Matematika u svakodnevnom životu

Arbutina, Andrea

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Matematika u svakodnevnom životu

Diplomski rad

Mentor:
prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Student:
Andrea Arbutina

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

Matematika je univerzalni jezik koji oblikuje svijet oko nas. Bez nje mnogi aspekti modernog života ne bi bili mogući. U ovom radu pokazat ćemo kako matematika nije samo apstraktna disciplina, već osnovni i temeljni alat koji ima dubok utjecaj na svakodnevni život ljudi. Bilo da je riječ o kuhanju ili graditeljstvu, matematika rješava probleme i unapređuje društvo u cjelini.

Prvo poglavlje, pod nazivom "Matematika u kuhinji", obuhvaća sve osnovne definicije potrebne za rad u kuhinji, kao što su razlomci, omjeri i postotci. Pomoću jednostavnih formula objašnjavaju se postupci preračunavanja različitih mjernih jedinica koje se koriste u kuhinji, postupci preračunavanja recepata korištenjem faktora skaliranja te određivanje postotka iskorištenosti i gubitka.

Drugo poglavlje, "Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi", objašnjava božansku proporciju koju nazivamo zlatnim rezom i njezinu primjenu u umjetnosti i prirodi. Navode se razni primjeri gdje se koriste omjeri Fibonaccijevih brojeva i Fibonaccijeva spirala u prirodi i umjetnosti.

U poglavlju "Pitagorin poučak" se navodi najpoznatiji teorem u matematici te njegove primjene u fraktalima kao Pitagorino stablo i primjene u izračunu visine ljestvi i slično.

2 | Matematika u kuhinji

Brojevi su svuda oko nas, pa čak i u kuhinji. Niti ne primjećujemo ponekad gdje ih sve koristimo. Dok pravimo kolače i čitamo recept nismo ni svjesni da koristimo matematiku. Kako bismo pravilno odredili omjer brašna i vode dok pravimo kruh potrebna nam je matematika. Za preračunavanje recepta za više osoba ukoliko nam, na primjer dođe gost više, potrebna nam je matematika. U nastavku ovog poglavlja ćemo objasniti kako iskoristiti znanje matematike za najukusniji obrok.

2.1 Razlomci u kuhinji

Kuhinja, iako na prvi pogled jednostavno okruženje, često zahtijeva upotrebu matematičkih operacija i razlomaka. Bilo da mjerimo sastojke, dijelimo porcije ili prilagođavamo recepte prema broju osoba, razlomci su ključni za preciznost u kuhanju. Razumijevanje razlomaka olakšava ne samo prilagodbu recepata, već i optimizaciju količina sastojaka, čime se smanjuje otpad i poboljšava kvaliteta pripremljene hrane. Razlomke,odnosno racionalne brojeve, pobliže ćemo objasniti.

Definicija 1. *Skup racionalnih brojeva, kojeg označavamo sa* $\mathbb{Q}$*, je*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

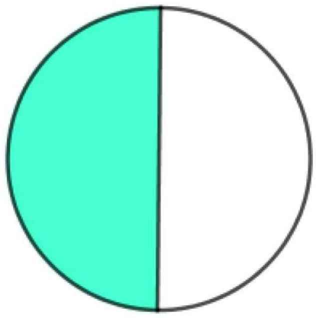
Dakle, racionalni brojevi su brojevi koji je se mogu zapisti u obliku razlomka. U kuhinji se uglavnom koriste pozitivni razlomci. Pravi razlomak je razlomak čija je apsolutna vrijednost manja od 1, npr. $\frac{2}{3}$, a nepravi razlomak čija je apsolutna vrijednost nepravog razlomka veća ili jednaka 1, npr. $\frac{5}{2}$. Svaki razlomak je moguće proširiti sa zadanim brojem tako da pomnožimo i brojnik i nazivnik sa istim tim brojem, osim s 0. Ovaj podatak će nam biti potreban u nastavku rada.

Dalje ćemo istražiti kako pravilno i precizno odrezati trećinu, šestinu ili čak petinu bureka ili pizze, odnosno bilo koje okrugle hrane. Lako nam je procijeniti polovicu neke duljine ili površine nekog lika, pa tako i kruga. Jednostavno povučemo nožem promjer kruga[1] i time dobijemo polukrug, tj. polovicu kruga što možemo vidjeti na slici 2.1a. Podijelimo li sada tu polovicu još jednom na

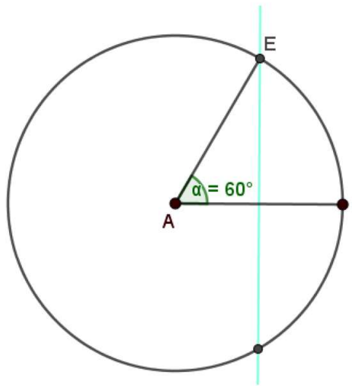
[1] Promjer ili dijametar je dužina pravca koja prolazi kroz središte kruga i spaja dvije nasuprotne točke na njegovoj kružnici.

pola, dobit ćemo četvrtinu kruga, zatim osminu i tako dalje. Vidimo da je prilično lako procjenom podijeliti krug na $2, 4, 8, \ldots$ jednakih dijelova (vidjeti [5, str. 3]). A što nam je s ovim nezgodnijim nazivnicima kao $3, 5, 6$ i slično? Matematički se to precizno može odrediti pomoću ravnala i šestara, ali, naravno, ne možemo koristiti šestar dok režemo tortu pred gostima. Zato ćemo se poslužiti određenim trikovima kako bismo povećali preciznost rezanja.

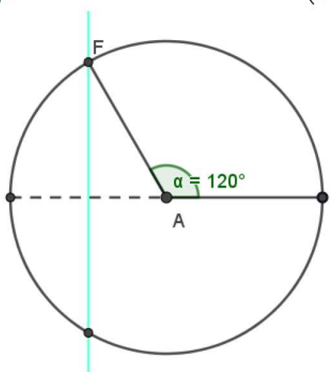
Želite li tortu podijeliti na šest jednakih kružnih isječaka[2] tj. komada, prvo procijenite gdje se nalazi središte i zatim od središta zarežite nožem ravno do ruba torte. Na taj način smo odredili polumjer torte. Držeći nož iznad torte, u mislima podijelite taj rez (polumjer) na pola te spustite okomicu na taj rez u točki polovišta. Zarežite nožem na rubu tamo gdje ta zamišljena linija završava i od tog mjesta zarežite prema središtu torte (vidjeti [5, str. 4]). Ovim načinom ste dobili upravo šestinu torte koja treba izgledati kao na slici 2.1b.



(a) Polovica kruga



(b) Šestina kruga



(c) Trećina kruga

Slika 2.1: Rezanje kruga

Za određivanje trećine torte, kao što je prikazano na slici 2.1c, prvi rez je jednak kao i kod određivanja šestine. Zatim u mislima produžite taj rez tako da bude promjer torte i taj produženi dio podijelite na pola. Također u glavi, držeći nož iznad torte zamislite okomicu kroz tu polovicu. Onda gdje ta zamišljena okomica siječe rub torte postavite nož i od tog mjesta zarežite prema središtu. Slikoviti opis ovog postupka možete pronaći u [5, str. 5].

[2] Kružni isječak je dio kruga omeđen s dva radijusa i kružnim lukom.

Ove trikove možemo objasniti i koristeći matematiku, specifično kosinus kuta. Znamo da u trigonometriji pravokutog trokuta vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\text{duljina priležeće katete}}{\text{duljina hipotenuze}}.$$

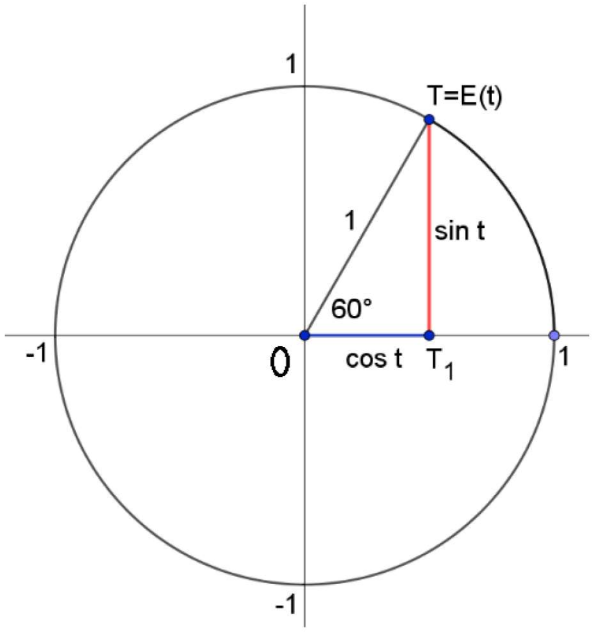
Također znamo da vrijedi:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

i

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Te polovine upravo predstavljaju one zamišljene polovine prvog zarezanog polumjera ili, u drugom slučaju, njegovog produžetka. Šestina punog kuta, 360°, je upravo 60°, a 120° je trećina punog kuta. Kao što vidimo na slici 2.2, kosinus nekog kuta možemo odrediti ako taj kut nacrtamo kao središnji kut kružnice. Jedan njegov krak produljimo do promjera kružnice, a iz kraja drugog kraka spustimo okomicu na taj promjer. Kosinus kuta tada predstavlja omjer udaljenosti nožišta te okomice od središta kružnice (duljina priležeće katete u pravokutnom trokutu ΔOTT_1) i polumjera(duljina hipotenuze u pravokutnom trokutu ΔOTT_1). Ako je okomica pala na prvi krak kuta, kosinus ima pozitivan predznak, a ako je pala na produljeni krak, predznak je negativan.



