Diofantske aproksimacije

Kurtović, Dora

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Matematika

Diofantske aproksimacije

Završni rad

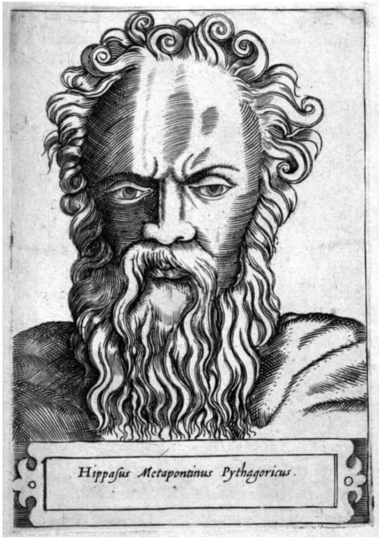
Mentor:
izv. prof. dr. sc. Mirela Jukić Bokun

Student:
Dora Kurtović

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod



Slika 1.1: Hipasus

Otkriće iracionalnih brojeva predstavlja jednu od važnijih prekretnica u razvoju matematike. Prije nego što je njihovo postojanje dokazano, vjerovalo se da se svi brojevi mogu izraziti racionalno - u obliku razlomka dva cjelobrojna broja. Štoviše, pitagorejski sustav vjerovanja temeljio se na ideji da se čitav svemir može prikazati kao prirodan broj ili omjer dvaju prirodnih brojeva. Međutim, upravo je jedan od pitagorejaca, Hipasus iz Metaponta (oko 470. g. pr. Kr), doveo u pitanje dotadašnje vjerovanje. Naime, Hipasus je pokušao duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta, s katetama duljine jedan, prikazati kao omjer dvaju prirodnih brojeva, ali je ubrzo shvatio kako je to nemoguće. Svoje je otkriće novoga svijeta brojeva, koji nisu prirodni niti se mogu prikazati kao omjer prirodnih brojeva, obznanio ostalim članovima pitagorejske škole. Sama pomisao na postojanje veličina koje se ne mogu iskazati pomoću njima prihvatljivog koncepta broja, šokirala je pitagorejce. Prema legendi, Hipasus se radi svog otkrića suočio sa teškim posljedicama - izbačen je s broda u more od strane fanatičnih pitagorejaca, jer je tvrdio neizrecivo. Ipak, iako se postojanje iracionalnih brojeva pokušalo zatajiti, oni su ubrzo postali predmet matematičkog istraživanja. Saznanje da neki brojevi ne mogu biti izraženi racionalno predstavlja jedno od temeljnih otkrića u povijesti znanosti. Danas, iracionalni brojevi nisu tajna u smislu da su njihovo postojanje i svojstva dobro poznata i proučavana u matematičkoj teoriji, ali i dalje postoje mnoga zanimljiva i složena pitanja koja ih okružuju. Tako naprimjer, iako predstavljaju temeljne koncepte i rezultate u različitim granama matematike, za potrebe analize, računanja i interpretacije, ponekad ih je neophodno približiti racionalnima. No, taj zadatak je izazovniji nego što možda zvuči zbog toga što imaju beskonačan broj decimalnih mjesta koji se ne ponavljaju u periodičkom obrascu. To znači da nikada nećemo doći do točne decimalne vrijednosti iracionalnog broja, već ćemo se morati zadovoljiti aproksimacijama. Tim se problemom bavi zasebna grana teorije brojeva koju nazivamo diofantske aproksimacije. Nazvan po starogrčkom matematičaru Diofantu iz Aleksandrije (oko 3. st. pr. Kr.), taj je matematički koncept posvećen pronalasku najboljeg algoritma za aproksimaciju zadanog iracionalnog broja racionalnim. Iako se Diofant nije bavio izravnim proučavanjem diofantskih aproksimacija, njegov je rad pridonijeo razvoju ovog i mnogih drugih matematičkih pojmova pa stoga naziv diofantskih aproksimacija stoji kao počast i priznanje njegovoj ulozi u teoriji brojeva općenito.

U prvom dijelu rada obrađujemo temeljne rezultate diofantskih aproksimacija - iskaz i dokaz Dirichletova teorema kao i njegove generalizacije. Nadalje, problem aproksimacije iracionalnih brojeva proučavamo pomoću Fareyevih nizova, a kasnije i verižnih razlomaka. U radu navodimo bitne teoreme koji nude povoljna rješenja u smislu najboljih mogućih granica za pogreške aproksimacija. U drugom dijelu rada bavimo se algebarskim odnosno transcendentnim brojevima, točnije njihovom aproksimacijom te sukladno tome izdvajamo dva posebno bitna teorema - Liouvilleov i Rothov teorem.

2 | Aproksimacija iracionalnih brojeva racionalnima

U ovom ćemo se poglavlju posvetiti temama koje se bave aproksimacijom iracionalnih brojeva racionalnima. U središtu proučavanja su tri ključna koncepta: Dirichletov teorem, Fareyevi nizovi i verižni razlomci. Svaki od njih, s vlastitim pristupom, pomaže razumijeti kako racionalni brojevi mogu približiti iracionalne. Dirichletov teorem, prvi od tri koncepta, predstavlja fundamentalni rezultat u teoriji brojeva. Ovaj teorem otkriva vezu između iracionalnih i racionalnih brojeva te nam omogućava kvantitativno razumijevanje njihove aproksimacije. Fareyevi nizovi nam pomažu kreirati skup racionalnih brojeva koji se približavaju iracionalnom broju iz svih smjerova. Napokon, verižni razlomci, treći ključni koncept, omogućavaju preciznu aproksimaciju iracionalnih brojeva koristeći racionalne brojeve unutar beskonačnog niza. Ovaj pristup nudi brzo i efikasno rješenje za aproksimaciju pa je tako i najčešće korišten. Svaki od ovih koncepta ima svoju ulogu i primjenu u matematici i drugim znanstvenim disciplinama, doprinoseći širem spektru našeg razumijevanja i primjene brojeva.

2.1 Dirichletov teorem

Proučavajući Pellove jednadžbe tijekom 1840-ih njemački je matematičar, Johann P. G. L. Dirichlet, došao do zaključka kojim je postavio temelje za daljnje istraživanje optimalnih aproksimacija iracionalnih brojeva. Naime, ovim je teoremom dana izravna veza između racionalnih i iracionalnih brojeva te veličine pogrešaka aproksimacije zbog kojih se ta dva broja razlikuju. Sada ćemo navesti iskaz i dokaz navedenog teorema, a zatim i korolara koji proizlazi kao njegova posljedica. Napomenimo, u ovom radu funkciju $\|\cdot\|$ koristimo za označavanje udaljenosti realnog do najbližeg cijelog broja. Također, za svaki realni broj α, oznakom $\lfloor \alpha \rfloor$ označavamo njegov cijeli dio pa vrijedi $\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \alpha\}$. Razlomljeni dio broja α, definiramo kao $\{\alpha\} := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$, a očito je uvijek $0 \leq \{\alpha\} < 1$.

