1 iz knjige *Matematička rasprava u devet poglavlja*) *Tri seljaka iskultivirala su na svojim poljima jednake iznose riže. Svaki od njih odlazi na različita mjesta prodati rižu. Nakon prodaje svoje riže na službenom tržištu seljak A otišao je sa* 3 *doua i* 2 *shenga. Nakon prodaje svoje riže mještanima Anji, seljak B odlazi sa* 7 *doua. Nakon prodaje svoje riže posredniku iz Pingjianga, seljak C odlazi sa* 3 *doua. Koliko riže je svaki seljak imao u početku, a koliko je svaki od njih prodao? Napomena: hu [suha mjera] na službenom tržištu vrijedi* 83 *shenga, u Anji* 110 *shenga i u Pingjiang vrijedi* 135 *shenga.* 1 *dou* = 10 *shenga.*
Odgovor: 7380 doua bilo je podijeljeno između trojice muškaraca, odnosno 2460 doua je imao svaki. Seljak A je prodao 296 hua riže, B 223 hua i C 182 hua. Ovaj problem je riješen sljedećim sustavom kongruencija:

$$\begin{aligned} N &\equiv 32 \pmod{83}, \\ N &\equiv 70 \pmod{110}, \\ N &\equiv 3 \pmod{27}. \end{aligned}$$

Prvi korak je odrediti M, proizvod u modulima. U ovom slučaju $M = 83 \cdot 110 \cdot 27 = 246510$. Budući da će bilo koja dva rješenja sustava biti kongruentna modulo M, jednom kada je Qin našao jedno rješenje, općenito je našao najmanje pozitivno rješenje. U drugom koraku Qin je podijelio M sa svakim modulom m_i i zauzvrat dobio vrijednosti koje ćemo označiti sa M_i. Ovdje je

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{m_1} = \frac{246510}{83} = 2970 \\ M_2 &= \frac{M}{m_2} = \frac{246510}{110} = 2241 \\ M_3 &= \frac{M}{m_3} = \frac{246510}{27} = 9130. \end{aligned}$$

Svaki M_i zadovoljava $M_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ za $j \neq i$. U trećem koraku Qin je od svakog M_i oduzeo odgovarajući m_i onoliko puta koliko je moguće, tj. pronašao je rješenja M_i modulo m_i. Ovi ostaci, označeni sa P_i, su

$$\begin{aligned} P_1 &= 2970 - 35 \cdot 83 = 65 \\ P_2 &= 2241 - 20 \cdot 110 = 41 \\ P_3 &= 9130 - 338 \cdot 27 = 4. \end{aligned}$$

Naravno, $P_i \equiv M_i \pmod{m_i}$ za svaki i pa su P_i i m_i relativno prosti. Konačno je vrijeme za rješavanje kongruencija, osobito kongruencije $P_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Kada se to učini, vidi se da je jedan odgovor problema

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot M_i \cdot x_i,$$

analogan s rješenjem problema Suna Zia. Budući da svaki m_i dijeli M, od bilo kojeg višekratnika $M - a$ može se oduzeti N i tako doći do drugih rješenja. Kako bi riješio $P_i x_i \equiv 1 \pmod{M_i}$, pri čemu su P_i i m_i relativno prosti, Qin koristi ono što on naziva *„tehnika pronalaženja jednog"*, u suštini Euklidov algoritam. Qin je to opisao pomoću dijagrama na ploči za računanje.

Možemo pokazati tehniku rješavanjem $P_1 x_1 \equiv 1 \pmod{M_1}$, tj. $65 \cdot x_1 \equiv 1 \pmod{83}$. Qin je započeo stavljanjem broja 65 u gornjem desnom dijelu ploče za računanje s četiri kvadrata, 83 u donjem desnom kutu, 1 na gornjoj lijevoj strani te ostavljanja donjeg lijevog kuta praznim. Napisao je: *„Prvo podijelite donju desnu vrijednost s vrijednošću u desnom vrhu, pomnožite dobiven kvocijent sa vrijednosti u gornjem lijevom kutom i dodajte ga vrijednosti u donjem lijevom kutu (u isto vrijeme zamjenite vrijednost koja se nalazi dolje desno sa rezultatom podjele). A onda koristite vrijednosti na vrhu i na dnu desnog stupca te pomoću manje podijelite veću vrijednost, dijeleći naizmjence i odmah pomnožite dobiveni kvocijent i uzastopno ga dodajte … vrijednosti na vrhu ili dnu lijevog stupca sve dok napokon vrijednost koja je gore desno nije jednaka jedan, a zatim se zaustavite… Potom uzmite gornji lijevi rezultat kao rješenje.”* Dijagrami na slici 20 predstavljaju sljedeće izračune:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
83 &=& 1 \cdot 65 + 18 & \qquad & 1 \cdot 1 + 0 &=& 1 \\
65 &=& 3 \cdot 18 + 11 & & 3 \cdot 1 + 1 &=& 4 \\
18 &=& 1 \cdot 11 + 7 & & 1 \cdot 4 + 1 &=& 5 \\
11 &=& 1 \cdot 7 + 4 & & 1 \cdot 5 + 4 &=& 9 \\
7 &=& 1 \cdot 4 + 3 & & 1 \cdot 9 + 5 &=& 1 \\
4 &=& 1 \cdot 3 + 1 & & 1 \cdot 14 + 9 &=& 23
\end{array}
$$