Slika 2.2: Kosinus kuta

Detaljniji opis možete pogledati u [5, str. 6.].

2.2 Mjerne jedinice u kuhinji

Mjerenje sastojaka je fundamentalni dio kuhanja. Masa suhih namirnica određuje se vaganjem. Na primjer, ako trebamo brašno, vagat ćemo ga u posudi, što znači da je broj očitan s vage zbroj mase brašna i masa posude. Takvo očitanje zovemo bruto masa. Kako bismo dobili masu koja nas zanima, tzv. neto masu brašna, od bruto mase treba oduzeti masu posude, što nazivamo tara. Većina vaga ima ugrađenu tipku tara koja, nakon postavljanja posude na vagu i pritiskom na tipku, postavlja brojilo na nulu, tj. oduzima težinu posude kako bismo ispravno dobili traženu neto masu brašna. Dakle, najbitnije što treba upamtiti kod mjerenja je:

$$\text{neto masa} = \text{bruto masa - tara.}$$

Svaki kulinarski recept se sastoji od raznih mjernih jedinica za masu, volumen, temperaturu, vrijeme te ponekad i za duljinu, površinu i gustoću. Neke od najčešćih mjera za masu su grami (oznaka: g), dekagrami (oznaka: dag) i kilogrami (oznaka: kg). Ukoliko se koriste američki ili britanski recepti može se pronaći i mase izražene u funtama (oznaka: lb) ili uncama (oznaka: oz). Izrazito je bitno znati preračunati ove mjerne jedinice kako bismo dobili točnu količinu hrane. Za to moramo znati njihov međusobni odnos kao što je prikazano u tablici 2.1.

1 kg	100 dag
1 dag	10 g
1 lb	16 oz
1 lb	453.59237 g

Tablica 2.1: Odnosi mjera za masu

Ukoliko pretvaramo mjernu jedinicu iz veće u manju, kao npr. iz kilograma u grame treba se dana masa pomnožiti sa onoliko koliko veća jedinica ima manjih. Ukoliko pretvaramo mjernu jedinicu iz manje u veću radi se obrnut proces, tj. treba se podijeliti masa sa onoliko koliko je manja jedinica sadržana u većoj. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 1. *Suzana je pojela šniclu od 150 g, a Ivana od* $\frac{1}{3}$ *lb. Tko je pojeo veću šniclu?*

Rješenje. Kako bismo mogli usporediti ove dvije mase moramo ih svesti na istu mjernu jedinicu. Dakle, prebacimo funte u grame na sljedeći način:

$$\frac{1}{3}\, lb = 0.33 \cdot 453.59237\, g = 151.1974567\, g.$$

Sada jasno vidimo da je Ivana pojela veću šniclu. Slični primjeri o preračunavanju mjernih jedinica mogu se pronaći u [5].

Nadalje, tekuće namirnice kao mlijeko, sok, voda isto imaju svoju masu, no tekućina se mjeri mjernim jedinicama za volumen. Kod nas najčešća mjerna jedinica za volumen je litra (oznaka: l ili L). Za preračunavanje se koristi tablica 2.2.

1 l	10 dl
1 dl	100 ml
1 l	1 dm^3

Tablica 2.2: Odnosi mjera za tekućinu

Volumen u kuhinji najčešće određujemo menzurama, no moramo biti oprezni zbog paralakse, tj. prividne promjene položaja promatranog objekta s promjenom mjesta promatrača. Najbolje je očitavati volumen u menzuri tako da je oko promatrača točno u visini površine tekućine radi što preciznijeg mjerenja (vidjeti [5, str. 16]).

Često se u receptima mogu pronaći i neprecizne kuhinjske mjere kao npr. prstohvat, žlica, žličica, šalica …Ove mjere se koriste kada nije potrebna velika točnost u mjerenju te u raznim državama imaju drugačije značenje tj. drugačiju veličinu. Za vrijeme pripreme jela, važno je obratiti pažnju na to iz koje države potječe recept kako bi se jelo moglo što točnije pripremiti.

Razni recepti zahtjevaju pečenje/kuhanje pri točno određenim temperaturama koje su izražene u većini zemalja u Celsiusovim stupnjevima (oznaka: °C), no u američkim receptima se koriste Fahrenheitovi stupnjevi (oznaka: °F). Za sve temperature (u nastavku teksa s oznakom θ) odnos Celsiusovih i Fahrenheitovih stupnjeva je ravnomjerno raspoređen što dovodi do sljedećeg pravila:

$$\theta = \frac{5}{9}\left(\frac{\theta}{{}^\circ F} - 32\right) {}^\circ C$$

odnosno,

$$^\circ C = \frac{5}{9}\left({}^\circ F - 32\right). \tag{2.1}$$

Primjerice, temperatura od $0^\circ F$ je $\frac{5}{9} \cdot (0 - 32)\,^\circ C$, tj. zaokruženo na puni stupanj $0^\circ F = -18^\circ C$. Nadalje, u tablici 2.3, koja se cijela može pronaći u [5, str. 27], se nalaze najčešće korišteni stupnjevi (zaokruženi na najbliži okrugli stupanj[3]) u američkim i europskim receptima.

[3]Podrazumijeva se cjelobrojni iznos koji je djeljiv s 5

Temperatura u °F	Temperatura u °C
210	100
250	120
300	150
350	175
390	200
435	225

Tablica 2.3: Odnos temperatura u °F i °C

Pogledajmo na idućem primjeru zanimljivu činjenicu.

Primjer 2. (*vidjeti* [5, *str.* 26]) *Postoji li temperatura za koju iznos u Celsiusovim i Fahrenheitovim stupnjevima jednak?*

Rješenje. Ukoliko uvrstimo da je $^\circ F = {}^\circ C$ u formulu (2.1) dobijemo:

$$^\circ C = \frac{5}{9}\left(^\circ C - 32\right).$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobijemo:

$$^\circ C - \frac{5}{9}\,^\circ C = -32 \cdot \frac{5}{9}$$

$$\frac{4}{9}\,^\circ C = -\frac{160}{9}$$

$$^\circ C = -40$$

Dakle, temperatura od $-40^\circ C$ je jednaka $-40^\circ F$.

2.3 Preračunavanje recepata prema broju osoba

Zamislite da ste pozvali 10 osoba na intimnu večeru i pripremili recept za 10 osoba, a neki gosti vam jave da ipak neće moći doći na večeru. Sada morate prepraviti svoj recept na večeru za 4 osobe. Preračunavanje recepta prema broju osoba je ključna vještina u kuhanju koja nam omogućuje fleksibilnost u pripremi hrane, bilo da se radi o intimnoj večerici ili nekom većem događaju. Većina recepata je napisana za predviđeni broj osoba. Kako bismo naučili pravilno preračunati recept, treba nam nekoliko matematičkih definicija.
Sljedeće tri definicije su preuzete iz [8].

Definicija 2. *Kvocijent dviju mjera ili veličina a i b, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ nazivamo omjer tih veličina. Omjer veličina a i b pišemo u obliku $a : b$. Izraz $a : b$ čitamo a naprema b.*

U omjer možemo stavljati istovrsne i raznovrsne veličine. Pri pisanju omjera istovrsnih veličina moramo paziti da mjerne jedinice budu jednake. Omjer raznovrsnih veličina, poput omjera mase i volumena, zovemo gustoća, te ga pišemo kao kg/m^3 i čitamo "kilogram po metru kubnom". Kada kupujemo neki proizvod, zanima nas kolika je cijena po kilogramu ili po komadu. Omjer cijene i količine nekog proizvoda pišemo u obliku €/kg i čitamo "eura po kilogramu", ili €/kom, što čitamo "eura po komadu". Mjerne jedinice uvijek moramo pisati kada u omjer stavljamo raznovrsne veličine (vidjeti [8]).

