Matematička analiza u srednjoj školi

Posavac, Boris

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Matematička analiza u srednjoj školi

Diplomski rad

Mentor:
prof.dr.sc. Ivan Matić

Student:
Boris Posavac

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Matematička analiza je grana matematika čije su glavno područje diferencijalni i integralni račun koji se koriste za rješavanje određenih geometrijskih problema, ali i problema iz područja mehanike.

Cilj ovog diplomskog rada je istražiti kako su se u posljednjih tridesetak godina mijenjale određene definicije iz područja matematičke analize, ali i pristupi nastavi matematičke analize kroz udžbenike. U srednjoj školi, matematička analiza se najvećim dijelom obrađuje u četvrtom razredu, stoga će se analizirati srednjoškolski udžbenici četvrtih razreda nakladnika Školska knjiga, u izdanjima 1997., 2013. i 2020. godine, te udžbenici nakladnika Element, u izdanjima 1997., 2013. i 2021. godine.

U poglavlju pod nazivom "Nizovi" razmotrit će se pojam i zadavanje niza, pristup definiranju geometrijskog i aritmetičkog niza kao i pristup definiciji limesa niza. Poglavlje se zaključuje pojmom konvergencije reda, definicijom geometrijskog reda i njegovom konvergencijom.

U poglavlju "Funkcije" definiraju se same funkcije, proučava njihovo prirodno područje definicije kao i svojstva funkcija. Promatraju se definicije kompozicije funkcija i inverzne funkcije, te pristup definiciji limesa funkcije. Također se obraća pozornost na razlike u definiciji neprekidnosti funkcije, kao i u navođenju nekih bitnih rezultata.

Poglavlje "Derivacije" bavi se razlikama u motivacijskom pristupu definiranja derivacije, pravilima deriviranja, kao i derivacijom implicitno zadane funkcije. Poseban naglasak će se staviti na razlike u deriviranju složene funkcije, ali i crtanja grafa prilikom primjene diferencijalnog računa.

U poglavlju "Integrali", razmatraju se različiti pristupi definiranju neodređenog integrala, kao i razlike u metodama potrebne za računanje istog, te razlike u definiranju određenog integrala. Poglavlje se završava različitim primjenama određenog integrala.

Posljednje poglavlje bavi se analizom ankete čiji je cilj bio ispitivanje stavova i iskustava studenata prvih godina osječkog Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u vezi srednjoškolskih udžbenika matematike.

2 | Nizovi

Svi promatrani udžbenici naziva su "Matematika 4" stoga će se u daljnjem tekstu, kada se govori o određenom udžbeniku, samo navesti nakladnik i godina izdavanja udžbenika.

2.1 Pojam niza i zadavanje niza

U udžbeniku nakladnika Element izdanog 1997. godine, autor učenike uvodi u pojam niza te u izvedenicu riječi "nizati", ali i navodi primjer nizova u običnome jeziku, poput niza kuća, bisera i slično. U udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog iste godine, autor učenike u pojam niza uvodi primjerom nizanja prirodnih brojeva, ali i beskonačnim nizom približnih vrijednosti broja $\sqrt{2}$.
Valja napomenuti kako se uvod udžbenika nakladnika Element nije mijenjao u izdanjima iz 2013. i 2021. godine, dok je u udžbeniku Školske knjige iz 2013. godine kao uvod u nizove dano crtanje tzv. "Kochove pahuljice" uz prijašnji primjer beskonačnog niza približnih vrijednosti broja $\sqrt{2}$. U izdanju iz 2021. nisu korišteni prethodni primjeri uvoda nego konkretni primjeri iz svakidašnjeg života poput niza perlica ogrlice, poredak knjiga na polici, poredak trkača na kraju utrke, ali i primjeri niza prirodnih brojeva, te nizovi prirodnih parnih i neparnih brojeva.
U udžbeniku Školske knjige izdanog 1997. godine niz je definiran na sljedeći način:

Definicija 1. (*vidjeti* [10] *str. 50*) *Ako je svakom prirodnom broju n pridružen neki realan broj a_n, onda kažemo da je zadan* ***niz*** (*ili* ***slijed***) ***brojeva****:*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Broj a_n zove se n-ti ***član niza****. Katkad se takav niz kratko zapisuje kao (a_n).*

Zatim autor navodi da, govorimo o konačnome nizu duljine n ukoliko promatramo prvih n članova niza.
Primjetimo da se u definiciji niz ne definira kao funkcija, nego je autor odlučio definiciju prošiti prilikom navođenja načina definiranja niza.

> (vidjeti [10], str. 51) Prije svega, niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n-ti član niza, izražava pomoću rednog broja n.
>
> ...

Stoga možemo reći da je n-ti član a_n funkcija svoga indeksa n, tj. $a_n = f(n)$ gdje je f neka poznata (zadana) funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dakle, **svaki je član niza funkcija svog rednog broja**, tzv. **indeksa** n.

U udžbenicima preostala dva izdanja nakladnika Školska knjiga definicija niza je otprilike ista i bazira se na pojmu funkcije:

Definicija 2. (*vidjeti* [1], *str. 64*) ***Niz realnih brojeva*** *je funkcija a koja svakom prirodnom broju pridružuje neki realan broj*

$$a(n) = a_n.$$

Broj a_n *zove se* n-***ti član*** *ili* ***opći član*** *niza. Katkad se takav niz kratko zapisuje kao* a_n.

Sva tri udžbenika nakladnika Element imaju gotovo identične definicije niza:

Definicija 3. (*vidjeti* [7], *str. 137*)
Definicija niza
Niz u skupu *S je svaka funkcija* $a : \mathbb{N} \to S$. *Ona prirodnom broju n pridružuje element* a_n *skupa S. Element* a_n *nazivamo* ***općim*** *ili* n-***tim članom*** *niza, a sam niz označavamo simbolom* (a_n).

U izdanjima iz 2013. i 2021. godine još se u definiciji navodi kako niz ima beskonačno mnogo članova, a u sva tri promatrana izdanja u kasnijem dijelu teksta navodi se da je riječ o nizu realnih brojeva ukoliko je $S \subset \mathbb{R}$.
Oba izdavača navode primjere nizova zadanih općim članom i rekurzivnom formulom pri čemu se u udžbeniku Školske knjige iz 2013. godine nizovi zadani rekurzivnom formulom uopće ne spominju.
Bitno je istaknuti kako se u udžbenicima nakladnika Element ne spominje monotonost nizova, što je obrađeno u udžbenicima nakladnika Školska knjiga pri čemu je definicija monotonosti uglavnom identična.

Definicija 4. (*vidjeti* [10], *str. 53*) *Kažemo da je niz brojeva* (a_n) ***rastući*** *ako je* $a_n \leq a_{n+1}$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *a ako je* $a_n \geq a_{n+1}$ *za svako n, kažemo da je* ***padajući***. *Niz je* ***monoton*** *ako je rastući ili padajući. Ako je* $a_n < a_{n+1}$ *za svako n, govorimo da je niz* ***strogo rastući***, *a ako je* $a_n > a_{n+1}$ *za svako n, da je* ***strogo padajući***.

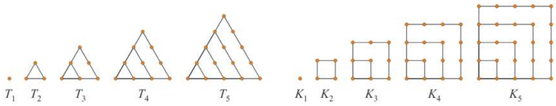
Dodatno, u udžbeniku iz 2020. godine navedeni su još kriteriji za ispitivanje monotonosti niza, te definicija omeđenih nizova:

Definicija 5. (*vidjeti* [8], *str. 127*) *Kažemo da je niz realnih brojeva* (a_n) *omeđen ako postoje realni brojevi m i M takvi da za svaki prirodni broj n vrijedi* $m \leq a_n \leq M$. *Broj m naziva se donja međa niza, a broj M gornja međa niza* (a_n).

Sva tri promatrana udžbenika nakladnika Element manji dio poglavlja posvećuju grafičkom predočavanju nizova, pri čemu su u svim udžbenicima grafički prikazi identični - prikaz nekoliko članova niza $a_n = \frac{n}{2^n}$ u koordinatnom sustavu, te prikaz proizvoljnog niza na brojevnom pravcu.

U izdanjima 2013. i 2021. godine nalazi se tzv. "Kutak plus" u kojemu se definiraju poligonalni brojevi.

Definicija 6. (*vidjeti* [3], *str. 81.*) *Brojevi* $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ *nazivaju se* ***trokutasti brojevi****. Ako sa* T_n *označimo n-ti trokutasti broj, onda vrijedi rekurzivna relacija* $T_1 = 1$ *i* $T_n = T_{n-1} + n$*. Razlog ovom imenu i konstrukcija prvih nekoliko trokutastih brojeva vidi se na slici* (2.1)*. Brojevi* $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ *nazivaju se* ***kvadratni brojevi****. Ako*



Slika 2.1: (pogledati [5], poglavlje *Pojam niza. Zadavanje niza*)

sa K_n *označimo n-ti kvadratni broj, onda vrijedi* $K_1 = 1$ *i* $K_n = K_{n-1} + (2n-1)$ (*slika* 2.1).
Postoji veza između trokutastih i kvadratnih brojeva: $K_n = 2T_{n-1} + n$*. Na sličan način se može potvrditi veza između peterokutastih i trokutastih brojeva:* $P_n = 3T_{n-1} + n$*, te šesterokutastih i trokutastih brojeva* $S_n = 4T_{n_1} + n$*. Sve ove brojeve možemo prikazati istom formulom. Niz k-poligonalnih brojeva definiramo kao:*

$$M_n^k = (k-2)T_{n-1} + n$$

.

2.2 Aritmetički niz

Od promatranih udžbenika, udžbenici nakladnika Školska knjiga iz godina 2013. i 2020. učenike uvode u temu aritmetičkog niza koristeći probleme iz svakodnevnog života. Udžbenik iz 2013. godine koristi primjer učenika koji nekoliko dana za redom čita određeni broj stranica knjige, te učenici određuju koliko će stranica knjige biti pročitano za određeni broj dana i hoće li uspjeti pročitati knjigu ukoliko je zadan vremenski rok u danima, dok se u udžbeniku iz 2020. godine učenike u temu uvodi primjerom mjesečne štednje u svrhu kupnje računala, a učenici trebaju odrediti uz različite iznose mjesečne štednje hoće li svota novca nakon određenog perioda biti dostatna za kupnju računala.

Udžbenici oba nakladnika definiraju aritmetički niz i diferenciju aritmetičkoga niza, te daljnjim raspisivanjem prvih nekoliko članova aritmetičkoga niza dolaze do zapisa općeg člana aritmetičkoga niza. Daljnjim zbrajanjem prvih n članova aritmetičkoga niza izvode formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza - S_n. Valja naglasiti kako je u udžbenicima nakladnika Element naveden naziv za niz (S_n) - niz parcijalnih suma, dok to u udžbenicima nakladnika Školska knjiga nije navedeno.

Interpolacija artimetičkoga niza zauzima mali dio cijeline u udženicima nakladnika Element, dok je u udžbenicima nakladnika Školska knjiga taj dio objašnjen na konkretnim zadatcima.

U ovome poglavlju glavna razliku između nakladnika u samoj je definiciji aritmetičkoga niza. U udžbenicima nakladnika Element izdanim 1997. i 2013. godine definicija je sljedeća:

Definicija 7. *(vidjeti [7], str. 141) Niz je **aritmetički**, ako je razlika svakog člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:*

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad n \geq 2.$$

*Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**.*

U udžbeniku iz 2021. godine definicija je preinačena na sljedeći način:

Definicija 8. *(vidjeti [5], str. 141) Niz je **aritmetički** ako je razlika bilo kojeg člana (osim prvog) i njegova prethodnika stalna i iznosi d:*

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.

Slično kao i kod Elementa, definicija aritmetičkog niza u izdanjima nakladnika Školska knjiga u godinama 1997. i 2013. su vrlo slične i glase:

Definicija 9. *(vidjeti [10], str. 56) Niz (a_n) je **aritmetički niz** ako je svaki član, počev od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d. Prema tome, aritmetički niz se definira sa svojstvom (tj. rekurzijom)*

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

*Broj d se zove **diferencija (razlika)** tog niza.*

Za razliku od prethodnih izdanja, u udžbeniku iz 2020. godine definicija je preinačena u sljedeću:

Definicija 10. *(vidjeti [8], str. 131) Niz brojeva (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakoga člana (osim prvoga) i člana ispred njega stalna i iznosi d*

$$a_{n+1} - a_n = d, n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{R}.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) niza.

2.3 Geometrijski niz

Slično kao i kod aritmetičkoga niza, u ovome poglavlju autori udžbenika nakladnika Školska knjiga izdanja 2013. i 2020. učenike uvode u temu primjerom iz svakodnevnog života.
U udžbeniku iz 2013. godine navodi se obiteljsko stablo pri čemu se procjenjuje broj predaka u nekom vremenskom periodu uz poznatu činjenicu u kojoj godini života se svakome od predaka rađa dijete. Na sličan način, u udžbeniku iz 2020.

godine, potrebno je procijeniti broj bakterija koji će se razviti u nekom vremenskom periodu ukoliko je poznat razvoj bakterija u ovisnosti o vremenu.

Udžbenici oba nakladnika definiraju geometrijski niz i kvocijent geometrijskog niza, te daljnjim raspisivanjem prvih nekoliko članova geometrijskog niza dolaze do zapisa njegova općeg člana. Daljnjim zbrajanjem prvih n članova niza izvode formulu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza - S_n.

Interpolacija geometrijskog niza zauzima mali dio cijeline u udženicima nakladnika Element, dok je u udžbenicima nakladnika Školska knjiga taj dio objašnjen na konkretnim zadatcima.

Glavna razlika u ovom poglavlju među nakladnicima je u samoj definiciji geometrijskog niza. U udžbenicima nakladnika Školska knjiga, definicije su slične, stoga ćemo istaknuti jednu:

Definicija 11. *(vidjeti [8], str. 142) Niz brojeva (a_n) je* ***geometrijski*** *ako je količnik svakoga člana (osim prvoga) i člana ispred njega stalan i iznosi q,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Broj q naziva se ***količnik (kvocijent)*** *niza.*

Definicije su identične u svim promatranim udžbenicima nakladnika Element:

Definicija 12. *(vidjeti [3], str. 94) Niz je* ***geometrijski*** *ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Broj q se naziva ***kvocijent*** *ili* ***količnik geometrijskog niza****.*

Dodatno, u izdanju iz 2021. godine u definiciju je još dodan uvjet da definicija vrijedi za svaki $n \geq 2$.

2.4 Limes niza

Autori svih izdanja učenika oba nakladnika učenike u pojam limesa niza uvode primjerima nizova $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{10^n}$, $\frac{n-1}{n}$ i $\frac{n}{n+1}$, te se uvrštavanjem različitih brojeva za n učenike navodi na zaključak kako se ti nizovi približavaju broju 0, odnosno 1 čime se dolazi do definicije limesa niza.

U svim udžbenicima nakladnika Element, limes niza definira se na sljedeći način:

Definicija 13. *(vidjeti [7], str. 149) Kažemo da je broj a limes niza (x_n) ako vrijedi sljedeće: za svaki (ma kako malen) broj $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi*

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Niz je ***konvergentan*** *ako ima limes. Inače je* ***divergentan****.*

Pri čemu je u posljednjem izdanju, iz 2021. godine, definicija još proširena sa sljedećom rečenicom:

(vidjeti [5], poglavlje *Limes niza. Teoremi o limesima.*) Pišemo $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ i kažemo da niz (x_n) konvergira (ili teži) prema realnom broju a.