Rezultati u drugom stupcu se mogu shvatiti kao apsolutne vrijednosti uzastopnih koeficijenata dobivenih supstitucijama koje množimo sa 65. Počnemo od $18 = 83 - 1 \cdot 65$. Izraz $11 = 65 - 3 \cdot 18$ zamjenimo sa

$$11 = 65 - 3 \cdot (83 - 1 \cdot 65) = 4 \cdot 65 - 3 \cdot 83,$$

pri čemu je 4 rezultat drugog izračuna u drugom stupcu. Slično tome,

$$7 = 18 - 1 \cdot 11 = (83 - 1 \cdot 65) - 1 \cdot (4 \cdot 65 - 3 \cdot 83) = 4 \cdot 83 - 5 \cdot 65.$$

Konačno vrijedi $1 = 23 \cdot 65 - 18 \cdot 83$, a $x_1 = 23$ je rješenje kongruencije. Qin uvijek prilagođava stvari tako da je konačni koeficijent pozitivan. Za dovršenje izvornog problema, napominje se da je $x_2 = 51$ i $x_3 = 7$. Iz toga slijedi da je

$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{i=1}^{3} r_i M_i x_i = 32 \cdot 2970 \cdot 23 + 70 \cdot 2241 \cdot 51 + 3 \cdot 9130 \cdot 7 \\
&= 2185920 + 8000370 + 191730 = 10378020.
\end{aligned}
$$

Najmanje pozitivno rješenje dobivamo tako da pomnožimo $42 \cdot M = 42 \cdot 246510 = 10353420$ te pronalazimo i konačni odgovor: $N = 24600$ shenga.

$$
\boxed{\begin{matrix} 1 & 65 \\ 0 & 83 \end{matrix}} \quad
\boxed{\begin{matrix} 1 & 65 \\ 1 & 18 \end{matrix}} \quad
\boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 1 & 18 \end{matrix}} \quad
\boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 5 & 7 \end{matrix}} \quad
\boxed{\begin{matrix} 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{matrix}}
$$

$$
\boxed{\begin{matrix} 9 & 4 \\ 14 & 3 \end{matrix}} \quad
\boxed{\begin{matrix} 23 & 1 \\ 14 & 3 \end{matrix}}
$$

Slika 20: Jiushaova ploča za računanje za problem $65x_1 \equiv 1 \pmod{83}$

7 Zaključak

U ovom radu smo proučavali razvoj matematike u Kini tijekom antike i srednjeg vijeka. Na početku smo kronološki naveli najznačajnije matematičare u tom razdbolju te najpoznatija djela koja su pridonijela razvoju raznih grana matematike. Najstariji postojeći tekst je *Suan shu shu (Knjiga o aritmetici)* koji datira iz 180. godine prije Krista. Rad koji je dominirao matematičkim razvojem i stilom 1500 godina je *Dragocjeno ogledalo četiri elementa*. Jedan od najpoznatijih komentatora prethodno navedenog rada je Liu Hui, a neka njegova dostignuća razmotrili smo u radu. Zbirka matematičkih tekstova pod nazivom *Deset klasika* bila je dio obveznog gradiva tijekom tečaja za državnu službu. Zlatno razdoblje matematike odvijalo se u 13. stoljeću pri čemu je Qin Jiushao prvo ime toga razdoblja, dok su radovi Zhua Shijea predstavljali vrhunac u razvoju matematike u Kini.

Naveli smo razvoj oznaka za brojeve te način njihovog tumačenja. Kinezi su koristili različito obojane štapiće kako bi razlikovali negativne i pozitivne brojeve. Vrlo rano su postavili pravila za računanje s razlomcima. Veliki napredak matematičari su ostvarili u određivanju kvadratnih i kubnih korjena što im je pomoglo u rješavanju algebarskih jednadžbi proizvoljnog stupnja, posebno u zadacima vezanih uz rješavanje problema mjerenja zemljišta, trgovine i arhitekture. Potom smo naveli legendu na kojoj se temelji otkirće magičnih kvadrata za koje su ljudi vjerovali da ih štite od bolesti ili siromaštva.