Vrijednost omjera se neće promijeniti ako oba člana pomnožimo ili podijelimo istim brojem, različitim od nule. S ovim svojstvom možemo omjer napisati u jednostavnijem obliku (vidjeti [8]). Omjer pojednostavnjujemo tako da ga svodimo na omjer dvaju relativno prostih brojeva.[4]

Definicija 3. *Produženi omjer kraći je zapis više omjera u kojemu je drugi član svakoga omjera jednak prvome članu sljedećeg omjera. Ako imamo omjere $a : b$ i $b : c$, možemo ih zapisati u obliku produženog omjera $a : b : c$.*

Primjer 3. *U kolač se stavljaju brašno, šećer i maslac u omjeru* $2 : 1 : 0.5$. *Koliko treba dodati šećera i maslaca ako imamo 500g brašna?*

Rješenje. Dakle, $b : s : m = 2 : 1 : 0.5$. Znamo da imamo 500g brašna i da dva dijela brašna predstavljaju 500g pa slijedi da je jedan dio $\dfrac{500}{2} = 250$g. Proširimo ostale članove produženog omjera s 250. Trebamo dodati $1 \cdot 250 = 250$ grama šećera i $0.5 \cdot 250 = 125$ grama maslaca kako bismo zadržali omjer $2 : 1 : 0.5$. Više sličnih primjera za računanje produženog omjera možete vidjeti u [8].

Definicija 4. *Jednakost omjera $a : b = c : d$, pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0$ nazivamo razmjerom ili proporcijom.*

[4] Relativno prosti brojevi su dva ili više brojeva čiji je jedini zajednički djelitelj broj 1.

Definicija 5. (*vidjeti* [5, *str.* 32]) *Za veličine x i y kažemo da su proporcionalne ako je omjer njihovih vrijednosti uvijek isti broj. Taj omjer nazivamo koeficijentom proporcionalnosti i označavamo ga s k, $k \neq 0$.*

Ako je riječ o pozitivnom koeficijentu proporcionalnosti, tada su veličine ovisne jedna o drugoj tako da koliko se puta jedna veličina smanji/poveća, toliko puta se smanji/poveća i druga veličina (vidjeti [5, str. 32]). Ako su x i y proporcionalne veličine sa koeficijentom proporcionalnosti k, onda vrijedi $y = kx$.

Nadalje, da bismo uspješno prilagodili recept za različit broj osoba potrebno je izračunati faktor skaliranja. Možemo zaključiti kako je količina sastojaka za pripremu jela proporcionalna tom određenom broju osoba i da je koeficijent proporcionalnosti pritom kvocijent stvarnog broja osoba i receptom predviđenog broja osoba. Taj koeficijent proporcionalnosti nazivamo faktorom skaliranja. Dakle, vrijedi

$$\text{stvarni broj osoba} : \text{broj osoba u receptu} = \text{potrebna količina sastojaka} : \text{količina tog sastojka u receptu}$$

odnosno

$$\text{potrebna količina} = \frac{\text{stvarni broj osoba}}{\text{broj osoba u receptu}} \cdot \text{količina tog sastojka u receptu.}$$

Razlomak u gornjoj formuli je upravo faktor skaliranja, tj. koeficijent proporcionalnosti. Vrijedi napomenuti: ako se recept preračunava na više osoba faktor skaliranja je tada veći od 1, a ukoliko se preračunava na manje osoba tada je faktor skaliranja broj između 0 i 1 (vidjeti [5, str. 34]). Naravno, većina recepata koristi više od dva sastojka pa za pravilno skaliranje cijelog recepta je potrebno svaki sastojak skalirati. Za ovaj postupak koristimo produženi omjer. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 4. *U recept za čokoladni kolač za 6 osoba su potrebne sljedeće količine sastojaka: 180g brašna, 150g šećera, 120g maslaca, 100g čokolade za kuhanje, 3 jaja, 1 žličica praška za pecivo, 1 prstohvat soli te 100 ml mlijeka. Preračunajte recept tako da se može poslužiti za 10 osoba.*

Rješenje. Napišimo sve u produženom omjeru za lakše snalaženje u zadatku. Dakle,

$$\text{b} : \text{š} : \text{m} : \text{č} : \text{j} : \text{p} : \text{s} : \text{ml} = 180 : 150 : 120 : 100 : 3 : 1 : 1 : 100$$

gdje su redom oznake b za brašno, š šećer, m maslac, č čokolada za kuhanje, j jaja, p prašak za pecivo, s prstohvat soli, ml mlijeko. Nadalje, faktor skaliranja za ovaj primjer je upravo

$$\frac{\text{stvarni broj osoba}}{\text{broj osoba u receptu}} = \frac{10}{6} = 1.67.$$

Dakle, svaki član produženog omjera trebamo pomnožiti sa faktorom skaliranja tj. $\frac{10}{6} = 1.67$ kako bismo dobili recept za 10 osoba.

$$\begin{aligned}
\text{Brašno:}\quad & 180\,\text{g} \times \frac{10}{6} = 300\,\text{g}\\
\text{Šećer:}\quad & 150\,\text{g} \times \frac{10}{6} = 250\,\text{g}\\
\text{Maslac:}\quad & 120\,\text{g} \times \frac{10}{6} = 200\,\text{g}\\
\text{Čokolada za kuhanje:}\quad & 100\,\text{g} \times \frac{10}{6} \approx 167\,\text{g}\\
\text{Jaja:}\quad & 3 \times \frac{10}{6} = 5\,\text{jaja}\\
\text{Prašak za pecivo:}\quad & 1\,\text{žličica} \times \frac{10}{6} = 1.67\,\text{žličica}\\
\text{Sol:}\quad & \text{prstohvat soli} \times \frac{10}{6}\\
\text{Mlijeko:}\quad & 100\,\text{ml} \times \frac{10}{6} \approx 167\,\text{ml}
\end{aligned}$$

Rješenje prikažimo u produženom omjeru.

$$\text{b : š : m : č : j : p : s : ml} = 300 : 250 : 200 : 167 : 5 : 1.67 : 1 : 167.$$

Sada jasno vidimo koja nam je količina potrebna koje namirnice za čokoladni kolač za 10 osoba.

Problem pri preračunavanju recepta može nastati ukoliko dobijemo vrijednosti koje je teže izmjeriti kao npr. prstohvat soli $\times\frac{10}{6}$ ili 1.67 žličice praška za pecivo. U takvim situacijama možemo uzeti približne vrijednosti, dakle malo više od prstohvata soli i malo više od 1.5 žličice praška za pecivo kako bismo upotpunili naš recept. Također može biti problem ukoliko dobijemo razlomljenu količinu namirnica koja se može dobiti samo u cjelinama npr. jaja. Naša odluka tada uvelike ovisi o vrsti same namirnice i njezinim specifikacijama, npr. o veličini jaja (S, M, L) kao što se može vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 5. (*vidjeti* [5, *Primjer 8*]) *Mala* (*S*) *jaja su ona koja imaju masu ispod 53g, srednja* (*M*) *jaja imaju masu od 53g do 63g, velika* (*L*) *jaja imaju masu od 63g do 73g, dok vrlo velika* (*XL*) *jaja imaju masu veću od 73g. Ako imamo 4.5 jaja srednje veličine* (*M*)*, koliko možemo uzeti malih* (*S*) *jaja, a koliko velikih* (*L*)*?*

Rješenje. Ako imamo 4.5 jaja srednje veličine, to je između $4.5 \cdot 53g = 238.5$ g i $4.5 \cdot 63g = 283.5$ g jaja. Taj raspon masa s velikim (L) jajima dobivamo za njih između $238.5 : 63 \approx 3.8$ i $283.5 : 73 \approx 3.9$ jaja. Znači da bismo mogli uzeti 4 (L) jaja bez velike pogreške u masi. Uzevši u obzir da su (S) jaja često lakša i od 53g, našu masu možemo dobiti otprilike 5 (S) jaja.

2.4 Postotci iskorištenja i gubitka

Dok kuhamo ne možemo iskoristiti svaki dio namirnice, kao npr. kora od krumpira, koštice od raznog voća ili ljuska jajeta. Kao što naravno nećemo koristiti voće ili povrće koje je trulo ili pokvareno na bilo koji način. Zbog ovih nepredvidljivih okolnosti je najbolje uvijek kupiti malo više namirnice nego što ide u recept kako bismo se osigurali da imamo dovoljno. Koliko ostane iskoristivog djela namirnice, a koliko dio se baca možemo i matematički opisati.

Kako pričamo o postotku, idemo ga definirati i ukratko objasniti na primjeru.

Definicija 6. (*vidjeti* [7]) *Postotak je omjer nekog broja i broja 100, tj. može se reći da je postotak razlomak s nazivnikom 100.*

Postotak računamo tako da stavimo u omjer dio cjeline i cjelinu od koje računamo postotak. Postotak zapisujemo kao decimalni broj kada podijelimo brojnik i nazivnik 100. I obrnuto, decimalni broj zapisujemo u obliku postotka tako da ga pomnožimo sa 100. Kao rezultat većinom dobijemo broj između 0 i 1, iako je moguće i gledati postotke iznad 100% s kojima se jednako računa kao i sa onima manjim od 100%.