Teorem 1 (Dirichlet, (1842.), [4])**.** *Neka su α i Q realni brojevi i $Q > 1$. Tada postoje cijeli brojevi p, q takvi da je $1 \leq q < Q$ i $\|\alpha q\| = |\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}$.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je Q prirodan broj. Razmotrimo sljedećih $Q+1$ brojeva:

$$0, 1, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(Q-1)\alpha\}.$$

Svi ti brojevi leže u segmentu $[0,1]$ i oblika su $r\alpha - s$, za neke cijele brojeve r i s. Sada podijelimo naš segment $[0,1]$ na Q disjunktnih podintervala duljine $\frac{1}{Q}$:

$$\left[0, \frac{1}{Q}\right\rangle, \left[\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}\right\rangle, \left[\frac{2}{Q}, \frac{3}{Q}\right\rangle, \ldots, \left[\frac{Q-1}{Q}, 1\right].$$

Prema Dirichletovom principu, barem jedan podinterval sadrži barem dva od gornjih $Q+1$ brojeva. Primjetimo da ta dva broja ne mogu biti 0 i 1. Stoga, slijedi da postoje cijeli brojevi r_1, r_2, s_1, s_2 i to takvi da je $0 \leq r_i < Q$, $i = 1,2$, $r_1 \neq r_2$ te da vrijedi:

$$|(r_1\alpha - s_1) - (r_2\alpha - s_2)| \leq \frac{1}{Q}.$$

Možemo pretpostaviti da je $r_1 > r_2$. Neka je $q = r_1 - r_2, p = s_1 - s_2$. Tada je $1 \leq q < Q$ i $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}$, čime je tvrdnja teorema dokazana u slučaju da je $Q \in \mathbf{N}$. U suprotnom, ako Q nije prirodan broj, neka je $Q' = \lfloor Q \rfloor + 1$. Prema ranije dokazanom, postoje cijeli brojevi p, q takvi da je $1 \leq q < Q'$ i $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q'}$, odakle slijedi $|\alpha q - p| < \frac{1}{Q}$. Nadalje, $1 \leq q < Q'$ povlači da je $1 \leq q \leq \lfloor Q \rfloor$, a tada očito vrijedi i $1 \leq q < Q$. □

Napomena 1 ([4]). *Reći ćemo da je racionalan broj $\frac{a}{b}$, $b > 0$, dobra aproksimacija iracionalnog broja α ako vrijedi:*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \min\left\{\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| : x, y \in \mathbb{Z}, 0 < y \leq b\right\}.$$

Korolar 1 ([4]). *Ako je α iracionalan broj, onda postoji beskonačno mnogo parova p, q relativno prostih cijelih brojeva takvih da je*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Tvrdnja Teorema 1 očito vrijedi i ukoliko su brojevi p i q relativno prosti. Dakle, za $Q > 1$ postoje relativno prosti cijeli brojevi p, q takvi da vrijedi

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{Qq} < \frac{1}{q^2},$$

a budući da je broj α iracionalan tada je $\alpha q - p \neq 0$. Pretpostavimo sada da postoji samo konačan skup racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ koji mogu zadovoljiti nejednakost (2.1) i neka su to brojevi $\frac{p_j}{q_j}, j = 1, \ldots, n$. Odaberimo neki prirodan broj m takav da vrijedi $\frac{1}{m} < |\alpha q_j - p_j|$ za sve $j = 1, \ldots, n$. Kada primjenimo Teorem 1 za $Q = m$, dobivamo racionalan broj $\frac{p}{q}$ koji će zadovoljiti nejednakost (2.1) i za njega vrijedi $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{m}$. Prema tome, $\frac{p}{q}$ će biti različit od svih $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ što je kontradikcija sa našom pretpostavkom. □

Promotrimo za primjer jedan općepoznat iracionalan broj, broj $\pi = 3.14159...$ Jedna od njegovih poznatijih racionalnih aproksimacija je razlomak $22/7$, a usporedno s njim razmotrimo i jednu trivijalnu aproksimaciju broja π, razlomak $31/10$.

Provjerimo kako se ta dva racionalna broja uklapaju u tvrdnju Dirichletovog teorema:

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0.00126448 < \frac{1}{7^2} = 0.02040816, \quad \left|\pi - \frac{31}{10}\right| = 0.04159265 > \frac{1}{10^2} = 0.01$$

Očito, osim što je 22/7 bolji aproksimant, pogreška koju dobijemo s aproksimacijom 31/10 je prevelika, odnosno ta aproksimacija ne zadovoljava tvrdnju Dirichletova teorema.

Napomena 2. *Tvrdnja Korolara 1 ne vrijedi ukoliko je α racionalan (vidi [4]).*

Dakle, Dirichletov teorem osigurava postojanje beskonačno mnogo racionalnih brojeva, $\frac{p}{q}$ takvih da je $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$, koji su dobre aproksimacije za iracionalni broj α. Drugim riječima, za svaki iracionalan broj postoji beskonačno mnogo razlomaka koji će ga dobro aproksimirati i to tako da pogreška aproksimacije nije veća od 1 podijeljeno s kvadratom nazivnika.

Nakon prethodno izloženih tvrdnji, prirodno je zapitati se što ako želimo pogrešku aproksimacije manju od 0.001 ili neke druge zadane vrijednosti, a moguće je i da je potrebno staviti uvjet na cijeli broj koji se javlja u nazivniku. Tada postupak traženja zadovoljavajuće aproksimacije postaje složen te će vjerojatno zahtijevati više iteracija kako bi se postigla željena preciznost. Stoga, iako ima veliku važnost u teoriji, Dirichletov teorem neće uvijek biti optimalan izbor za rješavanje problema. Često u praksi nailazimo na specifično zadane uvjete zbog kojih je potrebno koristiti naprednije metode ili specifične tehnike prilagođene danom problemu. Za kraj ovog potpoglavlja, iskazat ćemo generalizaciju Dirichletova teorema. Ranije smo objasnili problem aproksimacije jednog iracionalnog broja. No, ponekad je potrebno aproksimirati čitav skup iracionalnih brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ i to pomoću racionalnih brojeva

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q},$$

odnosno želimo istovremeno smanjiti $\|\alpha q_1\|, \|\alpha q_2\|, \ldots, \|\alpha q_n\|$. Taj se problem istovremenog aproksimiranja dvaju ili više iracionalnih brojeva i to pomoću razlomaka s istim nazivnikom naziva problem simultanih aproksimacija. Očito, taj je izazov puno teži od pronalska "samo" jedne aproksimacije.

