

# Sferna zakrivljenost krivulje

---

**Cvijetović, Anđela**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:164428>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-05**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni diplomski studij matematike  
modul: financijska matematika i statistika

# Sferna zakrivljenost krivulje

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

**doc. dr. sc. Ljiljana Primorac  
Gajčić**

Student:

**Andela Cvijetović**

Osijek, 2024.



# Sadržaj

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Pojmovi iz linearne algebre</b>                | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Krivulje</b>                                   | <b>5</b>  |
| 3.1      | Definicija i primjeri . . . . .                   | 5         |
| 3.2      | Regularna krivulja . . . . .                      | 6         |
| 3.3      | Frenetov trobrid . . . . .                        | 8         |
| 3.4      | Zakrivljenost i torzija . . . . .                 | 9         |
| 3.5      | Frenetove formule . . . . .                       | 11        |
| <b>4</b> | <b>Dodir između krivulja i ploha</b>              | <b>13</b> |
| <b>5</b> | <b>Oskulacijska kružnica i oskulacijska sfera</b> | <b>15</b> |
| <b>6</b> | <b>Lokus središta sferne zakrivljenosti</b>       | <b>21</b> |
| <b>7</b> | <b>Evolute i involute</b>                         | <b>29</b> |
|          | <b>Literatura</b>                                 | <b>39</b> |
|          | <b>Sažetak</b>                                    | <b>41</b> |
|          | <b>Summary</b>                                    | <b>43</b> |
|          | <b>Životopis</b>                                  | <b>45</b> |



# 1 | Uvod

U ovom radu, bavit ćemo se sfernom zakrivljenošću krivulje. To je ključan pojam u diferencijalnoj geometriji, grani geometrije koja se bavi proučavanjem svojstava krivulja i ploha. Razmatranje pojma sferne zakrivljenosti omogućuje dublje sagledavanje krivulja, ne samo u ravnini, već i na zakrivljenim površinama, poput sfere.

Analiza sferne zakrivljenosti ima širu primjenu u područjima kao što su navigacija, geodezija i astronomija, gdje je važno razumjeti kretanje duž zakrivljenih putanja u prostoru. Primjerice, veliki krugovi na sferi poput ekvatora i meridijana, definiraju najkraće putanje između dviju točaka na Zemljinoj površini, poznate kao geodetske krivulje. One su važne za planiranje i određivanje najoptimalnijih ruta u zračnom te pomorskom prometu. U astronomiji se nebeska tijela poput planeta, zvijezda i satelita kreću po zakrivljenim putanjama pod utjecajem gravitacijskih polja. Sferna zakrivljenost igra ključnu ulogu u analizi ovih orbita, budući da su mnoge od njih kružnog ili eliptičnog oblika. Zatim, sferna se zakrivljenost može primijeniti u računalnoj grafici. Prikaz zakrivljenih površina i modeliranje geometrijskih trodimenzionalnih objekata često uključuje analizu zakrivljenosti i sferne površine. Pomoću njih, moguće je stvoriti realistične zakrivljene oblike, kao i precizne animacije i simulacije. Nadalje, optički sustavi, poput teleskopa i mikroskopa, koriste sferne zakrivljene leće za fokusiranje svjetlosti i stvaranje točnih slika. U biomedicinskim istraživanjima, sferna zakrivljenost se koristi u modeliranju bioloških struktura, poput stanica, krvnih žila i drugih zakrivljenih površina unutar tijela. Primjerice, površina tkiva ili zakrivljenost kapilara može se analizirati pomoću geometrijskih tehnika sferne zakrivljenosti.

Cilj ovog rada je detaljno proučiti pojam sferne zakrivljenosti te analizirati njena svojstva. Također ćemo se osvrnuti na povezanost sferne zakrivljenosti s lokalnom teorijom krivulja u ravnini i prostoru te razmotriti nekoliko primjera koji će nam pomoći u boljem razumijevanju.

Rad je organiziran kako slijedi. U prvom poglavlju definiramo osnovne pojmove iz linearne algebre koji su ključni za daljnje razumijevanje rada. Navedene su definicije norme, skalarnog i vektorskog produkta. Zatim, u drugom poglavlju razvijamo lokalnu teoriju krivulja. Dane su definicije krivulje, regularne krivulje i Frenetovog trobrida. Definirali smo zakrivljenost i torziju te uveli Frenetove formule. U trećem poglavlju definiramo dodire između krivulja i ploha, pomoću kojih smo u idućem poglavlju definirali oskulacijsku kružnicu koja nam daje intuitivan uvid u ponašanje krivulje, te zatim i oskulacijsku sferu koja olakšava razumijevanje kretanja krivulje u prostoru. Peto poglavlje započinjemo odnosom između Frenetovog trobrida krivulje i Frenetovog trobrida lokusa sferne zakriv-

ljenosti, a potom smo izveli izraze za zakrivljenost i torziju lokusa sferne zakrivljenosti. U posljednjem poglavlju, obradili smo pojam evolute i involute krivulje.

## 2 | Pojmovi iz linearne algebre

Najprije ćemo navesti definicije osnovnih operacija s vektorima u trodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru  $\mathbb{R}^3$  kako bi bilo jednostavnije pratiti rad, [1].

**Definicija 1.** Neka su  $A = (x_1, y_1, z_1)$  i  $B = (x_2, y_2, z_2)$  dvije točke u prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Tada udaljenost dvaju točaka označavamo  $d(A, B)$  i računamo formulom

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Definicija 2.** Neka je  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  vektor čija je početna točka  $A = (x_1, y_1, z_1)$ , a krajnja točka  $B = (x_2, y_2, z_2)$ . Normu (duljinu) vektora definiramo kao udaljenost između njegove početne i krajnje točke te označavamo  $\|\vec{v}\| = d(A, B)$ . Dakle, norma vektora  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  dana je formulom

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Svaki se vektor može na jedinstven način prikazati preko vektora baze. Pri tom obično koristimo zapis:  $\vec{v} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , gdje je  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Tada vrijedi:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Prema tome, norma vektora  $\vec{v} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$  računa se formulom

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

**Definicija 3.** Neka su  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  i  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  vektori iz  $\mathbb{R}^3$  i  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ . Skalarni produkt (umnožak) vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  jednak je umnošku njihovih normi i kosinusa kuta između njih:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi.$$

Formula po kojoj se također računa skalarni produkt vektora  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$



**Definicija 4.** Vektorski umnožak dvaju vektora zadanih svojim komponentama  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  i  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  definira se pomoću determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

koja nam daje eksplicitni izraz

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

**Definicija 5.** Neka su dani vektori

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \\ \vec{c} &= c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}. \end{aligned}$$

Mješoviti produkt (umnožak) vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  je skalar  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  kojeg definiramo pomoću determinante

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

te dobivamo eksplicitnu formulu za računanje mješovitog produkta

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z.$$

Primijetimo, korištenjem formule za vektorski i skalarni produkt dobivamo isti izraz:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= [(a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}] \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z. \end{aligned}$$

## 3 | Krivulje

### 3.1 Definicija i primjeri

Krivulju možemo promatrati kao skup točaka smještenih u ravnini ili prostoru. Najjednostavnije krivulje koje znamo su pravac, parabola, kružnica, itd. Uobičajeni zapis krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gdje je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval, je pomoću vektorske jednadžbe

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

ili pomoću parametarske jednadžbe

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$

Kako bismo mogli promatrati svojstva krivulje, sada ćemo navesti definiciju krivulje u diferencijalnoj geometriji te uvesti osnovne pojmove vezane uz krivulje.

**Definicija 6.** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval. Glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazivamo *krivulja* (parametrizirana krivulja) u  $\mathbb{R}^n$ .

Fizikalna interpretacija parametrizirane krivulje jest trag koji čestica ostavlja pri gibanju prostorom, u vremenu  $t$ . Stoga, jednadžba  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  predstavlja položaj čestice koji se u trenutku  $t$  podudara s točkom  $(x(t), y(t), z(t))$ . Budući da u diferencijalnoj geometriji krivulje promatramo kao preslikavanje (funkciju), često ćemo koristiti derivacije funkcija. Za derivacije krivulje  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  koristit ćemo sljedeći zapis:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)). \quad (3.2)$$

**Definicija 7.** Vektor derivacije krivulje  $c$ , u oznaci  $\dot{c}(t)$ , naziva se *tangencijalni vektor* ili *vektor brzine* krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ . Skalar  $\|\dot{c}(t)\|$  nazivamo *brzinom* krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ .

**Primjer 1.** Pravac možemo zadati kao preslikavanje  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  izrazom

$$c(t) = p \cdot t + q, \quad p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Tada je tangencijalni vektor pravca  $\dot{c}(t) = p$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  i brzina pravca je konstanta.

**Primjer 2.** Kružnica u ravnini, radijusa  $r$  sa središtem u  $(p, q)$ , zadana je preslikavanjem  $c : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$c(t) = (p + r \sin t, q + r \cos t).$$

Tangencijalni vektor je  $\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ , a brzina kružnice jednaka je

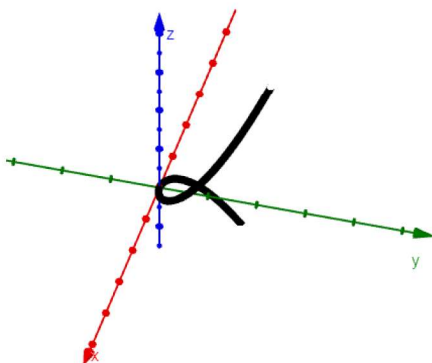
$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r.$$

Istaknimo da s prethodnim preslikavanjem zapravo nismo zadali cijelu kružnicu. Kako u definiciji krivulje domena mora biti otvoren skup, dobivenoj "kružnici" nedostaje točka  $(p, q + r)$ . Dakle, prethodnim preslikavanjem smo zapravo zadali dio kružnice.

**Primjer 3.** Prostorna kubna parabola zadana je kao preslikavanje  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$c(t) = (t, t^2, t^3).$$

Tangencijalni vektor je  $\dot{c}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ , a brzina kubne parabole iznosi  $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ .



Slika 3.1: Prostorna kubna parabola

## 3.2 Regularna krivulja

U ovom ćemo se poglavlju upoznati s važnim svojstvom krivulje – regularnošću. Regularnost je jedan od uvjeta za definiranje Frenetovog trobrida, koji predstavlja ključni element u proučavanju krivulja.

**Definicija 8.** Za krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  kažemo da je regularna u točki  $t \in I$  ako je  $\dot{c}(t) \neq 0$ . Ako je  $\dot{c}(t) \neq 0$  za svaki  $t \in I$ , onda krivulju nazivamo regularnom. Točku  $t \in I$  u kojoj je  $\dot{c}(t) = 0$  nazivamo singularnom.

Uvodeći pojam parametrizirane krivulje, nismo postavljali nikakve uvjete za parametar  $t$ , odnosno smatrali smo da je krivulja parametrizirana općim parametrom  $t$ . Međutim, krivulja se može parametrizirati i specijalnim parametrom, parametrom duljine luka. Prije nego što navedemo takvu parametrizaciju, prvo ćemo definirati duljinu luka krivulje i reparametrizaciju parametrizirane krivulje.