Primjer 6. *Kuhinja je iskoristila 23kg krumpira od kupljenih 25kg. Koliko je posto krumpira iskoristila kuhinja?*

Rješenje. Omjer iskorištenih krumpira i kupljenih je $23 : 25$. Omjer možemo prikazati u obliku razlomka $23 : 25 = \frac{23}{25}$. Zatim dobiveni razlomak trebamo proširiti tako da mu nazivnik bude 100, tj.

$$\frac{23}{25} = \frac{23 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{92}{100}.$$

Postotak je razlomak s nazivnikom 100, pa možemo zapisati $\frac{92}{100} = 0.92 = 92\%$. Dakle, postotak iskorištenosti krumpira je upravo 92%.

Definicija 7. *Postotni iznos računamo tako da pomnožimo postotak i veličinu od koje računamo postotak koju nazivamo osnovna vrijednost. Pritom postotak zapisujemo u obliku decimalnog broja ili razlomka. Dakle, u oznakama postotni iznos y, postotak p % i osnovna vrijednost x dobivamo formulu $y = \frac{p}{100} \cdot x$.*

Sada kada razumijemo postotak, razjasnimo što je postotak iskorištenja i gubitka. *Postotak iskorištenja* je onaj udio namirnice što će se zapravo koristiti za pripremu jela u odnosu na ukupnu količinu namirnice. Dakle, ovaj postotak uključuje neto masu upotrijebljenih sastojaka, odnosno onu masu koja ostane nakon obrade, čišćenja i pripreme namirnica. *Postotak gubitka* je udio namirnice koji se izgubi tijekom pripreme hrane, što uključuje dijelove hrane koji nisu jestivi, kao ljuske i koštice. Također uključuje i sav udio namirnice koji se baca zbog lošeg skladištenja ili ostataka hrane nastalih tijekom kuhanja.

Dakle, kada spominjemo u količinama namirnice očigledno vrijedi:

$$\text{nabavljena količina} = \text{iskoristiva količina} + \text{odbačena količina}$$

Nakon dijeljenja sa nabavljenom količinom namirnice dobivamo:

$$1 = \frac{\text{iskoristiva količina}}{\text{nabavljena količina}} + \frac{\text{odbačena količina}}{\text{nabavljena količina}}.$$

Prvi razlomak u gornjoj jednakosti jeste, ukoliko ga iskažemo u postotku, upravo postotak iskorištenja, dok je drugi postotak gubitka (vidjeti [5, str. 41]). Oba broja su očigledno između 0 i 1, jer u sumi daju 1 te nema smisla da računamo sa negativnim brojevima. Dakle, dobivamo:

$$\text{postotak iskorištenja} = \frac{\text{iskoristiva količina}}{\text{nabavljena količina}} \times 100$$

i

$$\text{postotak gubitka} = \frac{\text{odbačena količina}}{\text{nabavljena količina}} \times 100.$$

Vratimo li se na Primjer 6, vidimo da je postotak iskorištenja krumpira 92%, što znači da je postotak gubitka 8%. Postotci iskorištenja i gubitka se koriste za unapređenje i bolju organizaciju kuhinje, od planiranja menija, bolje skladištenja namirica do kvalitetnije edukacije osoblja. U pravilu se teži što manjem postotku gubitka, tj. što većem postotku iskorištenja. Što se više uloži u kvalitetnije namirnice, bolju opremu, uz pažnju na proces skladištenja te obrade i pripreme namirnica i što se bolje obuči osoblje za kvalitetan rad, ti postotci će upravo biti takvi (vidjeti [5, str. 43]).
Postotak iskorištenja omogućuje i procjenu količine pri nabavi namirnica. Pogledajmo na primjeru.

Primjer 7. *Ako se utvrdilo da je postotak iskorištenosti višanja za pitu* 70%, *a za pravljenje pite nam treba 1.5 kg očišćenih višanja, koliko trebamo kupiti višanja za pitu?*

Rješenje. Kako bismo izračunali koliko višanja trebamo kupiti za pitu iskoristit ćemo gornju formulu. Dakle, postotak iskorištenja jeste $70\% = 0.7$ i iskoristiva količina je 1.5 kg, a nepoznata veličina nam je nabavljena količina. Označimo li nepoznatu veličinu sa x dobivamo sljedeće:

$$70 = \frac{1.5}{x} \cdot 100.$$

Podijelimo lijevu i desnu stranu jednadžbe sa 100, te se riješimo nazivnika u razlomku tako da pomnožimo cijelu jednadžbu sa x dobivamo linearnu jednadžbu:

$$0.7 \cdot x = 1.5.$$

Nadalje, rješavanje ove linearne jednadžbe je:

$$x = 2.14286.$$

Dakle, trebamo kupiti približno 2.14 kg višanja za pravljenje pite kako bismo dobili 1.5 kg očišćenjih višanja za pitu. Više primjera za izračunavanje postotka iskorištenja i količine potrebne za kupovinu možete vidjeti [5, str. 43].

Primijenimo li na primjeru matematiku, navedeni zadatak možemo riješiti jednostavno uvrštavajući u formulu

$$x = \frac{a}{p},$$

gdje je x tražena količina koju je potrebno nabaviti, a je potrebna količina namirnice, tj. iskoristiva količina i p je postotak iskorištenja namirnice u decimalnom zapisu. Na sličan način možemo izračunati potrebnu količinu namirnice ako znamo postotak gubitka.

Imajući na umu ove jednostavne formule i izračune, u profesionalnim kuhinjama se ne isplati uvijek precizno određivati ove postotke jer to zna oduzeti puno vremena. Zato se većina profesionalaca koristi već izračunatim postotcima iskorištenja i gubitka te svoje poslovanje vode prema tim tablicama. Za neke od najčešće korištenih namirnica podaci su navedeni u tablici 2.4 dok ostatak možete pronaći u [10, str. 25].

Namirnica	**Nabavljena kol.**	**Iskoristiva kol.**	**Postotak iskorištenja**
Kupus	40	32	80.00%
Mrkva	16	13	81.25%
Celer	32	22	68.75%
Krastavac	10	9.5	95%
Češnjak	16	15.8	98.75%
Paprika	16	13	81.25%
Špinat	16	10.5	65.62%
Rajčica	16	14.76	92.25%
Krumpir	16	12	75.00%
Jabuka	16	14.85	92.81%
Banana	16	10.6	66.25%
Limun	4	1.96	49.00%
Naranča	16	6.01	37.56%

Tablica 2.4: Postotci iskorištenja namirnica

Treba napomenuti kako su u tablici navedeni samo prosjeci, te da oni jako ovise o vrsti i pripremi namirnice. Naravno, ako želimo iscijediti sok od limuna, postotak iskorištenja biti će znatno manji nego kada bismo ga narezali na kolutove i koristili u baklavi.

2.5 Kuhinjski postotci

Sada kada smo se upoznali s postotcima, upoznajmo još neke važne postotke u kuhinji, kao što su udio mliječne masti, postotak kakaa u čokoladi ili postotak etanola u alkoholnim pićima. Taj postotak u namirnicama opisuje udio neke tvari u danoj namirnici, pritome se za tekuće namirnice navodi volumni udio dok za ostale maseni udio.

Volumni udio neke tvari u tekućoj namirnici jednak je omjeru volumena te tvari i volumena čitave namirnice. *Maseni udio* neke tvari u namirnici jednak je omjeru mase te tvari i mase cijele namirnice. Za dodatna objašnjenja i povezanosti s kemojom možete pogledati u [5, str. 46]. Pokažimo ove postotke detaljnije na primjerima.

Primjer 8. *Jedan meki sir ima na deklaraciji navedeno da sadrži* 49% *masti u suhoj tvari. Ako uzmemo da je oko* 73% *mekog sira voda, kolika je masa masti u 200 grama tog sira? Što ako se radi o tvrdom siru, tj. siru sa oko* 34% *vode u sebi, s istom deklaracijom o postotku masti?*

Rješenje. Prvo pogledajmo slučaj za meki sir. Za meki sir znamo da sadrži 73% vode, što znači da je preostalih 27% suha tvar. Dakle, slijedi da je u 200 grama sira

$$\text{masa suhe tvari} = 200\,\text{g} \times 0.27 = 54\,\text{g}.$$

S obzirom na to da 49% suhe tvari čini mast, izračunavamo masu masti tako da pomnožimo masu suhe tvari i postotak masti dobivajući:

$$\text{masa masti} = 54\,\text{g} \times 0.49 = 26.46\,\text{g}.$$

Dakle, u 200 grama mekog sira nalazi se 26.46 grama masti.

Za tvrdi sir koji sadrži 34% vode, znači da je preostalih 66% suha tvar. Postupak je isti kao i za meki sir. Izračunamo prvo masu suhe tvari u tvrdom siru od 200 grama i dobijemo:

$$\text{masa suhe tvari} = 200\,\text{g} \times 0.66 = 132\,\text{g},$$

te zatim izračunamo masu masti od suhe tvari, tj. dobivamo:

$$\text{masa masti} = 132\,\text{g} \times 0.49 = 64.68\,\text{g}.$$

Dakle, u 200 grama tvrdog sira nalazi se 64.68 grama masti. Slični primjeri za određivanje mase masti u siru možete vidjeti u [5, str. 47].