Na gotovo je identičan način limes definiran u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 1997. godine uz dodatno pojašnjenje, ali je u udžbenicima iz 2013. i 2020. godine istaknuta sljedeća definicija koju slijedi ranije navedena definicija limesa:

Definicija 14. *(vidjeti [1], str. 89) Za realni broj L kažemo da je* ***limes*** *ili* ***granična vrijednost niza*** *(a_n) ako se izvan svakog, po volji malog, intervala oko L nalazi samo konačno mnogo članova niza. Ovu činjenicu zapisujemo*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

i čitamo:
limes niza (a_n) kada n teži u beskonačnost je L.
Ponekad zapisujemo i ovako: $a_n \to L$ kada $n \to \infty$ i čitamo a_n teži u L kada n teži u beskonačnost. Niz brojeva (a_n) koji ima limes zove se ***konvergentan niz****. Inače se niz zove* ***divergentan****.*

Sljedeća bitna razlika uočava se prilikom definicije niza koji teži u beskonačnost. Autori udžbenika nakladnika Element identičnu definiciju koriste u svim promatranim izdanjima, a ovu definiciju nazivaju *"Neograničeno rastući nizovi"*:

Definicija 15. *(vidjeti [7], str. 151) Niz (x_n) neograničeno raste ako za svaki broj $M > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $x_n > M$ čim je $n > n_0$. Niz koji neograničeno raste ne konvergira. Međutim, po dogovoru pišemo:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

i kažemo da niz (x_n) teži u beskonačnost.

Slična definicija se koristi i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, ali u izdanjima iz 2013. i 2020. godine definicije su vrlo slične i nešto manje formalne:

Definicija 16. *(vidjeti [8], str. 162) Niz brojeva (a_n) teži u beskonačnost ako za svaki realni broj M postoji konačno mnogo članova niza koji su manji od broja M. Za takav niz kažemo da je divergentan i pišemo*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Sljedeće svojstvo nalazi se u svim promatranim udžbenicima:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$$

dok se samo u udžbenicima nakladnika Element nalazi svojstvo:

Definicija 17. *(vidjeti [5], poglavlje Limes niza. Teoremi o limesima.) Za konvergentni niz (x_n) vrijedi*

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0.$$

Ostatak pogljavlja je većinom sličan u svim promatranim udžbenicima jer se navode *Teoremi o limesima*, odnosno svojstva limesa geometrijskoga niza, koji su dokazani u svakome udžbeniku, te tvrdnja da je niz realnih brojeva konvergentan ukoliko je omeđen i monoton što je potrebno kako bi se na kraju poglavlja dokazalo postojanje limesa niza $(1 + \frac{1}{n})^n$ kada n ide u beskonačnost. Osim navedenog, svi promatrani udžbenici oba nakladnika navode svojstvo limesa niza $(1 + \frac{b}{n})^n = e^b$, te svojstvo da je limes n-tog korijena nekog nenegativnog realnog broja jednak jedan kada n teži u beskonačnost.

Udžbenici nakladnika Element neposredno prije uvođenja kriterija o konvergenciji nizova definiraju monotonost i omeđenost nizova, dok udžbenici nakladnika Školska knjiga definiraju samo omeđenost nizova jer su monotonost nizova definirali pri definiciji niza. U udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine, omeđenost nizova je definirana prilikom definiranja nizova po čemu se najviše i razlikuje od ostalih.

Bitno je istaknuti kako se:

- sljedeće svojstvo nalazi samo u udžbeniku nakladnika Element izdanog 1997. godine:

  Definicija 18. *(vidjeti [7], str. 153) Za bilo koji realni broj $a > 1$ i $p > 0$ vrijedi*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{log_a n}{n^p} = 0.$$

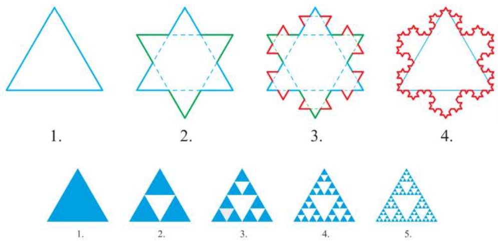
- sljedeće svojstvo nalazi samo u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 2020. godine:

  Definicija 19. *(vidjeti [8], str. 172) Ako je niz zadan općim članom $a_n = \frac{\sin n}{n}, n \in$ $\mathbf{N}$, tada je $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.*

2.5 Geometrijski red

U ovome poglavlju nema primjetne razlike između udžbenika nakladnika Element i Školska knjiga, ali niti međusobne razlike udžbenika istoga nakladnika. Svi navedeni udžbenici polaze od definicije reda, a zatim definiraju pojmove sume reda, niza parcijalnih suma, te definiciju konvergencije reda.
Sve navedene definicije su uglavnom identične, ali valja istaknuti kako se u udžbenicima nakladnika Školska knjiga navodi da red divergira ukoliko pripadni niz parcijalnih suma nema limes, dok se u udžbenicima nakladnika Element pojam divergencije ne spominje. Također, nema primjetne razlike ni u definiciji geometrijskog reda, kao ni u zaključku o konvergenciji geometrijskog reda.

Svi navedeni udžbenici, osim udžbenika nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, kao primjer u ovome poglavlju koriste problem utrke Ahileja i kornjače - Ahilej trči brže od kornjače, ali kako je kornjača imala početnu prednost i oboje se kreću, Ahilej nikada ne bi trebao prestići kornjaču.
Dodatno, udžbenici nakladnika Element iz 2013. i 2021. godine na kraju poglavlja, u odjeljku imena *"Kutak plus"*, navode primjere geometrijskog niza u fraktalnim likovima - problemi površina Kochove pahuljice i Sierpinskijeva trokuta (slika 2.2).



Slika 2.2: (pogledati [5], poglavlje *Geometrijski red*)

3 | Funkcije

3.1 Zadavanje funkcije i područje definicije

U uvodnom dijelu poglavlja *Funkcije*, glavna razlika između promatranih nakladnika vidljiva je u motivacijskom dijelu.

Udžbenici nakladnika Školska knjiga koriste različite svakodnevne primjere prilikom uvoda učenika u samu temu, poput: visine snijega na planini u različitim vremenskim periodima, isticanja cijene artikala (svaki artikl u trgovini ima svoju cijenu), cijena taksija u ovisnosti o prijeđenim kilometrima, cijena proizvoda u ovisnosti o utrošenim satima potrebnima za proizvodnju proizvoda i slično. Za razliku od navedenog, u udžbenicima nakladnika Element, učenicima se prvo navodi definicija funkcije, domene i kodomene, a zatim se dane definicije uočavaju na konkretnim primjerima matematičkih funkcija.

Udžbenici nakladnika Element prije same defincije navode sljedeće svojstvo bitno za zadavanje funkcije:

Definicija 20. (*pogledati* [3], *str. 139*) *Realna funkcija f zadana je:*

1. *svojom domenom (područjem definicije) $\mathcal{D}$;*
2. *svojom kodomenom (područjem vrijedosti) $\mathcal{R}$;*
3. *zakonom pridruživanja $x \mapsto f(x)$.*

Zatim navode kako se funkcija zadana određenom formulom naziva analitička funkcija, te je potrebno naglasiti kako od promatranih udžbenika nakladnika Školska knjiga, samo udžbenik izdan 2020. godine ističe pojam analitički zadane funkcije. Dodatno, samo spomenuti udžbenik i udžbenik nakladnika Element iz 1997. godine napominju kako se funkcije, osim analitički, mogu još zadati:

- implicitno
- grafički
- tablično.

Kao primjer implicitno zadane funkcije, poslužila je kružnica $x^2 + y^2 = 1$, te popratni tekst:

(pogledati [7], str. 178) Kažemo da je formulom $x^2 + y^2 = 1$ dana **implicitna veza** varijabli x i y, ili da je y zadana **implicitnom formulom**. Tu implicitnu formulu možemo prikazati u obliku nultočke funkcije dviju varijabli:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe po varijabli y, mi određujemo **eksplicitnu formulu** (funkcijsku vezu varijabli x i y). Jednoj implicitno zadanoj funkciji može odgovarati nekoliko (pa čak i beskonačno mnogo) eksplicitnih formula.

Grafički zadanu funkciju predstavlja primjer osobe koja je određenom brzinom hodala neki vremenski period, zatim je neko vrijeme stajala u mjestu, te je nastavila hodati drugom brzinom, dok je kao primjer tablično zadanih funkcija poslužila tablica logaritama i tablica trigonometrijskih funkcija.

Udžbenici nakladnika Školska knjiga, funkciju uglavnom slično definiraju u svim promatranim izdanjima, a navest ćemo definiciju iz udžbenika izdanog 2013. godine:

Definicija 21. *(vidjeti [1], str. 127) Neka su A i B neprazni skupovi.* ***Funkcija*** *sa skupa A u skup B je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje samo jedan element skupa B.*
Funkciju označavamo ovako:

$$f : A \to B$$

i čitamo funkcija f sa A u B.
Skup A zovemo ***domena*** *ili* ***područje definicije****. Skup B zovemo* ***kodomena*** *ili* ***područje vrijednosti****. Funkcija f preslikava element x iz domene u element $f(x)$ iz kodomene, što zapisujemo ovako:*

$$x \mapsto f(x).$$

Element $x \in A$ zovemo ***original*** *ili* ***nezavisna varijabla****, a element $f(x) \in B$ zovemo* ***vrijednost funkcije*** *ili* ***zavisna varijabla****.*

U udžbeniku izdanom 1997. godine, definicija funkcije opisno je zadana ali je srž sadržana u prethodnoj definiciji.

Svi promatrani udžbenici na sličan način opisuju vertikalni test funkcije, prirodno područje definicije, graf funkcije i jednakost funkcija, a u sljedeće dvije definicije se mogu uočiti razlike u definiciji slike funkcije između navedena dva nakladnika (izuzetak je udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine):

- definicija nakladnika Školska knjiga iz 1997. i 2013. godine (pogledati [1], str. 133):

  Definicija 22. ***Slika funkcije*** *$f : D \mapsto K$ je skup svih elemenata $f(x)$, gdje je x iz domene funkcije f.*
  Sliku funkcije označavamo s

  $$Imf = \{f(x) | x \in D\}.$$

- definicija sva tri promatrana izdanja nakladnika Element i nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine:

  Definicija 23. (*pogledati* [3], *str. 140*) *Sliku funkcije možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije f. Slika funkcije sastoji se od svih $y \in \mathbb{R}$ za koje postoji $x \in \mathcal{D}$ takav da je $f(x) = y$. To je, dakle, skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu. Označavamo ga s $\mathcal{I}$ ili preciznije, s $\mathcal{I}_f$.*

Dodatno, udžbenici nakladnika Školska knjiga izdani 2013. i 2020. godine navode kako odrediti vrijednost funkcije iz danih argumenata, te kako odrediti funkciju iz danih vrijednosti funkcije.

Udžbenici nakladnika Element iz 2013. i 2021. godine, te udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine prvo se bave pitanjem injektivnosti, surjektivnosti, bijektivnosti, problemom inverzne funkcije te kompozicije funkcija, dok se ostali udžbenici prvo bave svojstvima funkcije. Kako nema jasnog navoda koji problem bi se trebao razmatrati prvi, sljedeće poglavlje bit će posvećeno svojstvima funkcije.

3.2 Svojstva funkcije

U ovome poglavlju u svim promatranim udžbenicima na gotovo identičan način definirani su pojmovi parnosti i neparnosti funkcije, monotonosti (rast i pad funkcije) i omeđenosti (ograničenosti) funkcije, kao i periodičnosti funkcije. Postoje neke razlike između autora i nakladnika što ćemo vidjeti na sljedećem primjeru definicije:

Definicija 24. (*pogledati* [1], *str. 139*) *Funkcija f* ***periodična je s periodom*** *$T > 0$ ako je za svaki $x \in D(f)$ i $x + T \in D(f)$ te vrijedi $f(x + T) = f(x)$.*
Najmanji period zove se ***temeljni period****.*

Periodična funkcija je na ovakav način definirana u udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 1997. i 2013. godine, dok je u ostalim promatranim udžbenicima prilikom definiranja periodične funkcije izostavljen uvjet $x + T \in \mathcal{D}(f)$.

Još jedna razlika između udžbenika ovih dvaju nakladnika pronalazi se u primjeru funkcija, naime udžbenici nakladnika Element u svim promatranim izdanjima navode funkciju signum, a u izdanjima 1997. i 2021. godine još navode funkcije sinusa i kosinusa hiperbolnog, dok se navedene funkcije ne spominju u udžbenicima nakladnika Školska knjiga.

Udžbenik nakladnika Element iz 1997. godine na primjeru funkcije $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$, navodi mogućnost periodičkog proširenja funkcije f, ali i svojstvo operacija s periodičnim funkcijama:

> (pogledati [7], str. 193) Zbroj, razlika, umnožak i kvocijent periodičnih funkcija sa *sumjerljivim* periodima ponovno je periodična funkcija.
> Naime, ako su T_1 i T_2 sumjerljivi, tada postoje *prirodni* brojevi p i q takvi da vrijedi
> $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}.$$

Tad je $qT_1 = pT_2$. Stoga je

$$T = qT_1 = pT_2$$

zajednički period obiju funkcija.

Jedini udžbenik u kojemu se u ovome poglavlju spominju asimptote funkcije, udžbenik je nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine:

Definicija 25. (*pogledati* [8], *str.* 239) *Asimptota grafa funkcije f je pravac sa svojstvom da udaljenost od točke T na grafu funkcije f do toga pravca teži nuli kada barem jedna od koordinata točke T teži u $-\infty$ ili u $+\infty$.*

Mogli smo uočiti kako je, u prethodnom poglavlju, navedena implicitno zadana funkcija u udžbeniku nakladnika Element izdanog 1997. godine, a u ovome poglavlju udžbenika nakladnika Element iz 2021. godine dana je implicitna veza dviju varijabli na identičan način.

Također se implicitna jednadžba još spominje i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, ali u poglavlju *Funkcionalne jednadžbe. Funkcije više varijabli. Implicitne jednadžbe i relacije*. U svrhu ovoga rada, dano poglavlje pripojit ćemo poglavlju *Svojstva funkcije*.
Potrebno je naglasiti kako se samo u navedenom udžbeniku spominju pojmovi funkcionalne jednadžbe te funkcije više varijabli čije ćemo definicije sada navesti:

Definicija 26. (*pogledati* [10], *str.* 110) ***Funkcionalna jednadžba*** *je jednadžba koju zadovoljava nepoznata funkcija f i nezavisna varijabla x na području definicije funkcije f.*

Definicija 27. (*pogledati* [10], *str.* 111) *Funkciju dviju varijabli možemo definirati ovako: neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ neki skup uređenih parova (x, y) realnih brojeva u (koordinatnoj) ravnini i neka je svakom takvom paru (x, y) pridružen realan broj z. Tada kažemo da je zadana **funkcija** z od **varijabli** x i y s područjem definicije S i to zapisujemo u obliku*

$$(x, y) \overset{f}{\mapsto} z \qquad ili \qquad z = f(x, y).$$

Slično se definiraju funkcije od tri, četiri i više varijabli.

3.3 Slaganje (kompozicija) funkcije. Inverzna funkcija i njezin graf.

U udžbenicima nakladnika Element, definicija kompozicije funkcije je u starijem izdanju udžbenika definirana formalno, dok je u novijim izdanjima definirana pomoću primjera:

- udžbenik iz 1997. navodi sljedeću definiciju:

  Definicija 28. (*pogledati* [7], *str.* 199) *Neka su $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ zadane funkcije. Neka je x bilo koji element iz $\mathcal{D}_f$, $y = f(x)$. Ako y leži u $\mathcal{D}_g$, tad je definirana vrijednost $g(y) = g(f(x))$. Na taj je način definirano i preslikavanje s $\mathcal{D}_f$ u $\mathbb{R}$, koje nazivamo **slaganje** ili **kompozicija funkcija** f i g i označavamo simbolom $g \circ f$:*

  $$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

- udžbenici iz 2013. i 2021. učenike u pojam kompozicije funkcije navode pomoću primjera:

  (pogledati [3], str. 147) Neka je $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Onda je

  $$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} = h(x).$$

  Kažemo da je h kompozicija funkcija g i f i pišemo $h = g \circ f$. Neka su $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ bilo koje funkcije. Da bi bila definirana kompozicija $g \circ f$ u točki x , mora biti $y \in \mathcal{D}_g$.