Teorem 2 (Dirichlet (1842.), [4]). *Neka su α_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, realni brojevi i $Q > 1$ prirodan broj. Tada postoje cijeli brojevi $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_n$ takvi da je*

$$1 \leq \max(|q_1|, \ldots, |q_n|) < Q^{n/m},$$
$$|\alpha_{i1}q_1 + \cdots + \alpha_{im}q_m - p_i| \leq \frac{1}{Q}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dokaz. Promatramo točke

$$(\alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1m}x_m, \ldots, \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nm}x_m),$$

gdje su x_j, $j = 1, \dots, m$ cijeli brojevi koji zadovoljavaju uvjet $0 \leq x_j < Q^{n/m}$. Postoji barem Q^n takvih točaka i svaka od njih leži u zatvorenoj jediničnoj kocki $I^n = \{(t_1, t_n) : 0 \leq t_k \leq 1, k = 1, \dots, n\}$. Također je i $(1, 1, \dots, 1) \in I^n$, pa zajedno s ovom točkom promatramo barem $Q^n + 1$ točaka iz I^n. Podijelimo li I^n na Q^n u parovima disjunktnih potkocaka čiji su bridovi duljine $\frac{1}{Q}$, po Dirichletovom principu će dvije od promatranih točaka biti u istoj potkocki. Recimo da su to točke

$$(\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1m}x_m - y_1, \dots, \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nm}x_m - y_n),$$
$$(\alpha_{11}x_1' + \dots + \alpha_{1m}x_m' - y_1', \dots, \alpha_{n1}x_1' + \dots + \alpha_{nm}x_m' - y_n').$$

Ovdje je $(x_1, \dots, x_m) \neq (x_1', \dots, x_m')$. Stavimo $q_j = x_j - x_j'$ za $j = 1, \dots, m$ te $p_i = y_i - y_i'$ za $i = 1, \dots, n$. Tada je tvrdnja teorema očito zadovoljena. □

2.2 Fareyevi nizovi

Promotrimo iracionalan broj α koji se nalazi između 0 i 1, primjerice neka je

$$\alpha = 1/e = 0.36787879...$$

Trivijalno je zaključiti da su neke racionalne aproksimacije tog broja: $\frac{3}{10}, \frac{36}{100}, \frac{367}{1000}$ itd. Ipak, prirodno je zapitati se što ako želimo postaviti određen uvjet na aproksimaciju broja α, naprimjer zanima nas što ako ga želimo procijeniti s razlomkom čiji nazivnik nije veći od 10? Postoji li bolja aproksimacija od $\frac{3}{10}$, a ako postoji kako ju pronaći? Odgovor na ova i slična pitanja krije se u Fareyevim nizovima.

Definicija 1 ([4]). *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Fareyev niz $\mathcal{F}_n$ reda n je niz svih racionalnih brojeva $\frac{h}{k}$, $h, k \in \mathbb{Z}$ takvih da je $0 \leq h \leq k \leq n$ i nzd(h,k)=1, zapisanih u rastućem redoslijedu.*

Primjer 1. *Zapišimo Fareyeve nizove reda 1, 2, 3 i 4.*

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\},$$
$$\mathcal{F}_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}.$$

Teorem 3 ([4]). *Ako su $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ dva uzastopna elementa Fareyevog niza $\mathcal{F}_n$ tada je $h'k - hk' = 1$.*

Korolar 2 ([4]). *Ako su $\frac{h}{k}, \frac{h''}{k''}, \frac{h'}{k'}$ tri uzastopna elementa niza $\mathcal{F}_n$, onda je*

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h + h'}{k + k'}.$$

Koristeći prethodna dva rezultata može se dokazati da vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1 ([6]). *Ako su $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ racionalni brojevi koji su veći od 0, a manji od 1 te vrijedi da je $h'k - hk' = 1$, tada su ta dva broja uzastopni članovi Farayeva niza reda* $\max(k, k')$.

Primjer 2. *Pronađi sve elemente koji se nalaze između brojeva $\frac{7}{33}$ i $\frac{14}{65}$ u Fareyevom nizu reda 100.*

Za dana dva broja jednakost iz Teorema 3 očito ne vrijedi:

$$14 \cdot 33 - 7 \cdot 65 = 7 \neq 1.$$

Dakle potrebno je pronaći njihov medijant, definiran u Korolaru 2.

$$\frac{7+14}{33+65} = \frac{21}{98} = \frac{3}{14}.$$

Možemo primjetiti da su $7/33$ i $3/14$ uzastopni elementi Fareyevog niza reda 33, budući da

$$33 \cdot 3 - 7 \cdot 14 = 1.$$

Također vidljivo je da su $3/14$ i $14/65$ uzastopni elementi Fareyevog niza reda 65, budući da

$$14 \cdot 14 - 3 \cdot 65 = 1.$$

Sada na analogan način, pronađemo preostale medijante nama poznatih elemenata.

$$\begin{gathered}
\frac{3}{14} + \frac{7}{33} = \frac{10}{47}, \\
\frac{3}{14} + \frac{10}{47} = \frac{13}{61}, \\
\frac{3}{14} + \frac{13}{61} = \frac{16}{75}, \\
\vdots
\end{gathered}$$

S postupkom stajemo kada je zbroj dva nazivnika uzastopnih razlomaka veći od 100. Posložimo ih u rastućem poretku i dobivamo traženi dio Fareyeva niza reda 100:

$$\mathcal{F}_{100} = \ldots \frac{7}{33}, \frac{17}{80}, \frac{10}{47}, \frac{13}{61}, \frac{16}{75}, \frac{19}{89}, \frac{3}{14}, \frac{20}{93}, \frac{17}{79}, \frac{14}{65} \ldots$$

Lema 1 ([4]). *Neka su $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ dva uzastopna elementa niza $\mathcal{F}_n$. Neka $h'' = h + h'$, $k'' = k + k'$ (uočimo $\frac{h''}{k''} \notin \mathcal{F}_n$). Tada za svaki realan broj α, takav da je $\frac{h}{k} \leq \alpha \leq \frac{h'}{k'}$, vrijedi barem jedna od sljedećih nejednakosti:*

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}, \quad \left|\alpha - \frac{h''}{k''}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k''^2}, \quad \left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k'^2}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $\alpha \geq \frac{h''}{k''}$. U protivnom zamijenimo α sa $1-\alpha$, $\frac{h}{k}$ sa $1-\frac{h}{k}$, itd. Ako niti jedna od tri navedene nejednakosti nije ispunjena onda

$$\alpha - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{5}k^2}, \quad \alpha - \frac{h''}{k''} \geq \frac{1}{\sqrt{5}k''^2}, \quad \frac{h'}{k'} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}k'^2}.$$

Tada je zbroj prve i treće nejednakosti jednak

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{1}{kk'} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k'^2}\right),$$

dok zbroj druge i treće nejednakosti iznosi:

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h''}{k''} = \frac{h'(k+k') - k'(h+h')}{k'k''} = \frac{1}{k'k''} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{k'^2} + \frac{1}{k''^2}\right).$$

Sukladno tome, vrijedi $\sqrt{5}kk' \geq k^2 + k'^2$ te $\sqrt{5}k'k'' \geq k'^2 + k''^2$, odakle slijedi da je $\sqrt{5}k'(k+k'') \geq k^2 + 2k'^2 + k''^2$, a stoga je $\sqrt{5}k'(2k+k') \geq 2k^2 + 3k'^2 + 2kk'$. Sređivanjem izraza slijedi da je

$$0 \geq \frac{1}{2}(2k - (\sqrt{5}-1)k')^2$$

što nije moguće jer su k i k' prirodni brojevi. □

Lema 2 ([4])**.** *Neka je α iracionalan broj i r prirodan broj. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ dva susjedna elementa od $\mathcal{F}_n$ između kojih je α imaju nazivnike koji su veći od r.*

Sada ćemo iskazati Hurwitzov teorem koji ćemo naknadno dokazati u idućem poglavlju.