Primjer 9. *Alkoholno piće sadrži 40 ml etanola u ukupnom volumenu od 500 ml. Izračunajte volumni udio alkohola (etanola) u ovom piću i izrazite ga kao postotak.*

Rješenje. Volumni udio alkohola u piću može se izračunati tako da podijelimo volumen etanola s ukupnim volumenom pića, a zatim pomnožimo s 100 kako bismo dobili postotak.

$$\text{volumni udio } (\%) = \left(\frac{\text{volumen etanola}}{\text{ukupni volumen pića}}\right) \times 100$$

$$\text{volumni udio } (\%) = \frac{40}{500} \times 100$$

$$\text{volumni udio } (\%) = 0.08 \times 100 = 8\%$$

Dakle, volumni udio alkohola u ovom piću iznosi 8%.

Kroz razumijevanje i primjenu matematičkih principa, možemo poboljšati naše kulinarske vještine i postići bolje rezultate u pripremi hrane. Praktična primjena ovih principa pomaže u postizanju optimalnih rezultata u kuhinji.

3 | Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi

Još od doba antike poznavao se pojam zlatnog reza, koji se najčešće povezivao s umjetnošću. Do procvata razumijevanja došlo je u doba renesanse, kada su umjetnici, matematičari, astrolozi i fizičari tražili savršenstvo u kompozicijama poznatih struktura. Zlatni rez, poznat i kao "božanska proporcija", opisuje idealan odnos između dvije dužine, dok Fibonaccijevi brojevi predstavljaju niz brojeva u kojem je svaki broj zbroj prethodna dva.

3.1 Zlatni rez

3.1.1 Općenito o zlatnom rezu

Zlatni rez označava omjer dvije veličine gdje je omjer zbroja tih veličina prema većoj veličini jednak omjeru veće veličine prema manjoj (vidjeti [11, str. 112]). Na primjer, ako je a duži dio, a b kraći vrijedi da je

$$(a+b) : a = a : b.$$

Odnosno, vrijedi da je

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi.$$

Navedeni omjer se označava grčkim slovom ϕ i približno je jednak 1.61803398875.

Ukoliko želimo podijeliti na 13 jednakih dijelova na način zlatnog reza podjelimo to u omjeru 8 : 5. Ako dijelimo na 21 jednakih dijelova onda se dijeli u omjeru 13 : 8. Na što više dijelova se kompozicija dijeli, približavamo se zlatnom rezu, no do točnog zlatnog reza se ne može doći jer je taj broj aproksimacija.

3.1.2 Zlatni rez u graditeljstvu i umjetnosti

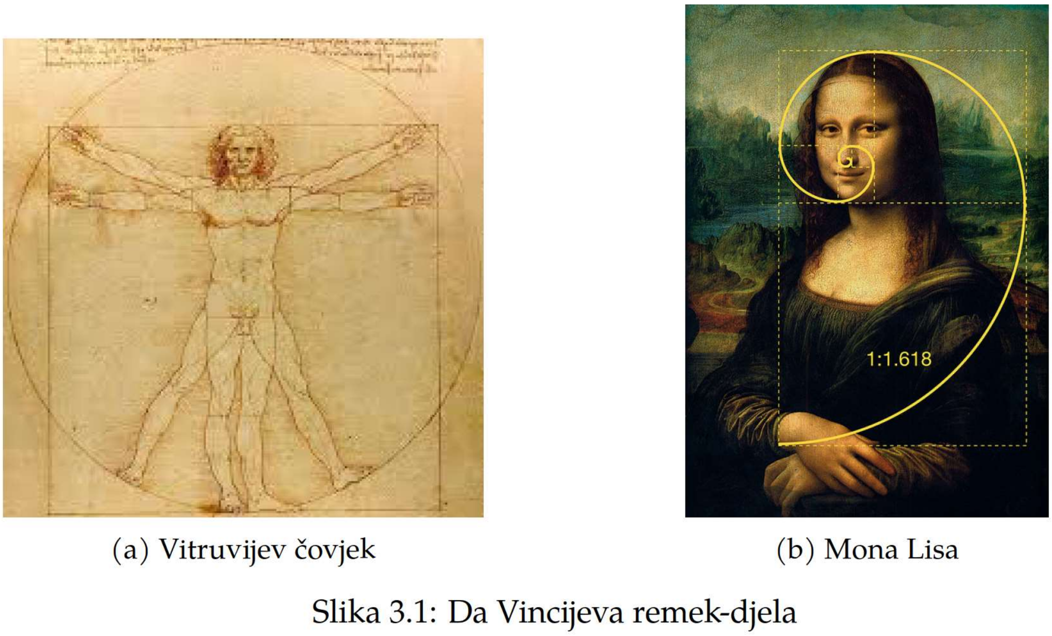
Zlatni rez bio je inspiracija raznim umjetnicima, arhitektima i znanstvenicima u prošlosti, iako se ne može sa sigurnošću reći da su svi stvaratelji umjetničkih djela i monumentalnih građevina bili svjesni ovog broja i namjerno ga koristili ili su samo gradili ono što se njihovom oku činilo najljepšim.

Poznati grčki matematičar Euklid prvi je izrazio ovaj broj matematički u svom djelu „Elementi“. Kaže da se ovdje „manji dio odnosi prema većem kao što se veći odnosi prema cijelom“ (vidjeti [12]). Grčki hram Partenon, posvećen božici

Ateni, je jedan od najpoznatijih primjera zlatnog reza u graditeljstvu. Graditelji su se vodili idejom zlatnog pravokutnika pa je on prisutan na nekoliko mjesta u dizajnu kao tlocrt hrama i pročelja. Omjeri svih dijelova građevine čine razmjer zlatnog reza što su Grci koristili kako bi stvorili savršenu harmoniju. Svakako treba naglasiti kipara Fidiju, koji je isklesao kipove u Partenonu, prema kome je numerička vrijednost zlatnog reza dobila oznaku: ϕ (vidjeti [6, str. 99]).

Aja Sofija ili Crkva Svete Mudrosti, iako nije izgrađena prema zlatnom omjeru, pokazuje primjere proporcionalne harmonije i uravnoteženosti koje su slične principima zlatnog reza. Bizantski arhitekti su težili estetskom skladu i proporcijama koje su bile matematički i vizualno uravnotežene. Kasnije se pokazalo kako je njezina unutrašnost, poput odnosa između visine kupole, širine glavne lađe i visine zgrade, relativno blisko omjerima zlatnog reza (vidjeti [12]).

Svjetski poznat crtež renesansnog umjetnika Leonarda da Vincija, Vitruvijev čovjek, prikazan na slici 3.1a, temelji se na povezanosti ljudskih proporcija i geometrije. Sam da Vinci je ovu proporciju kasnije nazvao Sectio aurea ili Zlatni rez, pa je logično pretpostaviti da je svjesno koristio zlatni rez u većini svojih djela. Crtež prikazuje nagog muškarca koji se nalazi unutar kvadrata i kružnice u dva položaja. S raširenim rukama, visina tijela jednaka je širini ruku, pa je taj dio crteža upisan u kvadrata, no ako raširene ruke i noge postavimo prema vrhovima kvadrata, tada se čovjekov pupak nalazi u središtu kružnice koja je opisana oko tog kvadrata. Omjeri vezani uz zlatni rez na ljudskom tijelu mogu se, na primjer pronaći u omjeru čovjekove visine i udaljenosti od pupka do stopala, u omjeru visine kukova i visine koljena, te u omjeru udaljenosti od vrha glave do donjeg dijela brade i od donjeg dijela brade do pupka, i slično (vidjeti [6, str. 102]).



(a) Vitruvijev čovjek (b) Mona Lisa

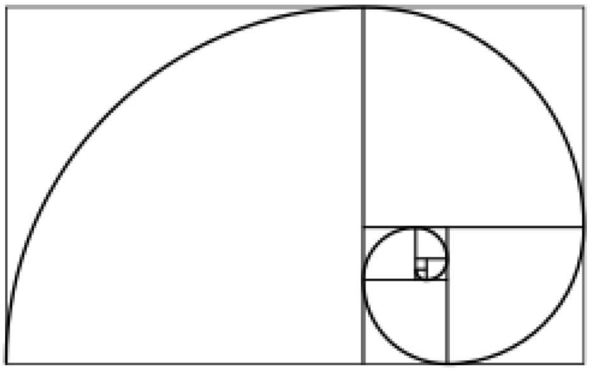
Slika 3.1: Da Vincijeva remek-djela

Mona Lisa, prikazana na slici 3.1b, slika je žene s najtajanstvenijim osmijehom na licu. Primjena zlatnog reza stvara skladnu kompoziciju koja vodi oko gledatelja prema najvažnijim dijelovima slike, kao što su lice i oči. Odnos širine čela prema udaljenosti od očiju do brade slijedi pravila zlatnog reza. Leonardo da Vinci, kao istraživač proporcija i harmonije u prirodi, koristio matematičke principe kako bi stvorio djelo koje i dan danas budi interes umjetnika, znanstvenika i ljubitelja umjetnosti.

