Kvadratna forma

Panenić, Lorana

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:337729

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Kvadratne forme

Završni rad

Mentor:
prof. dr. sc. Ivan Matić

Student:
Lorana Panenić

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

Tema ovog rada su kvadratne forme, homogeni polinomi drugog stupnja od n varijabli, gdje je n prirodan broj. Kvadratne forme imaju dugu povijest i široku primjenu u raznim granama matematike. Proučavale su se stoljećima unazad i pojavljuju se u radovima mnogih poznatih matematičara. Fermat ih je istraživao u svom teoremu o zbroju dvaju kvadrata, Brahmagupta proučavajući jednadžbe oblika $x^2 - ny^2 = c$, a također su ih proučavali i veliki matematičari poput Eulera, Lagrangea i Gaussa.

U prvom poglavlju fokusirat ćemo se na kvadratne forme, istražujući njihova osnovna svojstva. Počet ćemo s definiranjem simetrične matrice i istražiti njenu vezu s kvadratnim formama. Simetrične matrice bit će nam ključne jer omogućuju dijagonalizaciju matrice. Također ćemo pokazati kako zamjena varijabli može pojednostavniti kvadratne forme uklanjanjem mješovitih članova, što znatno olakšava rad s njima. Poseban naglasak stavit ćemo na klasifikaciju kvadratnih formi prema svojstvenim vrijednostima njhovih matrica.

U drugom ćemo poglavlju obraditi problem uvjetne optimizacije, gdje ćemo pokazati kako kvadratne forme mogu biti korištene za rješavanje optimizacijskih problema uz određene uvjete te time predstaviti njihovu važnost u primjeni na praktične probleme.

2 | Kvadratne forme

Kvadratne su forme važan alat u raznim granama matematike, a linearna algebra, teorija brojeva i diferencijalna geometrija samo su neke od njih. U nastavku ćemo reći nešto više o njima. Prvo ćemo definirati simetričnu matricu i vidjeti kakva je njena veza s kvadratnom formom.

Definicija 1 (vidjeti [2, str. 397])**.** *Matricu A takvu da vrijedi $A^T = A$ nazivamo simetrična matrica.*

Uočimo da je simetrična matrica nužno i kvadratna matrica.

Definicija 2 (vidjeti [2, str. 403])**.** *Kvadratna forma na $\mathbb{R}^n$ je funkcija Q definirana na $\mathbb{R}^n$ čija se vrijednost u vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ može izračunati izrazom oblika $Q(x) = x^T Ax = ||x||^2$, pri čemu je A simetrična matrica dimenzije $n \times n$. Matricu A nazivamo matrica kvadratne forme.*

Na sljedećim primjerima pokazat ćemo vezu simetrične matrice A i njezine kvadratne forme $x^T Ax$.

Primjer 1. *Neka je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Odredimo kvadratnu formu matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.*

Rješenje.

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 4x_2^2.$$

$$\begin{aligned} x^T Bx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (5x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 3x_2)x_2 = 5x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 3x_2^2 \\ &= 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2. \end{aligned}$$

Možemo primijetiti kako nam je kvadratnu formu lakše odrediti u slučajevima kada ne sadrže mješoviti član, odnosno kada je matrica kvadratne forme dijagonalna.

Primjer 2. *Neka je $x \in \mathbb{R}^3$ i $Q(x) = 12x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3$. Zapišimo ovu kvadratnu formu u obliku $x^T Ax$.*

Rješenje.

$$Q(x) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.1 Zamjena varijabli u kvadratnoj formi

Kao što smo ranije spomenili, kvadratne je forme lakše koristiti kada ne sadrže mješoviti član. Takav član možemo eliminirati odgovarajućom zamjenom varijabli, što značajno pojednostavljuje njihovu primjenu.

Definicija 3 (vidjeti [2, str. 346])**.** *Za invertibilnu kvadratnu matricu A kažemo da je ortogonalna ukoliko vrijedi $A^{-1} = A^T$.*

Definicija 4 (vidjeti [2, str. 398])**.** *Za kvadratnu matricu A kažemo da je ortogonalno dijagonalizabilna ukoliko postoje ortogonalna matrica P i dijagonalna matrica D takve da vrijedi $A = PDP^T = PDP^{-1}$.*

Prije nego objasnimo sam postupak, spomenimo teorem koji će nam biti ključan za dobivanje dijagonalne matrice.