Za razliku od Elementa, udžbenici nakladnika Školska knjiga uglavnom kompoziciju funkcija definiranju na sličan način:

Definicija 29. *(pogledati [8], str. 246) Neka su zadane funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. **Kompozicija funkcija** f i g je funkcija $g \circ f : A \to C$ za koju vrijedi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Svi promatrani udžbenici ističu svojstvo injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti funkcije u obliku definicije ili napomene. Navedena svojstva su definirana na sličan način stoga ćemo navesti svojstva karakteristična za oba nakladnika:

- autori nakladnika Element navedena svojstva navode formalno, te su vrlo slična u svakom izdanju:

  (pogledati [7], str. 202) Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je **injekcija** ako vrijedi

  $$x_1 \neq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

  Ona je **surjekcija** ako je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, tj. ako za svaki $y \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathcal{D}$ takav da je $f(x) = y$. Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.
  Svaka bijekcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima inverznu funkciju definiranu na $\mathbb{R}$ a s vrijednostima u $\mathcal{D}$:

  $$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y), \qquad \forall x \in \mathcal{D}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

- autori nakladnika Školska knjiga navedena svojstva navode u obliku napomene te manje formalno u odnosu na udžbenike nakladnika Element:

  (pogledati [8], str. 253) Neka je $f : A \to B$ funkcija. Funkcija f je injekcija ako različite elemente skupa A preslikava u različite elemente skupa B. Funkcija f je surjekcija ako za svaki element y iz skupa B postoji element x iz skupa A za koji je $f(x) = y$. Funkcija koja je injekcija i surjekcija naziva se bijekcija.

Što se tiče definicije inverzne funkcije, postoje velike razlike između nakladnika, ali i između samih autora unutar istih nakladnika.

Razliku definicije inverzne funkcije pogledajmo prvo u udžbenicima nakladnika Element. U izdanju udžbenika iz 1997. godine inverzna funkcija nije jasno definirana nego je samo navedeno njezino računanje, a taj postupak je naveden i u svim ostalim udžbenicima. Slijedi način pronalaska inverzne funkcije koji je identičan u svim udžbenicima nakladnika Element, a jedina je razlika što u udžbeniku iz 1997. godine nedostaje prvi korak:

> (pogledati [4], str. 157) Inverznu funkciju nalazimo sljedećim postupkom:
>
> 1. Napišemo $y = f(x)$.
> 2. Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x.
> 3. Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe, tad funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$.
> 4. Zamijenimo imena nepoznanicama x i y da bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$.

Navedimo definiciju inverzne fukncije koja se koristi u udžbenicima nakladnika Element u izdanjima 2013. i 2021. godine;

Definicija 30. *(pogledati [3], str. 155) Funkcija g inverzna je funkciji f, ako vrijedi:*

$$g(f(x)) = x, \qquad \text{za svaki } x \in \mathcal{D}_f \tag{3.1}$$

$$f(g(x)) = x, \qquad \text{za svaki } x \in \mathcal{D}_g. \tag{3.2}$$

Pišemo $g = f^{-1}$. U isto je vrijeme funkcija f inverzna funkciji g te je isto tako $f = g^{-1}$. Zato kažemo da su funkcije f i g međusobno inverzne. Relacije (3.1) i (3.2) možemo zapisati na jednostavniji način ovako: funkcije f i g međusobno su inverzne ako vrijedi:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y), \forall x \in \mathcal{D}_f, \forall y \in \mathcal{D}_g.$$

Da bi imala inverznu funkciju, funkcija mora biti injektivna.

U udžbenicima nakladnika Školska knjiga, postupak pronalaska inverzne funkcije nije naznačen kao u prethodno navedenim udžbenicima, nego je kroz primjere zadataka prikazan postupak. Inverzna funkcija je jasno definirana u svim izdanjima vrlo slično, ali ćemo navesti dvije definicije koje ovaj nakladnik koristi:

- u udžbenicima izdanima 1997. i 2020. definicija je vrlo slična i glasi:

  Definicija 31. *(pogledati [8], str. 253) Neka je $f : A \to B$ bijekcija takva da je $f(x) = y$. Funkcija $f^{-1} : B \to A$ takva da je $f^{-1}(y) = x$ naziva se inverzna funkcija od f.*

- u udžbeniku iz 2013. godine, definicija je sljedeća:

  Definicija 32. *(pogledati [1], str. 153) Neka je funkcija $f : A \to B$ bijektivna. Tada za svaki y iz kodomene postoji točno jedan x iz domene takav da je $f(x) = y$. Zato možemo definirati funkcju s B u A koja y preslika u x. Ovu funkciju zovemo **inverzna funkcija** funkcije f i označavamo f^{-1}.*
  Ako je $f(x) = y$, onda je $f^{-1}(y) = x$.

Zajedničko svim promatranim udžbenicima je isticanje sljedećih svojstava:

- asocijativnost kompozicije;
- ne vrijedi komutativnost kompozicije;
- grafovi funkcija f i f^{-1} simetrični su s obzirom na pravac $y = x$;
- kompozicija funkcije f i njoj inverzne funkcije f^{-1} je funkcija identiteta ili identično preslikavanje.

Valja napomenuti kako se restrikcija funkcije spominje samo u udžbenicima nakladnika Element iz 1997. i 2021. godine, te u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine. Također, inverzi trigonometrijskih funkcija, odnosno ciklometrijske funkcije, spominju se samo u udžbenicima nakladnika Školska knjiga iz 1997. i 2013. godine, te u udžbeniku nakladnika Element iz 1997. godine, pri čemu se restrikcija funkcije dovodi u vezu sa spomenutim funkcijama samo u udžbenicima iz 1997. godine.

3.4 Limes i neprekidnost (neprekinutost) funkcije

Promatrajući dane udžbenike, glavna razlika vidljiva je u strukturi poglavlja. Naime, u svim udžbenicima nakladnika Školska knjiga i Element, ova podtema nalazi se u poglavlju *Funkcije*, osim u udžbeniku nakladnika Element iz 2021. godine. U tom udžbeniku ovo potpoglavlje smješteno je u poglavlje *Diferencijalni račun* koje se nalazi u drugom dijelu udžbenika, odnosno u dijelu za drugo polugodište.

Svi navedeni udžbenici učenike u ideju limesa funkcije uvode na sličan način - promatraju vrijednosti vrlo bliske nekoj određenoj vrijednosti, a zatim donose zaključke o funkcijskoj vrijednosti prethodno promatranih brojeva. Potrebno je naglasiti kako svi udžbenici nakladnika Element u uvodnom dijelu promatraju funkciju $f(x) = x^2$, dok udžbenici nakladnika Školska knjiga promatraju različite racionalne funkcije koje nisu definirane na čitavom skupu $\mathbb{R}$, a jedan od razloga promatranja racionalnih funkcija u navedenim udžbenicima je upoznavanje učenika s pojmom neprekidnosti funkcije. Potrebno je istaknuti da svi promatrani udžbenici učenike u pojam neprekidnosti uvode istom intuitivnom idejom - funkcija je neprekidna ako se njezin graf može nacrtati bez podizanja olovke. Samo udžbenici nakladnika Školska knjiga odmah na početku udžbenika tu ideju predstavljaju učenicima dok udžbenici nakladnika Element prvo promatraju problematiku limesa funkcije, a zatim neprekidnost.

Svi promatrani udžbenici većinom limes funkcije definiraju na sljedeći način:

Definicija 33. (*pogledati* [8], *str.* 262) *Realni broj L je limes funkcije f u točki a ako za svaki niz (x_n) koji teži broju a niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ teži broju L. Tada pišemo*

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Ako niz $(f(x_n))$ teži u beskonačnost za svaki niz (x_n) koji teži broju a, tada pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

U udžbenicima nakladnika Element, izostavljen je uvjet da je L realan broj, ali i posljednja tvrdnja definicije o tome ako niz $(f(x_n))$ teži u beskonačnost. Ova je činjenica navedena samo u udžbeniku izdanom 2021. godine, u dijelu udžbenika kada se autori dotiču limesa u beskonačnosti.

U svim promatranim udžbenicima, osim u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, navedeno je sljedeće:

- za elementarne funkcije, vrijedi pravilo direktne zamjene

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a);$$

  To svojstvo je također navedeno i za neprekidne funkcije, te je kao takvo navedeno u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 1997. godine.

- (vidjeti [8], str. 264) ako funkcije f i g imaju limese u točki a, tada vrijedi:

  1. $$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$
  2. $$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x);$$
  3. $$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x);$$
  4. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ ako\ je\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\ ili\ g(x) \neq 0;$$
  5. $$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)},\ ako\ je\ \lim_{x\to a} f(x) > 0\ ili\ f(x) > 0;$$

  Valja naglasiti kako svojstvo 5 nije navedeno u udžbenicima nakladnika Element.

- izvod tvrdnje $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, što je navedeno i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine;

- primjer računanja limesa racionalne i iracionalne funkcije, te limesa u beskonačnosti tako što se i brojnik i nazivnik dijele najvećom potencijom nepoznanice, a u udžbenicima nakladnika Element, osim navedenom tehnikom, koriste se činjenicom da je moguće uvesti zamjenu $x = \frac{1}{u}$, stoga u teži u nulu kada x teži u beskonačnost;

- izvod tvrdnje $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Unatoč navedenim sličnostima, najveća razlika između ova dva nakladnika nalazi se u definiciji neprekidnosti:

- u svim udžbenicima nakladnika Školska knjiga definicija je vrlo slična i glasi:

  Definicija 34. (*pogledati* [8], *str.* 275) *Funkcija f neprekidna je u točki a u kojoj je definirana ako postoji limes funkcije f u toj točki koji je jednak vrijednosti funkcije u toj točki*
  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
  Funkcija f neprekidna je funkcija ako je neprekidna u svakoj točki iz područja definicije.

  Razlika između autora pronalazi se u izdanju iz 1997. godine u kojemu se podrazumijeva da limes postoji.

- u svim udžbenicima nakladnika Element, definicija je identična. Na početku se definiraju prirast varijable x (Δx) i prirast funkcije f (Δy). Zatim slijedi definicija neprekidnosti:

  Definicija 35. (*pogledati* [6], *poglavlje Neprekinutost funkcije*) *Funkcija f neprekinuta je u točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$ ako vrijedi*
  $$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x).$$
  Ako je x_0 rubna točka domene, onda se promatra jednostrani limes u toj točki.
  Kažemo da je f neprekinuta funkcija ako je neprekinuta u svakoj točki iz područja definicije.

  Treba istaknuti kako se samo u izdanju iz 2021. navodi uputa u slučaju promatranja rubne točke.
  Definiciju neprekidnosti funkcije prati sljedeći kriterij:

  > (pogledati [6], poglavlje *Neprekinutost funkcije*) Funkcija f neprekinuta je u točki a ako vrijede sljedeći uvjeti:
  > 1. funkcija f je definirana u a, tj. $a \in \mathcal{D}_f$,
  > 2. postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,
  > 3. vrijedi $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
  >
  > Ako barem jedan od ovih uvjeta nije ispunjen, za funkciju kažemo da je prekinuta u točki a.

Za razliku od nakladnika Školska knjiga, u svim udžbenicima nakladnika Element definirani su jednostrani limesi na identičan način:

Definicija 36. (*pogledati* [3], *str.* 177) *U postupku računanja limesa funkcije u točki a promatramo bilo koji niz (x_n) koji teži k a. Ako pritom uzimamo samo one nizove za koje je $x_n < a$ za svaki n, onda kažemo da varijabla x teži k a slijeva i pišemo $x \to a^-$. (Minus označava da je x u svakom trenutku manji od a i razlika $x - a$ je negativna.)*
Ako uzimamo samo one nizove za koje je $x_n > a$ za svaki n, onda kažemo da varijabla x teži k a zdesna i pišemo $x \to a^+$ (jer je $x - a > 0$).

Zatim slijedi uvjet postojanja limesa:

> (pogledati [3], str. 178) Limes $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ funkcije f u točki a postoji ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:
>
> 1. postoji limes slijeva: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$,
> 2. postoji limes zdesna: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$,
> 3. ti se limesi podudaraju.

Osim u navedenim udžbenicima, autori udžbenika nakladnika Školska knjiga izdanog 2020. godine, pojam limesa slijeva i zdesna spominju na konkretnom primjeru:

> (pogledati [8], str. 275.) Limes slijeva obuhvaća one x-eve koji teže broju a i manji su od a te se označuje $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
> Limes zdesna obuhvaća one x-eve koji teže broju a i veći su od a te se označuje s $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Zatim je napomenuto kako limesi slijeva i zdesna na konkretnom primjeru nisu isti, stoga limes ne postoji.

Potrebno je napomenuti kako se samo u spomenutom udžbeniku nalazi sljedeća definicija proširenja funkcije po neprekidnosti:

Definicija 37. (*pogledati* [8], *str. 276*) *Ako funkcija f nije definirana u točki a, ali ima limes u toj točki, tada se može definirati vrijednost funkcije f u točki a tako da funkcija f bude neprekidna u točki a i to tako da je $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

Udžbenik nakladnika Element izdan 2021. godine bitno se razlikuje od svih ostalih promatranih udžbenika jer, kao što smo ranije naveli, limes i neprekidnost funkcije nisu u poglavlju *Funkcije*, te se samo u spomenutom udžbeniku nalazi definicija horizontalne asimptote ali i neki bitni rezultati. Slijedi definicija lijeve, odnosno desne, horizontalne asimptote:

Definicija 38. (*pogledati* [6], *poglavlje Limes funkcije*) *Kažemo da funkcija f ima limes L u $+\infty$ ako funkcijske vrijednosti $f(x)$ teže broju L kad x teži k $+\infty$. Pišemo*

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Pravac $y = L$ naziva se ***desna horizontalna asimptota*** *funkcije f.*

Po analogiji pisat ćemo

$$L = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

ako funkcijske vrijednosti $f(x)$ teže broju L kad x teži k $-\infty$. Pravac $y = L$ naziva se tad ***lijeva horizontalna asimptota*** *funkcije f.*

Pravac koji je i lijeva i desna horizontalna asimptota nazivamo kratko ***horizontalnom asimptotom*** *funkcije f.*

Također, iskazan je i sljedeći rezultat o limesu kompozicije funkcije:

Teorem 1. *(pogledati [6], poglavlje Limes funkcije) Ako postoje limesi* $a = \lim_{x\to c} g(x)$ *i* $L = f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$*, onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim_{x\to c} g(x)) = f(a) = L.$$

Kažemo da limesom možemo ući u argument funkcije.