Konstantinov slavoluk u Rimu, katedrala Notre-Dame u Parizu, Taj Mahal u Agri su samo neki još od primjera korištenja zlatnog reza u graditeljstvu. Ovi poznati simboli kulturne baštine diljem svijeta ovjekovječili su božansku proporciju i svojim dizajnom stvorili sklad između matematike i ljepote.

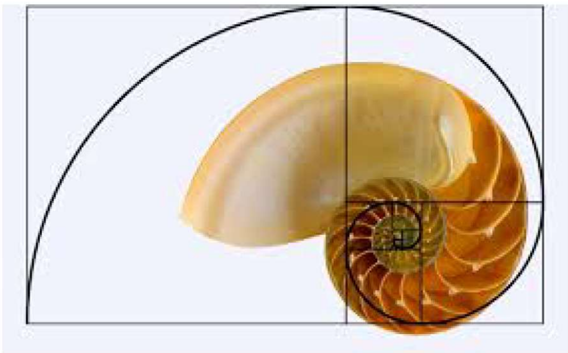
3.1.3 Primjena zlatnog reza u prirodi

Zlatni rez u prirodi manifestira se kroz zlatnu spiralu. Ova spirala raste u potpunosti u skladu s omjerima broja ϕ, a krajnji rezultati su kvadrati čije su duljine stranica Fibonaccijevi brojevi (vidi [11, str. 132]). Zlatna spirala nastaje tako da na rub jediničnog kvadrata nacrtamo kvadrat čija je duljina stranice zbroj duljina stranica prva dva kvadrata. Zatim nastavljamo dodavati kvadrate tako da se svaki novi kvadrat proteže duž duljine koja je zbroj stranica dvaju prethodnih kvadrata. U svakom kvadratu nacrtajte četvrtinu kružnice, počevši od najmanjeg kvadrata i krećući se prema van. Svaki luk treba biti unutar kvadrata i dodirivati dvije strane kvadrata, tj. prolaziti kroz dva suprotna vrha svakog kvadrata. Postupak nastavljajte sve dok ne dobijete dovršenu spiralu, kao što je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2: Zlatna spirala

Jedan od najljepših primjera zlatne spirale u životinjskom svijetu je puž Nautilus, poznat i kao indijska lađica. Promjer svake sljedeće spirale u odnosu na prethodnu odnosi se u omjeru broja ϕ, što se može vidjeti na slici 3.3. Njegova logaritamska spiralna struktura je impresivan primjer prirodnog rasta koji omogućuje estetsku ljepotu i biološku funkcionalnost, osiguravajući stabilnost i strukturu životinje tijekom njezina života (vidjeti [11, str. 140]). Mnoge prirodne strukture prate ovu zlatnu spiralu kao na primjer raspored sjemenki u suncokretu ili na borovoj šišarci, plod ananasa ili na biljci Aloe polyphylla što omogućuje optimalan



Slika 3.3: Puž Nautilus

raspored resursa i prostora u biljkama. Glava suncokreta, ali i drugih cvjetova sastoji se od više skupina isprepletenih spirala sjemenki, jedna u smjeru kazaljki na satu, a druga suprotno (vidjeti [11, str. 100]). Broj latica svakog cvijeta također prati obrazac zlatnog reza, kao i struktura kojom je građena paukova mreža, neki rogovi životinja rastu u obliku zlatne spirale. Položaj fetusa u utrobi također je zlatna spirala. Uragan i tornado su upravo spiralnog oblika što se može uočiti na raznim satelitskim snimkama. Neke galaksije, kao i Mliječna staza, imaju oblik zlatne spirale što ukazuje na to da je zlatni rez naša poveznica s temeljnim stvaralačkim silama svemira (vidjeti [12]). Priroda održava sklad i ljepotu zlatnog reza pa nije ni čudo što nas znaju snažno privući prirodne ljepote. Ljepota nije u oku promatrača već se može empirijski izmjeriti pomoću matematike i zlatnim rezom.

3.2 Fibonaccijev niz

3.2.1 Općenito o Fibonaccijevom nizu

Niz koji nastaje zbrajanjem prethodna dva člana niza naziva se Fibonaccijev niz uz početne vrijednosti $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Rekurzivna formula glasi

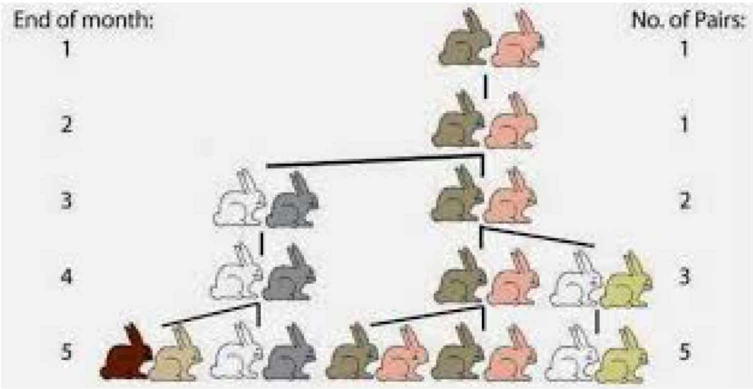
$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dakle, beskonačni niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ nazivamo Fibonaccijev niz. Dobio je ime po Leonardu Fibonacciju, talijanskom matematičaru koji je živio u Pisi u dvanaestom stoljeću. U knjizi "Liber Abaci" Fibonacci je predstavio ovaj niz koristeći ga za rješavanje problema uzgoja zečeva koji možemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 10. (*vidjeti* [6, *str. 88*]) *Seljak uzgaja zečeve. Svaka zečica rađa novi par, muško i žensko, kad navrši dva mjeseca, a zatim po jedan novi par svaki mjesec nakon toga. Uz pretpostavku da zečevi neće umrijeti tako skoro, koliko će parova seljak imati nakon n mjeseci ako je u početku imao jedan?*

Rješenje. Ovo je najočitiji primjer Fibonaccijevog niza. Na kraju prvog mjeseca seljak ima jedan par i na kraju drugog mjeseca i dalje ima samo jedan par, jer ženka nije dovoljno spolno zrela za razmnožavanje, što su upravo F_1 i F_2. Na kraju trećeg mjeseca prvi par rađa novi par zečeva, jer su spolno zreli i sada seljak ima 2 para. Na kraju četvrtog mjeseca prvi par ponovo rađa novi par, a drugi par postaje spolno zreo pa seljak ima tri para zečeva. Na kraju petog mjeseca prvi par rađa novi par, drugi par rađa novi par, a treći par postaje spolno zreo pa seljak ima pet parova zečeva. Nastavljanjem ovog postupka upravo dobijemo Fibonaccijev niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Dakle, ukoliko nas zanima koliko bi seljak imao zečeva na kraju prve godine, tj. za 12 mjeseci samo trebamo izračunati 12-ti član Fibonaccijevog niza što je broj 144.



Slika 3.4: Primjer razmnožavanja zečeva

Vidimo kako je rekurzivna formula spretnija i jednostavnija za prikaz i objašnjavanje Fibonaccijevog niza nego li da se definira eksplicitnom formulom, tj. njegovim općim članom koji glasi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Ova formula je poznata kao Binetova formula po francuskom matematičaru Jacquesu Philippeu Marieu Binetu (vidjeti [6, str. 90]). Kao zanimljivost valja istaknuti da se u mnogim školama diljem svijeta dan 23. studeni obilježava kao Fibonaccijev dan.[1]

[1] U mnogim zemljama se taj datum zapisuje kao 11/23 što su upravo prva četiri člana Fibonaccijevog niza.