**Definicija 9.** Neka je  $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  otvoren interval. Duljina luka krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je realan broj

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(u)\| du.$$

**Napomena 1.** Za krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  kažemo da je parametrizirana duljinom luka ili da je jedinične brzine ako je  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ , za svaki  $t \in I$ .

Dakle, ako vrijedi  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ , za svaki  $t \in I$ , to znači da čestica po krivulji putuje jediničnom brzinom. Iz toga slijedi da je prijeđeni put (označimo ga sa  $s$ ) jednak proteklom vremenu (oznaka  $t$ ). Prema tome, može se smatrati da je krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$  umjesto vremenom  $t$ . Zbog toga dolazi naziv za takve krivulje i odgovarajuća oznaka. Naime, za krivulje parametrizirane duljinom luka uobičajeno je pisati  $c(s)$  umjesto  $c(t)$ , te  $c'(s)$  umjesto  $\dot{c}(t)$ .

Računski ćemo pokazati da za krivulje parametrizirane duljinom luka vrijedi da je duljina luka krivulje  $c$  jednaka duljini intervala  $I$ :

$$s(t) = \int_a^b \|\dot{c}(u)\| du = \int_a^b 1 \cdot du = b - a.$$

**Definicija 10.** Ako postoji glatki difeomorfizam  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  takav da vrijedi  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  tj.

$$\tilde{c}(\tilde{t}) = c(\varphi(\tilde{t})) = c(t), \tilde{t} \in \tilde{I}, t \in I,$$

tada se krivulja  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  naziva reparametrizacijom parametrizirane krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Napomena 2.** Ako je krivulja  $c$  regularna, onda je i njena reparametrizacija  $\tilde{c}$  također regularna.

Postavlja se pitanje kakve se krivulje mogu reparametrizirati duljinom luka. Odgovor nam daje idući teorem.

**Teorem 1.** (vidjeti [4, Teorem 21]) Svaka se regularna krivulja  $c$  može reparametrizirati duljinom luka (jediničnom brzinom).

*Dokaz:* Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja te neka je  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija duljine luka definirana sa

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{c}(u)\| du.$$

Deriviranjem funkcije duljine luka imamo:  $\dot{s}(t) = \|\dot{c}(t)\| > 0$  (zbog norme), pa slijedi da je  $s$  strogo rastuća funkcija.

Druga derivacija funkcije  $s$  postoji:

$$\ddot{s}(t) = \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|},$$

pa je  $s$  glatka i postoji inverz  $t = t(s)$  koji je također glatka funkcija. Vrijedi:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} > 0.$$

Definirajmo funkciju  $\tilde{c}(s) = c(t(s))$ , dakle, krivulju  $c$  reparametriziramo funkcijom  $t = t(s)$ . Preostaje pokazati da parametrizacija  $\tilde{c}$  ima jediničnu brzinu. Vrijedi:

$$\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \|\dot{c}(t) \cdot t'(s)\| = \|\dot{c}(t)\| \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} = 1.$$

□

### 3.3 Frenetov trobrid

Nakon što smo upoznali pojam krivulje, regularnosti, parametrizacije krivulje te uz poznavanje nekih osnovnih operacija s vektorima, možemo definirati polja Frenetovog trobrida za krivulje parametrizirane duljinom luka.

**Definicija 11.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna krivulja parametrizirana duljinom luka. Tangencijalno polje krivulje  $c$  definiramo formulom

$$\mathbf{t}(s) = c'(s).$$

Polje vektora glavnih normala definiramo kao

$$\mathbf{n}(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, \|c''(s)\| \neq 0,$$

a polje binormala kao

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

**Definicija 12.** Uređena trojka  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  zove se Frenetov trobrid krivulje  $c$  i čini desnu ortonormiranu bazu od  $\mathbb{R}_{c(s)}^3$ .

**Napomena 3.** Za  $s_0 \in I$ , vektore  $\mathbf{t}(s_0)$ ,  $\mathbf{n}(s_0)$  i  $\mathbf{b}(s_0)$  zovemo vektor tangente, vektor glavne normale i vektor binormale krivulje  $c$  u točki  $c(s_0)$ .

Pravce određene tim vektorima zovemo tangentom, glavnom normalnom i binormalom krivulje  $c$  u točki  $c(s_0)$ .

**Propozicija 1.** (vidjeti [4, Propozicija 30]) Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja za koju je  $c''(s) \neq 0$ , za svaki  $s \in I$ . Frenetov trobrid  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  je ortonormiran.

*Dokaz:* Potrebno je pokazati da su polja Frenetovog trobrida međusobno okomita, te da su jedinične duljine.

Pokažimo da su polja  $\mathbf{t}(s)$  i  $\mathbf{n}(s)$  okomita. Kako je  $c$  parametrizirana duljinom luka, vrijedi:

$$c'(s) \cdot c'(s) = (c'(s))^2 = 1.$$

Deriviranjem imamo:

$$2 \cdot c'(s) \cdot c''(s) = 0.$$

Slijedi:

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0.$$

Polje binormala  $\mathbf{b}(s)$  je okomito na  $\mathbf{t}(s)$  i  $\mathbf{n}(s)$  jer je definirano kao njihov vektorski produkt.

Preostaje pokazati da su polja Frenetovog trobrida jedinične duljine.

Uočimo da prema definiciji vrijedi  $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$  i  $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$ . Kako je polje binormala  $\mathbf{b}(s)$  definirano kao  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ , prema svojstvima vektorskog produkta imamo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}(s)\| &= \|\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\| = \|\mathbf{t}(s)\| \cdot \|\mathbf{n}(s)\| \cdot \sin \angle(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)) \\ &= \|\mathbf{t}(s)\| \cdot \|\mathbf{n}(s)\| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Time smo dokazali ortonormiranost Frenetovog trobrida. □

Sada ćemo definirati nazive za ravnine određene vektorima Frenetovog trobrida.

**Definicija 13.** *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja regularna u  $s \in I$ . Ravnina kroz točku  $c(s)$  razapeta vektorima:*

1.  $\mathbf{t}(s)$  i  $\mathbf{n}(s)$  naziva se oskulacijska ravnina u točki  $c(s)$ ,
2.  $\mathbf{t}(s)$  i  $\mathbf{b}(s)$  naziva se rektifikacijska ravnina u točki  $c(s)$ ,
3.  $\mathbf{n}(s)$  i  $\mathbf{b}(s)$  naziva se normalna ravnina u točki  $c(s)$ .

Obzirom da je Frenetov trobrid ortonormiran, slijedi da je  $\mathbf{t}(s)$  vektor normale normalne ravnine,  $\mathbf{n}(s)$  vektor normale rektifikacijske ravnine i  $\mathbf{b}(s)$  vektor normale oskulacijske ravnine.

## 3.4 Zakrivljenost i torzija

Definirajmo sada dvije veličine - fleksiju (zakrivljenost) i torziju (sukanje), pomoću kojih je moguće je zadati krivulju.

Naslućujemo da različite krivulje imaju različite zakrivljenosti. Primjerice, pravac kao ravna crta ima zakrivljenost jednaku 0, dok kružnica manjeg radijusa ima veću zakrivljenost od kružnice većeg radijusa. S druge strane, torzija opisuje koliko se krivulja "uvija" u prostoru.

**Propozicija 2.** (vidjeti [3, Propozicija 1.3.1.]) *Ako je tangencijalni vektor krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  konstantan, onda je krivulja pravac.*

*Dokaz:* Pretpostavimo da je  $\dot{c}(t) = a, a \in \mathbb{R}^n$ . Integracijom imamo:

$$c(t) = \int \dot{c}(t) dt = at + b, b \in \mathbb{R}^n.$$

Ako je  $a \neq 0$ , onda je krivulja  $c$  pravac s vektorom smjera  $a$  kroz točku  $b$ .

Ako je  $a = 0$ , onda  $c$  degenerira u točku. □

Ovom propozicijom možemo naslutiti da je geometrijski smisleno definirati zakrivljenost krivulje kao realnu funkciju koja opisuje promjenu jediničnog tangencijalnog vektora krivulje.

**Definicija 14.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Tada funkciju  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu izrazom

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

nazivamo zakrivljenost ili fleksija krivulje  $c$  u točki  $c(s)$ .

U nastavku ćemo za krivulje parametrizirane duljinom luka definirati i sljedeću funkciju:

**Definicija 15.** Funkcija  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  definirana izrazom

$$\tau(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)$$

naziva se torzija ili sukanje krivulje  $c$  parametrizirane duljinom luka  $s$ .

U primjeru koji slijedi ćemo razmotriti zakrivljenost kružnice i ovisnost zakrivljenosti  $\kappa$  o radijusu  $r$ .

**Primjer 4.** Zakrivljenost kružnice radijusa  $r > 0$  je konstantna i jednaka  $\frac{1}{r}$ .

Neka je  $c : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  kružnica zadana s  $c(t) = s + r \cos t \cdot r_1 + r \sin t \cdot r_2$ , pri čemu je  $s \in \mathbb{R}^3$  vektor središta kružnice, a  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$  ortonormirani vektori koji razapinju ravninu u kojoj leži kružnica  $c$ . Deriviranjem imamo:

$$\dot{c}(t) = -r \sin t \cdot r_1 + r \cos t \cdot r_2,$$

$$\ddot{c}(t) = -r \cos t \cdot r_1 - r \sin t \cdot r_2.$$

Sada je:

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = r^2 \sin^2 t \cdot (r_1 \times r_2) - r^2 \cos^2 t \cdot (r_2 \times r_1).$$

Kako je  $a \times b = -(b \times a)$ , slijedi:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) &= r^2 \cdot (r_1 \times r_2), \\ \|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| &= r^2 \cdot \|r_1 \times r_2\| = r^2, \\ \|\dot{c}(t)\|^2 &= \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) = r^2 \sin^2 t \cdot \|r_1\|^2 - 2r^2 \sin t \cos t (r_1 \cdot r_2) + r^2 \cos^2 t \cdot \|r_2\|^2 \\ &= r^2, \\ \Rightarrow \|\dot{c}(t)\|^3 &= r^3. \end{aligned}$$

Uvrstimo u formulu za zakrivljenost:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

i dobili smo da je zakrivljenost kružnice obrnuto proporcionalna radijusu kružnice.

### 3.5 Frenetove formule

U nastavku ćemo za krivulje parametrizirane duljinom luka  $s$  izvesti formule koje uspostavljaju odnos između vektorskih polja Frenetovog trobrida i njihovih derivacija, koje zajedničkim imenom zovemo Frenetove formule.

**Teorem 2** (Frenetove formule). (vidjeti [3, Teorem 1.3.7.]) Neka je  $c$  krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$  kojoj zakrivljenost  $\kappa$  ne iščezava i neka je  $\tau$  njezina torzija. Tada vrijedi:

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \tau(s) \cdot \mathbf{b}(s), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \mathbf{n}(s). \quad (3.5)$$

*Dokaz:* Neka je  $\mathbf{t}'(s) = a_1 \cdot \mathbf{t}(s) + a_2 \cdot \mathbf{n}(s) + a_3 \cdot \mathbf{b}(s)$ , gdje su  $a_1, a_2, a_3$  neke glatke realne funkcije.

