Trokutasti brojevi

Jurec, Matej

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Trokutasti brojevi

Završni rad

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Student:
Matej Jurec

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Tema ovog završnog rada su *trokutasti brojevi*, koji dolaze iz skupa prirodnih brojeva. Odnosno, trokutasti brojevi su podvrsta figurativnih brojeva, a figurativni brojevi su oni koji se mogu prikazati pomoću geometrijskih oblika.

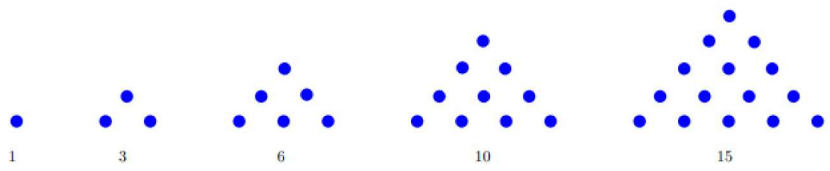
U poglavlju *Općenito o trokutastim brojevima* proći ćemo povijest trokutastih brojeva, a zatim ćemo proći neke osnovne definicije. Nakon toga pokazat ćemo razne teoreme i korolare koji će nam pokazati ljepotu i sve mogućnosti trokutastih brojeva, a neke od njih ćemo i dokazati.

Za kraj, u poglavlju *Primjene trokutastih brojeva* proći ćemo neke osnovne primjene trokutastih brojeva u kombinatorici, računarstvu i u svakodnevnom životu. Pokazat ćemo da su trokutasti brojevi svuda oko nas i da nam ponekad mogu biti od velike pomoći primjerice kod računanja složenosti algoritama u računarstvu.

2 | Općenito o trokutastim brojevima

Često kada dobijemo neki matematički zadatak možemo iskoristiti geometriju, odnosno geometrijski pristup rješavanja zadatka kako bi mogli vizualizirati vezu brojeva i objekata. Baš takav pristup koristili su i stari Grci. Uzeli su jednu točku ili kvadratić i pomoću njega vizualizirali broj jedan, potom su slagali te točke ili kvadratiće u razne oblike i dobili ostale prirodne brojeve. Kada su taj raspored prilagodili uspjeli su oblikovati figurativne brojeve, a oni su im omogućili da vizualno jasno prikažu algebarska svojstva i relacije.

Kao što smo i rekli u uvodu, u ovom završnom radu proučavat ćemo jednu od posebnih vrsta figurativnih brojeva, a to su trokutasti brojevi. Jednom točkicom označimo broj 1, a kada bi na tu jednu točkicu dodali još dvije i složili ih u poseban oblik vizualno bi dobili jednokostraničan trokut. Kada bi na sličan način dodali još tri točkice dobili bi treći po redu trokutasti broj šest i tako možemo nastaviti u nedogled. Kada pogledamo svaki sljedeći trokutasti broj vidimo da njegov trokut sastavljen od točkica ima jedan red više od prethodnog, odnosno svaki trokut je veći od prethodnog. Možemo primjetiti kako je n-ti trokutasti broj zapravo jednak zbroju prvih n prirodnih brojeva.



Slika 2.1: Trokutasti brojevi
[vidjeti [8]]

Krenimo sada s definicijama trokutastih brojeva, a zatim ćemo zapisati nekoliko lema i teorema koje ćemo i dokazati.

Definicija 1. *Trokutasti brojevi su oblikovani parcijalnom sumom reda* $1+2+3+4+5+\cdots+n$*, gdje je n prirodan broj. Trokutasti brojevi su zapravo brojevi koji se mogu* *zapisati formulom*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}, \quad (1.1)$$

gdje je $\binom{n+1}{2}$ *izraz za binomni koeficijent.*

Pokažimo primjenu ove definiciju na sljedećem primjeru.