Teorem 1 (vidjeti [2, str. 398, Theorem 2])**.** *Matrica A dimenzije $n \times n$ je ortogonalno dijagonalizabilna ako i samo ako je A simetrična matrica.*

Ukoliko x predstavlja varijablu u $\mathbb{R}^n$, tada zamjenu varijabli radimo uz pomoć jednakosti $x = Py$ ili ekvivalentno, $y = P^{-1}x$, pri čemu je P invertibilna matrica i y nova varijabla u $\mathbb{R}^n$. Ukoliko takvu zamjenu varijable zapišemo u obliku kvadratne forme, dobijemo

$$x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy = y^T (P^T AP)y \tag{2.1}$$

i tada je $P^T AP$ nova matrica kvadratne forme. Obzirom da je A simetrična, Teorem 1 nam osigurava postojanje ortogonalne matrice P takve da je $P^T AP$ dijagonalna matrica koju ćemo označiti s D. Tada kvadratna forma (2.1) postaje $y^T Dy$.

U nastavku ćemo pokazati ovaj postupak na primjeru.

Primjer 3. *Napravimo zamjenu varijabli za kvadratnu formu $Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ tako da dobijemo kvadratnu formu bez mješovitog člana.*

Rješenje. Matrica dane kvadratne forme je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Prvi korak je ortogonalno dijagonalizirati matricu A. Za to najprije odredimo svojstveni polinom matrice A.

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6) \end{aligned}$$

Izjednačavanjem svojstvenog polinoma s 0 dobijemo pripadne svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 6$, a rješavanjem sustava $(A - \lambda I)v = 0$ za svaku svojstvenu vrijednost v, dobijemo pripadne svojstvene vektore $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ovi su vektori automatski ortogonalni jer odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima i kao takvi čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^2$.
Neka su $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.
Tada su $A = PDP^{-1}$ i $D = P^{-1}AP = P^TAP$ (jer je P ortogonalna matrica, a inverz ortogonalne matrice je jednak upravo njezinoj transponiranoj matrici).
Odgovarajuća zamjena varijabli je $x = Py$, gdje je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.
Sada vrijedi

$$\begin{aligned} 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 &= x^TAx = (Py)^TA(Py) = y^TP^TAPy = y^TDy = \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2 + 6y_2^2. \end{aligned}$$

Dobili smo kvadratnu formu koja ne sadrži mješoviti član.

Prethodno smo, objašnjenjem samog postupka, u suštini i dokazali sljedeći teorem, a potom ga ilustrirali na Primjeru 3.

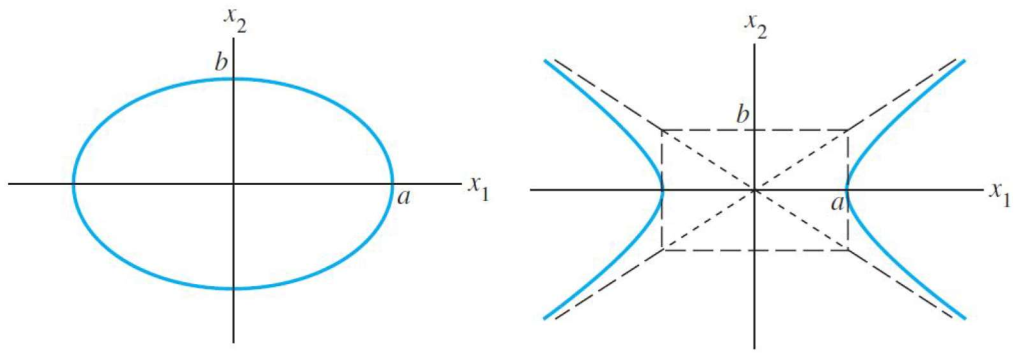
Teorem 2 (vidjeti [2, str. 405, Theorem 4]). ***Teorem o glavnim osima***
Neka je A simetrična matrica dimenzije $n \times n$. Tada postoji ortogonalna zamjena varijabli, $x = Py$, koja transformira kvadratnu formu x^TAx u kvadratnu formu y^TDy bez mješovitog člana.