Po definiciji normalnog vektorskog polja imamo:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)} \implies \mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s).$$

Zbog jedinstvenosti prikaza vektora pomoću vektora baze, slijedi:  $a_1 = a_3 = 0, a_2 = \kappa(s)$  i time smo pokazali izraz (3.3).

Neka je sada  $\mathbf{n}'(s) = b_1 \cdot \mathbf{t}(s) + b_2 \cdot \mathbf{n}(s) + b_3 \cdot \mathbf{b}(s)$ . Pomnožimo li ovaj izraz skalarno s  $\mathbf{n}(s)$ , dobivamo  $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) = b_2$ . Kako je  $\mathbf{n}(s)$  jedinično polje,  $\mathbf{n}^2(s) = 1$ , deriviranjem je  $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) = 0$ . Sada slijedi  $b_2 = 0$ .

Nadalje, primjetimo da iz  $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0$  deriviranjem slijedi:

$$\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) = 0 \implies \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) = -\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) = -a_2 = -\kappa(s).$$

Prema tome je  $b_1 = -\kappa(s)$ .

Zatim,  $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0$ , pa deriviranjem imamo:

$$\mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{b}(s) + \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0 \implies \mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{b}(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}'(s) = \tau(s).$$

Zaključujemo:  $b_3 = \tau(s)$  i pokazali smo izraz (3.4).

Neka je  $\mathbf{b}'(s) = c_1 \cdot \mathbf{t}(s) + c_2 \cdot \mathbf{n}(s) + c_3 \cdot \mathbf{b}(s)$ . Skalarnim množenjem  $\mathbf{b}(s)$ , imamo  $c_3 = \mathbf{b}(s)' \cdot \mathbf{b}(s)$ , a kako je  $\mathbf{b}(s)$  jedinično polje, slijedi  $c_3 = 0$ . Iz definicije torzije  $\tau(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)$ , slijedi  $c_2 = -\tau(s)$ . Kako je  $c_1 = \mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{t}(s)$ , deriviranjem izraza  $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$ , imamo

$$\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = -\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0 \implies c_1 = 0.$$

Time smo pokazali izraz (3.5) i dokazali ovaj teorem. □





## 4 | Dodir između krivulja i ploha

Neka je dana krivulja  $\mathbf{r}(u) = (f(u), g(u), h(u))$  i neka je  $S$  ploha  $F(x, y, z) = 0$ . Pretpostavimo da su krivulja  $c$  i ploha  $S$  klase  $C^\infty$ , odnosno da  $\mathbf{r}(u)$  i  $F(x, y, z)$  imaju neprekidne derivacije  $n$ -tog reda za svaki prirodan broj  $n$ . Iz jednadžbe krivulje uzimamo  $x = f(u), y = g(u), z = h(u)$ . Ako ova točka leži na plohi, imamo  $F(f(u), g(u), h(u)) = 0$ , što je jednadžba po  $u$  koja nam daje točke presjeka krivulje i plohe.

U nastavku ćemo definirati dodir između krivulja i ploha. Neka  $u_0$  bude jedno rješenje jednadžbe  $F(u) = 0$ . Budući da  $F(u)$  ima neprekidne derivacije dovoljno visokog reda,  $F(u)$  možemo zapisati u obliku reda potencija u okolini točke  $u = u_0$ ,

$$F(u) = F(u_0) + \frac{(u - u_0)}{1!} F'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!} F''(u_0) + \dots + \frac{(u - u_0)^n}{n!} F^n(u_0) + O(u - u_0)^{n+1},$$

što uz zamjenu  $h = u - u_0$  možemo zapisati kao:

$$F(u) = hF'(u_0) + \frac{h^2}{2!} F''(u_0) + \frac{h^3}{3!} F'''(u_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} F^n(u_0) + O(h^{n+1}),$$

gdje  $O(h^{n+1})$  označava red ostatka koji sadrži članove višeg reda od  $n$ -tog.

**Definicija 16.** *Ako je  $F'(u_0) \neq 0$ , tada je  $u_0$  jednostruka nultočka funkcije  $F(u) = 0$ . Tada kažemo da krivulja  $c$  i ploha  $S$  imaju presjek u  $\mathbf{r}(u_0)$ .*

**Definicija 17.** *Ako je  $F'(u_0) = 0$  i  $F''(u_0) \neq 0$ , tada je  $u_0$  dvostruka nultočka funkcije  $F(u) = 0$ . Tada kažemo da krivulja  $c$  i ploha  $S$  imaju dodir 1. reda u  $\mathbf{r}(u_0)$ .*

**Definicija 18.** *Ako je  $F'(u_0) = F''(u_0) = 0$  i  $F'''(u_0) \neq 0$ , kažemo da krivulja  $c$  i ploha  $S$  imaju dodir 2. reda u  $\mathbf{r}(u_0)$ . Pod tim uvjetima,  $u_0$  je trostruka nultočka funkcije  $F(u) = 0$ .*

Ranije smo uveli definiciju oskulacijske ravnine kao ravnine koja je određena vektorima  $\mathbf{t}$  i  $\mathbf{n}$ . Prva derivacija položaja krivulje daje tangentu, dok druga derivacija položaja daje normalu. Dokažimo sada važno svojstvo da oskulacijska ravnina ima dodir 2. reda s krivuljom u danoj točki.

**Teorem 3.** *(vidjeti [5, Teorem 1.10.2]) Oskulacijska ravnina u bilo kojoj točki  $P$  ima dodir 2. reda s krivuljom u toj točki  $P$ .*

*Dokaz:* Neka je  $P$  bilo koja točka na krivulji i neka se duljina luka mjeri od točke  $P$  tako da je  $s = 0$  u točki  $P$ . Neka je jednačba krivulje  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ .

Za oskulacijsku ravninu u točki  $P$  mora vrijediti:

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)) \cdot (\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)) = 0,$$

zapisano pomoću determinante:

$$\det(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0), \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}''(0)) = 0.$$

Neka je

$$F(s) = \det(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0), \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}''(0)).$$

Trebamo pokazati da je  $F'(s) = F''(s) = 0$  i  $F'''(s) \neq 0$  u  $P$  gdje je  $s = 0$  i time ćemo dokazati da oskulacijska ravnina ima dodir 2. reda s krivuljom. Razvojem  $\mathbf{r}(s)$  u Taylorov red u okolini točke  $P$ , dobivamo:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \frac{\mathbf{r}'(0)}{1!}s + \frac{\mathbf{r}''(0)}{2!}s^2 + \frac{\mathbf{r}'''(0)}{3!}s^3 + O(s^4).$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} F(s) &= \det\left(\frac{s\mathbf{r}'(0)}{1!} + \frac{\mathbf{r}''(0)}{2!}s^2 + \frac{\mathbf{r}'''(0)}{3!}s^3, \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}''(0)\right) \\ &= s \det\left(\frac{\mathbf{r}'(0)}{1!}, \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'''(0)\right) + \frac{s^2}{2!} \det\left(\mathbf{r}''(0), \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}''(0)\right) \\ &\quad + \frac{s^3}{3!} \det\left(\mathbf{r}'''(0), \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}''(0)\right). \end{aligned}$$

Prva dva izraza iščezavaju. Koristeći  $\kappa\tau = \det(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$  u prethodnom izrazu, dobivamo:

$$F(s) = -\frac{\kappa^2\tau}{6}s^3. \quad (4.1)$$

Dakle, vrijedi  $F'(0) = 0$ ,  $F''(0) = 0$  i  $F'''(0) = -\kappa^2\tau \neq 0$  pod uvjetom da  $\kappa$  i  $\tau$  ne iščezavaju u  $P$ . Ovo dokazuje da općenito krivulje i oskulacijska ravnina imaju dodir 2. reda u  $P$ .  $\square$

**Napomena 4.** U slučaju da je  $\kappa = 0$  ili  $\tau = 0$ , tada je  $F'''(0) = 0$ , tako da ravnina mora imati najmanje dodir 3. reda s krivuljom.

## 5 | Oskulacijska kružnica i oskulacijska sfera

Kada proučavamo geometriju prostornih krivulja, važno je razumjeti kako se krivulja ponaša u neposrednoj okolini svake svoje točke. Ranije smo definirali zakrivljenost, jedan od ključnih alata za analizu lokalnih svojstava krivulje. U sljedećem poglavlju, definirat ćemo oskulacijsku kružnicu, odnosno korisni geometrijski objekt koji daje intuitivan uvid u ponašanje krivulje. Oskulacijska kružnica također poznata i kao kružnica zakrivljenosti, pruža najbližu aproksimaciju krivulje u malom području oko zadane točke. Drugim riječima, to je kružnica koja "najbolje prati" krivulju u toj točki.

**Definicija 19.** *Neka je  $\gamma$  dana prostorna krivulja, a  $P$  bilo koja točka na njoj. Kružnicu koja ima dodir 2. reda s prostornom krivuljom u točki  $P$  zovemo oskulacijska kružnica krivulje  $\gamma$  u točki  $P$ .*

**Definicija 20.** *Polupromjer oskulacijske kružnice naziva se polupromjer zakrivljenosti krivulje u točki  $P$  i označava se s  $\rho$ . Središte oskulacijske kružnice naziva se središte zakrivljenosti u točki  $P$ .*

Koristeći gore navedene definicije, primjećujemo sljedeća svojstva oskulacijske kružnice:

1. Budući da oskulacijska ravnina također ima dodir 2. reda s krivuljom u točki  $P$ , oskulacijska kružnica leži u oskulacijskoj ravnini.
2. Kako kružnica zakrivljenosti i krivulja imaju istu tangentu u točki  $P$  koja leži u oskulacijskoj ravnini, središte kružnice leži na glavnoj normalnoj u točki  $P$ .

**Teorem 4.** *(vidjeti [5, Teorem 1.11.1]) Polupromjer oskulacijske kružnice u točki  $P$  je recipročan zakrivljenosti krivulje u točki  $P$ , a vektor položaja središta oskulacijske kružnice je  $\mathbf{c}(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)$ , gdje je  $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ .*

*Dokaz:* Neka  $\mathbf{c}(s)$  bude vektor položaja središta oskulacijske kružnice, uz duljinu luka  $s$  kao parametar. Središte  $\mathbf{c}(s)$  je na udaljenosti  $\rho(s)$  od točke  $P$  duž glavne normale u  $P$ . Dakle, imamo  $\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s) = \rho(s)\mathbf{n}(s)$ . Stoga je njegova jednadžba  $(\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{n}(s) = \rho(s)$ . Dokazujemo da je  $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ .

Budući da bilo koja točka  $\mathbf{r}(s)$  na oskulacijskoj kružnici zadovoljava jednadžbu sfere  $(\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s))^2 = \rho^2(s)$  i leži u oskulacijskoj ravnini, oskulacijska kružnica je presjek oskulacijske ravnine i sfere  $(\mathbf{c}(s) - \mathbf{R}(s))^2 = \rho^2(s)$ , gdje je  $\mathbf{R}(s)$  vektor

položaja bilo koje točke na sferi.

Ako je  $\mathbf{r}(s)$  točka presjeka ove sfere i krivulje, sfera ima dodir 2. reda s krivuljom u  $\mathbf{r}(s)$ .