U poglavlju *Neprekinutost funkcije*, u obliku teorema istaknute su sljedeće tvrdnje :

- kompozicija neprekidnih funkcija opet je neprekidna funkcija;
- neprekidna funkcija definirana na segmentu poprima svoj minimum i maksimum;
- neprekidna funkcija segment preslikava u segment;
- Teorem srednje vrijednosti:

  Teorem 2. *(pogledati [6], poglavlje Neprekinutost funkcije) Neka je* f *neprekinuta na segmentu* $[c, d]$*. Za svaku vrijednost* A *između* $f(c)$ *i* $f(d)$ *postoji* p *unutar intervala* $[c, d]$ *za koji je* $f(p) = A$*.*

Sljedeći rezultat naveden je samo u udžbeniku nakladnika Element iz 2021. godine i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine:

Teorem 3. *(pogledati [10], str 137) Neka je* f *neprekidna funkcija u svakoj točki segmenta* $[a, b]$ *i neka je* $f(a) < 0$ *i* $f(b) > 0$ *(ili* $f(a) > 0$ *i* $f(b) < 0$*). Tada postoji (barem jedna) točka* $c \in \langle a, b\rangle$*, tako da je* $f(c) = 0$*, tj. funkcija* $y = f(x)$ *ima nultočku na* $[a, b]$*.*

Potrebno je istaknuti kako je u samo udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine sljedeći teorem iskazan u sklopu zadatka, a učenici teorem moraju dokazati:

Teorem 4. *(pogledati [10], str. 137) Neka je* f *neprekidna funkcija u svakoj točki segmenta* $[a, b]$*. Tada funkcija* f *poprima sve vrijednosti između* $f(a)$ *i* $f(b)$*.*

4 | Derivacije

4.1 Pojam derivacije i pravila deriviranja

Pri uvodu u pojam derivacije, udžbenici nakladnika Element prvo razmatraju problem tangente na graf funkcije, a zatim problem brzine. Autori udžbenika nakladnika Školska knjiga prvo razmatraju problem brzine koji kasnije dovode u vezu sa problemom tangente.

Svi udžbenici nakladnika Element, na sličan način prvo definiraju nagib pravca i grafa funkcije u točki, te ta dva pojma dovode u vezu:

Definicija 39. (*pogledati* [4], *str.* 4) *Neka se na graf funkcije f može povući tangenta u točki (x_0, y_0).* ***Nagib grafa*** *funkcije f u točki (x_0, y_0) definiramo kao nagib tangente položene na graf u toj točki. On je jednak koeficijentu smjera k tangente, a može se izraziti kao*

$$k = tg\alpha,$$

pri čemu je α kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Zatim se kroz razne primjere traži nagib tangente pomoću sekante, te se navodi ovisnost brzine pada i rasta funkcije o njezinu nagibu.
Također, sva tri promatrana udžbenika problem brzine razmatraju na identičan način, prvo navode tekst prepirke policajca i vozačice o prekoračenju dozvoljene brzine, što slijedi primjer $s - t$ dijagrama automobila koji je put od 120 km prešao za 2 sata. Zatim se navodi kako se put promatra kao funkcija vremena, a prosječna brzina kvocijent je prijeđenog puta i proteklog vremena. Kada se vremenski interval proteklog vremena približava nuli tada prosječna brzna postaje trenutna brzina, stoga se promatra limes, kada prirast vremena teži u nulu, kvocijenta prirasta puta i prirasta vremena. Na vrlo sličan način se u svim promatranim udžbenicima problem brzine dovodi u vezu sa navedenim limesom.
Derivacija funkcije u točki, u svim promatranim udžbenicima nakladnika Element, identična je i glasi:

Definicija 40. (*pogledati* [4], *str.* 8) *Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ukoliko ovaj limes postoji. Taj je broj jednak nagibu k tangente na graf $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

α je kut što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Za funkciju f kažemo da je derivabilna u točki x_0, ako postoji $f'(x_0)$. Funkcija je derivabilna (diferencijabilna) na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako u svakoj točki tog intervala postoji derivacija $f'(x_0)$. Tada je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definirana funkcija f' koju nazivamo derivacija funkcije f. Derivaciju još označavamo simbolima

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Kao što je već rečeno, udžbenici nakladnika Školska knjiga u uvodu ovog poglavlja prvo razmatraju problem brzine. U različitim udžbenicima promatrani su različiti primjeri:

- u izdanju iz 1997. promatrana je brzina vlaka na dionici Osijek - Zagreb te razlike u brzini s obzirom na udaljenost različitih gradova;
- u izdanju iz 2013. godine promatrana je brzina automobila u različitim vremenskih periodima;
- u izdanju iz 2020. godine promatran je put biciklista na utrci, kao i njegova brzina ovisno o vremenu.

Nakon uvodnog primjera navedeni su pojmovi prirasta puta i prirasta vremena, te je promatrana srednja i trenutna brzina. U izdanju udžbenika iz 1997. godine definirana je derivacija funkcije u točki nakon promatranja trenutne brzine, što slijedi izvod derivacije konstante, linearne i kvadratne funkcije. Zatim je pojam derivacije doveden u vezu sa pojmom tangente na krivulju u točki. U ostalim izdanjima ovog nakladnika, nakon razmatranja trenutne brzine, slijedi razmatranje pojma tangente na krivulju, pri čemu je u udžbeniku iz 2020. godine problem tangente promatran na istom $s - t$ dijagramu na kojemu je razmatran problem brzine.
Najveća razlika između autora nakladnika Školska knjiga nalazi se u definiciji derivacije:

- definicija autora udžbenika iz 1997. godine:

  Definicija 41. (*pogledati [10], str. 143*) *Neka je $y = f(x)$ realna funkcija zadana na segmentu $[a, b]$ i neka je $x \in \langle a, b\rangle$. Limes kvocijenta prirasta funkcije i prirasta varijable kada prirast varijable teži 0, tj. $\Delta x \to 0$, zove se **derivacija funkcije f u točki** x i označava s $f'(x)$:*

  $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{4.1}$$

  odnosno, označimo li $\Delta f(x) = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, pišemo

  $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad ili \qquad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4.2}$$

  *Kažemo da je funkcija f **derivabilna** (ili **diferencijabilna**) u točki x, ako postoji limes (4.1) (odnosno (4.2)).*

- definicija autora udžbenika iz 2013. godine:

Definicija 42. (*pogledati* [2], *str.* 13) ***Derivacija funkcije*** f ***u točki*** x_0 *je broj*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ako ovaj limes postoji.
Taj je broj jednak ***koeficijentu smjera tangente*** *na graf funkcije u točki* $(x_0, f(x_0))$. *Ako derivacija postoji u svakoj točki nekog intervala kažemo da je funkcija* ***derivabilna*** *na tom intervalu.*

U definiciji je derivacija iskazana kao vrijednost u nekoj točki x_0, stoga je u nastavku derivacija navedena kao funkcija ovisna o varijabli x pri čemu je u prethodnom izrazu x_0 zamijenjen sa x.

- definicija autora udžbenika iz 2020. godine:

Definicija 43. (*pogledati* [9], *str.* 10) *Neka je funkcija* f *neprekidna na intervalu* I *te neka je* $x_0 \in I$ *i* Δx *prirast argumenta takav da je* $x_0 + \Delta x \in I$. ***Derivacija funkcije*** f ***u točki*** x_0 *je broj*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ako taj limes postoji. Ako derivacija postoji u svakoj točki intervala, kažemo da je funkcija derivabilna na tom intervalu.

Potrebno je napomenuti kako se u udžbeniku Element iz 2021. godine prvenstveno navode definicije tangente i sekante na krivulje drugoga reda, te svojstva tangente kružnice. U daljnjem razmatranju uočava se kako za proizvoljne krivulje ta svojstva ne vrijede, stoga se učenicima objašnjava kako tangenta na neki graf funkcije ili na neku krivulju (koja nije krivulja drugog reda) zapravo neće biti tangenta na danu krivulju jer će je sjeći u više od jedne točke. Stoga se promatra ponašanje funkcije u okolini neke točke (lokalno), te je ovakav, lokalni pristup razmatranja tangente naveden samo u ovom udžbeniku. Dano objašnjenje prati sljedeća definicija tangente:

Definicija 44. (*pogledati* [6], *poglavlje Problem tangente i brzine*) *Tangenta na graf funkcije je pravac koji prolazi njezinom točkom, a koeficijent smjera jednak je limesu koeficijenta smjerova sekanti koje se približavaju toj tangenti.*

U ovome poglavlju udžbenika nakladnika Školska knjiga izdanog 1997. godine se osim jednadžbe tangente spominje još i normala:

(pogledati [10], str. 147) **Normala** na krivulju u njezinoj točki je pravac okomit ("normalan") na tangentu. Jednadžba normale n na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $P(x_0, y_0)$ je

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

jer je njezin koeficijent smjera negativno recipročan koeficijentu smjera tangente.

Sljedeći postupak određivanja derivacije može se pronaći u svim udžbenicima nakladnika Element i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine:

> (pogledati [9], str 14.) Određivanje derivacije funkcije f u nekoj točki x domene funkcije provodit ćemo u sljedećim koracima.
>
> 1. Izračunati vrijednost $f(x+\Delta x)$.
> 2. Izračunati omjer $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
> 3. Izračunati graničnu vrijednost $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

U svim promatranim udžbenicima po koracima se određuju derivacije: konstante, linearne i kvadratne funkcije, funkcija $\sqrt{x}$ i $\frac{1}{x}$, opće potencije kao i trigonometrijskih funkcija. Osim navedenog, objašnjeno je i kako se određuju derivacije višeg reda. Također su u svim promatranim udžbenicima navedena sljedeća pravila deriviranja:

> (pogledati [2], str. 19) Neka su f i g derivabilne funkcije, c neka je konstanta.
> Vrijede ova pravila deriviranja:
>
> 1. Derivacija umnoška konstante i funkcije $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.
> 2. Derivacija zbroja (razlike): $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
> 3. Derivacija umnoška: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
> 4. Derivacija količnika: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Potrebno je napomenuti kako su navedena pravila dokazana u svim udžbenicima osim u udžbenicima nakladnika Školska knjiga iz 2013. godine (nije dokazano pravilo 4) i 2020. godine (nisu dokazana pravila 3 i 4). U udžbenicima nakladnika Element izostavljeno je pravilo broj 1 jer je ranije spomenuto u udžbeniku, ali je pod pravilo 4 dodan slučaj kada je $f = 1$, tj. $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

4.2 Derivacije složenih i implicitno zadanih funkcija. Tangenta i normala na graf funkcije

Kao uvod u derivaciju složenih funkcija autori nakladnika Školska knjiga, u svim izdanjima deriviraju kvadratne funkcije ili funkcije sa potencijom 4 na način da zbroj ili razliku u zagradi potenciraju, a rezultat deriviraju. Zatim danu funkciju shvaćaju kao kompoziciju dvaju funkcija, te uočavaju pravilo za derivaciju kompozicije koje je vrlo slično iskazano i dokazano u izdanjima iz 2013. i 2020. godine:

> (pogledati [2], str. 29) Ako je f kompozicija derivabilnih funkcija $f(x) = g(u(x))$, tada je derivacija funkcije f dana formulom:
>
> $$f'(x) = g'(u(x))u'(x).$$

Potrebno je napomenuti kako je u izdanju iz 1997. godine ova tvrdnja dokazana ali nije formalno zapisana nego je zaključak zapisan kroz promatranje danog primjera.

Svi udžbenici nakladnika Element prvo navode funkciju $h(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ kao primjer kompozicije funkcija, a zatim po definiciji derivacije funkcije izvode sljedeće pravilo:

> (pogledati [4], str. 26) Derivaciju složene funkcije računamo formulom
>
> $$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$
>
> što zapisujemo još i na ovaj način:
>
> $$f(g(x))' = f'(u) \cdot u'(x), \quad u = g(x).$$
>
> Ova se formula naziva i **pravilo o ulančanom deriviranju**.

U svim promatranim izdanjima oba autora, ovo pravilo naziva se pravilo o ulančanom deriviranju ili samo ulančano deriviranje.

Sljedeća razlika između promatranih nakladnika uočava se u naglašavanju pravila za deriviranje inverzne funkcije. Naime, u udžbenicima nakladnika Element derivacijom kompozicije funkcije i njoj inverzne funkcije te koristeći pravilo za derivaciju složene funkcije izvodi se sljedeće pravilo:

> (pogledati [7], str. 250) Ako su $y = f(x)$ i $x = g(y)$ međusobno inverzne funkcije, onda vrijedi:
>
> $$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}, \quad y = f(x).$$

Navedeno pravilo spominje se u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 1997. u sklopu zadatka gdje učenici to pravilo trebaju dokazati, te u udžbeniku izdanom 2020. godine gdje se pravilo navodi uz izvod sličan onome u udžbenicima nakladnika Element.

Svi promatrani udžbenici, osim udžbenika nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, na isti način određuju derivaciju logaritamske funkcije $\ln x$ - pomoću definicije derivacije. Razlika leži u određivanju derivacije eksponencijalne funkcije e^x:

- autori nakladnika Element derivaciju eksponencijalne funkcije određuju pomoću pravila za deriviranje inverzne funkcije, jer je eksponencijalna funkcija inverzna logaritamskoj čija je derivacija prethodno određena;
- autori udžbenika izdanih 2013. i 2020. godine nakladnika Školska knjiga, derivaciju eksponencijalne funkcije određuju logaritmiranjem izraza $f(x) = e^x$ koji zatim deriviraju primjenjujući ulančano deriviranje.

Potrebno je naglasiti kako je samo u udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 2013. i 2020. godine, u obliku napomene, navedeno svojstvo $\lim\limits_{t \to 0}(1 + at)^{\frac{1}{t}} =$

e^a, odnosno $\lim\limits_{a\to 0}(1+\frac{a}{x})^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{x}}$ potrebno za određivanje derivacije logaritamske funkcije.

U udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine postupak je obrnut. Naime, prvo se po definiciji određuje derivacija eksponencijalne funkcije e^x, a zatim se, koristeći svojstva logaritamske funkcije, određuje derivacija $y = \ln x$ koristeći pravilo o ulančanom deriviranju.
Svi promatrani udžbenici na isti način određuju derivacije funkcija a^x i $log_a x$.

Autori udžbenika nakladnika Element iz 1997. i 2021. godine određuju derivacije ciklometrijskih funkcija koristeći pravilo za derivaciju inverzne funkcije, dok se u udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 1997. i 2020. godine ne određuju navedene derivacije nego ih učenici sami određuju kroz zadatke uz danu uputu. Preostala dva udžbenika koja nisu spomenuta, Element i Školska knjiga iz 2013. godine, niti određuju navedene derivacije niti su zadane učenicima kroz zadatke.
Dodatno, samo se u udžbeniku nakladnika Element iz 2021. godine definiraju hiperbolne funkcije, te određuju i definiraju njima inverzne funkcije - area funkcije. Slijedi definicija hiperbolnih funkcija:

Definicija 45. (*pogledati* [6], *poglavlje Ciklometrijske i hiperbolne funkcije*) *Funkcije sinus hiperbolni* (*oznaka* ***sh***), *kosinus hiperbolni* (*oznaka* ***ch***), *tangens hiperbolni* (*oznaka* ***th***) *i kotangens hiperbolni* (*oznaka* ***cth***) *definiraju se formulama:*

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx}.$$

Njihove derivacije određuju se pravilom za derivaciju kvocijenta.
Funkcije sh i ch su na isti način definirane u udžbeniku nakladnika Element iz 1997. godine u poglavlju *Funkcije*.

U udžbeniku nakladnika Element iz 2013. godine, derivacija implicitno zadane funkcije se ne spominje, dok je u svim ostalim promatranim udžbenicima opisana na sličan način - određivanjem derivacije jednadžbe kružnice:

- svođenjem na eksplicitni oblik, pri čemu se dobiju dvije funkcije koje se zasebno deriviraju;
- derivacija s obzirom na varijablu x jednadžbe kružnice u početnom obliku.

Osim navedenog primjera, korišteni su i primjeri kada se ne može odrediti eksplicitni oblik stoga se funkcija mora derivirati izravnom derivacijom implicitne funkcije. Od primjera ćemo istaknuti $y = x^x$ i $xe^y + ye^x = 0$.