Primjer 1. *Pokažimo prvih 5 trokutastih brojeva dobivenih korištenjem izraza (1.1) iz prethodne definicije. Dobivamo:*

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = \binom{1+1}{2} = 1 \\
T_2 &= 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = \binom{2+1}{2} = 3 \\
T_3 &= 1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{12}{2} = \binom{3+1}{2} = 6 \\
T_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = \binom{4+1}{2} = 10 \\
T_5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = \binom{5+1}{2} = 15.
\end{aligned}$$

Definicija 2. *Ako postoji cijeli broj m takav da je $n = T_m = \frac{m(m+1)}{2}$, onda kažemo da je n trokutasti broj.*

U nastavku pogledajmo definicije za savršene i proste brojeve koje će nam zatrebati u kasnijem dijelu rada.

Definicija 3. *Brojevi koji su jednaki zbroju svojih pravih djelitelja nazivaju se savršeni brojevi.*

Sada zapišimo primjer savršenog broja.

Primjer 2. *Uzmimo za primjer broj 28. Njegovi pravi djelitelji su $1, 2, 4$ i 14. Sada prema prethodnoj definiciji zbrojimo njegove prave djelitelje $1 + 2 + 4 + 14 = 28$ te zaključujemo da je 28 savršeni broj.*

Definicija 4. *Svaki prirodni broj veći od 1 naziva se prostim ukoliko je djeljiv jedino s 1 i sa samim sobom.*

Pogledajmo primjer prostog broja.

Primjer 3. *Uzmimo za primjer prirodni broj 7. Vidimo da su njegovi pravi djelitelji jedino 1 i on sam, te prema Definiciji 4 zaključujemo da je on prost broj.*

Zapišimo sada teorem koji povezuje trokutaste i savršene brojeve.

Teorem 1 (vidjeti [2, Teorem 2]). *Svaki paran savršeni broj je i trokutasti broj.*

Prije nego započnemo dokaz napomenimo da nije poznat niti jedan neparan savršeni broj, tako da ovaj teorem vrijedi za sve savršene brojeve.

Dokaz. Uzmimo neki paran savršeni broj k. Po Definiciji 3 k je jednak zbroju svojih pravih djelitelja.

Nadalje, znamo da se paran savršeni broj može zapisati kao

$$k = 2^{n-1}(2^n - 1),$$

gdje je 2^{n-1} prost broj, a znamo da je prost broj po Definiciji 3 djeljiv jedino s 1 i sa samim sobom. Sada raspišimo

$$k = 2^{n-1}(2^n - 1) = \frac{2^n(2^n - 1)}{2} = \frac{t(t+1)}{2},$$

gdje je $t = 2^n - 1$.

Zaključujemo da je k trokutasti broj.

□

Pogledajmo kako prethodni teorem funkcionira na idućem primjeru.

Primjer 4. *Ako uzmemo za primjer broj* 28*, zbroj njegovih pravih djelitelja iznosi* $2 + 4 + 7 + 14 = 28$*, te je prema tome on savršeni broj. Nadalje, znamo da je broj* 28 *također i trokutasti broj jer prema Definiciji 2 vrijedi*

$$T_7 = \frac{7(7+1)}{2} = \frac{56}{2} = 28.$$

Lema 1 (vidjeti [5, Lema 1]). *Zbroj dva uzastopna trokutasta broja je savršeni kvadrat.*

Dokaz. Neka su T_{m-1} i T_m neka dva uzastopna trokutasta broja tako da vrijedi

$$T_{m-1} = \tfrac{m(m-1)}{2} \text{ i } T_m = \tfrac{m(m+1)}{2}.$$

Sada kada zbrojimo ta dva trokutasta broja dobivamo

$$\begin{aligned} T_{m-1} + T_m &= \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m^2 - m + m^2 + m}{2} \\ &= \frac{2m^2}{2} = m^2, \end{aligned}$$

što je savršeni kvadrat.

□

Navedimo sada primjer koji podržava prethodnu lemu.