Neka točka presjeka bude  $F(s) = (\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s))^2 - \rho^2(s)$ . Uvjeti za dodir 2. reda su:

$$F(s) = 0, F'(s) = 0, F''(s) = 0. \quad (5.1)$$

Iz  $F'(s) = 0$  dobivamo:  $(\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$ .

Deriviranjem prethodnog izraza slijedi:  $(\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{t}'(s) - \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$ .

Budući da je  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$  i  $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$ , imamo:

$$(\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s)) \cdot \kappa(s)\mathbf{n}(s) = 1. \quad (5.2)$$

Uspoređujući (5.2) s jednadžbom oskulacijske kružnice  $(\mathbf{c}(s) - \mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{n}(s) = \rho(s)$ , dobivamo

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

□

Jedan od važnih pojmova koje ćemo u nastavku definirati je oskulacijska sfera. Dok oskulacijska kružnica pruža najbolju aproksimaciju krivulje u malom području oko točke dodira, oskulacijska sfera ide korak dalje. Ova sfera ne samo da dodiruje krivulju u toj točki, već dijeli i zakrivljenost i torziju krivulje, pružajući još precizniju aproksimaciju nego oskulacijska kružnica. Oskulacijska sfera daje uvid u trodimenzionalnu prirodu krivulje i pomaže nam razumjeti kako se krivulja savija i okreće u prostoru.

**Definicija 21.** Sfera koja ima dodir 3. reda s krivuljom u točki  $P$  naziva se oskulacijska sfera u točki  $P$  na krivulji.

**Definicija 22.** Središte oskulacijske sfere naziva se središtem sferne zakrivljenosti, a njen polumjer naziva se polumjerom sferne zakrivljenosti.

**Teorem 5.** (vidjeti [5, Teorem 1.11.2]) Ako je  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  zadana krivulja  $\gamma$ , tada su središte  $C$  i polumjer  $R$  sferne zakrivljenosti u točki  $P$  na krivulji dani sa:

$$C(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s) + \sigma(s)\rho'(s)\mathbf{b}(s),$$

$$R(s) = \sqrt{\rho^2(s) + \sigma^2(s)\rho'^2(s)},$$

gdje je  $\mathbf{n}(s)$  glavna normala,  $\mathbf{b}(s)$  binormala,  $\rho(s)$  polumjer zakrivljenosti.

*Dokaz:* Radi jednostavnosti zapisa, u dokazu ćemo izostaviti parametar  $s$ .

Ako je  $C$  središte, a  $R$  polumjer oskulacijske sfere, tada je njena jednadžba  $(C - \mathbf{T})^2 = R^2$ , gdje je  $\mathbf{T}$  vektor položaja bilo koje točke na sferi. Točke presjeka krivulje i sfere dane su s:  $F(s) = (C - \mathbf{r})^2 - R^2 = 0$ . Obzirom da sfera ima dodir 3. reda s  $\gamma$  u točki  $P$ , uvjeti koje treba zadovoljavati su

$F(s) = F'(s) = F''(s) = F'''(s) = 0$ , odakle slijede jednađžbe:

$$F'(s) = 0 \quad \text{daje:} \quad (C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (5.3)$$

$$F''(s) = 0 \quad \text{daje:} \quad (C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}' - 1 = 0. \quad (5.4)$$

Znamo da je  $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$ , pa imamo:  $(C - \mathbf{r}) \cdot \kappa \mathbf{n} = 1$ . Sada je  $(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}$ .  
Iz  $F'''(s) = 0$  slijedi:

$$(C - \mathbf{r}) \cdot [\kappa' \mathbf{n} + \kappa(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t})] = 0, \quad (5.5)$$

iz čega dobivamo:  $\kappa'(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} - \kappa^2(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} + \kappa\tau(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Koristeći (5.3) i (5.4) u (5.5) imamo:

$$\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa\tau(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Neka je  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  i  $\sigma = \frac{1}{\tau}$ . Tada je  $\rho' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}$  i u prethodnoj jednađžbi imamo:

$$(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = \rho'\sigma. \quad (5.6)$$

Iz (5.3), (5.4) i (5.6) imamo:

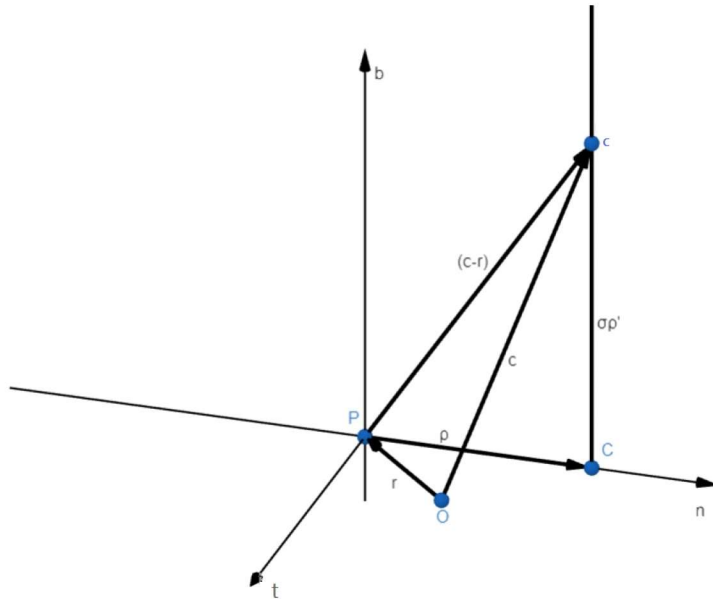
$$(C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \rho, \quad (C - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = \rho'\sigma.$$

Gornje jednađžbe pokazuju da vektor  $(C - \mathbf{r})$  leži u normalnoj ravnini, a njegove komponente duž normale i binormale su  $\rho$  i  $\rho'\sigma$ . Dakle, možemo zapisati  $(C - \mathbf{r})$  kao:  $(C - \mathbf{r}) = \rho \mathbf{n} + \rho'\sigma \mathbf{b}$ . Stoga je središte oskulacijske sfere:  $C = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \rho'\sigma \mathbf{b}$ . Polumjer  $R$  oskulacijske sfere je dan kao:

$$R^2 = (C - \mathbf{r})^2 = (\rho \mathbf{n} + \rho'\sigma \mathbf{b}) \cdot (\rho \mathbf{n} + \rho'\sigma \mathbf{b}) = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2.$$

Dakle:  $R = \sqrt{\rho^2 + (\rho'\sigma)^2}$ .

□



Slika 5.1: Grafički prikaz središta oskulacijske sfere

Kao što vidimo na grafičkom prikazu, središte oskulacijske sfere leži u normalnoj ravnini na pravcu paralelnom s binormalom koja se naziva polarna os. Presjek sfere s oskulacijskom ravninom je oskulacijska kružnica.

**Napomena 5.** Kada je  $\kappa$  konstanta,  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  je također konstanta i vrijedi  $\rho' = 0$ , a kako je  $R = \sqrt{\rho^2 + (\rho'\sigma)^2}$ , tada vrijedi  $R = \rho$ . Dakle, za krivulju konstantne zakrivljenosti, središte zakrivljenosti i središte sferne zakrivljenosti se podudaraju te vrijedi:  $\mathbf{c} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$ . Primjer prethodne situacije je obična cilindrična spirala, kod koje je  $\rho$  konstanta pa je polumjer sferne zakrivljenosti obične cilindrične spirale jednak polumjeru zakrivljenosti.

**Primjer 5.** Ako je radijus sferne zakrivljenosti konstantan, dokažite da krivulja leži na sferi ili ima konstantnu zakrivljenost. Radijus sferne zakrivljenosti dan je s

$$R^2 = \rho^2 + (\sigma\rho')^2.$$

Kako je  $R$  konstanta, deriviranjem prethodnog izraza dobivamo

$$2\rho' \left[ \rho + \sigma \frac{d}{ds} (\sigma\rho') \right] = 0. \quad (5.7)$$

Dakle, vrijedi da je  $\rho' = 0$  ili  $\rho + \sigma \frac{d}{ds} (\sigma\rho') = 0$ .

Ako je  $\rho' = 0$ , tada je  $\rho$  konstanta, odnosno krivulja ima konstantnu zakrivljenost.

U slučaju kada je  $\rho + \sigma \frac{d}{ds} (\sigma\rho') = 0$ , trebamo dokazati da krivulja leži na sferi.

Ako krivulja leži na sferi, oskulacijska sfera u svakoj točki krivulje je ta zadana sfera. Dakle, dovoljno je pokazati da je oskulacijska sfera ista u svakoj točki krivulje.

Budući da je radijus sferne zakrivljenosti konstantan, oskulacijska sfera ima isti radijus

u svakoj točki krivulje. Dakle, pokazat ćemo da je središte oskulacijske sfere fiksna točka određena konstantnim vektorom položaja.

Vektor položaja središta sferne zakrivljenosti je  $C = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \sigma \rho' \mathbf{b}$ .

Deriviramo izraz po  $s$  i dobivamo:

$$\frac{dC}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \rho' \mathbf{n} + \rho \frac{d\mathbf{n}}{ds} + \mathbf{b} \frac{d}{ds}(\sigma \rho') + \sigma \rho' \frac{d\mathbf{b}}{ds}.$$

Iskoristimo:  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  i  $\sigma = \frac{1}{\tau}$  te imamo:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{ds} &= \mathbf{t} + \rho' \mathbf{n} + \rho(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) + \mathbf{b} \frac{d}{ds}(\sigma \rho') + \sigma \rho'(-\tau \mathbf{n}) \\ &= \left[ \frac{\rho}{\sigma} + \frac{d}{ds}(\sigma \rho') \right] \mathbf{b}, \end{aligned}$$

a to je jednako 0 prema (5.7).

Prema tome,  $C$  je konstantan, što pokazuje da je središte oskulacijske sfere neovisno o položajima točaka na krivulji. Dakle, oskulacijska sfera u svakoj točki krivulje je ista sfera, što znači da krivulja leži na sferi.





## 6 | Lokus središta sferne zakrivljenosti

Ako krivulja ne leži na sferi, središta sferne zakrivljenosti razlikuju se u točkama krivulje. Stoga je prirodno proučiti lokus središta sferne zakrivljenosti zadane krivulje. Neka je  $c$  dana krivulja, a  $c_1$  lokus središta sferne zakrivljenosti. Nakon što odredimo odnos između Frenetovog trobrida  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  krivulje  $c$  i Frenetovog trobrida  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_1)$  krivulje  $c_1$ , izrazit ćemo zakrivljenost i torziju  $c_1$  u terminima onih od  $c$ . U indeksu ćemo koristiti oznaku 1 za veličine koje se odnose na  $c_1$  kako bismo ih razlikovali od odgovarajućih veličina za krivulju  $c$ .

**Teorem 6.** (vidjeti [5, Teorem 1.12.1]) Neka je  $c$  dana krivulja, a  $c_1$  lokus središta sferne zakrivljenosti. Tada vrijedi:

1.  $\mathbf{t}_1(s_1) = e\mathbf{b}(s)$ ,  $\mathbf{n}_1(s_1) = e_1\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}_1(s_1) = -ee_1\mathbf{t}(s)$ , gdje  $e, e_1 \in \{-1, 1\}$ .
2. Umnožak torzija u odgovarajućim točkama jednak je umnošku zakrivljenosti.