Stupce matrice P nazivano glavne osi kvadratne forme x^TAx. Kažemo da je vektor y koordinatni vektor od x u odnosu na ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^n$ koju čine te glavne osi.

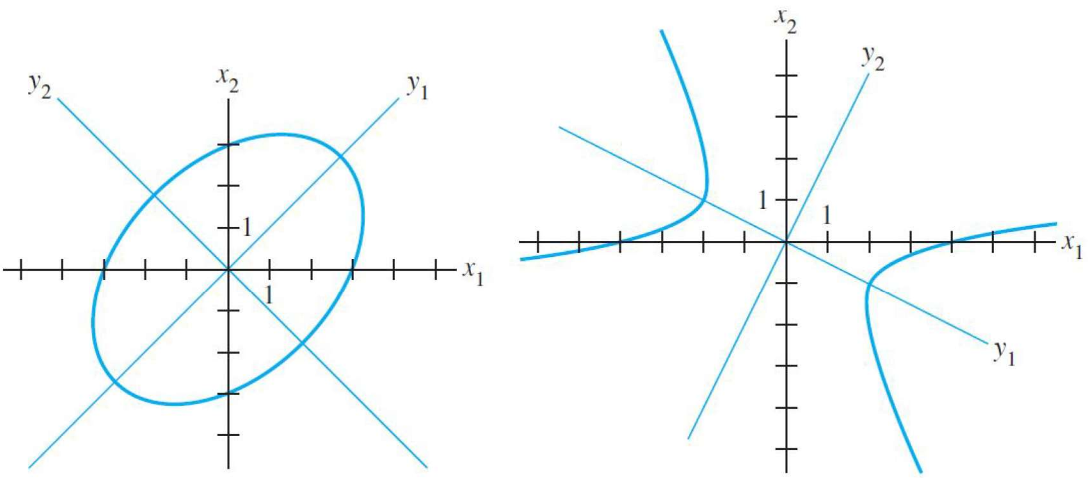
Pogledajmo kako možemo geometrijski interpretirati glavne osi. Neka je $Q(x) = x^TAx$, pri čemu je A invertibilna simetrična matrica dimenzije $n \times n$, i neka je c konstanta. Može se pokazati da skup svih $x \in \mathbb{R}^2$ koji zadovoljavaju

$$x^TAx = c \tag{2.2}$$

odgovara elipsi, odnosno krugu, hiperboli, presjeku dvaju pravaca, točki ili je prazan skup.



Slika 2.1: [2, str. 406, Figure 2] Elipsa i hiperbola u standardnom položaju.



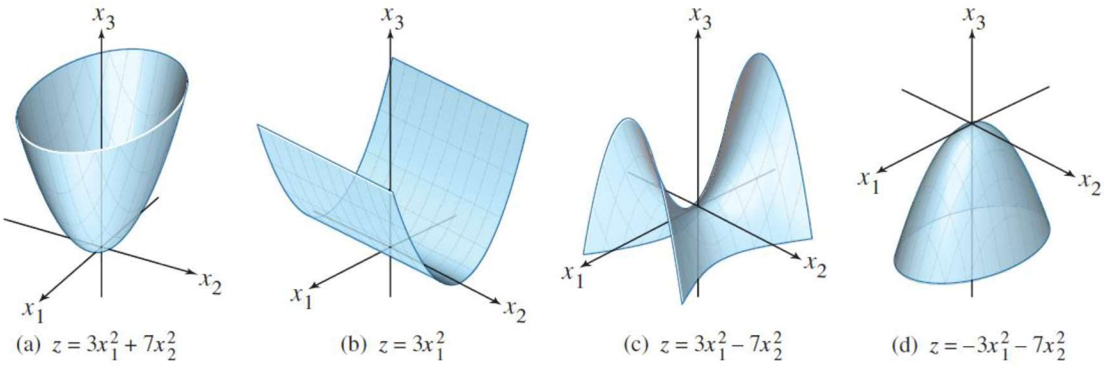
Slika 2.2: [2, str. 406, Figure 3] Elipsa i hiperbola u nestandardnom položaju.