Primjer 5. *Uzmimo dva uzastopna trokutasta broja $T_3 = 6$ i $T_4 = 10$. Sada ih zbrojimo i dobivamo*

$$T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16.$$

Vidimo da smo dobili broj 16 koji se može zapisati kao 4^2 i on je savršeni kvadrat.

Zapišimo teorem koji nam govori da je $k + l$-ti po redu trokutasti broj jednak zbroju k-tog i l-tog po redu trokutastog broja, te umnoška $k \cdot l$.

Teorem 2 (vidjeti [4, Teorem 2])**.** *Neka su dani brojevi T_k i T_l, gdje su T_k i T_l k-ti odnosno l-ti po redu trokutasti brojevi. Onda vrijedi*

$$T_{k+l} = T_k + T_l + kl,$$

gdje je T_{k+l} $k + l$-ti po redu trokutasti broj.

Dokaz. Raspišimo T_{k+l} koristeći izraz (1.1)

$$\begin{aligned} T_{k+l} =& \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} = \frac{k^2 + kl + k + kl + l^2 + l}{2} \\ =& \frac{k^2 + 2kl + l^2 + k + l}{2} = \frac{k^2 + k + l^2 + l}{2} + \frac{2kl}{2} \\ =& \frac{k(k+1) + l(l+1)}{2} + kl = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} + kl \\ =& T_k + T_l + kl. \end{aligned}$$

□

Potkrijepimo primjerom prethodni teorem.

Primjer 6. *Uzmimo peti po redu trokutasti broj $T_5 = 15$ i osmi po redu $T_8 = 36$. Sada prema definiciji trokutastog broja pogledajmo koliko iznosi $T_{5+8} = T_{13}$. Dobivamo*

$$T_{13} = \frac{13(13+1)}{2} = \frac{182}{2} = 91.$$

Sada raspišimo T_{13} koristeći Teorem 2 i pogledajmo što dobijemo za rezultat. Imamo

$$T_{5+8} = T_5 + T_8 + 5 * 8 = 15 + 36 + 40 = 91.$$

Lema 2 (vidjeti [7])**.** *Zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ jednak je T_n^2 gdje je T_n n-ti trokutasti broj. Odnosno, vrijedi*

$$T_n^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Dokaz. Najprije zapišimo formulu za zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2})\right)^2.$$

Sada raspišimo

$$T_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

□

Na sljedećim primjerima pogledajmo kako funkcionira prethodna lema.

Primjer 7. *Pogledajmo zbroj kubova prvih pet prirodnih brojeva:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2 = T_5^2.$$

Primjer 8. *Uzmimo za primjer zbroj kubova prvih osam prirodnih brojeva.*

$$\begin{aligned}1^3 + &2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3\\ =&1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512\\ =&1296 = 36^2 = T_8^2.\end{aligned}$$

Teorem 3 (vidjeti [5, Teorem 1])**.** *Broj $8k + 1$ je savršeni kvadrat ako i samo ako je k trokutasti broj.*

Dokaz. (i) ($\rightarrow$) Pretpostavimo da je $8k + 1$ savršeni kvadrat. Vidimo da je broj $8k + 1$ neparan i za neki broj x veći od nule pa slijedi

$$8k + 1 = (2x + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Iz toga nam proizlazi $k = \frac{x(x+1)}{2}$.

(ii) ($\leftarrow$) Pretpostavimo da je k trokutasti broj, odnosno da za neki prirodan broj x vrijedi

$$k = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Uvrstimo k u izraz iz Teorema 3 i dobivamo:

$$\begin{aligned}8k + 1 =&8\frac{x(x+1)}{2} + 1\\ 8k + 1 =&8\frac{x(x+1)}{2} + \frac{2}{2}\\ 8k + 1 =&\frac{8x^2 + 8x + 2}{2}\\ 8k + 1 =&2\frac{4x^2 + 4x + 1}{2}\\ 8k + 1 =&4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $8k + 1$ savršeni kvadrat, te je uz (i) i (ii) teorem dokazan.