Teorem 4 (Hurwitz, (1891.), [5])**.** *Neka je α iracionalan broj, tada vrijedi:*

i. Postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

ii. Tvrdnja (i.) ne vrijedi ukoliko se $\sqrt{5}$ zamijeni s bilo kojom konstantom $A > \sqrt{5}$.

Ovaj teorem nam, kao i Dirichletov, osigurava postojanje beskonačno mnogo racionalnih aproksimacija nekog iracionalnog broja, pri čemu Hurwitz jamči strožu veličinu pogreške. Koristeći se metodom kojom pronalazimo medijante dva uzastopna člana niza $\mathcal{F}_n$, konstruiramo razlomke koji su kandidati za te racionalne aproksimacije.

Primjer 3. *Pronađi racionalnu aproksimaciju broja $\sqrt{3}$ čiji nazivnik nije veći od broja 5.*

Za početak, primjetimo kako $\sqrt{3} \notin [0,1]$. Oduzmimo zato cjelobrojni dio od α te promatrajmo samo njegov decimalni dio: $\sqrt{3}-1 = \mathbf{0.7320508}\ldots$
Sada, konstruirajmo Fareyev niz reda 5:

$$\mathcal{F}_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Očito je, od svih elemenata danog niza, broj $\frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$ najbolji aproksimant broja $\mathbf{0.7320508}\ldots$ Dakle, tražena najbolja aproksimacija broja $\sqrt{3}$, pod zadanim uvjetima, je broj

$$\frac{3}{4}+1 = \frac{7}{4} = \mathbf{1.75}.$$

Pogreška aproksimacije tada iznosi:

$$\left|\sqrt{3}-\frac{7}{4}\right| = 0.0179492\ldots < \frac{1}{\sqrt{5}\cdot 4^2} = 0.02795084971\ldots$$

Primjetimo, Fareyevi nizovi ne donose uvijek poboljšanje u aproksimaciji s dodavanjem svakog novog člana niza, već se može dogoditi da se novi elementi udaljavaju od stvarne vrijednosti iracionalnog broja. Nadalje, iskazujemo poopćenje prethodnog teorema.

Teorem 5 (Segre (1945.), Niven (1962.), [4])**.** *Neka je α iracionalan i $\tau \geq 0$. Tada postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je:*

$$\frac{-1}{\sqrt{1+4\tau q^2}} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{\tau}{\sqrt{1+4\tau q^2}}. \tag{2.2}$$

Tvrdnja vrijedi i u slučaju kada se $\alpha - \frac{p}{q}$ zamijeni sa $\frac{p}{q} - \alpha$.

Primjetimo da za vrijednost $\tau = 1$ dobivamo Hurwitzov teorem, a da drugi dio teorema slijedi primjenom prvog dijela na broj $-\alpha$.

Lema 3 ([4])**.** *Neka je α iracionalan broj i $\tau \geq 0$. Neka su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi s pozitivnim nazivnicima takvi da je $bc - ad = 1$ i*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \alpha < \frac{c}{d}.$$

Tada barem jedan od brojeva $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}$ zadovoljava relaciju (2.2).

Primjetimo da u slučaju $\tau = 0$, Segreov teorem osigurava sljedeći rezultat.

Korolar 3 ([4])**.** *Neka je α iracionalan. Tada postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je*

$$-\frac{1}{q^2} < \alpha - \frac{p}{q} < 0,$$

te beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ za koje vrijedi

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2}.$$

2.3 Verižni razlomci

Problem pronalaženja optimalne racionalne aproksimacije iracionalnog broja dovodi do proučavanja verižnih razlomaka. Koristeći se verižnim razlomcima dobivamo razlomke koji brzo konvergiraju prema stvarnom iracionalnom broju i to tako da svakim korakom generiramo sve bolju aproksimaciju. To znači da već nakon nekoliko koraka možemo dobiti prilično preciznu aproksimaciju iracionalnog broja. Za početak definirajmo $p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ kao polinome takve da su p_n, q_n polinomi s nezavisnim varijablama $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$p_n = p_n(a_0, \ldots, a_n) \quad \text{i} \quad q_n = q_n(a_0, \ldots, a_n).$$

Dodatno, neka vrijedi $p_0 = a_0, q_0 = 1$, te pretpostavimo da su polinomi $p_0, q_0, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}$ već definirani. Uz oznake

$$p'_k = p_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}) \quad \text{i} \quad q'_k = q_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}),$$

induktivno definiramo

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}, \quad q_n = p'_{n-1}.$$

Podijelimo li prvi polinom drugim, očito vrijedi da je $\frac{p_n}{q_n}$ racionalna funkcija s varijablama $a_0, a_1, \ldots, a_n$ što ćemo zapisivati kao

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Posebno je $[a_0] = \frac{p_0}{q_0} = a_0$. Za vrijednosti gdje je $n > 0$ imamo:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}}{p'_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}.$$

Ponavljanjem tog postupka, dobit ćemo

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Racionalne funkcije ovog oblika nazivamo *verižni razlomci.*

Definicija 2 ([5]). *Ako je dan a_0 cijeli broj, $a_1, \ldots, a_n$ prirodni brojevi, te ako vrijedi da je $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, onda ovaj izraz zovemo razvoj broja α u konačni jednostavni verižni razlomak; $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, a_1, \ldots, a_i]$ se naziva i-ta konvergenta od α, a_i je i-ti parcijalni kvocijent, a $\alpha_i = [a_1, a_{i+1}, \ldots, a_n]$ je i-ti potpuni kvocijent od α. Ako je α iracionalan broj, uvodimo oznaku $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. U slučaju kada je $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, ovaj izraz zovemo razvoj od α u beskonačni verižni razlomak; $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, a_1, \ldots, a_i]$ se naziva i-ta konvergenta od α, a $\alpha_i = [a_1, a_{i+1}, \ldots, a_n]$ je i-ti potpuni kvocijent od α.*

Primjer 4. *Razvijmo broj $\frac{61}{14}$ u verižni razlomak.*

Razvoj racionalnog broja u verižni razlomak može se dobiti elegantno primjenom Euklidovog algoritma:

$$\begin{aligned} \underline{61} &= \mathbf{4} \cdot \underline{14} + \underline{5}, \\ \underline{14} &= \mathbf{2} \cdot \underline{5} + \underline{4}, \\ \underline{5} &= \mathbf{1} \cdot \underline{4} + \underline{1}, \\ \underline{4} &= \mathbf{4} \cdot \underline{1}. \end{aligned}$$

Sada pišemo

$$\frac{61}{14} = [4, 2, 1, 4],$$

odnosno

$$[4,2,1,4] = 4 + \frac{5}{14} = 4 + \frac{1}{\frac{14}{4}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{4}{5}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{4}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}.$$

Sada ćemo navesti teoreme i leme koje će nam biti potrebne radi razumijevanja daljnjeg gradiva. Dokaze ne navodimo, ali oni se mogu pronaći u [4].