*Dokaz:* Radi jednostavnosti zapisa, izostavit ćemo parametre  $s$  i  $s_1$ . Podrazumijeva se da su  $c$  i  $c_1$  parametrizirane duljinom luka, osim ako nije navedeno drugačije. Vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  središta sferne zakrivljenosti dan je izrazom:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n} + \sigma\rho'\mathbf{b}. \quad (6.1)$$

Odabirući duljinu luka kao parametar i derivirajući (6.1) po  $s$ , dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} &= \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{d}{ds} (\mathbf{r} + \rho\mathbf{n} + \rho'\sigma\mathbf{b}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\mathbf{n} + \rho\frac{d\mathbf{n}}{ds} + \frac{d(\rho'\sigma)}{ds}\mathbf{b} + \rho'\sigma\frac{d\mathbf{b}}{ds} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \rho'\mathbf{n} + \rho\mathbf{n}' + (\rho''\sigma\mathbf{b} + \rho'\sigma'\mathbf{b}) + \rho'\sigma\mathbf{b}'. \end{aligned}$$

Primjenom Frenetovih formula, dobivamo:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \rho'\mathbf{n} + \rho(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (\rho''\sigma + \rho'\sigma')\mathbf{b} + \rho'\sigma(-\tau\mathbf{n}).$$

Ako uzmemo u obzir da je  $\mathbf{t}_1$  tangencijalni vektor od  $c_1$ , možemo pisati:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1}.$$

Stoga je  $\mathbf{t}_1 s'_1 = (\frac{\rho}{\sigma} + \rho' \sigma' + \sigma \rho'') \mathbf{b}$  tako da je  $\mathbf{t}_1$  paralelan s vektorom  $\mathbf{b}$ . Krivulja  $c_1$  je parametrizirana duljinom luka  $s$  i  $s_1$  je funkcija od  $s$  pa je  $s'_1$  nenegativna. Možemo pisati:

$$\mathbf{t}_1 = e \mathbf{b} \quad \text{gdje je } e \in \{-1, 1\}. \quad (6.2)$$

Stoga ako uzmemo  $\mathbf{t}_1 = e \mathbf{b}$  imamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} &= e \mathbf{b} \frac{ds_1}{ds} \\ &= e \mathbf{b} s'_1. \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$s'_1 = e \left( \frac{\rho}{\sigma} + \rho' \sigma' + \sigma \rho'' \right).$$

Dakle:

$$\mathbf{t}_1 = e \mathbf{b} \quad \text{gdje je } e \in \{-1, 1\}. \quad (6.3)$$

Derivirajući dobiveni izraz za  $\mathbf{t}_1$  po  $s$ , dobivamo:

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{d}{ds}(e \mathbf{b}) = e \frac{d\mathbf{b}}{ds}.$$

Iz Frenetovih formula slijedi:

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = e(-\tau \mathbf{n}) = -e\tau \mathbf{n}.$$

Kako je

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} = \kappa_1 \mathbf{n}_1,$$

imamo:

$$\kappa_1 \mathbf{n}_1 s'_1 = -e\tau \mathbf{n}, \quad (6.4)$$

pa je  $\mathbf{n}_1$  paralelan s  $\mathbf{n}$  i možemo pisati:

$$\mathbf{n}_1 = e_1 \mathbf{n} \quad \text{gdje je } e_1 \in \{-1, 1\}. \quad (6.5)$$

Koristeći  $\mathbf{n}_1 = e_1 \mathbf{n}$  u (6.4), imamo:

$$e_1 \kappa_1 s'_1 = -e\tau. \quad (6.6)$$

Nadalje

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1 = e \mathbf{b} \times e_1 \mathbf{n} = -e e_1 \mathbf{t}. \quad (6.7)$$

Stoga (6.3), (6.5) i (6.7) dokazuju prvi dio ovog teorema.

Kako bi dokazali drugu tvrdnju, pronađimo  $\tau'_1$  i  $\kappa'_1$ :

$$\frac{d\mathbf{b}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{b}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = -e e_1 \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -e e_1 \kappa \mathbf{n}. \quad (6.8)$$

Prema Frenetovim formulama slijedi:  $\tau_1 \mathbf{n}_1 s_1' = e e_1 \kappa \mathbf{n}$ .  
Kako je  $\mathbf{n}_1 = e_1 \mathbf{n}$ , imamo:

$$\tau_1 s_1' = e \kappa. \quad (6.9)$$

Iz (6.4) i (6.9) dobivamo:  $e \tau \tau_1 s_1' = e \tau e \kappa = -e \kappa e_1 \kappa_1 s_1'$  iz čega slijedi:  $\tau \tau_1 = -e_1 \kappa \kappa_1$ . Ako uzmemo  $e_1 = -1$ , imamo  $\tau \tau_1 = \kappa \kappa_1$ , čime smo dokazali drugu tvrdnju teorema.  $\square$

**Napomena 6.** Ako je  $c$  krivulja konstantne zakrivljenosti, tada je  $\rho' = 0$ . Kao što smo već zaključili, tada se središte sferne zakrivljenosti i središte zakrivljenosti podudaraju. Koristeći  $\rho' = 0$ , dobivamo:

$$\frac{ds_1}{ds} = e \frac{\rho}{\sigma} = e \frac{\tau}{\kappa}, \quad \text{gdje je } e \in \{-1, 1\}.$$

Pomoću izraza (6.6) iz dokaza prethodnog teorema,  $e_1 \kappa_1 s_1 = -e \tau$ , uvrstimo izraz za  $s_1$  te dobivamo  $e_1 \kappa_1 = -\kappa$ .

Ako uzmemo  $e_1 = -1$ , imamo

$$\kappa_1 = \kappa.$$

Također pomoću izraza (6.9) iz dokaza teorema, znamo da vrijedi  $\tau_1 s_1 = e \kappa$  te uvrštavamo izraz za  $s_1$ . Imamo:

$$\tau_1 = \frac{\kappa^2}{\tau}.$$

**Napomena 7.** Kao specijalni slučaj prethodnog teorema imamo: Ako mjerimo duljinu luka  $s_1$  od  $c_1$  u onom smjeru koji čini njegov jedinični tangencijalni vektor  $\mathbf{t}_1$  istog smjera kao  $\mathbf{b}$ , tada je  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{b}$ . Možemo izabrati smjer od  $\mathbf{n}_1$  suprotan od  $\mathbf{n}$  tako da je  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ . S ovim izborom imamo  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}$ .

U nastavku ćemo izvesti formulu za radijus zakrivljenosti  $\rho_1$  lokusa središta zakrivljenosti, koristeći radijus sferne zakrivljenosti  $R$  i druge geometrijske parametre krivulje. Ova formula omogućava dublje razumijevanje odnosa između zakrivljenosti krivulje i zakrivljenosti lokusa središta zakrivljenosti.

**Teorem 7.** (vidjeti [5, Teorem 1.12.2]) Radijus zakrivljenosti  $\rho_1$  lokusa središta zakrivljenosti jednak je

$$\rho_1(s_1) = \left[ \left\{ \frac{\rho^2(s) \sigma(s)}{R^3(s)} \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma(s) \rho'(s)}{\rho(s)} \right) - \frac{1}{R(s)} \right\}^2 + \frac{\rho'^2(s) \sigma^4(s)}{\rho^2(s) R^4(s)} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

gdje je  $R(s)$  radijus sferne zakrivljenosti.

*Dokaz:* Koristit ćemo oznaku  $s$  brojem 1 u indeksu za veličine koje se odnose na lokus središta zakrivljenosti  $c_1$ . Također, radi jednostavnosti zapisa, izostavit ćemo parametre  $s$  i  $s_1$ .

Prema Teoremu 4., vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  središta zakrivljenosti je:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n}.$$

Derivirajmo prethodni izraz duljinom luka  $s$ :

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \rho' \mathbf{n} + \rho \frac{d\mathbf{n}}{ds}. \quad (6.10)$$

Iskoristimo Frenetove formule te imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 s_1' &= \mathbf{t} + \rho' \mathbf{n} + \rho(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) \\ \mathbf{t}_1 s_1' &= (1 - \rho\kappa) \mathbf{t} + \rho' \mathbf{n} + \rho\tau \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Koristeći  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  i  $\sigma = \frac{1}{\tau}$ , slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 s_1' &= \sigma' \mathbf{n} + \sigma \frac{1}{\sigma} \mathbf{b} \\ \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s_1' &= \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} + \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Skalarni produkt sa samim sobom daje:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s_1' \cdot \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s_1' &= \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} + \mathbf{b} \right) \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} + \mathbf{b} \right) \\ &= \left( \frac{\sigma^2}{\rho^2} (\rho')^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right) + 2 \frac{\sigma}{\rho} \rho' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \left( \frac{\sigma^2}{\rho^2} (\rho')^2 \right) + 1 \\ &= \frac{\sigma^2 \rho'^2 + \rho^2}{\rho^2} \\ &= \frac{R^2}{\rho^2}, \end{aligned}$$

gdje je  $R$  polumjer sferne zakrivljenosti.

Dakle, imamo:  $\frac{\sigma}{\rho} s_1'^2 = \frac{R^2}{\rho^2}$ , odakle slijedi:  $s_1' = \frac{R}{\sigma}$ .

Deriviranjem izraza (6.11), dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\rho} s_1' \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} + \mathbf{t}_1 \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s_1' \right) &= \frac{\sigma}{\rho} \rho' \frac{d\mathbf{n}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{b}}{ds} \\ \frac{\sigma}{\rho} s_1'^2 \kappa_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{t}_1 \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s_1' \right) &= \frac{\sigma}{\rho} \rho' [\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}] + \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \mathbf{n} - \tau \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\frac{\sigma}{\rho} s_1'^2 \kappa_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{t}_1 \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s_1' \right) = -\frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{t} + \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) - \frac{1}{\sigma} \right] \mathbf{n} + \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{b}. \quad (6.12)$$

Pomnožimo sada vektorski izraze (6.11) i (6.12). Raspišemo lijevu stranu izraza:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s'_1 \times \left( \frac{\sigma}{\rho} s_1'^2 \kappa_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{t}_1 \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \right) \right) \\
&= \left( \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s'_1 \right) \times \left( \frac{\sigma}{\rho} s_1'^2 \kappa_1 \mathbf{n}_1 \right) + \left( \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s'_1 \right) \times \left( \mathbf{t}_1 \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \right) \right) \\
&= \left( \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s'_1 \right) \times \left( \frac{\sigma}{\rho} s_1'^2 \kappa_1 \mathbf{n}_1 \right) \\
&= \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^2 s_1'^3 \kappa_1 (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1) \\
&= \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^2 s_1'^3 \kappa_1 \mathbf{b}_1,
\end{aligned}$$

zatim raspišemo desnu stranu izraza:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} + \mathbf{b} \right) \times \left( -\frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{t} + \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) - \frac{1}{\sigma} \right] \mathbf{n} + \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{b} \right) \\
&= \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} \right) \times \left( -\frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{t} \right) + \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} \right) \times \left( \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) - \frac{1}{\sigma} \right] \mathbf{n} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} \right) \times \left( \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{b} \right) + \mathbf{b} \times \left( -\frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{t} \right) \\
&\quad + \mathbf{b} \times \left( \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) - \frac{1}{\sigma} \right] \mathbf{n} \right) + \mathbf{b} \times \left( \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{b} \right) \\
&= \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^3} \mathbf{b} - \frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{n} + \frac{\rho'^2 \sigma}{\rho^2} \mathbf{t} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{t} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \mathbf{t} \\
&= \left[ \frac{\rho'^2 \sigma^2 + \rho^2}{\rho^2 \sigma} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right] \mathbf{t} - \frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{n} + \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^3} \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\frac{\sigma^2}{\rho^2} s_1'^3 \kappa_1 \mathbf{b}_1 = \left[ \frac{\rho'^2 \sigma^2 + \rho^2}{\rho^2 \sigma} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right] \mathbf{t} - \frac{\sigma}{\rho^2} \rho' \mathbf{n} + \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^3} \mathbf{b}.$$