□

Pogledajmo kako nam prethodni teorem funkcionira na sljedećim primjerima.

Primjer 9. *Uzmimo trokutasti broj* 10 *i uvrstimo ga u izraz* $8t + 1$*:*

$$\begin{aligned} 8(10) + 1 =& 80 + 1 = 81 \\ 81 =& 9 \cdot 9 = 9^2, \end{aligned}$$

što je savršeni kvadrat.

Primjer 10. *Uzmimo sada trokutasti broj* 3 *i uvrstimo ga u izraz* $8t + 1$*. Dobivamo:*

$$\begin{aligned} 8(3) + 1 =& 24 + 1 = 25 \\ 25 =& 5 \cdot 5 = 5^2, \end{aligned}$$

što je također savršeni kvadrat kao i u prošlom primjeru.

Korolar 1 (vidjeti [5, Korolar 1])**.** *Ako je*

$$m = \frac{\sqrt{8t+1} - 1}{2} \tag{2.1}$$

prirodan broj, onda je t trokutasti broj.

Dokaz. Prema Teoremu 3 znamo da je t trokutasti broj ako i samo ako je broj $8t + 1$ savršeni kvadrat. Pretpostavimo da je t trokutasti broj te nam slijedi da je $8t + 1$ savršeni kvadrat. Za prirodni broj x prema izrazu (3.1) pišemo

$$8t + 1 = (2x + 1)^2.$$

Uvrstimo sada to u izraz (2.1) i dobivamo:

$$\begin{aligned} m =& \frac{\sqrt{(2x+1)^2} - 1}{2} \\ =& \frac{2x + 1 - 1}{2} = x. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je m prirodan broj.

□

Pokažimo sada dva primjera na kojima ćemo pogledati kako funkcionira prethodni korolar.

Primjer 11. *Uzmimo trokutasti broj* $t = 21$ *i uvrstimo ga u izraz* $m = \frac{\sqrt{8t+1}-1}{2}$*. Dobivamo:*

$$m = \frac{\sqrt{8(21) + 1} - 1}{2} = \frac{13 - 1}{2} = 6.$$

Slijedi da je m prirodan broj.

Primjer 12. *Sada uzmimo trokutasti broj $t = 55$ i uvrstimo ga u izraz $m = \frac{\sqrt{8t+1}-1}{2}$. Imamo*

$$m = \frac{\sqrt{8(55)+1}-1}{2} = \frac{21-1}{2} = 10.$$

Vidimo da je m prirodan broj.

Teorem 4 (vidjeti [4, Teorem 6])**.** *Ako je T_k trokutasti broj za svaki $k > 0$, onda vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T_k} = 2. \tag{4.1}$$

Dokaz. Prema Definiciji 1 vrijedi

$$T_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Kada to uvrstimo u izraz (4.1) dobijemo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right). \end{aligned}$$

Promotrimo sada sumu $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ i zapišimo prvih nekoliko članova

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{1}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \dots. \end{aligned}$$

Vidimo da se većina članova poništi i ostane nam

$$1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1}.$$

Znamo da kada n ide u beskonačnost, onda $\frac{1}{n+1}$ teži nuli i vrijedi

$$1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Iz toga slijedi da je vrijednost sume jednaka

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1.$$

Uvrstimo sada vrijednost te sume u početni izraz (4.1). Dobivamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{T_k}=2\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=2\cdot 1=2.$$

□

Teorem 5 (vidjeti [5, Propozicija 3]). *Ako je k trokutasti broj, onda je i* $9k+1$ *trokutasti broj.*

Dokaz. Neka je k trokutasti broj te neka vrijedi

$$k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}9k+1 =&9\frac{n(n+1)}{2}+1\\ =&\frac{9n^2+9n+2}{2}=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}\\ =&\frac{m(m+1)}{2},\end{aligned}$$

gdje je $m=3n+1$. Dakle, dobili smo trokutasti broj.