Lema 4 ([4]). *Za sve $n \geq -1$ vrijedi: $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.*

Napomena 3 ([5]). *Brojevi p_n i q_n su relativno prosti.*

Lema 5 ([4]). *Neka je $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}]$. Tada je*

$$q_n \alpha - p_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Teorem 6 ([4]). *Vrijedi slijedeće:*

(1.) $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots,$

(2.) $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \ldots,$

(3.) ako je n paran, a m neparan onda je $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_m}{q_m}$.

Propozicija 2 ([4]). *Neka je a_0 cijeli broj te $a_1, a_2, \ldots$ prirodni brojevi. Tada postoji limes $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ te je on iracionalan. Obrnuto, ako je α iracionalan, onda postoje jedinstveni cijeli brojevi $a_0, a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, \ldots$ takvi da je $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.*

Dokaz. Budući da je $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_1}{q_1}$, to limesi $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ za n paran ili neparan postoje (monotoni, omeđeni nizovi). Ova dva limesa su jednaka jer $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} =$

$\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$ te jer $q_n \geq n$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} = 0$. Neka $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Kako α leži između $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ iz Teorema 6 slijedi

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Prema Napomeni 3 znamo da su p_n i q_n relativno prosti, stoga postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ pa prema Napomeni 2 vrijedi da je α iracionalan.
Dokažimo obrat. Neka je α iracionalan i $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Dodatno, neka je α_1 definiran sa $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$. Sada je α_1 također iracionalan i vrijedi $\alpha_1 > 1$. Postupak nastavljamo analogno pa za $k \geq 1$ definiramo $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$ i $\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$. Tada je $a_k \geq 1, \alpha_{k+1} > 1$ i α_{k+1} je iracionalan. Nadalje, za svaki $n \geq 0$ postoji $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$. Prema Lemi 5 je

$$|q_n\alpha - p_n| = \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}},$$

a tad je i

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{q_n^2}, \tag{2.3}$$

što povlači da je $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$. Pokažimo još da su brojevi $a_0, a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, \ldots$ jedinstveni. Imamo

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots]}.$$

Odavde je $0 \leq \alpha - a_0 < 1$ i $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, a stoga je a_0 jedinstven. Zbog toga je i $\alpha_1 = [a_1, a_2, \ldots]$ jedinstveno određen s α. Sada je $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$ pa je i a_1 jedinstven, itd. □

Primjetimo da prema formuli (2.3), svaka konvergenta od α zadovoljava nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Na temelju toga, dva su matematičara, Vahlen i Borel, otkrili da se pogreška aproksimacije iz Dirichletovog teorema može dodatno smanjiti. Ovo poboljšanje granica na kraju je dovelo do Hurwitzovog teorema kojim je dokazano da daljnje poboljšanje granica aproksimacije nije moguće. Sada navodimo iskaze i dokaze tih teorema.

Teorem 7 (Vahlen, (1895.), [4]). *Neka je α iracionalan broj i $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$ dvije uzastopne konvergente α. Tada barem jedna od njih zadovoljava nejednakost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Dokaz. Budući da brojevi $\alpha - \frac{p_n}{q_n}$, $\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ imaju suprotan predznak, vrijedi da je

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n-1}^2}$$

(jer je $2ab < a^2 + b^2$ za $a \neq b$). Prema tome, zadovoljena je nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ili} \quad \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}.$$

□

Teorem 8 (Borel, (1903.), [4])**.** *Neka je α iracionalan broj i $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$ tri uzastopne konvergente od α. Tada barem jedna od njih zadovoljava nejednakost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Dokaz. Neka je $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$, $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \dots]$ te $\beta_i = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$ za $i \geq 1$. Po Lemi 5, vrijedi

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}.$$

Još je potrebno dokazati da nema prirodnog broja n takvog da je za $i = n-1, n, n+1$ važeće

$$\alpha_i + \beta_i \leq \sqrt{5}. \tag{2.4}$$

Pretpostavimo da nejednakost (2.4) vrijedi za $i = n-1, n$. U tom slučaju iz

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}, \quad \frac{1}{\beta_n} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-2}} = a_{n-1} + \beta_{n-1}$$

slijedi

$$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \leq \sqrt{5}.$$

Zato je $1 = \alpha_n \frac{1}{\alpha_n} \leq (\sqrt{5} - \beta_n)(\sqrt{5} - \frac{1}{\beta_n})$, što je ekvivalentno sa izrazom $\beta_n^2 - \sqrt{5}\beta_n + 1 \leq 0$. Dakle, $\beta_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, odnosno jer je β_n racionalan vrijedi $\beta_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Međutim, ako bi (2.4) bilo valjano za $i = n, n+1$ onda bi vrijedilo i $\beta_{n+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ odakle proizlazi da je

$$1 \leq a_n = \frac{q_-n}{q_n - 1} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n+1}} - \beta_n < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

što je kontradiktorno. □

Sada navodimo još dva teorema, čiji se dokazi mogu pronaći u [5], nakon čega ćemo imati sve potrebne alate za dokaz Hurwitzovog teorema.

Teorem 9 (Legendre, [5]). *Neka su p i q cijeli brojevi takvi da je $q \geq 1$ i*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Tada je $\frac{p}{q}$ neka konvergenta od α.

Teorem 10 ([5]). *Pretpostavimo da α ima razvoj u verižni razlomak oblika*

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_N, 1, 1, \ldots]$$

tada je $\lim_{n\to\infty} |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Dokaz Hurwitzovog teorema (Teorem 4). Tvrdnja (i.) proizlazi direktno iz teorema Borelovog teorema (Teorem 8), dok je tvrdnja (ii.) rezultat Legendreovog teorema (Teorem 9) te Teorema 10. Naime, ukoliko iracionalan broj α ima oblik kao što je definiran u Teoremu 10, tada po Teoremu 9 znamo kako su rješenja nejednadžbi $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Aq^2}$, $A > \sqrt{5}$ među konvergentama od α, a po Teoremu 10 znamo da je ta nejednadžba ispunjena za samo konačno mnogo konvergenti broja α. □

Sada ćemo navesti još jedan rezultat, koji nam kazuje koja je konvergenta iracionalnog broja najpovoljnjiji izbor za aproksimaciju. Dakle, ovaj nam teorem pomaže odabrati konvergentu $\frac{p}{q}$ za koju će pogreška aproksimacije biti najmanja moguća.