Geometrija u Kini bila je uglavnom praktične prirode. Razmatrali smo koje su formule za površinu kruga i volumena kugle koristili Kinezi te kako se došlo do točnijih saznanja. Posebnu ulogu u ovome području imao je Liu Hui koji je izračunao da je π jednako 3.14159. Naveli smo zapise o poznavanju Pitagorinog poučka te probleme u kojima je primjenjivan. Zainteresiranost kineskih careva za pročuvanje kalendara dovela je do suradnje kineskih i indijskih učenjaka što je rezultiralo izradom tablice tangensa.

Sljedeće poglavlje koje smo razmotrili temeljilo se na rješavanju algebarskih jednadžbi. I u ovome slučaju, saznanja koja imamo su iz knjige *Devet poglavlja matematičkog umijeća*. Kinezi su koristili dva funkcionalna algoritma za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Detaljne opise tih algoritama naveli smo u radu uz odgovarajuće primjere. Jia Xian, Qin Jiushao, Li Yeh, Yang Hui i Zhu Shije su najznačajnije osobe koje su dale svoj doprinos u ovome području.

Sun Zi je napisao u 5. stoljeću matematički priručnik *Sunzi suanjing* koji sadrži problem riješen pomoću kineskog teorema o ostacima, što je najranija poznata pojava ove vrste problema. Kalendarski problem ovdje je također uzrok koji je doveo matematičare do otkrića kineskog teorema o ostacima. Naveli smo primjer problema i način Sunovog rješavanja. Zhang Quijan riješio je *„problem stotinu ptica”* dok u svome radu nije opisao način rješavanja. Qin Jiushao je opisao u svome djelu *Matematička rasprava u devet poglavlja* pravilo *Ta-Yen* za rješavanje linearnih kongruencija pisanih u suvremenoj notaciji na sljedeći način:
$N \equiv r_i \pmod{m_i}$, za $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ne zna se mnogo o mogućem prijenosu matematičkih ideja između Kine i drugih kultura prije 16. stoljeća. Sve što je poznato je da postoje određene sličnosti u tehnikama u matematici Kine, Indije, Europe i islamskog svijeta. Nakon 16. stoljeća matematika zapada počela je utjecati na matematičare u Kini i autohtona matematika počela je nestajati.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je upoznavanje sa dostignućima u matematici tijekom antike i srednjeg vijeka u Kini. U radu smo se upoznali sa najznačajnijim matematičarima toga razdoblja te sa djelima koja su dominirala matematičkim razvojem. Na početku smo se upoznali sa označavanjem brojeva te legendom o magičnim kvadratima što je imalo veliki značaj u narodu. Dalje smo se bavili površinom kruga i volumenom kugle, a veliku pozornost usmjerili smo i na otkriće Pitagorinog poučka. Opisali smo dva algoritma za rješavanje sustava linearnih jednadžbi zapisana u knjizi *Devet poglavlja matematičkog umijeća.* Kraj rada usmjeren je prema kineskom teoremu o ostacima te *„problemu stotinu ptica”*.

Summary

The aim of this diploma thesis is to introduce the achievements in mathematics during ancient times and the middle ages in China. In this work we met with the most important mathematicians of that period and the works that are dominated by mathematical development. At the beginning we met with the forms of the numbers and the legend of the magic square, which had a great significance in the nation. Next we deal with the area of a circle and volume of a sphere, and a lot of attention we focused also on the discovery of the Pythagorean theorem. We describe two algorithms for solving systems of linear equations written in the book *Nine Chapters on the Mathematical Art.* The end of work is focused on the Chinese remainder problem and *„the problem of hundred birds”*.

Literatura:

[1] F. M. Brueckler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek, 2007.

[2] V. J. Katz, *A History of Mathematics An Introduction*, Pearson Education, USA, 2009.

[3] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Overview of Chinese mathematics*,
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Chinese_overview.html`, 16.9.2016.

Životopis

Zovem se Martina Špejić. Rođena sam 29. studenog 1991. godine u Požegi. Završila sam osnovnu školu Vilima Korajca u Kaptolu. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavila u Gimnaziji Požega u Požegi, opći smjer. Upisala sam integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijek 2010. godine. Tijekom 4. godine studija volontirala sam 4 mjeseca u udruzi Dječja osječka kreativna kućica tako što sam držala instrukcije iz matematike djeci s posebnim potrebama. Tijekom završne godine obavila sam stručnu studentsku praksu u osnovnoj školi August Šenoa u Osijeku, u Drugoj gimnaziji u Osijeku i u Katoličkoj gimnaziji s pravom javnosti u Požegi.