Ukoliko je matrica kvadratne forme A dijagonalna, onda je graf pripadne kvadratne forme u standardnom položaju, kao na Slici 2.1. Ukoliko matrica kvadratne forme A nije dijagonalna matrica, graf jednažbe (2.2) je rotiran oko svog standardnog položaja, kao na Slici 2.2.

Traženje glavnih osi (određenih svojstvenim vektorima od A) zapravo je traženje novog koordinatnog sustava u kojem je graf u standardnom položaju. Pogledajmo primjerice hiperbolu na Slici 2.2. Pozitivni dio osi y_1 je u smjeru prvog stupca matrice P, dok je pozitivni dio osi y_2 u smjeru drugog stupca matrice P.

2.2 Klasifikacija kvadratnih formi

Za matricu A dimenzije $n \times n$, kvadratna forma $Q(x) = x^T Ax$ je realna funkcija realne varijable s domenom $\mathbb{R}^n$. Na Slici 2.3 možemo vidjeti primjere grafova takvih kvadratnih formi. Za svaku točku $x = (x_1, x_2)$ iz domene kvadratne forme Q, graf prikazuje točke oblika (x_1, x_2, z), pri čemu je $z = Q(x)$.



Slika 2.3: [2, str. 407, Figure 4] Grafovi kvadratnih formi.
.

Primijetimo da su, osim za točku $x = 0$, na Slici 2.3 a) sve vrijednosti od $Q(x)$ pozitivne, dok su na Slici 2.3 d) sve vrijednosti od $Q(x)$ negativne.

Pomoću Slike 2.3 ilustrirali smo sljedeću definiciju.

Definicija 5 (vidjeti [2, str. 407]). *Kvadratna forma Q je:*

- *pozitivno definitna ukoliko je $Q(x) > 0$ za svaki $x \neq 0$,*
- *negativno definitna ukoliko je $Q(x) < 0$ za svaki $x \neq 0$,*
- *indefinitna ukoliko $Q(x)$ poprima i pozitivne i negativne vrijednosti.*

Također, kažemo da je kvadratna forma $Q(x)$ pozitivno semidefinitna ukoliko je $Q(x) \geq 0$ za svaki x i da je negativno semidefinitna ukoliko je $Q(x) \leq 0$ za svaki x. Na primjer, kvadratne forme na Slici 2.3 a) i b) su obje pozitivno semidefinitne, ali je kvadratnu formu pod a) bolje opisati samo kao pozitivno definitnu.

Sljedeći teorem nam govori o karakterizaciji kvadratnih formi pomoću svojstvenih vrijednosti.

Teorem 3 (vidjeti [2, str. 407, Theorem 5]). ***Kvadratne forme i svojstvene vrijednosti***
Neka je A simetrična matrica dimenzije $n \times n$. Tada je kvadratna forma $x^T Ax$

- *pozitivno definitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti od A pozitivne,*
- *negativno definitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti od A negativne, ili*
- *indefinitna ako i samo ako A ima i pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti.*

Dokaz. Obzirom da je A simetrična matrica, prema Teoremu 2 o glavnim osima, postoji ortogonalna zamjena varijabli $x = Py$ takva da je

$$Q(x) = x^T Ax = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{2.3}$$

pri čemu su $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A. Kako je P invertibilna matrica, postoji jednoznačno određena veza između svih $x \neq 0$ i svih $y \neq 0$. Stoga se vrijednosti $Q(x)$ za $x \neq 0$ poklapaju s vrijednostima na desnoj strani izraza (2.3), što je očito određeno predznacima svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na tri načina opisana u ovom teoremu. □

Primjer 4. *Ispitajmo definitnost kvadratne forme*

$$Q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Rješenje. Pripadna matrica zadane kvadratne forme je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Odredimo svojstvene vrijednosti ove matrice.

$$\begin{aligned} k_a(\lambda) =& det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ =& (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ =& (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) - (3-\lambda) + \lambda \\ =& -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 4 \\ =& (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Iz jednakosti $(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$, dobivamo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = -2$. Obzirom da matrica A ima i pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti, možemo zaključiti da je dana kvadratna forma indefinitna.