Pojam diferencijal funkcije spominje se samo u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 1997. godine u poglavlju *Diferencijal funkcije*. Naime u promatranom udžbeniku se prilikom definiranja derivacije funkcije u točki samo spominje pojam diferencijabilne funkcije. Kako je diferencijal funkcije opisan kroz razmatranje limesa kvocijenta prirasta funkcije i prirasta varijable, te nisu jasno naznačene definicije pojmova, slijedi citat iz navedenog poglavlja:

(pogledati [10], str. 165) Neka je $y = f(x)$ derivabilna funkcija na nekom intervalu $\langle a, b\rangle$. Prema definiciji derivacije imamo da je

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

To znači da možemo pisati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

gdje je α veličina koja teži 0 kada $\Delta x \to 0$, tj. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha = 0$. (Katkad se kaže da je α "beskonačno mala veličina".)
Odatle slijedi da je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Dakle, prirast funkcije se može rastaviti u dva pribrojnika. Prvi pribrojnik $f'(x) \cdot \Delta x$ zove se **diferencijal funkcije** $y = f(x)$ i označava (prema Leibnizu) s dy:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Diferencijal funkcije ovisi ne samo o točki x u kojoj se računa nego i o prirastu Δx nezavisne varijable. Također definiramo da je **diferencijal nezavisne varijable** jednak njezinom prirastu, tj. $dx = \Delta x$. Ta je definicija u skladu s gornjom formulom, jer za $f(x) = x$, tj. $y = x$ imamo da je $f'(x) = 1$, pa je $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Stoga, iz gornje formule dobivamo

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Također, jedino se u spomenutom udžbeniku spominje formula zvana logaritamska derivacija:

$$(\ln y)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ukoliko je $y = f(x)$. Dano pravilo učenici moraju dokazati kao dio zadatka.

U svim promatranim udžbenicima kut između krivulja definiran je na sličan način, osim u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. gdje ovaj pojam nije definiran uopće. Također, u svim promatranim udžbenicima vrlo su slično navedene jednadžbe tangente i normale na graf funkcije, a navest ćemo kako su izražene u udžbenicima nakladnika Element:

(pogledati [4], str. 39) **Tangenta** na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$t \quad \ldots \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normala na graf funkcije u istoj točki (x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$n \quad \ldots \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je jednadžba tangente $y - y_0 = 0$, a normale $x - x_0 = 0$.

Jedina razlika udžbenika nakladnika Školska knjiga u odnosu na udžbenike nakladnika Element nalazi se u oznaci y_0 koja je u svim udžbenicima nakladnika Školska knjiga zamijenjena sa $f(x_0)$.

4.3 Pad i rast funkcije. Ekstremi

Pojam interval monotonosti definira se kao interval na kojem funkcija raste ili pada u svim udžbenicima nakladnika Element i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanom 2013. godine, dok taj pojam nije spomenut u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanom 1997. godine. Autori udžbenika nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine, intervale monotonosti definiraju na isti način ali uz još jedan dodatak:

Definicija 46. (*pogledati* [9], *str.* 62) *Za funkciju f kažemo da je po dijelovima monotona na intervalu $I = \langle a, b \rangle, I \subset D_f$, ako postoji konačno mnogo točaka takvih da je $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ i da je funkcija monotona na svakom od intervala $\langle a, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle \ldots \langle x_n, b \rangle$. Interval na kojem funkcija raste ili pada nazivamo interval monotonosti.*

Bitna razlika u kriteriju rasta i pada funkcije pronalazi se između različitih autora i nakladnika:

- u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, kao kriterij naveden je sljedeći teorem:

  Teorem 5. (*pogledati* [10], *str.* 175) *Neka je $y = f(x)$ funkcija koja na nekom segmentu $[a, b]$ ima derivaciju. Ako je u svakoj točki x derivacija $f'(x) > 0$, onda ta funkcija raste na tom segmentu, a ako je $f'(x) < 0$, onda ona pada na tom segmentu. Obrnuto, ako ona raste, onda je $f'(x) \geq 0$, a ako pada, onda je $f'(x) \leq 0$.*

- u udžbenicima nakladnika Element izdanim 2013. i 2021. godine, te u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine, na sličan način je iskazan sljedeći teorem:

  Teorem 6. (*pogledati* [9], *str.* 63) *Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $I = \langle a, b \rangle, I \subset D_f$.*
  Funkcija f raste na intervalu I ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in I$.
  Funkcija f pada na intervalu I ako i samo ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in I$.

  U udžbenicima nakladnika Element izostavljen je uvjet da funkcija f mora biti derivabilna na spomenutom intervalu.

- u udžbeniku nakladnika Element izdanog 1997. godine i udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2013. godine, naveden je sljedeći teorem:

  Teorem 7. (*pogledati* [2], *str.* 43) *Neka je f funkcija koja ima derivaciju na intervalu $\langle a, b \rangle$.*
  *Funkcija f **raste** na intervalu $\langle a, b \rangle$ ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki x iz intervala $\langle a, b \rangle$.*
  *Funkcija f **pada** na intervalu $\langle a, b \rangle$ ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki x iz intervala $\langle a, b \rangle$.*

I u ovome primjeru autor udžbenika nakladnika Element izostavlja uvjet postojanja derivacije funkcije f na danom intervalu.

Udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine bavi se ispitivanjem rasta i pada, ali bez pojma intervala monotonosti. Također, ne spominje pojam stacionarne točke koji je u svim ostalim promatranim udžbenicima vrlo slično definiran kao nultočka prve derivacije funkcije f.

Upute za određivanje intervala monotonosti na sličan su način dane u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2013. godine i u svim udžbenicima nakladnika Element:

(pogledati [2], str. 45)

1. Odredimo domenu funkcije f i izdvojimo točke u kojima nije definirana.
2. Odredimo derivaciju f' i izdvojimo točke u kojima nije definirana.
3. Odredimo stacionarne točke, odnosno riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$.
4. Stacionarnim točkama i točkama u kojima funkcije f i f' nisu definirane područje je podijeljeno na intervale. Odredimo predznak funkcije f' po intervalima.
5. Pomoću predznaka funkcije f' odredimo jesu li promatrani intervali rasta ili pada funkcije f.

Treba napomenuti kako je korak 1 izostavljen u udžbenicima nakladnika Element, a koraci 4 i 5 su objedinjeni.
U udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine, ove upute nisu navedene na ovaj način nego kroz konkretne primjere.
Također, u ovim promatranim udžbenicima se dobiveni rezultati zapisuju u tablicu tijeka.

Pojam lokalnog maksimuma i minimuma funkcije u svim je udžbenicima, osim u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 2013. godine, definiran na sličan način:

Definicija 47. *(pogledati [9], str. 67) Funkcija f ima* ***lokalni minimum*** *u točki x_0 ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadržava x_0 tako da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi da je $f(x_0) < f(x)$.*
Funkcija f ima ***lokalni maksimum*** *u točki x_0 ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadržava x_0 tako da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi da je $f(x_0) > f(x)$. Lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije nazivamo lokalnim* ***ekstremima funkcije****.*

Razlike koje se mogu pronaći prilikom definiranja su sljedeće:

- u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. dana definicija navedena je opisno, te je umjesto intervala $\langle a, b\rangle$ korištena okolina točke x_0, odnosno interval $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Također, definiran je minimum i maksimum funkcije, a pomoću jednog od sljedećih primjera uveden je pojam lokalnog maksimuma i lokalnog minimuma funkcije;

- u udžbenicima nakladnika Element izdanim 2013. i 2021. godine umjesto $>$ i $<$, korišteno je $\geq$ i $\leq$.

Autori udžbenika iz 2013. nakladnika Školska knjiga pojam lokalnog maksimuma i minimuma definirali su, uz odgovarajući grafički prikaz, manje formalno:

Definicija 48. (*pogledati* [2], *str. 47*) *Lijevo od točke x_1 funkcija pada, a desno od točke x_1 funkcija raste. Najmanju vrijednost (na nekom intervalu oko točke x_1) funkcija postiže u točki x_1. Kažemo da je x_1* ***točka lokalnog minimuma****, a $f(x_1)$* ***lokalni minimum funkcije****.*
Lijevo od točke x_2 funkcija raste, a desno od točke x_2 funkcija pada. Najveću vrijednost (na nekom intervalu oko točke x_2) funkcija postiže u točki x_2. Kažemo da je x_2 ***točka lokalnog maksimuma****, a $f(x_1)$* ***lokalni maksimum funkcije****.*
Točke lokalnih minimuma i maksimuma zovemo točke ekstrema, a njihove vrijednosti ***ekstremne vrijednosti*** *ili* ***ekstremi funkcije****.*

Svi promatrani udžbenici navode Fermatov teorem koji je nužan uvjet za postojanje ekstrema, ali uz jednu razliku koja se nalazi u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanom 2020. godine:

- iskaz teorema u spomenutom udžbeniku:

  Teorem 8. (*pogledati* [9], *str. 70*) *Ako funkcija f koja je definirana na intervalu $\langle a, b\rangle$ ima lokalni ekstrem u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, tada postoji vrijednost derivacije $f'(x_0)$ i vrijedi da je $f'(x_0) = 0$.*

- iskaz teorema u ostalim promatranim udžbenicima nije identičan ali je vrlo sličan:

  Teorem 9. (*pogledati* [4], *str. 47*) *Ako funkcija f poprima u x_0 lokalni ekstrem i ako f ima derivaciju u toj točki, tada vrijedi $f'(x_0) = 0$.*

Ovaj teorem dokazan je u udžbenicima nakladnika Element iz 2013. i 2021. godine, te u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine.

Sljedeći teorem govori o dovoljnom uvjetu za postojanje ekstrema, a istaknut je samo u udžbenicima nakladnika Školska knjiga izadnim 1997. i 2013. godine u obliku teorema:

Teorem 10. (*pogledati* [2], *str. 48*) *Neka je funkcija f derivabilna na nekom intervalu oko točke x_0. Ako je x_0 stacionarna točka i f' u točki x_0 mijenja predznak, onda funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstrem.*

Teorem je u udžbeniku iz 1997. godine napisan u opširnijem obliku ali je srž sadržana u iskazanom teoremu.
Autori udžbenika nakladnika Element nisu odabrali ovaj uvjet istaknuti u obliku teorema nego prilikom davanja upute za određivanje lokalnog ekstrema funkcije. Slična uputa dana je i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2013. godine:

(pogledati [2], str. 48)

1. Odredimo derivaciju funkcije f.
2. Odredimo stacionarne točke.
3. Odredimo tablicu tijeka funkcije.
4. Ako pri prolazu kroz stacionarnu točku x_0 derivacija
   - mijenja predznak od plus u minus, onda je x_0 točka maksimuma,
   - mijenja predznak od minus u plus, onda je x_0 točka minimuma,
   - ne mijenja predznak, onda x_0 nije točka ekstrema.

U udžbenicima nakladnika Element, izostavljen je korak 2, dok u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 2020. godine nije naveden niti uvjet za postojanje ekstrema niti prethodno navedene upute nego su upute primjenjene na konkretnim primjerima.

Globalni ekstremi i njihov pronalazak su većinom definirani na isti način, ali je u udžbenicima nakladnika Školska knjiga iz 1997. i 2013. dodatno istaknuto da neprekidna funkcija na segmentu postiže globalni minimum i globalni maksimum. Nadalje, samo se u udžbenicima nakladnika Element i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 2020. godine navodi nužan uvjet za globalni ekstrem:

(pogledati [4], str. 53) Na intervalu $[a, b]$ funkcija može poprimiti ekstrem samo u točkama u kojima je:

- derivacija jednaka nuli, ili
- derivacija ne postoji (točke prekida i loma), ili
- u krajevima intervala.

U udžbenicima nakladnika Školska knjiga, na sličan je način iskazan još jedan dovoljan uvjet za postojanje ekstrema, ali ovaj puta pomoću druge derivacije. U udžbeniku iz 1997. uvjet je iskazan u obliku teorema:

Teorem 11. *(pogledati [10], str. 180) Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima i prvu i drugu derivaciju u okolini točke x_0 i neka je $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) \neq 0$. Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je x_0 točka maksimuma, a ako je $f''(x_0) > 0$, onda je x_0, točka minimuma.*

Iskazani uvjet se u udžbenicima nakladnika Element nalazi u sklopu upute dane za određivanje ekstrema funkcije koristeći drugu derivaciju. Spomenuta uputa nalazi se i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine:

(pogledati [9], str. 82)

1. Odredimo prvu derivaciju i riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$ kako bismo dobili stacionarne točke.
2. Odredimo drugu derivaciju i ispitamo predznak druge derivacije u svakoj stacionarnoj točki x_0.
   - ako je $f''(x_0) > 0$, tada je x_0 lokalni minimum funkcije
   - ako je $f''(x_0) < 0$, tada je x_0 lokalni maksimum funkcije.

U udžbenicima nakladnika Element, navodi se još da je u slučaju $f''(x_0) = 0$ potrebno promotriti predznak prve derivacije.

4.4 Primjene diferencijalnog računa

U ovom se dijelu udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine najviše razlikuje u odnosu na ostale promatrane udžbenike. Naime, asimptote grafa drukčije su definirane (o tome ćemo govoriti nešto kasnije), ne govori se o konkavnosti i konveksnosti funkcije, a točka infleksije definirana je drukčije u odnosu na ostale udžbenike:

Definicija 49. (*pogledati* [10], *str.* 177) *Poništavanje derivacije u nekoj točki nije dovoljno da zaključimo kako funkcija u toj točki ima ekstrem. Derivacija je jednaka 0 i u onim točkama u kojima krivulja prelazi s jedne strane tangente paralelne s osi x na njezinu drugu stranu. U toj točki krivulja siječe tangentu! Takva se točka zove točka* ***pregiba*** *ili* ***infleksije***. *Tangenta u točki infleksije ne mora biti paralelna s osi x.*

U ostalim promatranim udžbenicima definira se da je funkcija na nekom intervalu konveksna [konkavna] ukoliko graf funkcije leži iznad [ispod] tangente povučene na proizvoljnu točku intervala, a točka pregiba je točka u kojoj funkcija prelazi iz konveksne u konkavnu ili obrnuto.

U udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 2013. i 2020. godine, nalazi se sljedeći teorem:

Definicija 50. (*pogledati* [2], *str.* 51) *Neka funkcija f ima derivacije višeg reda na nekom intervalu I. Ako je $f''(x) > 0$ za svako x iz I, onda je funkcija f konveksna na I. Ako je $f''(x) < 0$ za svako x iz I, onda je funkcija f konkavna na I.*

Dodatno se još u udžbeniku iz 2020. godine u teoremu navodi kako za točku pregiba x_0 vrijedi $f''(x_0) = 0$.
Prethodni teorem nije formalno iskazan u udžbenicima nakladnika Element, nego je dan kroz uputu određivanja intervala konveksnosti, konkavnosti i točaka infleksije. Vrlo slična uputa dana je i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 2013. godine:

> (pogledati [2], str. 51) **Određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i točaka pregiba**
>
> 1. Odredimo domenu funkcije f.
> 2. Odredimo drugu derivaciju funkcije f.
> 3. Riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$.
>   Rješenja su podijelila domenu funkcije na intervale.
> 4. Odredimo predznak funkcije f po intervalima.
>   Ako je $f'' > 0$, funkcija je konveksna, ako je $f'' < 0$, funkcija je konkavna.
> 5. Točke pregiba su točke u kojima dolazi do promjene iz konveksnog u konkavno ili obratno.

Potrebno je istaknuti kako je korak 1 izostavljen u udžbenicima nakladnika Element, a koraci 4 i 5 su objedinjeni, dok u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanom 2020. godine ova uputa nije navedena na ovaj način nego kroz konkretne primjere.

U nastavku usporedbe udžbenika uočavaju se velike razlike u pristupu crtanja grafa funkcije. Svi udžbenici nakladnika Element, prvo navode postupak crtanja grafa, zatim definiraju asimptote funkcije koje koriste prilikom crtanja grafa funkcije, dok udžbenici nakladnika Školska knjiga (osim udžbenika izdanog 1997. godine) prvo definiraju asimptote funkcije, a zatim daju uputu crtanja grafa funkcije.