□

Pogledajmo to na idućem primjeru.

Primjer 13. *Uzmimo drugi po redu trokutasti broj* $T_2=n=3$. *Sada ga uvrstimo u izraz* $9n+1$ *i dobivamo*

$$9n+1=9(3)+1=27+1=28,$$

što je sedmi po redu trokutasti broj.

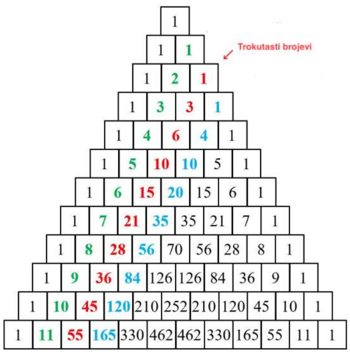
3 | Neke primjene trokutastih brojeva

Trokutasti brojevi imaju razne primjene, ne samo u teoriji brojeva, već i u kombinatorici, teoriji grafova, računarstvu, te čak i u fizici. U ovom poglavlju bavit ćemo se nekim od glavnih primjena trokutastih brojeva u ranije navedenim područjima.

3.1 Primjene u kombinatorici i veza s Pascalovim trokutom

Najpoznatija i najčešća primjena trokutastih brojeva je baš u kombinatorici, i to u kontekstu binomnog koeficijenta i Pascalovog trokuta. Kao što smo i ranije naveli, n-ti trokutasti broj T_n jednak je sumi prvih n prirodnih brojeva. Osim toga prema Definiciji 1 n-ti trokutasti broj jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n+1}{2}$.

Pascalov trokut je beskonačan niz prirodnih brojeva koji su vizualno prezentirani u obliku trokuta, te je svaki broj jednak zbroju ona dva broja koja se nalaze iznad njega. Brojevi na rubovima su uvijek jedinice, te su svi brojevi u tom trokutu zapravo algebarski prikaz binomnih koeficijenata. Trokutasti brojevi u Pascalovom trokutu pojavljuju se na svakom mjestu gdje binomni koeficijent iznosi $\binom{n}{2}$ za $n \geq 2$.



Slika 3.1: Trokutasti brojevi u Pascalovom trokutu
[vidjeti [9]]

Kada bi trebali navesti praktični problem vezan za kombinatoriku u stvarnom životu, onda bi mogli spomenuti problem rukovanja gdje se svaka osoba u sobi mora rukovati s ostalim osobama barem jedanput. Za rješenje dobivamo trokutasti broj T_n. Odnosno, rješenje za primjer kada se u sobi nalazi n ljudi je T_{n-1}, gdje je T_{n-1} $n-1$-i trokutasti broj.

U nastavku pogledajmo primjer zadatka iz kombinatorike u kojem se uz primjenu trokutastih brojeva dolazi do rješenja.

Primjer 14. *Koliko različitih parova učenika se može formirati u razredu od šest učenika?*

Rješenje. Broj različitih parova koji se mogu formirati od n učenika izračunava se kao trokutasti broj T_{n-1}, jer je svaki par kombinacija dva od n učenika.

Za $n = 6$ imamo

$$T_5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

Zaključujemo da se može formirati 15 različitih parova učenika.

3.2 Primjene u računarstvu

Trokutaste brojeve možemo pronaći i u računarstvu, pretežito u strukturama podataka i nekim od algoritama. Kada bi trebali navesti jednu od najčešćih pojava trokutastih brojeva u nekom algoritmu, onda bi to bilo računanje sume prvih n prirodnih brojeva što je jako često korišteno kao dio koda u nekim kompleksnijim algoritmima i računalnim sustavima. Zbrajanjem prvih n prirodnih brojeva dobivamo trokutasti broj.
Nadalje, pogledajmo algoritme za sortiranje i za primjer uzmimo sortiranje metodom umetanja. Ideja ovog algoritma je da se članovi polja međusobno uspoređuju te se manji član uvijek stavi ispred većeg i tako ponavljamo za sve članove.