Klasifikacija kvadratnih formi često se prenosi i na matrice kvadratnih formi pa je tako pozitivno definitna matrica A simetrična matrica čija je kvadratna forma $x^T Ax$ pozitivno definitna. Ostali se slučajevi definiraju analogno.

3 | Uvjetna optimizacija

Problem uvjetne optimizacije vrlo je važan u matematici i ima široku primjenu u područjima kao što su ekonomija, inženjerstvo, statistika itd. Spomenuti problem uključuje pronalaženje minimalnih i maksimalnih vrijednosti kvadratne forme uz određene uvjete, koji su najčešće linearne jednadžbe i nejednadžbe. U ovom poglavlju istražit ćemo osnove uvjetne optimizacije i objasniti važnost svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora te isto ilustrirati na primjerima.

Uvjet s kojim se često susrećemo u primjeni je uvjet da vektor $x \in \mathbb{R}$ bude jedinični vektor, odnosno da vrijedi $x^T x = 1$. U tom slučaju, ukoliko kvadratna forma $Q(x)$ nema mješovitih članova, lako pronalazimo njezinu maksimalnu i minimalnu vrijednost. Pokažimo to na jednom primjeru.

Primjer 5. *Pronađimo maksimalnu i minimalnu vrijednost kvadratne forme* $Q(x) = 3x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_3^2$ *uz uvjet* $x^T x = 1$.

Obzirom da su x_1^2 i x_3^2 nenegativni, vrijedi $3x_1^2 \leq 8x_1^2$ te $2x_3^2 \leq 8x_3^2$ pa slijedi

$$\begin{aligned} Q(x) =& 3x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_3^2 \\ \leq& 8x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2 \\ =& 8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ =& 8 \end{aligned}$$

čim je $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Dakle, maksimalna vrijednost kvadratne forme $Q(x)$ ne može biti veća od 8 kada je x jednični vektor. Nadalje, $Q(x) = 8$ kada je $x = (0, 1, 0)$. Stoga je 8 maksimalna vrijednost kvadratne forme $Q(x)$ uz uvjet $x^T x = 1$.

Kako bi pronašli minimalnu vrijednost kvadratne forme $Q(x)$, primijetimo da vrijedi $3x_1^2 \geq 2x_1^2$ i $8x_2^2 \geq 2x_2^2$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} Q(x) =& 3x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_3^2 \\ \geq& 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\ =& 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ =& 2 \end{aligned}$$

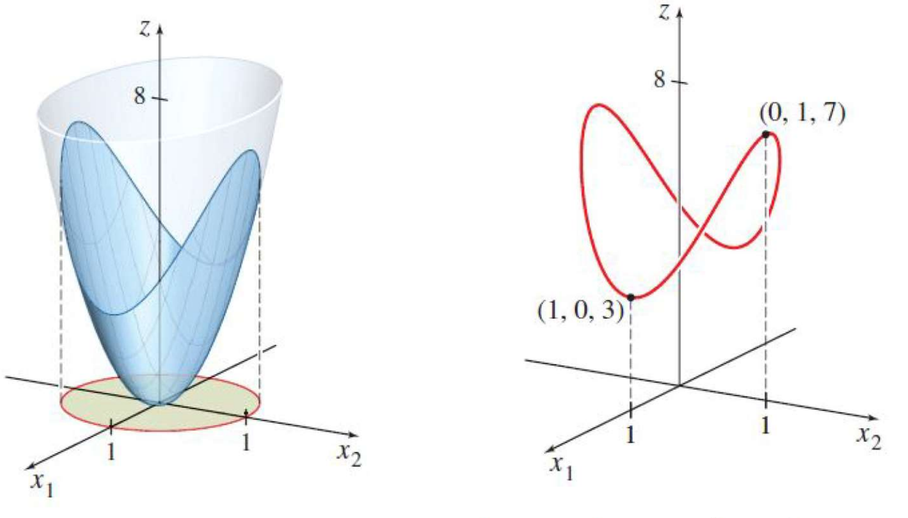
čim je $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Također, $Q(x) = 2$ kada je $x = (0, 0, 1)$. Analogno kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da je 2 minimalna vrijednost kvadratne forme $Q(x)$ uz uvjet $x^T x = 1$.