Teorem 11 (Lagrange, (1770.), [5]). *Neka je α iracionalan broj te $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots$ konvergente od α. Tada vrijedi:*

(i) $|\alpha q_0 - p_0| > |\alpha q_1 - p_1| > |\alpha q_2 - p_2| > \ldots$

(ii) Ako je $n \geq 1$ i $1 \leq q \leq q_n$ te ako je $(p,q) \neq (p_{n-1}, q_{n-1}), (p_n, q_n)$ onda je $|\alpha q - p| > |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}|$.

Definicija 3 ([5]). *Za iracionalan broj α kažemo da je loše aproksimabilan ako postoji konstanta $c(\alpha) > 0$ takva da je*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^2}$$

za svaki racionalan broj $\frac{p}{q}$.

Teorem 12 ([5]). *Iracionalan broj α je loše aproksimabilan ako i samo ako su mu parcijalni kvocijenti u razvoju u jednostavni verižni razlomak omeđeni.*

Za kraj ovog poglavlja ćemo posebno spomenuti "podvrstu" iracionalnih brojeva - kvadratne iracionalnosti, brojeve u čijem se zapisu pojavljuje $\sqrt{n}$ gdje n prirodan broj koji nije potpuni kvadrat, a vežemo ih uz periodske verižne razlomke.

Definicija 4 ([4]). *Za iracionalan broj α kažemo da je kvadratna iracionalnost ako je α korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.*

Kvadratne iracionalnosti zapisujemo u obliku $\alpha = \frac{s_0+\sqrt{d}}{t_0}$, $s_0, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \neq 0$ i $d \in \mathbb{N}$ nije potpun kvadrat.

Definicija 5 ([4]). *Za beskonačan verižni razlomak $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ kažemo da je periodski ako postoje cijeli brojevi $k \geq 0, m \geq 1$ takvi da je $a_{m+n} = a_n$ za sve $n \geq k$. U tom slučaju verižni razlomak zapisujemo kao:*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m+1}}],$$

gdje "crta" iznad $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m+1}$ znači da se taj blok brojeva ponavlja u nedogled.

Teorem 13 (Euler, Lagrange, [5]). *Razvoj u jednostavni verižni razlomak realnog broja α je periodski ako i samo ako je α kvadratna iracionalnost.*

Teorem 14 ([5]). *Ako prirodan broj d nije potpun kvadrat, onda razvoj u verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima oblik*

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, 2a_0}],$$

gdje je $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$, a $a_1, \ldots, a_{r-1}$ su centralno simetrični, tj. $a_1 = a_{r-1}, a_2 = a_{r-2}, \ldots$

Sada iznosimo algoritam, kao što je naveden u [5], kojim ćemo se koristiti pri razvoju kvadratne iracionalnosti u verižni razlomak. Neka je $\alpha = \frac{s_0+\sqrt{d}}{t_0} = \alpha_0$ kvadratna iracionalnost. Tada vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} a_i &= \lfloor \alpha_i \rfloor, \\ \alpha_i &= \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i}, \\ s_{i+1} &= a_i t_i - s_i, \\ t_{i+1} &= \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}. \end{aligned}$$

Napomena 4 ([4]). *Ako je $t_i > 0$, može se pokazati da vrijedi*

$$a_i = \left\lfloor \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{s_i + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{t_i} \right\rfloor.$$

Stoga, možemo zaključiti da navedeni algoritam radi samo s cijelim brojevima te nam nije potrebna precizna aproksimacija za $\sqrt{d}$.
Kako bismo pronašli najbolju racionalnu aproksimaciju zadanog realnog broja α, koji ima nazivnik ispod zadane fiksne granice n, tvrdnje ovog poglavlja možemo kombinirati sa znanjem o Fareyevim nizovima. Za početak, pronađemo posljednje dvije konvergente $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ i $\frac{p_k}{q_k}$ čiji su nazivnici manji od danog n. Budući da, dok joj se postupno približavaju, konvergente istodobno alterniraju između vrijednosti većih i manjih od α, to znači da će se prava vrijednost α nalaziti između dvije susjedne konvergente. Također, budući da vrijedi relacija $|p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k| = 1$ nije teško zaključiti da su $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ i $\frac{p_k}{q_k}$ uzastopni članovi u Fareyevom nizu reda q_k. Tada, znamo generirati sve članove između njih uzimajući njihov medijant. Naposljetku, dolazimo do malog skupa kandidata od kojih ćemo jedan identificirati kao najbolju aproksimaciju broja α. U mnogim situacijama najbolja aproksimacija od α bit će jedna od njegovih konvergenata, ali to ne mora uvijek biti slučaj. Pokažimo na primjeru.

Primjer 5. *Pronađite najbolju aproksimaciju broja $\sqrt{7}$ kojoj nazivnik:*

a) nije veći od broja 100,

b) nije veći od broja 10.

Primjetimo da je $\sqrt{7}$ kvadratna iracionalnost pa ga zapišimo kao $\alpha = \frac{0+\sqrt{7}}{1}$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
&s_0 = 0 && t_0 = 1 && a_0 = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2\\
&s_1 = a_0 t_0 - s_0 = 2 && t_1 = \frac{d - s_1^2}{t_0} = 3 && a_1 = \left\lfloor \frac{s_1 + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{t_1} \right\rfloor = 1\\
&s_2 = a_1 t_1 - s_1 = 1 && t_2 = \frac{d - s_2^2}{t_1} = 2 && a_2 = \left\lfloor \frac{s_2 + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{t_2} \right\rfloor = 1\\
&s_3 = a_2 t_2 - s_2 = 1 && t_3 = \frac{d - s_3^2}{t_2} = 3 && a_3 = \left\lfloor \frac{s_3 + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{t_3} \right\rfloor = 1\\
&s_4 = a_3 t_3 - s_3 = 2 && t_4 = \frac{d - s_4^2}{t_3} = 1 && a_4 = \left\lfloor \frac{s_4 + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{t_4} \right\rfloor = 4\\
&s_5 = a_4 t_4 - s_4 = 2 && t_5 = \frac{d - s_5^2}{t_4} = 3 && a_5 = \left\lfloor \frac{s_5 + \lfloor \sqrt{d} \rfloor}{t_5} \right\rfloor = 1
\end{aligned}$$

Budući da je $a_5 = a_1$, sa jednakim vrijednostima $s_5 = s_1$ i $t_5 = t_1$, možemo zaključiti da će se postupak ponavljati unedogled. Dakle, zapis broja $\sqrt{7}$ u verižni razlomak izgleda ovako