Uzimajući skalarni produkt obje strane sa samima sobom, imamo:

$$\frac{\sigma^4}{\rho^4} s_1'^6 \kappa_1^2 = \left[ \frac{\rho'^2 \sigma^2 + \rho^2}{\rho^2 \sigma} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right]^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^4} \rho'^2 + \frac{\sigma^4 \rho'^4}{\rho^6}.$$

Uvrstimo ranije dobiveni  $s'_1 = \frac{R}{\sigma}$  i dobivamo:

$$\frac{\sigma^4 R^6}{\rho^4 \sigma^6} \kappa_1^2 = \left[ \left\{ \frac{R^2}{\rho^2 \sigma} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right\}^2 + \frac{\rho'^2 \sigma^2}{\rho^6} \cdot R^2 \right].$$

Zatim imamo:

$$\begin{aligned}\kappa_1^2 &= \frac{\rho^4 \sigma^2}{R^6} \left[ \left\{ \frac{R^2}{\rho^2 \sigma} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right\}^2 + \frac{\rho'^2 \sigma^2}{\rho^6} \cdot R^2 \right] \\ \kappa_1 &= \frac{\rho^2 \sigma}{R^3} \left[ \left\{ \frac{R^2}{\rho^2 \sigma} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right\}^2 + \frac{\rho'^2 \sigma^2}{\rho^6} \cdot R^2 \right] \\ \kappa_1 &= \left[ \left\{ \frac{1}{R} - \frac{\rho^2 \sigma}{R^3} \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} \rho' \right) \right\}^2 + \frac{\rho'^2 \sigma^4}{\rho^2 R^4} \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Kako je  $\rho_1 = \frac{1}{\kappa_1}$ , slijedi formula za  $\rho_1$ . □

Koristeći neke od koraka dokaza prethodnog teorema, dokazat ćemo sljedeći korolar koji daje formulu za torziju lokusa središta zakrivljenosti:

**Korolar 1.** (vidjeti [5, Korolar 1.12]) Torzija  $\tau_1$  lokusa središta zakrivljenosti je

$$\tau_1(s_1) = \frac{\rho(s)\sigma(s)}{R^2(s)} \left[ \frac{1}{\rho^2(s)} - \left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{R(s)}{\rho(s)} \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Dokaz:* U dokazu ćemo radi jednostavnosti zapisa, izostaviti parametre  $s$  i  $s_1$ .

Iz dokaza prethodnog teorema imamo:  $\frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 s'_1 = \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} + \mathbf{b}$ .

Uzimajući vektorski produkt s  $\mathbf{n}_1$  na obje strane izraza, dobivamo:

$$\frac{\sigma}{\rho} \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1 s'_1 = \frac{\sigma}{\rho} \rho' \mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{b} \times \mathbf{n}_1.$$

Kako je  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ , slijedi  $\frac{\sigma}{\rho} \mathbf{b}_1 s'_1 = \mathbf{t}$ .

Deriviramo gornju relaciju po  $s$ :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \right) \mathbf{b}_1 + \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \frac{d\mathbf{b}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}.$$

Koristeći Frenetove formule:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \right) \mathbf{b}_1 - \frac{\sigma}{\rho} s'^2_1 \tau_1 \mathbf{n}_1 = \kappa \mathbf{n}.$$

Skalarni umnožak prethodne jednadžbe sa samom sobom na obje strane daje:

$$\left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \right) \right\}^2 + \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^2 s'^4_1 \tau_1^2 = \kappa^2.$$

Iskoristimo  $s'_1 = \frac{R}{\sigma}$  i pronađimo torziju  $\tau_1$ .

$$\begin{aligned}\tau_1^2 &= \frac{\rho^2}{\sigma^2} \frac{1}{s_1'^4} \left[ \frac{1}{\rho^2} - \left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{\sigma}{\rho} s'_1 \right) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{\sigma^2 \rho^2}{R^4} \left[ \frac{1}{\rho^2} - \left\{ \frac{d}{ds} \cdot \frac{R}{\rho} \right\}^2 \right].\end{aligned}$$

Iz čega slijedi:  $\tau_1 = \frac{\sigma \rho}{R^2} \left[ \frac{1}{\rho^2} - \left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{R}{\rho} \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ .

□

**Primjer 6.** Pokažimo da tangenta na lokus središta oskulacijske sfere prolazi kroz središta oskulacijske kružnice.

Neka je  $c_1$  lokus središta sferne zakrivljenosti. Tada je vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  bilo koje točke  $P$  na  $c_1$ :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \sigma \rho' \mathbf{b}.$$

Dakle, jedinični tangencijalni vektor u točki  $P$  na  $c_1$  je:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \rho' \mathbf{n} + \rho(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) + \frac{d}{ds}(\sigma \rho') \mathbf{b} + \sigma \rho'(-\tau \mathbf{n}).$$

Slijedi:  $\mathbf{t}_1 = \frac{ds}{ds_1} \left[ \frac{\rho}{\sigma} + \frac{d}{ds}(\sigma \rho') \right] \mathbf{b}$ .

Jednadžba tangente u točki  $P$  na  $c_1$  dana je sa:  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{t}_1$ , gdje je  $\lambda$  skalar. Uvrstimo  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{t}_1$  te dobivamo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \sigma \rho' \mathbf{b} + \lambda \frac{ds}{ds_1} \left[ \frac{\rho}{\sigma} + \frac{d}{ds}(\sigma \rho') \right] \mathbf{b}. \quad (6.13)$$

Budući da je  $\lambda$  proizvoljna konstanta, možemo odabrati  $\lambda = -\frac{\sigma \rho'}{\frac{\rho}{\sigma} + \frac{d}{ds}(\sigma \rho')} \cdot \frac{ds_1}{ds}$ .

S ovim izborom  $\lambda$ , (6.13) postaje  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n}$ , što je vektor položaja središta oskulacijske kružnice. Dakle, tangenta na lokus središta sferne zakrivljenosti prolazi kroz središte oskulacijske kružnice.





## 7 | Evolute i involute

Pomoću dodira krivulja s plohama, uveli smo oskulacijsku kružnicu i oskulacijsku sferu. Kako se točka kreće po krivulji, središta oskulacijske kružnice i oskulacijske sfere iscrtavaju krivulje, odnosno lokus središta zakrivljenosti i lokus središta sferne zakrivljenosti. Ta dva lokusa su rezultat svojstava točke na krivulji. Sada, umjesto da uzimamo točke na krivulji, razmotrimo tangente u različitim točkama krivulje. Te tangente će generirati plohu i razmotrit ćemo krivulje na toj plohi.

Za početak, vrijedi istaknuti osnovne razlike između evoluta ravninske krivulje i evoluta prostorne krivulje:

- Evoluta ravninske krivulje je jedinstvena, dok prostorna krivulja ima beskonačno mnogo evoluta.
- Evoluta ravninske krivulje definira se kao lokus središta zakrivljenosti prostrane krivulje, a evoluta prostorne krivulje nije ni lokus središta zakrivljenosti niti lokus središta sferne zakrivljenosti.

Dakle, definicija evolute se razlikuje obzirom na to je li krivulja ravninska ili prostorna, dok se definicija involute ravninske krivulje prirodno proširuje na prostorne krivulje. Jednom kada odredimo involutu  $\tilde{c}$  krivulje  $c$ , definiramo  $c$  kao evolutu krivulje  $\tilde{c}$ .

Definirajmo tangencijalnu plohu kako bismo mogli definirati involutu.

**Definicija 23.** Ploha generirana tangentama zadane krivulje  $c$  naziva se tangencijalna ploha krivulje  $c$ .

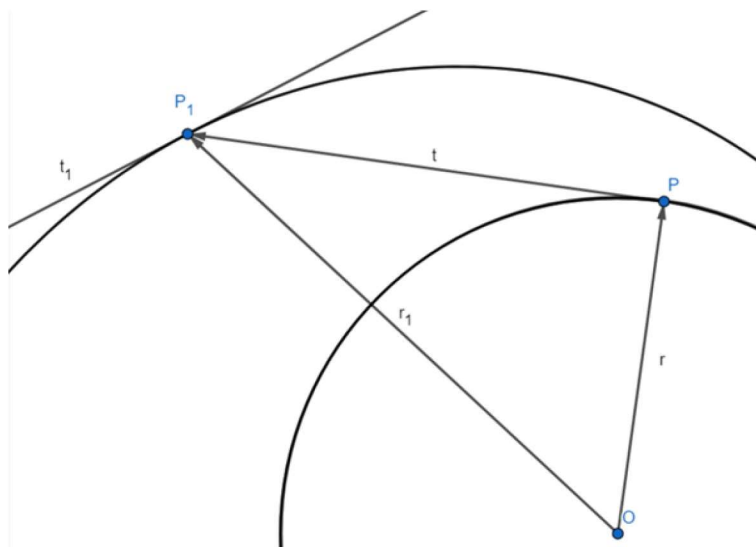
**Definicija 24.** Krivulja koja leži na tangencijalnoj plohi krivulje  $c$  i koja je okomita na izvodnice te plohe naziva se involuta krivulje  $c$  i označava se s  $\tilde{c}$ .

Iz definicije slijedi da su tangente krivulje  $c$  normale krivulje  $\tilde{c}$ . To znači da je tangenta na krivulju  $c$  u točki  $P$  okomita na tangentu u odgovarajućoj točki krivulje  $\tilde{c}$ .

Sljedeći teorem daje jednadžbu involute. Za veličine koje se odnose na krivulju  $\tilde{c}$  koristit ćemo broj 1 u indeksu.

**Teorem 8.** (vidjeti [5, Teorem 1.13.1]) Ako je  $\mathbf{r}_1$  vektor položaja točke  $P_1$  na involuti  $\tilde{c}$  krivulje  $c$ , tada je  $\mathbf{r}_1(s_1) = \mathbf{r}(s) + (c - s)\mathbf{t}(s)$ , gdje je  $c$  proizvoljna konstanta, a  $\mathbf{r}$  vektor položaja točke  $P$  na krivulji  $c$ .

*Dokaz:* Kako involuta leži na tangencijalnoj plohi, vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  točke  $P_1$  na involuti je  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \lambda(s)\mathbf{t}$ , što vidimo na Slici 7.1.