Lako se vidi kako matrica kvadratne forme Q iz prethodnog primjera ima svojstvene vrijednosti 3, 8 i 2. Primijetimo da najveća i najmanja svojstvena vrijednost odgovaraju, redom, maksimalnoj i minimalnoj (uvjetovanoj) vrijednosti kvadratne forme $Q(x)$. Isto vrijedi za svaku kvadratnu formu, što ćemo vidjeti i na sljedećem primjeru.

Primjer 6 (vidjeti [2, str. 411, Example 2]). *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ *i* $Q(x) = x^T Ax$ *za* $x \in \mathbb{R}^2$. *Pronađimo minimalnu i maksimalnu vrijednost od* $Q(x)$.

Rješenje. Slika 3.1a prikazuje graf kvadratne forme $Q(x)$, dok Slika 3.1b prikazuje samo dio grafa koji se nalazi unutar cilindra. Presjek cilindra s površinom grafa je skup točaka oblika (x_1, x_2, z) pri čemu je $z = Q(x_1, x_2)$ i $x_1^2 + x_2^2 = 1$. "Vrhovi" ovih točaka su uvjetne vrijednosti od $Q(x)$. Geometrijski gledano, problem uvjetne optimizacije jest odrediti najvišu i najnižu točku na krivulji presjeka.

Dvije najviše točke na krivulji su 7 jedinica iznad x_1x_2-ravnine, gdje su $x_1 = 0$ i $x_2 = \pm 1$. Ove točke odgovaraju svojstvenoj vrijednosti 7 matrice A i svojstvenim vektorima $x = (0, 1)$ i $-x = (0, -1)$. Analogno, dvije najniže točke na krivulji su 3 jedinice iznad x_1x_2-ravnine i odgovaraju svojstvenoj vrijednosti 3 i svojstvenim vektorima $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.



(a) $z = 3x_1^2 + 7x_2^2$.

(b) Presjek $z = 3x_1^2 + 7x_2^2$ i cilindra $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Slika 3.1: [2, str. 411, Figure 1, 2]

Svaka točka presjeka prikazanog na Slici 3.1b ima z koordinatu između 3 i 7 i za svaki $t \in [3, 7]$ postoji jedinični vektor x takav da je $Q(x) = t$. Drugim riječima, skup svih mogućih vrijednosti od $x^T Ax$, za $||x|| = 1$, je segment $[3, 7]$.

Može se pokazati da je za svaku simetričnu matricu A, skup svih vrijednosti od $x^T Ax$, za $||x|| = 1$, segment u skupu realnih brojeva. Označimo, redom, granice tog segmenta s m i M, odnosno

$$m = \min\{x^T Ax : ||x|| = 1\}, M = \max\{x^T Ax : ||x|| = 1\}. \tag{3.1}$$

Nadalje, za svojstvenu vrijednost λ od A, vrijedi $m \leq \lambda \leq M$. Sljedeći teorem govori nam da su upravo m i M svojstvene vrijednosti od A, što smo i ilustrirali Primjerom 6.

Teorem 4 (vidjeti [2, str. 412, Theorem 6]). *Neka je A simetrična matrica te m i M definirani s (3.1). Tada je M najveća svojstvena vrijednost λ_1 od A i m najmanja svojstvena vrijednost od A. Nadalje $x^T Ax$ ima vrijednost M kada je x jedinični svojstveni vektor u_1 koji odgovora svojstvenoj vrijednosti M te $x^T Ax$ ima vrijednost m kada je x jedinični svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti m.*