Najveća razlika uočava se u postupku crtanja grafa:

- postupak dan u udžbenicima nakladnika Element:

  (pogledati [7], str. 273)

  1. Istraživanje funkcije f:
     - Odredi se područje definicije.
     - Odredi se limes funkcije u rubnim točkama područja definicije.
     - Ispitaju se svojstva parnosti, neparnosti, periodičnosti.
     - Odrede se nultočke.
     - Po potrebi se izračuna vrijednost funkcije u nekoliko po volji odabranih točaka.
  2. Istraživanje funkcije f':
     - Izračuna se f'.
     - Riješi se jednadžba $f'(x) = 0$ i odrede stacionarne točke.
     - Odrede se intervali pada, odnosno rasta na kojima je f' istog znaka.
     - Odredi se karakter ekstrema i vrijednost funkcije u tim točkama.
  3. Istraživanje funkcije f'':
     - Izračuna se f'' i riješi jednadžba $f''(x) = 0$.
     - Odrede se intervali konveksnosti i konkavnosti na kojima je f'' istog znaka.
     - Odrede se točke pregiba i vrijednost funkcije u tim točkama.

- postupak dan u udžbenicima nakladnika Školska knjiga iz 1997. i 2020. godine vrlo je sličan, a navodimo postupak iz udžbenika izdanog 1997. godine:

  (pogledati [10], str. 196)

  - naći područje definicije funkcije,
  - ispitati njezinu parnost i neparnost,
  - ispitati njezinu periodičnost,
  - ispitati njezinu neprekidnost i naći točke prekida,
  - naći derivaciju i njezine nultočke,
  - naći intervale rasta i pada te ekstreme funkcije,
  - naći asimptote grafa funkcije,

  - naći presjeke grafa funkcije s koordinatnim osima,
  - sastaviti tablicu toka funkcije i nacrtati graf.

  Za razliku od navedenog postupka, u udžbeniku iz 2020. godine ne ispituje se neprekidnost funkcije te se ne traže točke prekida, nego se određuju točke pregiba i intervali zakrivljenosti.

- postupak dan u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2013. godine:

  (pogledati [2], str. 54)
  Crtanje grafa funkcije:

  1. Odredimo domenu i nultočke.
  2. Odredimo asimptote.
  3. Ispitajmo parnost, neparnost i periodičnost.
  4. Odredimo intervale monotonosti i ekstreme.
  5. Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke pregiba.
  6. Nacrtamo graf funkcije.

Razlika se također pronalazi i u definiciji asimptote funkcije. Udžbenici nakladnika Školska knjiga izdani 2013. i 2020., ali i udžbenik nakladnika Element iz 2021. godine, asimptotu funkcije definiraju na isti način, a definicija je ranije navedena u ovome radu, u poglavlju *Svojstva funkcije*. U udžbenicima nakladnika Element iz 1997. i 2013. koristi sljedeća definicija:

Definicija 51. *(pogledati [6], str. 65) Neka se točka T neprekinuto giba po grafu Γ_f funkcije f tako da barem jedna od njezinih koordinata teži u ∞ ili $-\infty$. Ako pri tom njezina udaljenost do pravca p teži k nuli, onda se taj pravac naziva* ***asimptota*** *funkcije.*

U udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997. godine, asimptote funkcije nisu definirane.

Vertikalne asimptote su u udžbenicima nakladnika Element izdanim 1997. i 2013. godine slično definirane kao i u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2013. godine:

Definicija 52. *(pogledati [2], str. 53) Za pravac $x = c$ kažemo da je* ***vertikalna asimptota*** *grafa funkcije f ako je*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty.$$

Za razliku od navedene definicije, autori udžbenika nakladnika Školska knjiga izdanog 2020. godine navode nešto opširniju definiciju:

Definicija 53. *(pogledati [9], str. 89) Pravac $x = x_0$ vertikalna je asimptota grafa funkcije f u točki x_0 ako vrijedi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ ili } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ ili obrnuto}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Autor udžbenika nakladnika Školska knjiga iz 1997. ne definira vertikalnu asimptotu funkcije, nego samo spominje kako je pravac $x = 0$ vertikalna asimptota funkcije $\frac{1}{x}$.
U udžbeniku nakladnika Element iz 2021. godine autori ističu kako su se učenici upoznali s pojmom vertikalne asimptote prilikom crtanja grafova elementarnih funkcija, što u ovome radu nije obrađeno. Stoga se samo navode primjeri asimptota nekih funkcija.

Definicija horizontalne asimptote u većini promatranih udžbenika slična je definiciji iz udžbenika nakladnika Element iz 2021. ranije navedenoj u ovome radu, u poglavlju *Limes i neprekidnost (neprekinutost) funkcije*.
Razlika je vidljiva u definiciji autora nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine:

Definicija 54. *(pogledati [9], str. 90) Pravac $y = y_0$ horizontalna je asimptota grafa funkcije f ako vrijedi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$.*

U udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanom 1997. godine ne definira se horizontalna asimptota, niti se navodi primjer tog tipa asimptote.

Svi autori udžbenika nakladnika Element, ali i autori udžbenika nakladnika Školska knjiga iz 2013., kosu asimptotu definiraju vrlo slično:

Definicija 55. *(pogledati [2], str. 53) Za pravac $y = kx + l$ kažemo da je desna **kosa asimptota** grafa funkcije f ako je*
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $l = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$, pod uvjetom da ovi limesi postoje.
Ako dani limesi postoje i za $x \to -\infty$ pravac $y = kx + l$ je lijeva kosa asimptota grafa funkcije f.
Uočite da je horizontalna asimptota poseban slučaj kose (za k=0, y=l).

Udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine navodi sljedeću definiciju:

Definicija 56. *(pogledati [9], str. 92) Pravac $y = kx + l$ kosa je asimptota grafa funkcije f ako postoje limesi konačnih vrijednosti*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad i \quad l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Na identičan način definira se asimptota grafa funkcije u udžbeniku izdanom 1997. nakladnika Školska knjiga.

Sljedeća svojstva racionalne funkcije nalaze se samo u udžbenicima nakladnika Element, uz pretpostavku kako je racionalna funkcija skraćena tako da brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih nultočaka:

(pogledati [4], str. 69)

- **Vertikalne asimptote**. Racionalna funkcija ima vertikalne asimptote u nul-točkama nazivnika (koje zbog naše pretpostavke nisu nultočke brojnika). Graf funkcije može imati dvojako ponašanje u blizini vertikalne asimptote, ovisno o tome mijenja li funkcija predznak lijevo i desno od asimptote. Ako ona mijenja predznak, onda kažemo da graf funkcije "dolazi sa suprotnih strana asimptote". Ako funkcija ne mijenja predznak, onda njezin graf "dolazi s iste strane asimptote".

- **Horizontalne asimptote**. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu (istovremeno i lijevu i desnu) onda i samo onda ako je stupanj brojnika manji ili jednak stupnju nazivnika.
  Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, onda vrijedi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ i pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota.
  Ako je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika, racionalna funkcija imat će horizontalnu asimptotu $y = \frac{a_n}{b_n}$, gdje su a_n i b_n vodeći koeficijenti polinoma u brojniku i nazivniku.
- **Kose asimptote**. Ako je stupanj brojnika za jedan veći od stupnja nazivnika, racionalna funkcija imat će kosu asimptotu (istovremeno lijevu i desnu).
  Ako je stupanj brojnika barem za dva veći od stupnja nazivnika, tada funkcija nema horizontalnih i kosih asimptota.

Također se u navedenim udžbenicima još kroz primjere zadataka razmatraju neki fizikalni problemi poput Fermatova zakona, jačine svjetla, loma svjetlosti i loma svjetlosti u sredstvu. Dodatno, u udžbenicima iz 2013. i 2021. na kraju poglavlja nalazi se tzv. "Kutak plus" u kojemu se učenicima objašnjava osnovna ideja pojma diferencijalna jednažba te se pomoću nje modeliraju neki problemi poput radioaktivnog raspada, titranja opruge i vertikalnog hitca.

5 | Integrali

Promatrajući dane udžbenike može se uočiti velika razlika između nakladnika prilikom uvoda učenika u temu integrala. Naime, autori nakladnika Školska knjiga prvo razmatraju pojam neodređenog integrala, dok autori nakladnika Element prvo razmatraju određene integrale.

5.1 Neodređeni integral i njegovo računanje

Udžbenici nakladnika Školska knjiga iz 1997. i 2020. godine, učenike u pojam neodređenih integrala uvode idejom postojanja postupka inverznog deriviranju, te pomoću primjera dolaze do pojma primitivne funkcije i neodređenog integrala funkcije. U udžbeniku istog nakladnika izdanog 2013. godine, učenike se u temu uvodi problemom računanja površine ispod krivulje. Zatim slijedi primjer u kojemu je formulom dana brzina širenja naftne mrlje tankera te je potrebno odrediti površinu te mrlje nakon sat vremena čime se učenike navodi na zaključak kako je dana derivacija traženog izraza, a trebaju odrediti funkciju koja deriviranjem daje danu funkciju. Navedenim primjerom se učenike uvodi u pojmove primitivne funkcije i neodređenog integrala:

Definicija 57. (*pogledati* [2], *str. 74*) *Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada za svaku funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ nazivamo **primitivna funkcija** ili **antiderivacija funkcije** f.*
*Skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f zove se **neodređeni integral** funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$. To zapisujemo ovako:*
$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ (*čitamo "integral ef od x de iks"*).
$\int$ je znak za integral, f je podintegralna funkcija (integrand), $f(x)$ je podintegralni izraz, x je varijabla integracije.

Definicije su vrlo slične i u ostalim promatranim udžbenicima, jedina je razlika što se u udžbenicima nakladnika Element primitivna funkcija definira nakon određenog integrala u poglavlju *Primitivna funkcija. Newton-Leibnizova formula*, a neodređeni integral kasnije u istoimenom poglavlju.
Svi promatrani udžbenici navode tablicu neodređenih integrala, a samo udžbenici nakladnika Školska knjiga navode svojstva neodređenog integrala:

(pogledati [10], str. 204)

1. $(\int f(x)dx)' = \frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x);$

2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ (c je konstanta);
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. Ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, onda je

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

Napomenimo kako je u udžbeniku izdanom 2020. godine izostavljeno svojstvo 2.

Svi promatrani udžbenici koriste primjer određivanja integrala prikladne funkcije kako bi učenike upoznali sa metodom supstitucije. Diferencijal funkcije definira se kao umnožak te funkcije i diferencijala nezavisne varijable u svim udžbenicima, osim u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanog 1997. godine jer je definiran ranije u poglavlju *Derivacije*.
Također, samo spomenuti udžbenik ne navodi postupak primjene metode stupstitucije dok je u svim ostalim promatranim udžbenicima istaknut na sličan način:

(pogledati [2], str. 79)

1. Određujemo koji ćemo dio podintegralne funkcije zamijeniti s novom varijablom u.
2. Ako je potrebno, izrazimo x pomoću u.
3. Odredimo vezu između diferencijala $du = u'(x)dx$.
4. Zamijenimo podintegralni izraz tako da bude u varijabli u i izračunamo integral, ako se može.
5. Na kraju opet izvršimo zamjenu, to jest, vratimo se na početnu varijablu x.

U svim je promatranim udžbenicima, osim u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 1997., metoda parcijalne integracije izvedena iz pravila za derivaciju umnoška, a dobivena formula dodatno je istaknuta. Samo spomenuti udžbenik i udžbenik istog nakladnika iz 2020. godine ne ističu sljedeći postupak primjene metode parcijalne integracije dok je u ostalim promatranim udžbenicima vrlo slična:

(pogledati [7], str. 309)

1. Podintegralna funkcija napiše se u obliku umnoška funkcije u i funkcije v'.
2. Izračuna se pomoćni integral $v = \int v'dx$.
3. Izračuna se derivacija u'.
4. Napiše se osnovna formula:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

5. Izračuna se integral $\int u'vdx$.

Navedeni postupak nije formalno naveden u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine nego je primjenjen na konkretnom primjeru, dok udžbenik istog nakladnika izdan 1997. godine ovu metodu uopće ne spominje.

Potrebno je istaknuti kako se samo u udžbenicima nakladnika Element navodi metoda integriranja svođenjem pod znak diferencijala što se koristi kao jedan od načina integriranja racionalnih funkcija. Druga metoda koja se koristi prilikom integriranja racionalnih funkcija, metoda rastava na parcijalne razlomke, navodi se samo u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2020. godine i u udžbenicima nakladnika Element iz 1997. i 2021. godine. Način integriranja racionalne funkcije obrađuje se samo u prethodno spomenuta tri udžbenika.
Osim navedenih metoda, u udžbeniku nakladnika Školska knjiga izdanom 1997. godine spominje se metoda transformacija za računanje integrala čija je svrha podintegralnu funkciju pretvoriti u neki drugi oblik pogodniji za postupak integriranja.

Dodatno, prilikom opisivanja svake od navedenih metoda, autori udžbenika nakladnika Element navode primjenu metode na računanje određenog integrala.

5.2 Određeni integral

Razlika između nakladnika, ali i autora, pronalazi se još prilikom obrade gradiva određenog integrala.
Svi udžbenici nakladnika Element na identičan način učenike u pojam određenih integrala uvode problemom površine like po uzoru na Arhimedovo računanje površine kruga aproksimacijama pomoću mnogokuta. Upoznaju učenike sa pojmom krivocrtnog trapeza kojeg koriste za računanje površine ispod grafa funkcije f na nekom segmentu $[a, b]$. Segment se dijeli na n dijelova (segmenata) te se na svakome dijelu promatra minimum i maksimum funkcije i upisuju se, odnosno opisuju, pravokutnici s obzirom na vrijednosti minimuma i maksimuma funkcije na promatranom segmentu. Zbroj površina svih upisanih pravokutnika naziva se donja integralna suma, a zbroj površina svih opisanih pravokutnika naziva se gornja integralna suma te se navodi kako je površina krivocrtnog trapeza uklopljena između te dvije sume. Zatim, uzimajući za n sve veće brojeve primjećuje se kako se gornja suma smanjuje, a donja povećava i kada n teži u beskonačnost limes tih dviju suma bit će isti i označava se sa I. Po uzoru na zaključeno, definira se određeni integral pomoću donje i gornje integralne sume:

Definicija 58. (*pogledati* [4], *str.* 87) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitivna neprekinuta funkcija. Zajednički limes donje i gornje sume nazivamo* ***određenim integralom*** *funkcije f i označavamo s*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

On je jednak površini ispod grafa funkcije, nad intervalom $[a, b]$. Znak $\int$ zovemo ***znakom integracije****, broj a* ***donjom granicom*** *integrala, broj b* ***gornjom granicom*** *integrala, a funkciju f* ***podintegralnom funkcijom****. dx se naziva* ***diferencijal*** *varijable x.*

Niti u jednom udžbeniku nakladnika Element nije definirana pozitivna funkcija. Na nekoliko mjesta u udžbenicima spominje se pozitivna funkcija, a u nastavku teksta funkcija sa pozitivnim vrijednostima.