3.2.2 Povezanost zlatnog reza sa Fibonaccijevim brojevima

Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi su dva duboko povezana matematička koncepta iako se na prvi pogled možda tako i ne čini. Njihova isprepletenost postaje očita kada gledamo omjer uzastopnih članova Fibonaccijevog niza (vidjeti [6, str. 99]). Dakle, postavimo li u omjer članove Fibonaccijevog niza kao $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ dobiva se sljedeći niz brojeva $1, 2, 1.5, 1.6, 1.6, 1.625, \ldots$ Ovaj niz konvergira upravo u $\phi \approx 1.6180339887$. Matematički zapisano, vrijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

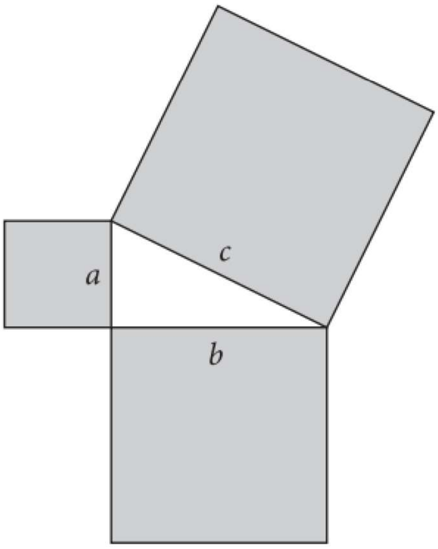
Još jedan način na koji su zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi povezani je kroz zlatnu ili Fibonaccijeva spiralu. U zlatnoj spirali svaki kvadrat ima duljinu stranice nekog Fibonaccijevog broja, krenuvši od najmanjih. Dakle, u svakom primjeru u prirodi, arhitekturi, umjetnosti gdje je vidljiva zlatna spirala su prisutni i Fibonaccijevi brojevi. Postoji također i poveznica u glazbi i modernoj tehnologiji. Razumijevanje ove veze obogaćuje naše znanje ne samo matematike već i prirode i prirodnih fenomena te bogati povijesni primjerci naglašavaju ljepotu i funkcionalnost zlatnog reza i Fibonaccijevog niza. Bez njih u našoj okolini ne bi postojala harmonija svih živih bića na Zemlji. Oni nam pomažu bolje razumijeti prirodne obrasce i strukture koje nas okružuju.

Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi predstavljaju fascinantne matematičke koncepte koji su prisutni svuda oko nas. Njihova prisutnost u prirodi, umjetnosti i arhitekturi pokazuje njihovu univerzalnu ljepotu i značaj. Razumijevanje ovih koncepata ne samo da obogaćuje naše matematičko znanje, već nam pomaže bolje razumijeti svijet oko nas.

4 | Pitagorin poučak

Jedan od najpoznatijih i popularnijih teorema u povijesti mateamtike je Pitagorin teorem. Ima i najviše objavljenih dokaza negoli bilo koji drugi teorem. Brojna su i njegova razna poopćena i analogije. Ovaj teorem koji objašnjava poveznicu između kateta i hipotenuze u pravokutnom trokutu matematički glasi:

Teorem 1. (*vidjeti* [2, *str. 67*]) *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad njegovim katetama.*



Slika 4.1: Pitagorin poučak

Ako su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze, onda se teorem može zapisati kao

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dokaz. Zadan je pravokutni trokut ΔABC s katetama duljina a i b te hipotenuzom duljine c. Oko vrha B opišimo kružnicu polumjera $c = |AB|$ i produžimo katete do sjecišta D, E i F s kružnicom kao na slici 4.2.

Promotrimo sada trokute ΔABC i ΔACF. Kutovi $\measuredangle ACF$ i $\measuredangle DCE$ su vršni, tj.

vrijedi $\measuredangle ACF = \measuredangle DCE$. Nadalje, $\measuredangle AFC$ i $\measuredangle EDC$ su obodni kutovi nad istim kružnim lukom, $\overset{\frown}{AE}$, iz čega zaključujemo da su ti kutevi sukladni[1]. Dakle, po K-K poučku trokuti ΔABC i ΔACF su slični, tj. $\Delta ABC \sim \Delta ACF$. Zbog sličnosti trokuta vrijedi:

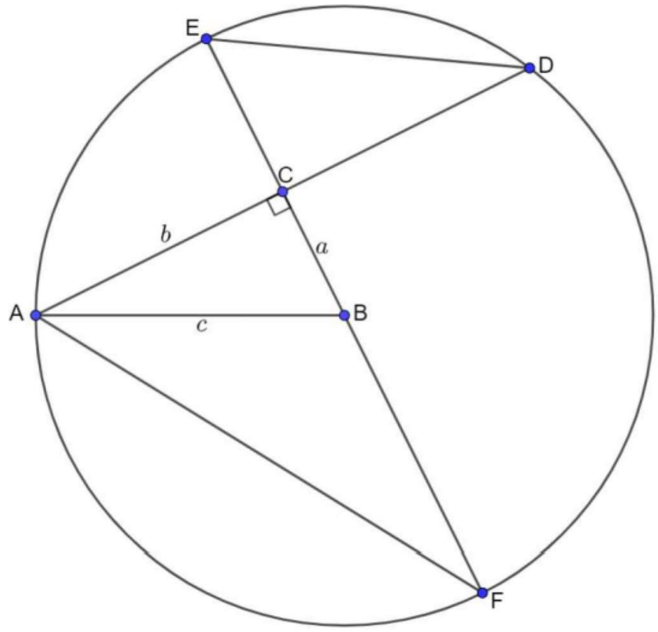
$$|AC| : |FC| = |CE| : |CD|$$
$$|AC| \cdot |CD| = |CE| \cdot |FC|. \tag{4.1}$$

S obzirom da je $\overline{EF}$ promjer kružnice, $\overline{EF} \perp \overline{AD}$ jer je pri vrhu C pravi kut, vrijedi $|AC| = |CD| = b$. Osim toga, $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$ su polumjeri kružnice pa vrijedi $|BE| = |BF| = c$.
Iz navedenoga te iz skice zaključujemo $|FC| = |BF| + |BC| = c + a$ i $|CE| = |BE| - |BC| = c - a$. Dobiveno uvrstimo u (4.1):

$$b \cdot b = (c - a) \cdot (c + a)$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Detaljniji dokaz možete pronaći u [6, str. 9].



Slika 4.2: Dokaz Pitagorinog poučka

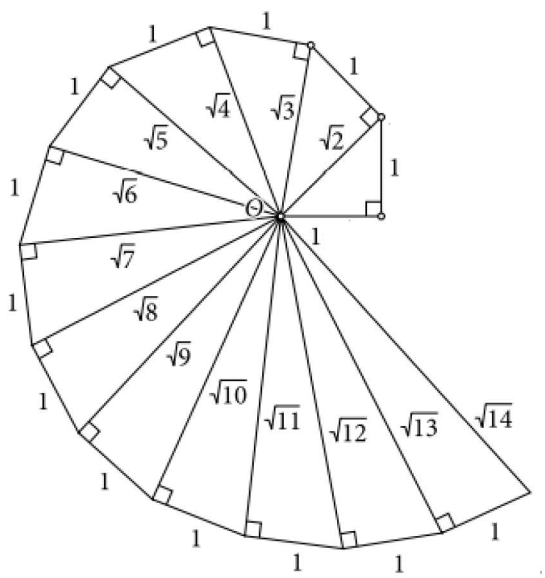
Teorem 2. (*vidjeti* [2, *str. 72*]) (*Obrat Pitagorinog poučka*)
Ako za duljine stranica a, b i c nekog trokuta vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2$, onda je taj trokut pravokutan i c je duljina hipotenuze, a a i b duljine kateta.

[1] Svi obodni kutovi nad istim kružnim lukom su jednaki.

Dokaz. Neka je dan trokut ΔABC sa stranicama duljina a, b i c za koje vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2$. Primjetimo da su obje stranice, a i b toga trokuta kraće od stranice c i da vrijedi onda $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Konstruirajmo zatim pravokutni trokut $\Delta A'B'C'$ koje su dvije katete jednake stranicama a i b prvog trokuta. Budući da je ovaj drugi trokut pravokutan, za njega vrijedi $c' = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su sukladni prema S-S-S poučku. Kako je drugi trokut pravokutan, onda je i prvi čime je dokazan obrat Pitagorina poučka. □

4.1 Pitagorin poučak u fraktalima

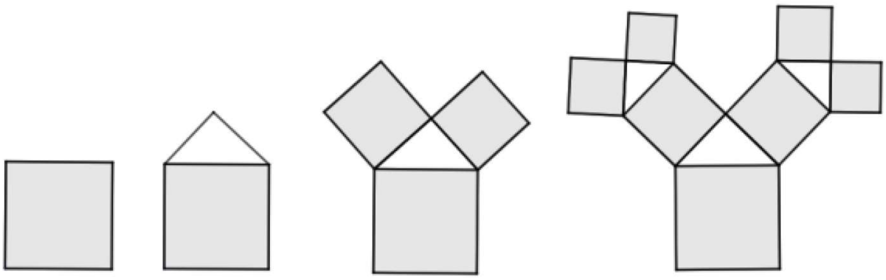
Pomoću Pitagorinog poučka mogu se konstruirati duljine koje predstavljaju druge korijene prirodnih brojeva. Takav se lik ponekad naziva Pitagorina spirala ili Pitagorin puž (vidjeti [6, str. 20]). Kao što se vidi na slici 4.3, spirala nastaje tako da konstruiramo pravokutni trokut s katetama duljine 1. Posljedično, zbog Pitagorinog poučka, duljina hipotenuze bit će $\sqrt{2}$. Proces nastavljamo tako da ponovno konstruiramo pravokutni trokut, pri čemu je jedna kateta zapravo hipotenuza duljine $\sqrt{2}$, a druga kateta ima duljinu 1. Ponavljajući ovaj proces, za svaku novu hipotenuzu dobivamo duljinu koja je korijen iz prirodnog broja. Konstrukcija Pitagorine spirale je povezana sa konstrukcijom Pitagorinog stabla.