Slika 7.1: Vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  točke  $P_1$

Koristeći definiciju involute, pronadimo  $\lambda(s)$ . Deriviramo prethodni izraz po  $s$  i imamo:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\mathbf{t}'.$$

Primjenom Frenetovih formula:

$$\mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\kappa\mathbf{n}. \quad (7.1)$$

Budući da tangenta involute okomito siječe tangencijalne vektore, vrijedi  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_1 = 0$ . Pomnožimo izraz (7.1) skalarno s  $\mathbf{t}$  i iskoristimo prethodno, dobivamo:

$$1 + \lambda'(s) = 0.$$

Integriranjem po  $s$ , slijedi  $\lambda = (c - s)$ .

Dakle, jednačina involute je  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (c - s)\mathbf{t}$ . □

Kako je  $c$  proizvoljna konstanta, prethodna jednačina pokazuje da za zadanu krivulju postoji beskonačno mnogo involuta. Za različite izbore konstante dobivamo različite involute.

**Korolar 2.** (Vidjeti [5], Korolar 1.13.1) *Udaljenost između odgovarajućih točaka dvije involute je konstantna.*

*Dokaz:* Neka je  $P$  fiksna točka na krivulji  $c$  te neka su  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  vektori položaja odgovarajućih točaka na dvije involute, određeni s  $c = c_1$  i  $c = c_2$ , odnosno

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (c_1 - s)\mathbf{t},$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + (c_2 - s)\mathbf{t}.$$

Tada je  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (c_1 - c_2)\mathbf{t}$  odnosno  $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \|c_1 - c_2\|$ , što je konstanta. Stoga je udaljenost između dvije odgovarajuće točke involuta konstantna.  $\square$

**Teorem 9.** (vidjeti [5, Teorem 1.13.2]) Zakrivljenost  $\kappa_1$  i torzija  $\tau_1$  involute  $\tilde{c}$  krivulje  $c$  dani su sa

$$\kappa_1(s_1) = \frac{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}{\kappa^2(s)(c-s)^2}, \quad \tau_1(s_1) = \frac{\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{\kappa(s)(c-s)(\kappa^2(s) + \tau^2(s))}.$$

*Dokaz:* U dokazu ćemo radi jednostavnosti zapisa izostaviti parametre  $s$  i  $s_1$ . Prema prethodnom teoremu, vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  od involute  $\tilde{c}$  je  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (c-s)\mathbf{t}$ . Deriviramo po  $s$  pa slijedi:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{r}' + (c-s)\mathbf{t}' - \mathbf{t},$$

što daje:

$$\mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = (c-s)\kappa\mathbf{n}.$$

Time smo pokazali da je tangenta na involutu  $c$  paralelna glavnoj normalni u točki  $A$  na krivulji. Odaberimo pozitivni smjer duž involute tako da je  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n}$ . Tada dobivamo:

$$\frac{ds_1}{ds} = (c-s)\kappa. \quad (7.2)$$

Iz izbora  $\mathbf{t}_1$  slijedi:

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}. \quad (7.3)$$

Koristeći (7.2) i (7.3) imamo:

$$\kappa_1\mathbf{n}_1(c-s)\kappa = \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}. \quad (7.4)$$

Skalarni produkt sa samim sobom s obje strane daje sljedeći izraz:

$$\kappa_1^2(c-s)^2\kappa^2 = \tau^2 + \kappa^2,$$

iz čega dobivamo:

$$\kappa_1^2 = \frac{\tau^2 + \kappa^2}{\kappa^2(c-s)^2}.$$

Time smo dokazali izraz za zakrivljenost involute.

Kako bi dokazali torziju, potreban nam je izraz za vektorsko polje  $\mathbf{b}$ . Iskoristimo  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n}$  i vektorski množeći (7.4) dobivamo:

$$\mathbf{t}_1 \times \kappa_1\kappa\mathbf{n}_1(c-s) = \mathbf{n} \times (\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t})$$

što daje:

$$(c - s)\kappa\kappa_1\mathbf{b}_1 = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}.$$

Deriviranjem po  $s$ , dobivamo:

$$\kappa\kappa_1(c - s)\frac{d\mathbf{b}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} + \mathbf{b}_1\frac{d}{ds}[\kappa\kappa_1(c - s)] = \tau\mathbf{t}' + \tau'\mathbf{t} + \kappa'\mathbf{b} + \kappa\mathbf{b}'.$$

Uvrstimo  $\frac{ds_1}{ds} = (c - s)\kappa$  i iskoristimo Frenetove formule te dobivamo:

$$\begin{aligned} \kappa\kappa_1(c - s)(-\tau_1\mathbf{n}_1) \cdot (c - s)\kappa + \mathbf{b}_1\frac{d}{ds}[\kappa\kappa_1(c - s)] &= \tau\kappa\mathbf{n} + \tau'\mathbf{t} + \kappa'\mathbf{b} - \kappa\tau\mathbf{n} \\ \kappa_1\kappa^2(c - s)^2(-\tau_1\mathbf{n}_1) + \mathbf{b}_1\frac{d}{ds}[\kappa\kappa_1(c - s)] &= \tau'\mathbf{t} + \kappa'\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Skalarni produkt (7.4) i (7.7) daje:

$$-\tau_1\kappa_1^2\kappa^3(c - s)^3 = \kappa'\tau - \kappa\tau'.$$

Izlučimo  $\tau_1$ :

$$\tau_1 = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa_1^2\kappa^3(c - s)^3}.$$

Uvrstimo  $\kappa_1^2$  i dobivamo

$$\tau_1 = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(c - s)(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

Ako uzmemo  $\kappa = \frac{1}{\rho}$  i  $\tau = \frac{1}{\sigma}$ , tada je  $\kappa' = \frac{-\rho'}{\rho^2}$  i  $\tau' = -\frac{\sigma'}{\sigma^2}$ .

Uvrstimo u formulu za  $\tau_1$  i dobivamo formulu za torziju oblika:

$$\tau_1 = \frac{\rho(\sigma\rho' - \sigma'\rho)}{(\rho^2 + \sigma^2)(c - s)}.$$

□

**Primjer 7.** Pokažimo da su involute kružne zavojnice ravninske krivulje.

Formula za torziju involute je dana s

$$\tau_1 = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(c - s)(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

Za kružnu zavojnicu, zakrivljenost  $\kappa$  i torzija  $\tau$  su konstante pa je  $\kappa' = 0$  i  $\tau' = 0$  te uvrštavanjem u formulu za torziju dobivamo  $\tau_1 = 0$ , što je nužan i dovoljan uvjet da bi krivulja bila ravninska. Dakle, involute kružne zavojnice su ravninske krivulje.

Sada ćemo definirati evolutu prostorne krivulje i izvesti njezinu jednadžbu.

**Definicija 25.** Ako je  $\tilde{c}$  involuta zadane krivulje  $c$ , tada je  $c$  definirana kao evoluta krivulje  $\tilde{c}$ .

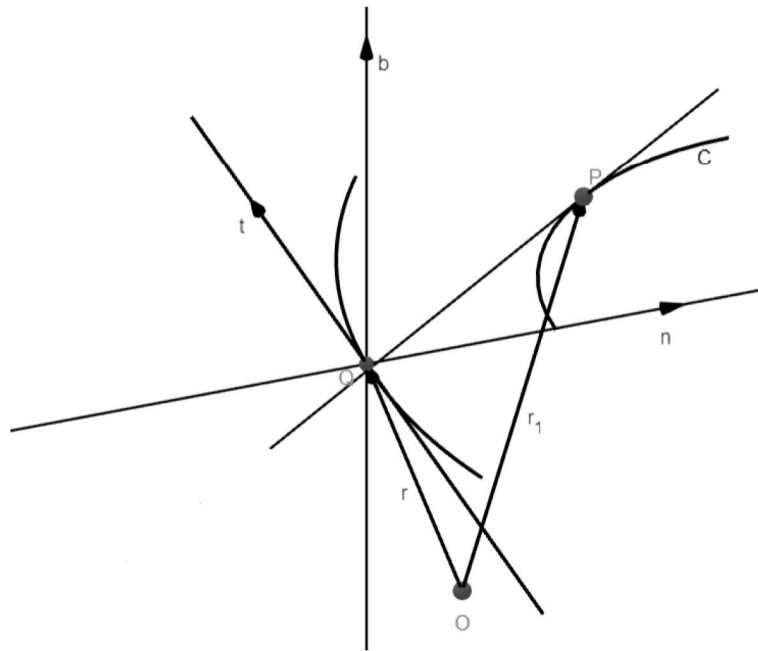
**Teorem 10.** (vidjeti [5, Teorem 1.13.3]) Ako je  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  jednadžba involute  $\tilde{c}$  krivulje  $c$  i  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  Frenetov trobrid, tada je vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  točke na krivulji  $c$  dan s

$$\mathbf{r}_1(s_1) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s) + \rho(s)\text{ctg}(\psi + c)\mathbf{b}(s),$$

gdje je  $\psi = \int \tau ds$ , a  $c$  proizvoljna konstanta.

*Dokaz:* Neka je  $P$  točka na krivulji  $c$  koja odgovara točki  $Q$  na  $\tilde{c}$ . Pravac  $PQ$  je tangenta u točki  $P$  ortogonalna na  $\tilde{c}$ . Dakle,  $PQ$  je okomita na tangentu u točki  $Q$  na  $\tilde{c}$ .

Kako tangenta u točki  $Q$  na involutu zatvara pravi kut s tangentom  $PQ$  krivulje  $c$ , tangenta  $PQ$  leži u normalnoj ravnini u točki  $Q$  na krivulji  $\tilde{c}$ . U koordinatnom sustavu  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  u točki  $Q$ , možemo uzeti vektor  $\overrightarrow{PQ} = \lambda\mathbf{n} + \mu\mathbf{b}$ . Koeficijenti  $\lambda$  i  $\mu$  mijenjaju se od točke do točke na  $\tilde{c}$  tako da su  $\lambda$  i  $\mu$  funkcije od  $s$  na  $c$ .



Slika 7.2: Vektor položaja  $\mathbf{r}_1$

Vektor položaja  $\mathbf{r}_1$  bilo koje točke na  $c$  je

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= \mathbf{r} + \lambda\mathbf{n} + \mu\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Odredimo sada  $\lambda$  i  $\mu$ . Deriviramo (7.6) po  $s$  i dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} &= \mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n} + \lambda(\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}) + \mu'\mathbf{b} + \mu(-\tau\mathbf{n}) \\ &= (1 - \lambda\kappa)\mathbf{t} + (\lambda' - \mu\tau)\mathbf{n} + (\lambda\tau + \mu')\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Kako je  $\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds}$ , to je tangenta u točki  $P$  na krivulji  $c$  i leži u normalnoj ravnini krivulje  $\tilde{c}$  u točki  $Q$ . Stoga, mora biti kolinearna sa

$$\lambda \mathbf{n} + \mu \mathbf{b}. \quad (7.8)$$

Budući da su (7.7) i (7.8) kolinearni, mora vrijediti

$$1 - \lambda k = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\lambda' - \mu\tau}{\lambda} = \frac{\lambda\tau + \mu'}{\mu}.$$

Odredimo  $\lambda$  i  $\mu$ .