Dokaz. Ortogonalno dijagonaliziramo matricu A pa vrijedi $A = PDP^{-1}$. Prethodno smo pokazali da je

$$x^T Ax = y^T Dy \text{ za } x = Py. \tag{3.2}$$

Također $||x|| = ||Py|| = ||y||$, za sve y, jer vrijedi $P^T P = I$ i

$$||Py||^2 = (Py)^T (Py) = y^T P^T Py = y^T y = ||y||^2.$$

Posebno, $||y|| = 1$ ako i samo ako je $||x|| = 1$. Dakle, $x^T Ax$ i $y^T Dy$ poprimaju isti skup vrijednosti dok x i y variraju unutar skupa svih jediničnih vektora.
Kako bismo pojednostavnili zapis, pretpostavimo da je matrica A dimenzije 3×3 sa svojstvenim vrijednostima $a \geq b \geq c$. Posložimo stupce matrice P (svojstvene vektore) tako da je $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.
Primijetimo, za svaki vektor $y \in \mathbb{R}^3$, s koordinatama y_1, y_2, y_3, je

$$\begin{aligned} ay_1^2 &= ay_1^2 \\ by_2^2 &\leq ay_2^2 \\ cy_3^2 &\leq ay_3^2. \end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} y^T Dy &= ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2 \\ &\leq ay_1^2 + ay_2^2 + ay_3^2 \\ &= a(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &= a||y||^2 = a. \end{aligned}$$

Dakle, prema definiciji od M, $M \leq a$. Međutim, $y^T Dy = a$ kada je $y = e_1 = (1, 0, 0)$ pa je zapravo $M = a$. Prema (3.2), vektor x koji odgovara $y = e_1$ je svojstveni vektor u_1 od A jer je

$$x = Pe_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1.$$

Dakle, $M = a = e_1^T De_1 = u_1^T Au_1$, što dokazuje tvrdnju za M. Na sličan se način pokaže da je m najmanja svojstvena vrijednost c i $x^T Ax$ postiže tu vrijednost kada je $x = Pe_3 = u_3$. $\square$

Primjer 7. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. *Pronađimo minimalnu vrijednost kvadratne forme* $x^T Ax$ *uz uvjet* $x^T x = 1$ *i jedinični vektor kojemu je ta minimalna vrijednost pridružena.*

Rješenje. Prema Teoremu 4, tražena minimalna vrijednost je najmanja svojstvena vrijednost matrice kvadratne forme A.
Karakteristični polinom matrice A jest $k_A(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$. Izjednačavanjem s 0 dobijemo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = 4$. Prema tome, najmanja svojstvena vrijednost je 2, što znači da se minimalna vrijednost kvadratne forme $x^T Ax$, uz uvjet da je x jedinični svojstveni vektor, postiže za $\lambda = 2$.
Rješavanjem jednadžbe $(A - 2I)x = 0$ dobijemo svojstveni vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Time smo pronašli jedinični vektor kojemu je pridružena minimalna vrijednost kvadratne forme.

Sljedeći teorem govori nam kako računamo vrijednosti kvadratne forme $x^T Ax$ s dodatnim uvjetima na vektor x.

Teorem 5 (vidjeti [2, str. 413, Theorem 7])**.** *Neka su* A, λ_1 *i* u_1 *jednaki kao i u Teoremu 4. Tada je maksimalna vrijednost kvadratne forme* $x^T Ax$*, uz uvjete* $x^T Ax = 1$ *i* $x^T u_1 = 0$ *druga najveća svojstvena vrijednost* λ_2 *i ta vrijednost postiže se kada je* x *svojstveni vektor* u_2 *pridružen* λ_2*.*

Dokaz. Teorem se dokazuje na sličan način kao Teorem 4, pri čemu se teorem svodi na slučaj kada je matrica kvadratne forme dijagonalna. □

Ilustrirajmo ideju prethodnog teorema na jednom primjeru.