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}],$$

a njegove konvergente su:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{p_0}{q_0} = [a_0] = 2,\\
c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1] = 2 + \frac{1}{1} = 3,\\
c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = [a_0, a_1, a_2] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{5}{2},\\
c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = [a_0, a_1, a_2, a_3] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{8}{3},\\
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = [a_0, a_1, a_2, a_4] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = \frac{37}{14},
\end{aligned}$$

$$c_5 = \frac{p_5}{q_5} = [a_0, a_1, a_2, a_4, a_5] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{45}{17},$$

$$c_6 = \frac{p_6}{q_6} = [a_0, a_1, a_2, a_4, a_5, a_6] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{82}{31},$$

$$c_7 = \frac{p_7}{q_7} = [a_0, a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}} = \frac{127}{48},$$

$$c_8 = \frac{p_8}{q_8} = [a_0, a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}}}}} = \frac{590}{223}.$$

a) U obzir ćemo uzeti posljednje dvije konvergente čiji je nazivnik manji od 100 - razlomke 82/31 i 127/48. Jedini element koji se nalazi između njih u Fareyevom nizu reda 99 je njihov medijan, 209/79. Kada u obzir uzmemo veličine pogrešaka aproksimacije,

$$\left|\sqrt{7} - \frac{82}{31}\right| \approx 5.9 \cdot 10^{-4}, \quad \left|\sqrt{7} - \frac{127}{48}\right| \approx 8.2 \cdot 10^{-5}, \quad \left|\sqrt{7} - \frac{209}{79}\right| \approx 1.8 \cdot 10^{-4}$$

možemo zaključiti da je najbolja aproksimacija konvergenta 127/48.

b) U obzir ćemo uzeti konvergente $\frac{5}{2}$ i $\frac{8}{3}$. Provjerimo sada veličinu pogreške za svaku od njih:

$$\left|\sqrt{7} - \frac{5}{2}\right| \approx 0.1458 \quad \text{i} \quad \left|\sqrt{7} - \frac{8}{3}\right| \approx 0.0209.$$

Očito je $\frac{8}{3}$ najbolji izbor konvergente za aproksimaciju. Rezultat možemo dodatno poboljšati ako promotrimo te dvije konvergente kao elemente Farayeva niza reda

10. Koristeći se metodom kojom smo konstruirali medijante, možemo pronaći elemente koji se nalaze između njih, to su:

$$\frac{5+8}{2+3} = \frac{13}{5}, \quad \frac{5+13}{2+5} = \frac{18}{7}, \quad \frac{13+8}{5+3} = \frac{21}{8}.$$

Računajući veličine pogrešaka aproksimacije:

$$\left|\sqrt{7} - \frac{18}{7}\right| \approx 0.0743, \quad \left|\sqrt{7} - \frac{13}{5}\right| \approx 0.0458, \quad \left|\sqrt{7} - \frac{21}{8}\right| \approx 0.0208$$

možemo zaključiti da je, uz dani uvjet, najbolja aproksimacija broja $\sqrt{7}$ element Fareyeva niza, broj $21/8$.

3 | Aproksimacija algebarskih i transcendentnih brojeva

U uvodu ovog rada, spomenut je jedan od problema kojim su se bavili starogrčki matematičari, prikaz $\sqrt{2}$ kao omjera dvaju brojeva, a koji je "iznjedrio" potrebu za definiranjem iracionalnih brojeva. Sličan slučaj se odvio i sa transcendentnim odnosno algebarskim brojevima. Naime, stari su Grci nastojali riješiti takozvani problem "kvadratura kruga" - konstruiranje kvadrata iste površine kao dani krug koristeći samo šestar i ravnalo. Skoro dva tisućljeća nakon što je zadatak postavljen prvi puta, René Descartes je u svom dijelu *La Géométrie* pokazao kako se konstruirati mogu samo one dužine koje se mogu izraziti koristeći cijele brojeve te operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korijenovanja. Kada bi π mogao biti zapisan na takav način to bi značilo da je kvadratura kruga uistinu moguća, no budući da su svojstva tog broja tada bila nepoznanica problem je ostao neriješen. Tadašnji su matematičari stoga odlučili podijeliti skup kompleksnih brojeva na dva skupa, slično kao što su ranije generacije dijelile realne brojeve na racionalne i iracionalne brojeve. Primjetili su kako su mnogi kompleksni brojevi korijen nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima; njih su nazvali algebarskim. Ipak, to ne vrijedi za sve kompleksne brojeve, a te se nealgebarske vrijednosti nazivaju transcendentni brojevi. Mnogima nije bilo očito da se takvi brojevi uopće trebaju dodatno definirati. Štoviše, ispostavilo se da je dokazati da je određeni broj transcendentan velik izazov jer to zahtijeva dokazivanje negativnosti: da on nije korijen bilo kojeg polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Ipak, njihovo je postojanje dokazano, a nas posebno zanima možemo li takve i algebarske brojeve približiti nama poznatijim, racionalnim brojevima. Za početak, navodimo osnovne činjenice iz teorije o algebarskim brojevima, potrebne za bolje razumijevanje daljnjih teorema u ovom poglavlju.

Definicija 6 ([4]). *Kompleksan broj α nazivamo algebarski broj ukoliko postoji polinom $f(x)$ s racionalnim koeficijentima, a različit je od nulpolinoma takav da je $f(\alpha) = 0$. Kompleksan broj se zove transcendentan ako nije algebarski.*

Svaki racionalan broj je algebarski, a takvi su i neki iracionalni brojevi kao naprimjer $\sqrt[3]{2}$, imaginarna jedinica i je također algebarski broj jer je korijen polinoma $x^2 + 1$. S druge strane, brojevi e i π najpoznatiji su transcendentni brojevi.

Teorem 15 ([4]). *Za svaki algebarski broj α postoji jedinstveni polinom*

$$P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$$

sa sljedećim svojstvima:

1.) $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$,

2.) $a_d > 0$ *i* $nzd(a_0, a_1, \dots, a_d) = 1$,

3.) $P(\alpha) = 0$,

4.) *ako je* $P_0(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *takav da je* $P_0(\alpha) = 0$, *onda* $P(x)|P_0(x)$,

5.) $P(x)$ *je ireducibilan nad* $\mathbb{Q}$.

Definicija 7 ([4]). *Minimalni polinom algebarskog broja* α *je polinom* $P(x)$ *kakav je opisan u Teoremu 15. Stupanj algebarskog broja je stupanj njegovog minimalnog polinoma.*

3.1 Liouvilleov teorem

Godine 1844. Joseph Liouville dolazi do otkrića kako se algebarski brojevi ne mogu dobro aproksimirati sa racionalnim brojevima relativno malih nazivnika. Taj teorem ne izgleda bitan za algebarske brojeve, ali prema njemu znamo da ukoliko pronađemo broj koji može biti dobro aproksimiran s takvim racionalnim brojem tada zasigurno znamo da broj koji aproksimiramo nije algebarski već transcendentan. Osim toga, ovaj je teorem doveo do prvog matematičkog dokaza postojanja takvih brojeva i to na način da je Liouville konstruirao jedan takav. Broj koji je izložio, $l = 0.110001000000000000000000\dots$ ($l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k}}$), nazvan je Liouvilleova konstanta.