Udžbenici nakladnika Školska knjiga izdani 2013. i 2020. godine bave se istim uvodnim problemom, a također navode Arhimedov pristup računanju površine kruga. Autori navedenih udžbenika na isti način pristupaju problemu i definiraju pojmove donje i gornje integralne sume, ali promatraju jedan pravokutnik u proizvoljnoj točki jednog od n segmenata. Navode kako je površina promatranog pravokutnika jednaka umnošku širine intervala i vrijednosti funkcije f u toj proizvoljnoj točki, a suma svih takvih pravokutnika približno je jednaka površini ispod grafa funkcije f te se zapisuje u obliku jedne integralne sume. Tim razmatranjem, limes integralne sume kada n teži u beskonačnost konvergira prema površini ispod grafa funkcije f uz uvjet neprekidnosti funkcije f. Taj limes definira se kao integral funkcije f:

Definicija 59. (*pogledati* [9], *str.* 142) *Limes niza integralnih suma funkcije f neprekidne i pozitivnih vrijednosti na intervalu* $[a, b]$ *kada broj dijelova na koje je interval podijeljen teži u beskonačno, naziva se određeni integral funkcije na tom intervalu i označuje s* $\int_a^b f(x)dx$. *Broj a je donja, a broj b gornja granica integrala.*

Integralna suma se na ovaj način definira i u kasnijem dijelu poglavlja u udžbenicima nakladnika Element i zaključuje se kako je uklopljena između donje i gornje integralne sume, te je njezin limes jednak integralu funkcije.

Autor udžbenika nakladnika Školska knjiga iz 1997. ne uvodi učenike u pojam određenog integrala pomoću problema površine i limesa integralnih suma nego odmah sljedećom definicijom:

Definicija 60. (*pogledati* [10], *str.* 215) *Neka je formulom* $y = f(x)$ *zadana (neprekidna) pozitivna funkcija na segmentu* $[a, b]$. *Površina lika omeđenog krivuljom* $y = f(x)$, *osi x i pravcima* $x = a$ *i* $x = b$ *zove se* ***određeni integral*** *funkcije f u granicama od a do b i označuje se*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Broj a zove se ***donja***, *b* ***gornja granica*** *integrala, a f* ***podintegralna funkcija*** *(ili* ***integrand***). *Izraz se čita integral* $f(x)dx$ *u granicama od a do b.*

Zatim se objašnjava računanje određenog integrala, odnosno Newton-Leibnizova formula. Određeni se integral kao limes integralnih suma definira u istoimenom poglavlju knjige koje se nalazi na samom kraju lekcije, nakon primjena određenog integrala.

U svim promatranim udžbenicima navedena su svojstva određenih integrala koja su većinom slična:

> (pogledati [9], str. 144) Neka su f i g dvije neprekidne funkcije definirane na intervalu $[a, b]$. Tada vrijedni:

1. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx;$
2. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, k \in \mathbb{R};$
3. za $c \in [a,b]$ vrijedi $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx;$
4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx;$
5. $\int\limits_a^a f(x) = 0.$

U udžbenicima nakladnika Element nisu navedena svojstva 4 i 5.

Autori udžbenika nakladnika Školska knjiga izadnih 2013. i 2020., učenike u računanje određenih integrala uvode problemima prijeđenog puta zrakoplova, odnosno vlaka, u određenim vremenskim periodima ukoliko je zadana njihova brzina kao funkcija u ovisnosti u vremenu. Kroz navedene primjere, dolaze do zaključka kako vrijedi Newton-Leibnizova formula koja je u svim promatranim udžbenicima vrlo slično definirana:

> (pogledati [2], str. 92) Neka je f neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$. Tada vrijedi:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5.1}$$
>
> gdje je F primitivna funkcija za funkciju f (funkcija za koju je $F'(x) = f(x)$).

U udžbenicima nakladnika Element, izostavljen je uvjet da je f neprekidna funkcija, ali je dokazana spomenuta formula za razliku od udžbenika nakladnika Školska knjiga.

Računanje određenog integrala koristeći ovu formulu naznačeno je u obliku napomene u udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 2013. i 2020. godine:

> (pogledati [2], str. 93)
>
> 1. Izračunamo neodređeni integral $\int f(x)dx$, to jest odredimo primitivnu funkciju $F(x)$.
> 2. Izračunamo vrijednost funkcije $F(x)$ u gornjoj granici $x = b$.
> 3. Izračunamo vrijednost funkcije $F(x)$ u donjoj granici $x = a$.
> 4. Oduzmemo dobivene vrijednosti.

Autori udžbenika iz 2020. su objedinili svojstva 2, 3 i 4, a u ostalim promatranim udžbenicima računanje pomoću formule nije navedeno po koracima nego je ponovno istaknut izraz (5.1).

Razlika je očita i prilikom promatranja integrala negativne funkcije. Naime, autori nakladnika Školska knjiga taj problem promatraju sa stajališta površine ispod grafa funkcije, te navoda da, ukoliko funkcija f poprima negativne vrijednosti na segmentu, površina ispod grafa funkcije će zapravo biti integral od $-f$. Razlog tom zaključku nalazi se u činjenici da će tada vrijednosti funkcije $-f$ biti pozitivne i stoga će se promatrati površina grafa između funkcije $-f$ i osi x. Nadalje, autori zaključuju kako će se određenim intgralom $\int_a^b f(x)$ promatrati relativna površina između grafa dane funkcije i osi x, a predznak ovisi o tome nalazi li se funkcija iznad, ili ispod x osi.
Udžbenici nakladnika Element, istu problematiku promatraju formalnije. Također navode da je funkcija $-f$ pozitivna na intervalu $[a,b]$, ukoliko je funkcija f negativna na istom intervalu. Tvrde da je površina ispod grafa funkcije $-f$ jednaka površini grafa iznad funkcije f koristeći sljedeće objašnjenje pomoću integralnih suma:

(pogledati [4], str. 91)

$$\int_a^b (-f)(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} -f(\xi_i)\Delta x_i = -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx.$$

Pri tome je ξ_i neka točka jednog od n intervala $[x_{i-1}, x_i]$.

Potrebno je napomenuti kako se samo udžbenici nakladnika Element bave problemom integrala kao funkcije gornje granice. Promatraju funkciju $G(x)$ definiranu kao integral čija je gornja granica x od funkcije koja ovisi o varijabli t. Zatim se uočava da je prirast $\Delta y = G(x+\Delta x) - G(x)$ jednak površini krivocrtnog trapeza nad intervalom $[x, x+\Delta]$. Vrijednost te površine uklopljena je između vrijednosti površina dvaju pravokutnika čije su visine funkcijske vrijednosti rubova intervala $[x, x+\Delta]$, stoga kada Δx teži nuli vrijedi sljedeće:

(pogledati [4], str. 92) Vrijedi formula:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Derivacija određenog integrala kojemu je x gornja granica jednaka je podintegralnoj funkciji.

5.3 Primjena određenog integrala

U ovome poglavlju se najveći naglasak stavlja na računanje površine likova određenih krivuljama, kao i na računanje volumena tijela s poznatim i nepoznatim presjecima (rotacijska tijela).

U udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 2013. i 2020. slično su navedena sljedeća pravila za računanje površina:

- (pogledati [2], str. 98)
  1. Ako je funkcija f pozitivna na $[a,b]$, tada je površina što je graf funkcije f zatvara sa x osi dana s
  $$P = \int_a^b f(x)dx.$$
  2. Ako je funkcija f negativna na $[a,b]$, tada je površina što je graf funkcije f zatvara sa x osi dana s
  $$P = -\int_a^b f(x)dx.$$
  3. Ako funkcija f mijenja predznak na intervalu $[a,b]$ u nultočki c od pozitivnog u negativni, tada je površina što je graf funkcije f zatvara s osi x dana s:
  $$P = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{P_1} - \underbrace{\int_c^b f(x)dx}_{P_2}.$$
- (pogledati [9], str. 159) Površina lika omeđenoga grafovima funkcija f i g na intervalu $\mathbb{R}$ pri čemu je $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a,b]$ dana izrazom:
  $$P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Prvo navedeno pravilo, u udžbeniku iz 2020. iskazano je identično kao definicija određenog integrala u udžbeniku iz 1997. godine.
U ostalim promatranim udžbenicima ova svojstva nisu navedena u obliku napomene nego kroz primjer.

Udžbenici nakladnika Element, površinu lika omeđenog grafovima krivulja promatraju i na drugi način. Naime, promatra se diferencijal površine označen sa dP što predstavlja površinu pravokutnika čije su stranice dx i $f(x) - g(x)$ - pretpostavljeno je da se funkcija f nalazi iznad funkcije g. Tada se ranije navedena formula dobiva integriranjem diferencijala površine.

Od svih promatranih udžbenika, samo je u udžbenicima nakladnika Školska knjiga izdanim 2013. i 2020. formalno navedeno:

> (pogledati [9], str. 164) Ako tijelo nastaje rotacijom lika omeđenoga grafom integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b]$ oko osi x, onda je njegov obujam jednak:
> $$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

U udžbeniku iz 2013. navedeno je još analogno pravilo kada funkcija rotira oko y osi. Dodatno, u spomenutom udžbeniku navedeno je još sljedeće pravilo koje nije spomenuto u udžbeniku iz 2020. godine:

> (pogledati [2], str. 106) Rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = f(x)$ i $y = g(x)$, te pravcima $x = a$ i $x = b$ oko osi x, gdje je za svaki $x \in [a, b]$ $f(x) \geq g(x)$, nastaje rotacijsko tijelo čiji je obujam
>
> $$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx.$$

Kao i kod površine, navedena pravila za volumen nisu formalno iskazana u preostalim promatranim udžbenicima nego samo kroz primjere.

Rotacijom pseudotrapeza oko osi x nastaje tijelo, koje u presjeku sa ravninom okomitom na os x u presjeku daje krug čija će površina biti kvadratna vrijednost funkcije u točki pomnožena sa brojem π. Slično kao i kod površine, autori udžbenika nakladnika Element, promatraju diferencijal volumena dV što je upravo navedena površina kruga. Integrirajući dV u granicama promatranog segmenta, dobije se upravo ranije navedena formula za volumen tijela. Sličan postupak vrijedi i za tijelo omeđeno dvjema krivuljama.

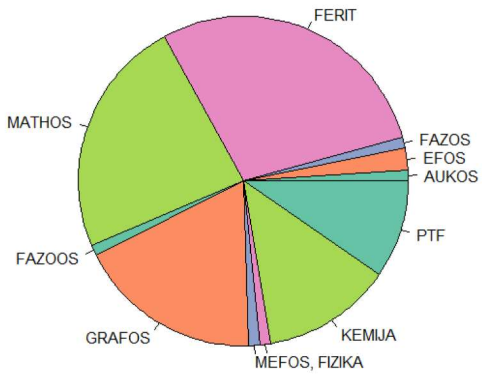
Osim navedenih primjena određenog integrala, promatrani se udžbenici bave problemima računanja prijeđenog puta, obavljenog rada, te problemima eksponencijalnog pada i rasta.

6 | Sveučilišna anketa

Provedena je anketa na razini Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera čiji su ispitanici studenti prvih godina sveučilišnih preddiplomskih studija.
Anketa se može naći na linku: https://forms.gle/CPLsDza6cQgqNVzV8.
Cilj ankete bio je ispitivanje stavova i iskustava studenata prvih godina u vezi udžbenika matematike četvrtih razreda srednje škole.
Anketi su pristupa 94 ispitanika, od čega su:

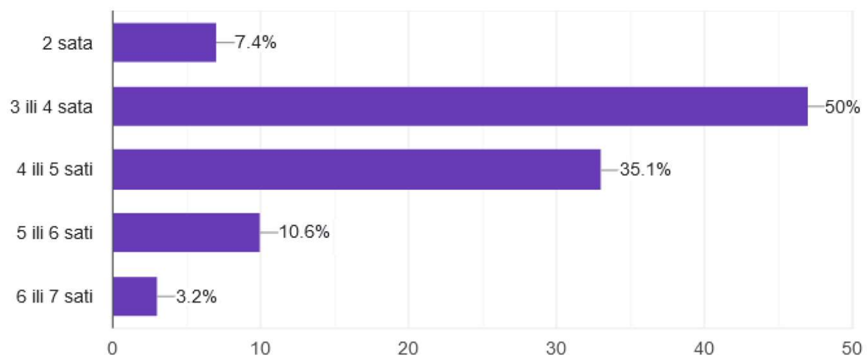
- 27 (28.7%) studenata *Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija*;
- 22 (23.4%) studenta *Fakulteta primijenjene matematike i informatike*;
- 17 (18.1%) studenata *Građevinskog i arhitektonskog fakulteta Osijek*;
- 12 (12.8%) studenata *Odjela za kemiju*;
- 9 (9.6%) studenata *Prehrambeno-tehnološkog fakulteta*;
- 2 (2.1%) studenta *Ekonomskog fakulteta*;
- 1 (1.1%) student *Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti*, *Fakulteta agrobiotehničkih znanosti Osijek*, *Akademije za umjetnost i kulturu u Osijeku*, *Medicinskog fakulteta* i *Odjela za fiziku*.

Struktura ispitanika ankete s obzirom na fakultet koji pohađaju, prikazana je grafički na slici(6.1).



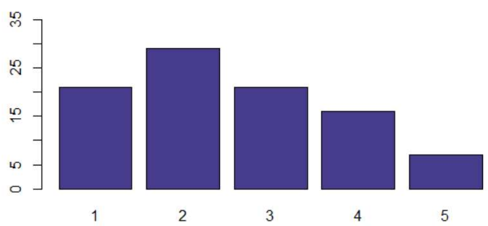
Slika 6.1: Struktura ispitanika ankete

Odgovore studenata na pitanje: *Koliko ste sati tjedno matematike imali u srednjoj školi?*, možemo očitati iz sljedećeg grafičkog prikaza:



Oko 7% ispitanika pohađalo je dva sata matematike tjedno, dok je 3 ili 4 sata tjedno pohađalo 50% ispitanika. Oko 35% ispitanika pohađalo je 4 ili 5 sati tjedno, dok je 5 ili 6 sati tjedno pohađalo otprilike 11% ispitanika. Maksimalnu tjednu satnicu matematike, 7 sati, pohađalo je otprilike 3% ispitanika.
Možemo primjetiti da ukoliko zbrojimo sve postotke, dobijamo vrijednost veću od 100, a razlog tomu je što neki od ispitanika nisu bili sigurni jesu li imali matematiku npr. 3 do 4 sata tjedno, ili 4 do 5 sati tjedno, stoga su označili oba odgovora.

Na pitanje *Koliko su vam bili korisni udžbenici iz matematike za četvrti razred srednje škole u svrhu pripreme za državnu maturu?*, ispitanici su odgovarali brojevima $1-5$, pri čemu je 1 – *Uopće mi nisu bili korisni*, a 5 – *Bili su mi od velike pomoći*. Odgovori ispitanika vidljivi su na grafičkom prikazu slike (6.2).

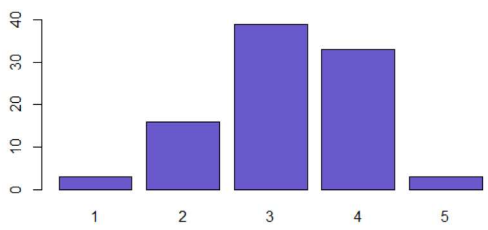


Slika 6.2: Korisnost udžbenika u svrhu pripreme za državnu maturu

Možemo vidjeti da se 21 ispitanik izjasnio kako mu udžbenici iz matematike uopće nisu bili koristni prilikom pripreme za državnu maturu, dok se 29 ispitanika izjasnilo kako im udžbenici iz matematike uglavnom nisu bili korisni. Nadalje, 21 ispitaniku udžbenici niti jesu niti nisu bili korisni dok se 16 ispitanika izjasnilo kako su im udžbenici bili uglavnom korisni, a samo 7 ispitanika smatra kako su udžbenci bili od velike pomoći prilikom pripreme za državnu maturu.

Ispitanici koji su imali prijemne ispite na fakultetima odgovarali su na pitanje *Koliko su vam bili korisni udžbenici iz matematike za četvrti razred srednje škole za pripremu prijemnog ispita na fakultetu?* odgovorima od 1 do 5 koji imaju isto značenje kao u prethodnom pitanju. Da im udžbenici uglavnom nisu bili korisni smatra 6 ispitanika, a 3 da im udžbenici niti jesu niti nisu bili korisni za pripremu prijemnom ispita. Da su udžbenici uglavnom bili korisni prilikom pripreme za prijemni ispit, izjasnila su se 3 ispitanika, dok jedan ispitanik navodi kako su udžbenici bili od velike pomoći.