Za listu od n elemenata najveći broj uspoređivanja iznosi T_{n-1} što je $n-1$-i trokutasti broj, zbog toga što se svaki novi član usporedi sa svim prethodno sortiranim članovima. Kada na ovaj način povežemo trokutaste brojeve i algoritme, onda nam to olakšava razumijevanje složenosti algoritama. Možemo reći da su trokutasti brojevi temeljni dio koji nam pomaže u analizi kompleksnosti danog algoritma.

Pogledajmo primjer zadatka iz računarstva u kojem će se pojaviti trokutasti brojevi.

Primjer 15. *Koliko usporedbi napravi algoritam koji uspoređuje svaki par elemenata u listi od deset elemenata?*

Rješenje. Broj usporedbi koje algoritam mora napraviti kada uspoređuje svaki par elemenata u listi izračunava se kao trokutasti broj T_{n-1}, jer je svaka usporedba kombinacija dva od n elemenata.

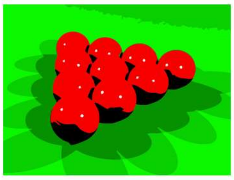
Za $n = 10$ imamo

$$T_9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

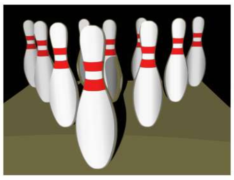
Dakle, algoritam napravi 45 usporedbi kada lista ima 10 elemenata.

3.3 Primjene u svakodnevnom životu

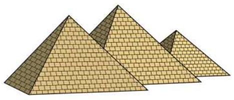
Ako pogledamo svijet oko sebe, možemo primjetiti trokutaste brojeve skoro na svakom koraku. Bilo to u oblicima u sportovima kao što su kuglanje i biljar ili na primjer u arhitekturi i dizajnu.
Ako ste ikad bili na kuglanju ili biljaru mogli ste primjetiti da broj čunjeva odnosno loptica odgovara trokutastim brojevima. Uz to, trokutasti brojevi se često koriste i u konstruiranju i gradnji raznih građevina kako bi se osigurala stabilnost ali i vizualna ljepota.



Slika 3.2: Oblik loptica u biljaru



Slika 3.3: Oblik čunjeva na kuglanju



Slika 3.4: Primjer trokutaste građevine

[Slike preuzete 21.08.2024. s `https://pixabay.com`]

Uzmimo još za primjer jedan sportski događaj. Najveći problem s kojim se susreću organizatori takvog događaja je kako prebrojiti koliko će se ukupno odigrati mečeva. Ako bi bilo n ekipa, onda bi ukupan broj međusobnih mečeva, u slučaju da svaka ekipa igra sa svakom, iznosio T_{n-1}, što je $n-1$-i trokutasti broj.

Pogledajmo primjer iz arhitekture u kojem primjena trokutastih brojeva pomaže u izračunu ukupnog broja okvira u dizajnu.

Primjer 16. *Arhitekt dizajnira zidni ukras u obliku trokuta sa slojevima od okvira. Svaki sloj ima jedan okvir manje od prethodnog. Ako je najdonji sloj sastavljen od četiri okvira, koliko ukupno okvira arhitekt koristi za cijeli ukras?*

Rješenje. Ukupan broj okvira u zidu može se izračunati pomoću trokutastih brojeva. Trokutasti broj T_n predstavlja ukupan broj okvira kada imamo n slojeva, gdje svaki sloj ima jedan okvir manje od prethodnog.

Ako je najdonji sloj sastavljen od četiri okvira, to znači da imamo slojeve s četiri, tri, dva i jednim okvirom:

$$T_4 = \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

Ukupno će biti korišteno 10 okvira za cijeli ukras.

Literatura

[1] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[2] C. Hamburg, *Triangular numbers are everywhere*, Mathematics and Science Academy, Illinois, Aurora, 1992.