Iz prve jednadžbe imamo  $\lambda = \frac{1}{\kappa} = \rho$ .

Iz druge jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} \mu\lambda' - \mu^2\tau &= \lambda^2\tau + \lambda\mu' \\ \tau(\mu^2 + \lambda^2) &= \mu\lambda' - \lambda\mu'. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Kako je  $\mu \neq 0$ , možemo pisati (7.9) u ovom obliku:

$$\frac{\tau(\mu^2 + \lambda^2)}{\mu^2} = \frac{\mu\lambda' - \lambda\mu'}{\mu^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right).$$

Odredimo sada  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\frac{d}{ds} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)}{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\mu^2}} = \frac{\frac{d}{ds} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)}{1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}} = \frac{d}{ds} \left( \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu} \right).$$

Integriramo obje strane jednadžbe i dobivamo:

$$\int \tau ds + c = \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right),$$

gdje je  $c$  konstanta.

Sada je:  $\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{tg} \left( \int \tau ds + c \right)$ .

Uzmimo oznaku  $\psi = \int \tau ds$ , pa možemo pisati:  $\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{tg}(\psi + c)$ .

Sada je:  $\mu = \lambda \operatorname{ctg}(\psi + c)$ . Konačno, jednadžba evolute krivulje  $\tilde{c}$  je:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \rho \operatorname{ctg}(\psi + c) \mathbf{b},$$

gdje je  $\psi = \int \tau ds$ .

Prethodna jednadžba predstavlja beskonačan skup evoluta za danu krivulju, odnosno svaki izbor konstante  $c$  određuje jednu evolutu.  $\square$

**Napomena 8.** Vektor položaja točke na lokusu središta zakrivljenosti je

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n},$$

a vektor položaja točke na evoluti je

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \rho \operatorname{ctg}(\psi + c) \mathbf{b},$$

gdje  $\psi = \int \tau ds$ . Usporedimo li prethodne dvije jednadžbe, vidimo da se jednadžba evolute ne može dobiti kao lokus središta zakrivljenosti.

**Napomena 9.** Također, evoluta se ne može dobiti kao lokus središta sferne zakrivljenosti jer je tangenta u točki na lokusu središta sferne zakrivljenosti paralelna s  $\mathbf{b}$ , dok je tangencijalni vektor na evolutu paralelan s  $\rho \mathbf{n} + \mu \mathbf{b}$ , tako da ta dva lokusa ne mogu biti ista. Stoga se evoluta ne može dobiti kao lokus središta sferne zakrivljenosti. Međutim, imamo sljedeći teorem.

**Teorem 11.** (vidjeti [5, Teorem 1.13.4]) Lokus središta sferne zakrivljenosti je evoluta ako i samo ako je krivulja ravninska.

Dokaz: Jednadžba evolute je

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \rho \operatorname{ctg}(\psi + c) \mathbf{b} \quad , \quad \psi = \int \tau ds.$$

Usporedimo li jednadžbu evolute s jednadžbom središta zakrivljenosti krivulje  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n}$ , one će se podudarati ako i samo ako je  $\rho \operatorname{ctg}(\psi + c) = 0$ . Kako je  $\rho \neq 0$ , iz prethodnog uvjeta zaključujemo da vrijedi

$$\int \tau ds + c = n \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad \int \tau ds = \frac{n\pi}{2} - c.$$

Deriviramo obje strane prethodnih jednakosti po  $s$  i dobivamo  $\tau = 0$ , što je nužan i dovoljan uvjet da krivulja bude ravninska, čime smo dokazali teorem.  $\square$

**Primjer 8.** Pronađimo involutu i evolutu kružne zavojnice

$$\mathbf{r}(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta). \quad (7.10)$$

Jednadžba involute krivulje parametrizirane duljinom luka  $s$  je

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (\lambda - s) \mathbf{t}. \quad (7.11)$$

Najprije odredimo duljinu luka  $s$  i  $\mathbf{t}$ . Deriviramo (7.10), pa imamo:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \mathbf{t} \frac{ds}{d\theta} = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b).$$

Kako je

$$\left( \frac{ds}{d\theta} \right)^2 = (-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2 + b^2 = a^2 + b^2 = c^2,$$



slijedi da je  $\frac{ds}{d\theta} = c$ .

Sada imamo

$$\mathbf{t} = \frac{1}{c}(-a \sin \theta, a \cos \theta, b). \quad (7.12)$$

Uvrstimo izraze za  $\mathbf{r}(\theta)$  i  $\mathbf{t}$  u (7.11) i dobivamo jednadžbu involute u sljedećem obliku:

$$\mathbf{r}_1 = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta) + \frac{1}{c}(\lambda - c\theta)(-a \sin \theta, a \cos \theta, b).$$

Jednadžba evolute je

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n} + \rho \operatorname{ctg}(\psi + c) \mathbf{b}, \quad \text{gdje je } \psi = \int \tau ds. \quad (7.13)$$

Kako bi odredili  $\mathbf{v}_1$ , moramo najprije pronaći  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $\psi$ .

Za kružnu zavojnicu znamo da vrijedi  $\kappa = \frac{a}{c^2}$ ,  $\tau = \frac{b}{c^2}$ , što daje

$$\psi = \int \frac{b}{c^2} ds = \frac{b}{c^2} s.$$

Koristeći (7.12) imamo

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{c}(-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0) \frac{d\theta}{ds}.$$

Stoga je

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa c^2}(-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0) = \frac{c^2}{a} \frac{1}{c^2}(-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0) = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0).$$

Dakle, imamo:  $\mathbf{n} = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$ .

Nadalje izračunajmo vektorski produkt:  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ .

Imamo:

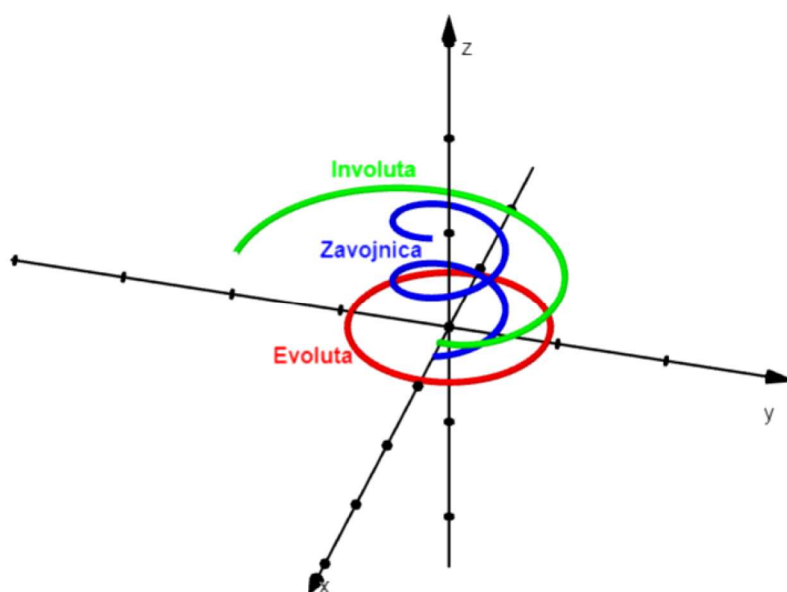
$$\begin{aligned} \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{c}(-a \sin \theta, a \cos \theta, b) \times (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) \\ &= \frac{1}{c} \left( a \cos \theta \cdot 0 - b(-\sin \theta), -b \cos \theta - (-a \sin \theta \cdot 0), (a \sin^2 \theta) + (a \cos^2 \theta) \right) \\ &= \frac{1}{c} \left( b \sin \theta, -b \cos \theta, a(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right) \\ &= \frac{1}{c} (b \sin \theta, -b \cos \theta, a). \end{aligned}$$

Dobivene izraze za  $\psi$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  uvrstimo u (7.13) te dobivamo jednadžbu evolute:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta) + \frac{c^2}{a}(-\cos \theta, -\sin \theta, 0) \\ &\quad + \frac{c^2}{a} \operatorname{ctg} \left[ \frac{b}{c} \theta + \lambda \right] \frac{1}{c} (b \sin \theta, -b \cos \theta, a) \end{aligned}$$

Prethodnu jednadžbu možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 x &= \left[ a \cos \theta - \frac{c^2}{a} \cos \theta + \frac{c}{a} b \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \left( \frac{b\theta}{c} + \lambda \right) \right] \\
 y &= \left[ a \sin \theta - \frac{c^2}{a} \sin \theta - \frac{c}{a} b \cos \theta \cdot \operatorname{ctg} \left( \frac{b\theta}{c} + \lambda \right) \right] \\
 z &= \left[ b\theta + c \operatorname{ctg} \left( \frac{b\theta}{c} + \lambda \right) \right].
 \end{aligned}$$



Slika 7.3: Involuta i evoluta kružne zavojnice



# Literatura

- [1] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1995.
- [2] Ž. MILIN ŠIPUŠ, S. VIDAČ, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, interna skripta
- [3] LJ. PRIMORAC GAJČIĆ, *Predavanja iz kolegija Uvod u diferencijalnu geometriju*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, ak.god. 2019-2020
- [4] J. SEDLAR, *Diferencijalna geometrija*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, interna skripta
- [5] D. SOMASUNDARAM, *Differential Geometry - A First Course*, Alpha Science International, 2005.
- [6] B. ŽARINAC-FRANČULA, *Diferencijalna geometrija*, Zbirka zadataka i repertorij, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [7] T. ŽIVKOVIĆ, *Svojstva i konstrukcije nekih ravninskih krivulja*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2012. - diplomski rad



# Sažetak

Tema ovog diplomskog rada jest sferna zakrivljenost krivulje. Središte, odnosno polumjer sferne zakrivljenosti definira se kao središte, odnosno polumjer oskulacijske sfere. U radu je proučavan lokus sferne zakrivljenosti krivulje, te su definirane veze između Freneteovih bridova lokusa i polazne krivulje. Specijalna pažnja posvećena je involutama i evolutama krivulje. Rad je potkrijepljen primjerima, čiji su grafički prikazi izrađeni su pomoću GeoGebre.

## Ključne riječi

krivulja, zakrivljenost, oskulacijska sfera, sferna zakrivljenost



# Spherical curvature of a curve

## Summary

The topic of this work is spherical curvature of a curve. Center and radius of spherical curvature are defined as center and radius of osculating sphere. The study focuses on the locus of spherical curvature of a curve. Also we defined connections between Frenet frames of locus and original curve. Special attention is given to the involutes and evolutes of a curve. This work is supported by examples whose graphical representations were made by GeoGebra.

## Key words

curve, curvature, osculating sphere, spherical curvature





# Životopis

Rođena sam 31. siječnja 1999. godine u Našicama. Tamo sam pohađala Osnovnu školu Dore Pejačević te prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga. U listopadu 2017. godine upisujem Preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku, sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike. Studij završavam 2021. godine te na istom fakultetu iste godine upisujem diplomski studij, modul: financijska matematika i statistika. Tijekom završne godine studija, radila sam u Triglav osiguranju u Zagrebu, a trenutno sam zaposlena u Srednjoj školi Josipa Kozarca u Đurđenovcu.