Sljedeće pitanje ankete glasi: *Kako biste ocjenili kvalitetu i jasnoću objašnjenja u srednjoškolskim matematičkim udžbenicima za četvrti razred?*, a ispitanici su navedeno ocjenjivali brojevima od 1 do 5 što je vidljivo na slici (6.3).



Slika 6.3: Ocjene kvalitete i jasnoće objašnjenja u udžbenicima

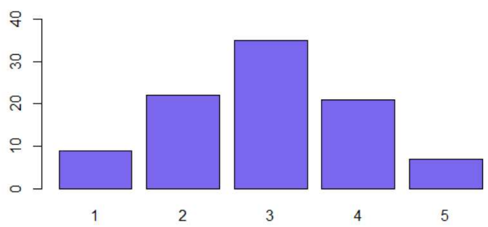
Ocjenu 1 dalo je 3 (3.2%) ispitanika, 16 (17%) ispitanika dalo je ocjenu 2, dok je ocjenu 3 dalo 39 (41.5%) ispitanika. Ocjenu 4 dala su 33 (35.1%) ispitanika, a samo 3 (3.2%) ispitanika dala su ocjenu 5.

Zatim su ispitanici navodili na koje su dodatne načine popunjavali eventualne praznine iz srednjoškolskog gradiva matematike u četvrtom razredu, pri čemu su neki od ispitanika naveli više od jednog načina:

- 10 ispitanika navelo je kako nisu koristili nikakve dodatne načine popunjavanja gradiva;
- 18 ispitanika navelo je korištenje Youtube tutoriala;
- 5 ispitanika koristilo je online tečajeve;
- 9 ispitanika navodi kako su koristili Youtube kanal ili internetsku stranicu Tonija Miluna kako bi upotpunili gradivo;
- 6 ispitanika navodi kako su koristili usluge škole Educos;
- 4 ispitanika koristili su samo skriptu;
- 4 ispitanika svoje praznine iz srednjoškolskog gradiva popunila su odlaskom na pripreme za državnu maturu;
- jedan ispitanik navodi sljedeće: *Profesorica iz matematike nam je često davala materijale za vježbanje i na našu sreću super je objašnjavala sve zadatke bez upotrebe udžbenika*;
- instrukcije je koristilo 10 ispitanika;

- 5 ispitanika koristila su samo bilježnicu, pri čemu jedan od ispitanika navodi sljedeće: *profesorica bolje objasni od udžbenika i ima korisnije zadatke*, dok drugi ispitanik navodi: *Onako kako je profesor objasnio, knjige skoro pa nismo niti koristili*;
- dodatnom nastavom koristila su se 2 ispitanika;
- dva ispitanika su se savjetovala s kolegama;
- samo jedan ispitanik navodi kako je postavljao dodatna pitanja profesorici;
- jedan ispitanik služio se Photomath aplikacijom;
- samo jedan ispitanik navodi kako se koristio udžbenikom, točnije elektroničkim udžbenikom nakladnika Element.

Ispitanici su ocjenama od 1 do 5 ocjenjivali koliko su primjeri i zadatci iz srednjoškolskih matematičkih udžbenika za četvrti razred pomogli u razvijanju njihovih vještina rješavanja problema na fakultetu, što je prikazano sljedećim grafičkim prikazom:



S 1 je primjere i zadatke ocjenilo 9 (9.6%) ispitanika, a 22 (23.4%) ispitanika ocjenom 2. Ocjenu 3 dalo je 35 (37.2%) ispitanika, dok je 21 (22.3%) ispitanik ocijenio primjere i zadatke ocjenom 4. Samo 7 (7.4%) ispitanika dalo je ocjenu 5.

U pitanjima koja slijede ispitanici su svoje odgovore označavali na ljestvici od 1 do 5, pri čemu je:

1 – U potpunosti nisu/nisam

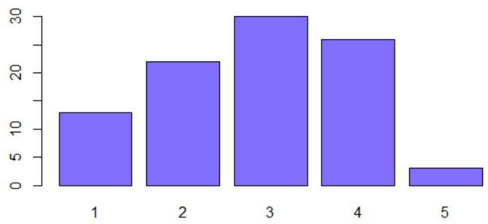
2 – Djelomično nisu/nisam

3 – Niti jesu/jesam, niti nisu/nisam

4 – Djelomično jesu/jesam

5 – U potpunosti jesu/jesam

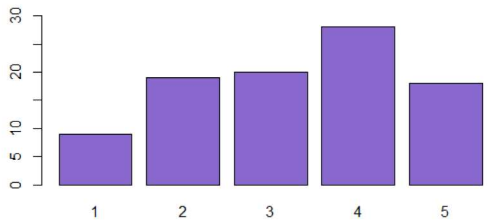
Ispitanicima je postavljeno pitanje: *Jesu li udžbenici iz četvrtog razreda srednje škole dovoljno detaljno obradili gradivo koje se obrađuje na prvoj godini studija?*, a njihovi odgovori su grafički prikazani na slici (6.4).



Slika 6.4: Stavovi ispitanika o detaljnosti obrade gradiva u udžbenicima

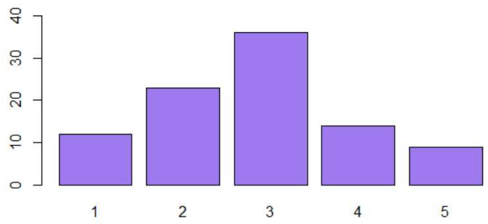
Na postavljeno je pitanje s 1 odgovorilo 13 (13.8%) ispitanika, dok su 22 (23.4%) ispitanika odgovorila sa 2. Da je 3 prikladan odgovor na pitanje o detaljnosti obrade gradiva srednjoškolskih udžbenika smatra 30 (31.9%) ispitanika, dok je 26 (27.7%) ispitanika odgovorilo sa 4, a samo 3 ispitanika smatraju da su udžbenici dovoljno detaljno obradili gradivo koje se obrađuje na prvoj godini fakulteta.

Slijede odgovori ispitanika na pitanje: *Jeste li primjetili nedostatke u Vašem razumijevanju matematičkih pojmova zbog eventualnih propusta u srednjoškolskim udžbenicima četvrtoga razreda?*, koji su prikazani pomoću sljedećeg grafičkog prikaza:



Od 94 ispitanika, njih 9 (9.6%) smatra da u potpunosti nisu primjetili nedostatke u razumijevanju matematičkih pojmova, a 19 (20.2%) ispitanika smatra da djelomično nisu primjetili nedostatke. Nedostatke niti je, niti nije primjetilo 20 (21.3%) ispitanika, dok je djelomično nedostatke primjetilo 28 (29.8%) ispitanika, a u potpunosti je nedostatke u razumijevanju primjetilo čak 18 (19.1%) ispitanika.

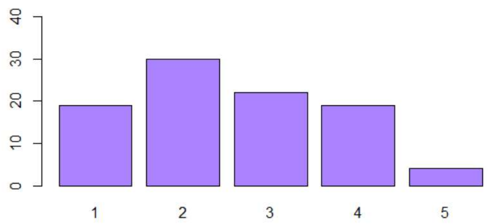
Na slici (6.5) grafički su prikazani odgovori ispitanika na sljedeće pitanje: *Jesu li se metode objašnjavanja u srednjoškolskim udžbenicima pokazale korisnim za Vašu trenutnu nastavu na fakultetu?*. Kao i prilikom prethodna dva pitanja, ispitanici su odgovore označavali na ljestvici od 1 do 5.



Slika 6.5: Stavovi ispitanika o metodama objašnjavanja u udžbenicima

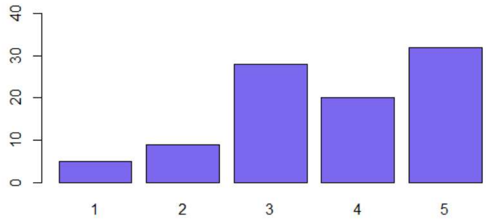
Na postavljeno pitanje 12 (12.8%) ispitanika odgovorilo je sa 1, dok 23 (24.5%) ispitanika smatraju da je prikladan odgovor 2. Čak 36 (38.3%) ispitanika odgovorilo je sa 3, dok je 14 (14.9%) ispitanika na ljestvici označilo odgovor 4, a 9 (9.6%) ispitanika smatra da su se metode objašnjavanja u udžbenicima pokazale korisnima za nastavu na fakultetu.

Slijedi pitanje: *Smatrate li da su Vas srednjoškolski udžbenici četvrtog razreda adekvatno pripremili za zahtjevnije matematičke kolegije na fakultetu?*, a odgovori ispitanika mogu se očitati u sljedećem grafičkom prikazu:



Broj 1 je kao odgovor označilo 19 (20.2%) ispitanika, a čak 30 (31.9%) ispitanika broj 2. Odnosno, otprilike 52% ispitanika smatraju da ih udžbenici četvrtog razreda srednje škole u potpunosti ili djelomično nisu pripremili za zahtjevnije matematičke kolegije studija koji pohađaju. Na ljestvici su brojem 3 svoj odgovor onačila 22 (23.4%) ispitanika, dok 19 (20.2%) ispitanika smatra kako je prikladan odgovor 4. Samo 4 (4.3%) ispitanika smatraju kako su ih udžbenici u potpunosti pripremili za zahtjevnije matematičke kolegije.

Odgovori ispitanika na pitanje: *Bi li Vam sada, kao studentu prve godine, bilo od značaja da imate pristup naprednijim verzijama srednjoškolskih udžbenika koje pokrivaju osnovno, ali i naprednije gradivo?* grafički su predstavljeni sljedećim dijagramom:



Da im naprednije verzije udžbenika u potpunosti ne bi bile korisne kao studentu prve godine studija smatra 5 (5.3%) ispitanika, dok 9 (9.6%) ispitanika navodi kako im udžbenici djelomično ne bi koristili. Da naprednije verzije udžbenika niti jesu niti nisu korisne na prvoj godini studija smatra 28 (29.8%) ispitanika, dok 20 (21.3%) ispitanika smatra kako bi im udžbenici djelomično koristili, a 32 (34%) ispitanika smatraju kako bi im naprednije verzije udžbenika u potpunosti koristile. Odnosno, 55% ispitanika smatra kako bi im udžbenici djelomično ili u potpunosti koristili na prvoj godini studija.

Posljednje pitanje ankete glasi: *Koje teme iz udžbenika četvrtog razreda srednje škole smatrate najvažnijima za uspješno svladavanje gradiva na prvoj godini fakulteta?*. Slijede odgovori na postavljeno pitanje, pri čemu su odgovori otvorenog tipa, a većina ispitanika navela je više od jedne teme u svom odgovoru:

- 34 ispitanika smatraju da su derivacije jedna od najvažnijih tema;
- 26 ispitanika navelo je kako su integrali jedna od najvažnijih tema;
- 13 ispitanika smatra kako su jedna od najvažnijih tema limesi;
- funkcije kao jednu od vrlo važnih tema smatra 9 ispitanika;
- 3 ispitanika svaku od sljedećih tema smatraju najvažnijim tema za uspješno svladavanje gradiva prve godine studija:
  - kompleksni brojevi;
  - redovi;
  - vektori;
  - jednadžbe;
  - geometrija;
  - trigonometrija;
- 2 ispitanika navode diferencijalne jednadžbe kao vrlo bitnu temu;
- 2 ispitanika poseban naglasak stavljaju na logaritamsku funkciju;

- po jedan ispitanik smatra najvažnijom svaku od sljedećih tema:
    - algebra;
    - matrice;
    - osnovni pojmovi;
    - osnovni izračuni;
- 3 ispitanika smatraju da su sve teme najvažnije za svaladavanje gradiva prve godine studija, dok se 7 ispitanika nije izjasnilo ili je napisalo da se ne sjeća.

Literatura

[1] S. Antolić, A. Copić, F. M. Brückler, T. Milun, *Matematika 4, 1. dio*, Školska knjiga d.d., Zagreb, 2013.

[2] S. Antolić, A. Copić, F. M. Brückler, T. Milun, *Matematika 4, 2. dio*, Školska knjiga d.d., Zagreb, 2013.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, 1. dio*, Element d.o.o., Zagreb, 2013.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, 2. dio*, Element d.o.o., Zagreb, 2013.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, 1. dio*, Element d.o.o., Zagreb, 2021.

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, 2. dio*, Element d.o.o., Zagreb, 2021.

[7] N. Elezović, *Matematika 4*, 2. izdanje, Element, Zagreb, 1997.

[8] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, T. Srnec, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4, 1. dio*, Školska Knjiga d.d., Zagreb, 2020.

[9] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, T. Srnec, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4, 2. dio*, Školska Knjiga d.d., Zagreb, 2020.

[10] D. Veljan, *Matematika 4*, Školska Knjiga d.d., Zagreb, 1997.

Sažetak

U ovom diplomskom radu uspoređeni su udžbenici dvaju nakladnika u vremenskom razmaku od tridesetak godina, njihove međusobne ali i individualne razlike u sadržaju. Razmatrane su razlike prilikom pojma i zadavanja niza te pristup prilikom definiranja geometrijskog i aritmetičkog niza, ali i limesa niza. Nadalje, promatra se pojam konvergencije reda, te definicija i konvergencija geometrijskog reda. Obraća se pozornost na pristup definiciji limesa funkcije i neprekidnosti funkcije. Posebna pozornost, obraća se na motivacijski pristup definiranju derivacije i integracije funkcije, deriviranju složene funkcije i crtanju grafa funkcije primjenjujući diferencijalni račun, te razlikama u definiranju određenog integrala. Rad se završava analizom ankete Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, čiji je cilj prikupljanje iskustvava i stavova studenata prvih godina prilikom korištenja udžbenika četvrtih razreda srednje škole.

Ključne riječi

niz, aritmetički niz, geometrijski niz, limes niza, red, geometrijski red, konvergencija geometrijskog reda, kompozicija funkcija, inverzna funkcija, limes funkcije, neprekidnost funkcije, derivacija funkcije, asimptote funkcije, primjena derivacije, određeni integral, neogređeni integral, primjena određenog integrala.

Mathematical analysis in high school

Summary

In this thesis, the textbooks of two publishers were compared in a time gap of thirty years, their mutual but also individual differences in content. Differences in the concept and definition of a sequence were considered, as well as the approach to defining a geometric and arithmetic sequence, as well as the limit of a sequence. Furthermore, the concept of series convergence, as well as the definition and convergence of a geometric series, is observed. Attention is paid to the approach to the definition of a limit of a function and function continuity. Special attention is paid to the motivational approach to defining the derivation and integration of a function, deriving a composite functions and drawing a graph of a function using differential calculus, and the differences in defining a definite integral. The paper ends with an analysis of a survey of Josip Juraj Strossmayer University in Osijek, the aim of which is to collect the experiences and attitudes of first-year students when using fourth-grade high school textbooks.

Keywords

sequences, arithmetic sequences, geometric sequences, sequences limes, series, geometric series, convergence of geometric series, composition of functions, inverse function, limit of functions, continuity of a function, derivative of a function, asymptotes of a function, application of the derivative, definite integral, indefinite integral, application of the definite integral.

Životopis

Rođen sam 16. studenog 1995. godine u Slavonskom Brodu. Pohađao sam Osnovnu školu Ilača-Banovci u Ilači, a zatim sam upisao Opću gimnaziju u Vinkovcima. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja upisao sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, sada Fakultet primijenjene matematike i informatike. Preddiplomski studij završavam sa završnim radom na temu "Teorem srednje vrijednosti za realne funkcije više realnih varijabli" uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Ivana Solde. Godine 2022. upisao sam Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na istom fakultetu.