[3] J. Kimberly, S. Parker, *The mathematical magic of perfect numbers*, Georgia Journal of Science, **66** (2008), Article 4.

[4] *Triangular numbers in action*, dostupno na https://gphjournal.org/index.php/m/article/view/402/223.

[5] *The mathematical beauty of triangular numbers*, dostupno na https://huichawaii.org/assets/mulatu,-lemma3---2015-steam-huic.pdf.

[6] *Figurativni brojevi - Senada Mustafić*, dostupno na https://matematickitalent.mk/uploads/books/VNVZb-Jhqky9FkNXnmHimQ.pdf.

[7] *Fascinating Triangular Numbers*, dostupno na https://www.shyamsundergupta.com/triangle.htm.

[8] *Senada Mustafić - Figurativni brojevi*, dostupno na https://matematickitalent.mk/uploads/books/VNVZb-Jhqky9FkNXnmHimQ.pdf.

[9] *Sequences in the triangle and the fourth dimension*, dostupno na https://aperiodical.com/2021/12/sequences-in-the-triangle-and-the-fourth-dimension/.

Sažetak

Ovaj završni rad bavi se trokutastim brojevima koji su posebna vrsta figurativnih brojeva. Figurativne brojeve otkrili su još stari Grci te su se njima služili kako bi vizualno prikazali neke geometrijske oblike. Vidjeli smo da je n-ti trokutasti broj jednak sumi prvih n prirodnih brojeva. Odnosno, ako postoji cijeli broj t takav da je $n = \frac{t(t+1)}{2}$, kažemo da je n trokutasti broj.

Osim primjena u teoriji brojeva postoje razne primjene trokutastih brojeva i u drugim područjima, dok su neke od najpoznatijih primjena one u kombinatorici, teoriji grafova, računarstvu i u fizici. Znamo da se trokutasti brojevi pojavljuju i u Pascalovom trokutu, kao i kod problema iz kombinatorike nazvanog problem rukovanja. U računarstvu kada tražimo kompleksnost nekog algoritma trokutasti brojevi će odigrati ključnu ulogu i olakšati nam razumijevanje složenosti tog algoritma. Ako se zaputimo odigrati partiju biljara ili na kuglanje primjetit ćemo vizualni oblik trokutastih brojeva u poziciji loptica odnosno čunjeva.

Ključne riječi

trokutasti brojevi, prirodni brojevi, savršeni kvadrat, kombinatorika, Pascalov trokut, računarstvo

Triangular numbers

Summary

This final paper deals with triangular numbers, which are a special type of figurative numbers. Figurative numbers were discovered by the ancient Greeks, who used them to visually represent certain geometric shapes. We saw that the n-th triangular number is equal to the sum of the first n positive integers. In other words, if there is an integer t such that $n = \frac{t(t+1)}{2}$, we say that n is a triangular number.

Besides applications in number theory, triangular numbers have various applications in other fields, with some of the most well-known being in combinatorics, graph theory, computer science, and physics. We know that triangular numbers also appear in Pascal's triangle and in combinatorial problems such as the handshake problem. In computer science, when determining the complexity of an algorithm, triangular numbers play a crucial role and help us understand the complexity of that algorithm. If we set out to play a game of billiards or bowling, we will notice the visual form of triangular numbers in the arrangement of the balls or pins.

Keywords

triangular numbers, natural numbers, perfect square, combinatorics, Pascal's triangle, computer science

Životopis

Rođen sam 28.10.2002. u Vinkovcima. Prva četiri razreda osnovne škole pohađao sam u PŠ Cerić te sam preostala četiri razreda osnovne škole pohađao u OŠ Nuštar. Nakon završetka osnovne škole pohađao sam Prirodoslovnu-matematičku gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima. Nakon završetka srednje škole upisao sam prijediplomski studij Matematika i računarstvo na Odjelu za matematiku, sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike Sveučilišta u Osijeku. Aktivno se bavim raznim sportovima te kao student radim u informatič-kom odjelu NK Osijek.