Primjer 8 (vidjeti [2, str. 412-413, Example 3 i 5])**.** *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *i neka je* u_1 *jedinični vektor pridružen najvećoj svojstvenoj vrijednosti od* A*. Pronađimo maksimalnu vrijednost kvadratne forme* $x^T Ax$ *uz uvjete*

$$x^T x = 1 \text{ i } x^T u_1 = 0. \tag{3.3}$$

Rješenje. Karakteristični polinom dane matrice glasi

$$k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18 = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

Iz toga slijedi da je druga najveća svojstvena vrijednost matrice jednaka $\lambda = 3$.
Iz jednakosti $(A - 3I)x = 0$ dobijemo svojstveni vektor koji potom normiramo i dobijemo

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Vektor u_2 automatski je ortogonalan vektoru u_1 jer ti vektori odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima.
Dakle, prema Teoremu 5, maksimalna vrijednost kvadratne forme $x^T Ax$, uz uvjete (3.3), jest 3 i ona se postiže kada je $x = u_2$.

Sljedeći teorem poopćuje Teorem 4 i Teorem 5 te nam daje korisnu karakterizaciju svih svojstvenih vrijednosti od A.

Teorem 6 (vidjeti [2, str. 414, Theorem 8]). *Neka je A simetrična matrica dimenzije $n \times n$ s ortogonalnom dijagonalizacijom $A = PDP^{-1}$, pri čemu su vrijednosti na dijagonali matrice D poredane tako da vrijedi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ i stupci matrice P odgovaraju jediničnim vektorima $u_1, \ldots, u_n$. Tada je za $k = 2, \ldots, n$, maksimalna vrijednost kvadratne forme $x^T Ax$, uz uvjete $x^T x = 1, x^T u_1 = 0, \ldots, x^T u_{k-1} = 0$, jednaka svojstvenoj vrijednosti λ_k i ona se postiže za $x = u_k$.*

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] D. C. Lay, S. R. Lay, J. J. McDonald, *Linear Algebra and Its Applications*, Fifth Edition, Pearson, Boston, 2014.

Sažetak

U ovom radu bavimo se kvadratnim formama, njihovim glavnim svojstvima te problemom uvjetne optimizacije. Najprije su definirane simetrična matrica i kvadratna forma te potom na primjerima ilustrirana njihova veza. Nadalje je opisan postupak zamjene varijabli kod kvadratnih formi. Iskazan je teorem o glavnim osima i pokazana njegova geometrijska interpretacija. Definirane su pozitivno definitna, negativno definitna i indefinitna kvadratna forma te je teoremom opisana njihova veza sa svojstvenim vrijednostima matrice kvadratne forme. Na koncu je, nizom primjera i teorema, analiziran problem uvjetne optimizacije kvadratnih formi.

Ključne riječi

simetrična matrica, kvadratna forma, ortogonalno dijagonalizabilna matrica, zamjena varijabli, teorem o glavnim osima, definitnost kvadratne forme, svojstvene vrijednosti, svojstveni vektori, uvjetna optimizacija, minimalna i maksimalna vrijednost kvadratne forme.

Quadratic forms

Summary

This paper explores quadratic forms, their key properties, and the problem of constrained optimization. It begins with the definitions of symmetric matrices and quadratic forms, followed by examples illustrating their relationship. The procedure for variable substitution in quadratic forms is then described. The theorem on principal axes is stated and its geometric interpretation is provided. Positive definite, negative definite, and indefinite quadratic forms are defined, and their connection to the eigenvalues of the associated matrices is explained through a theorem. Finally, the problem of constrained optimization of quadratic forms is analyzed through a series of examples and theorems.

Keywords

symmetric matrix, quadratic form, orthogonally diagonalizable matrix, change of variables, principal axis theorem, definiteness of quadratic forms, eigenvalues, eigenvectors, constrained optimization, minimum and maximum values of a quadratic form.

Životopis

Moje ime je Lorana Panenić. Rođena sam 22.2.1996. godine u Osijeku. Pohađala sam Osnovnu školu Čakovci u razdoblju od 2002. do 2010. godine, nakon čega sam školovanje nastavila u Gimnaziji Vukovar (2010.-2012.) te Gimnaziji Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima (2012.-2014.). Nakon završene srednje škole, upisala sam Sveučilišni prijediplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike.
Tijekom studiranja radila sam studentske poslove te sam također bila zaposlena kao nastavnica matematike u Ekonomskoj i trgovačkoj školi Ivana Domca Vinkovci (2021.-2022.) te Strukovnoj školi Vinkovci (2023.).