Teorem 16 (Liouville, (1844.), [5]). *Neka je* α *realan algebarski broj stupnja* d. *Tada postoji konstanta* $c(\alpha) > 0$ *tako da vrijedi*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^{d}},$$

za sve racionalne brojeve $\frac{p}{q}$ *gdje je* $q > 0$, $\frac{p}{q} \neq \alpha$.

Dokaz. Neka je $g(x)$ minimalan polinom algebarskog broja α. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da polinom definiran kao $P(x) = m \cdot g(x)$ ima cjelobrojne koeficijente. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 1$ (u suprotnom $c(\alpha) = 1$). Razvojem polinoma $P(x)$ u Taylorov red oko broja α, dobiti ćemo:

$$\left|P(\frac{p}{q})\right| = \left|\sum_{i=1}^{d}(\frac{p}{q} - \alpha)^{i}\frac{1}{i!}P^{(}i)(\alpha)\right| < \frac{1}{c(\alpha)} \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.1}$$

gdje je dani $c(\alpha) = \frac{1}{2\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{i!}|P^{(i)}(\alpha)|}$.

Kako je po definiciji polinom $P(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$, to je $P(\frac{p}{q}) \neq 0$. Iz navedenog proizlazi da je $q^{d}|P(\frac{p}{q})|$ prirodan broj, pa je tada $|P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^{d}}$. Kada ovo usporedimo sa (3.1) vidimo kako smo dobili tvrdnju teorema. □

Za gotovo sve realne brojeve, najjači teorem koji nam je dostupan bio je Hurwitzov teorem, koji nam govori kako iracionalan broj možemo aproksimirati s točnošću $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. Međutim, transcendentni brojevi mogu biti aproksimirani s točnošću čak $\frac{1}{q^d}$, za proizvoljno velik d.

3.2 Rothov teorem

Nastavno na Liouvilleov rad, matematičari su radili na poboljšanju nejednakosti koju je on dokazao. Najbolji rezultat ponudio je Klaus Roth, 1955. godine kada je dokazao sljedeći teorem.

Teorem 17 (Roth, (1955.), [9]). *Neka je dan α algebarski broj gdje $d \geq 2$. Tada za svaki $\delta > 0$ nejednadžba*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}} \tag{3.2}$$

ima samo konačno mnogo racionalnih rješenja $\frac{p}{q}$.

Napomena 5 ([4]). (i) *Tvrdnja Teorema 17 je točna i trivijalna za $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.*

(ii) *Po Dirichletovom teoremu, eksponent 2 u (3.2) je najbolji mogući. Ako je stupanj od α jednak 2 onda je $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^2}$ po Liouvileovom teoremu, što povlači tvrdnju Rothovog teorema u ovom slučaju.*

(iii) *Nije poznat nijedan α stupnja ≥ 3 za kojeg vrijedi $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^2}$, tj. koji je loše aproksimabilan.*

(iv) *Lang je 1965. postavio slutnju da za svaki algebarski broj stupnja ≥ 3 nejednadžba*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2(log(q))^\beta}$$

ima samo konačno mnogo rješenja ako je $\beta > 1$.

Literatura

[1] R. P. Agarwal, H. Agarwal, *Origin of Irrational Numbers and Their Approximations*, Computation **9**(2021).
DOI:https://doi.org/10.3390/computation9030029

[2] L. Anthony, *Diophantine approximation and dynamical systems*, Lunds Tekniska Högskola, Diplomski rad, 2020.
URL:https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_19/papers17/li.pdf

[3] M. Crystal, *Transcendental Numbers and Diophantine Approximations*, Lynchburg College, Diplomski rad, 2007.
URL:https://www.academia.edu/47709214/Transcendental_Numbers_and_Diophantine_Approximations

[4] A. Dujella, *Diofantske aproksimacije i primjene*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu (skripta).

[5] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[6] V. H. Moll, *Numbers and Functions: From a Classical-Experimental Mathematician's Point of View*, American Mathematical Society, 2012.

[7] H. Rebić, *Realni brojevi kroz povijest*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Diplomski rad, 2014.
URL:https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/REB02.pdf

[8] D. S. Richeson, *How Math Achieved Transcendence*, Quanta magazine, 2023.
URL:https://www.quantamagazine.org/recounting-the-history-of-maths-transcendental-numbers-20230627/#0

[9] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Springer, Berlin, 1991.
DOI:https://doi.org/10.1007/BFb0098248

Sažetak

Tema ovog rada su diofantske aproksimacije. Na početku rada upoznajemo se s problemom aproksimacije iracionalnih brojeva racionalnim te ga proučavamo kroz Dirichletov teorem. Navodimo definicije i osnovna svojstva Fareyevih nizova te verižnih razlomaka, a zatim ih promatramo kao matematičke alate, s posebnim fokusom na njihovu ulogu u generiranju najtočnijih racionalnih aproksimacija. Drugi dio rada posvećen je aproksimaciji algebarskih i transcendentnih brojeva. Nakon što ih definiramo, navodimo dva ključna teorema za njihovu aproksimaciju, Liouvilleov i Rothov teorem.

Ključne riječi

diofantske aproksimacije, Dirichletov teorem, verižni razlomci, algebarski brojevi

Diophantine approximations

Summary

This paper focuses on Diophantine approximations. It begins by addressing the challenge of approximating irrational numbers with rational ones, exploring Dirichlet's theorem as a potential solution. The definitions and fundamental properties of Farey series and continued fractions are outlined and examined as mathematical tools, with special attention given to their role in generating the most accurate rational approximations. The second part of the paper delves into approximating algebraic and transcendental numbers, defining them and presenting two critical theorems for their approximation: Liouville's and Roth's theorems.

Keywords

diophantine approximations, Dirichlet's theorem, continued fractions, algebraic numbers

Životopis

Zovem se Dora Kurtović i rođena sam 9. lipnja 2000. godine u Osijeku. Osnovnu školu završila sam 2015. godine, nakon čega sam upisala II. gimnaziju Osijek. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja posebno su me privukli prirodoslovni predmeti, s naglaskom na matematiku, u kojoj sam se najviše istaknula. Srednju školu završila sam 2019. godine s odličnim uspjehom, što me motiviralo da nastavim obrazovanje na Odjelu za matematiku.

Kroz studij sam proširila svoje znanje u raznim granama matematike, a uz to sam stekla i osnovna znanja iz programiranja, upoznavši se s nekoliko programskih jezika. Tečno govorim engleski i njemački jezik, što mi omogućuje praćenje literature i komunikaciju na više jezika.

Uz studij, aktivno volontiram i radim studentski posao, što mi pomaže u razvijanju organizacijskih vještina i osobnog razvoja. Planiram nastaviti svoje obrazovanje upisom diplomskog studija na Sveučilištu u Osijeku.