Slika 4.3: Pitagorina spirala

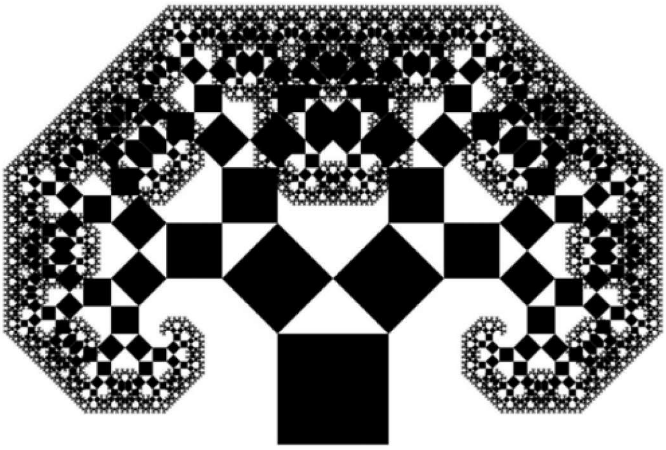
Pitagorino stablo je geometrijski fraktal[2] koji nastaje nizom pravokutnih trokuta i kvadrata, pri čemu se svaki novi kvadrat nalazi na vrhovima trokuta prethodne razine, formirajući oblik sličan drvetu (vidjeti [4, str. 22]). Konstruirao ga je nizozemski učitelj matematike Albert E. Bosman je 1942. godine (vidjeti [6, str. 29]).

[2]Fraktali su geometrijski objekti koji su karakteristični po tome što pokazuju samosličnost, odnosno isti uzorak se ponavlja na različitim razinama povećanja.



Slika 4.4: Konstrukcija Pitagorinog stablo

Na slici 4.4 se jasno može vidjeti kako se Pitagorino stablo konstruira. Dakle, počnemo sa konstrukcijom kvadrata proizvoljne duljine stranice. Na stranici kvadrata konstruiramo jednakokračni pravokutni trokut. Zatim na katete trokuta se konstruiraju dva kvadrata čija je duljina stranice manja od početnog. Ponovno, na stranice svakog kvadrata se konstruira pravokutni jednakokračni trokut i zatim ponovno na njegove katete se konstruiraju kvadrati manje dimenzije. Dakle, ovaj put četiri kvadrata. Ponavljajući ovaj postupak na isti način uzastopno dobivamo Pitagorino stablo koje izgleda kao na slici 4.5. Kao da svaki put nadodajemo sliku 4.1 samu na sebe, samo umanjenu verziju.



Slika 4.5: Pitagorino stablo nakon puno koraka

Ova osnovna konstrukcija se može i modificirati. Na primjer, ukoliko trokut nije jednakokračan, nego raznostraničan pravokutan trokut dobijemo drugačiji izgled Pitagorinog stabla. Primjetimo na slici 4.5, da ukoliko je to jednakokračan trokut onda je slika fraktala osnosimetrična. Ako pak promijenimo orijentaciju pravokutnog trokuta nakon svakog koraka ili, čak i nakon nekoliko opet se dobije drugačije Pitagorino stablo (vidjeti [4, str. 23]). Pitagorino stablo je jednostavan, ali moćan primjer kako fraktalni oblici mogu biti generirani pomoću osnovnih geometrijskih pravila, kao i kako fraktali oponašaju mnoge oblike iz stvarnog svijeta, poput stabala, krvih žila ili plućnih alveola.

U južnoj Italiji, gradu Crotone, nalazi se skulptura inspirirana Pitagorinim stablomu, u krotonskom parku Parco Pitagora.

4.2 Pitagorin poučak u svakodnevnom životu

Evo nekoliko primjera iz svakodnevnog života gdje se koristi Pitagorin poučak i njegov obrat.

Primjer 11. *Postavili ste ljestve uza zid, a njihova duljina je 6 metara. Baza ljestvi postavljena je na udaljenosti od 2 metra od zida. Kolika je visina zida do koje ljestve dosežu?*

Rješenje. Kako bismo izračunali visinu do koje ljestve dosežu na zidu, možemo primijeniti Pitagorin poučak. Prema Pitagorinom poučku, zbroj kvadrata nad katetama jednak je kvadratu hipotenuze u pravokutnom trokutu, tj. $c^2 = a^2 + b^2$. Iz postavke zadatka se vidi da je dužina ljestvi hipotenuza i iznosi 6 metara, tj. $c = 6m$, udaljenost baze ljestvi od zida je jedna kateta i iznosi 2 metra, tj. $a = 2m$. Dakle, visina zida do koje ljestve dosežu je druga kateta koju trebamo izračunati. Uvrstimo li poznate veličine i sredimo izraz dobijemo:

$$6^2 = 2^2 + b^2$$

$$b^2 = 36 - 4$$

$$b^2 = 32$$

$$b = \sqrt{32} \approx 5.66m.$$

Dakle, visina zida do koje ljestve dosežu iznosi približno 5.66 metara.

Primjer 12. *Građevinski inspektor rekao je radnicima da zidovi nisu napravljeni pod pravim kutom. Radnici su ponovnim mjerenjem utvrdili da je sporni zid visine* $2.7m$*, duljina skele kojom se radnici penju do vrha tog zida* $4.5m$*, a udaljenost skele do podnožja zida* $3.6m$*. Tko ima pravo: radnici ili građevinski inspektor?*

Rješenje. Kako bismo riješili taj zadatak, trebamo odrediti je li trokut sa stranicama duljina $2.7m$, $3.6m$ i $4.5m$ pravokutan. To ćemo postići korištenjem obrata Pitagorinog poučka. Dakle, $a = 2.7m$ je visina zida, $b = 3.6m$ je udaljenost skele od podnožja zida i $c = 4.5m$ je duljina skele.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$4.5^2 = 2.7^2 + 3.6^2$$

$$20.25 = 7.29 + 12.96$$

$$20.25 = 20.25.$$

Iz čega slijedi da su radnici u pravu te da je zid pod pravim kutom.

Primjer 13. *Sandra kupuje televizor koji želi smjestiti na policu svojega regala. Prodavač joj je objasnio da se veličina televizora prikazuje s obzirom na duljinu dijagonale ekrana. Sandra želi kupiti televizor s ekranom kojemu je dijagonala duljine* $60cm$*. Ako je izmjerila da je visina ekrana* $38cm$*, može li taj televizor stati na policu širine* $52cm$*?*

Rješenje. Kako je televizor pravokutnik, kada povučeno dijagonalu pravokutnika dobijemo pravokutni trokut kojemu je $a = 38cm$ visina ekrana, $c = 60cm$ je dijagonala ekrana, tj. hipotenuza pravokutnog trokuta, a b je širina ekrana koju trebamo izračunati. Uvrštavanjem u Pitagorin poučak dobijemo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$60^2 = 38^2 + b^2$$
$$b^2 = 3600 - 1444$$
$$b^2 = 2156$$
$$b = 14\sqrt{11} \approx 46.43.$$

Širina ekrana je približno $46.43cm$, što znači da televizor može stati na policu širine $52cm$, jer je širina ekrana manja od širine police.

Za više sličnih primjera zadataka o Pitagorinom poučku i njegovoj primjeni možete vidjeti [9].

Pitagorin poučak, iako jednostavan matematički koncept, ima široku primjenu u svakodnevnom životu. Od građevinskih radova i arhitekture, preko tehnologije do svakodnevnih situacija poput postavljanja ljestvi. Ovaj teorem nam omogućuje da točno izračunamo udaljenosti i razumijemo prostor. Unatoč svojoj starosti, Pitagorin poučak i dalje je jedan od najkorisnijih matematičkih alata koje koristimo gotovo svakodnevno.

Literatura

[1] D. Acheson, *1089 i još ponešto*, Zagreb, Element, 2014.

[2] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, L. Havranek Bijuković, P.Brkić, M Karlo, M. Kuliš, I. Matić, T. Rodiger, K. Vučić, *Matematika 8, drugi dio*, Zagreb, Školska knjiga, 2021.

[3] D. John Barrow, *100 essential things you didn't know you didn't know*, New York ; London, W. W. Norton & Company, 2010.

[4] I. Bodiš , *Fraktali*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Diplomski rad, 2012., dostupno na https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/BOD03.pdf

[5] F. Miriam Brueckler, *Matematička kuhinja*, Zagreb, Hrvatsko matematičko društvo, 2020.

[6] B. Dakić, *Priče iz matematike*, Zagreb, Element, 2016.

[7] *Edutorij, Matematika 7, Postotci i jednostavni kamatni račun*, dostupno na https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/641300/html/4452_Pojam_postotka.html

[8] *Edutorij, Matematika 7, Proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine*, dostupno na https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/273416/html/968_Omjeri.html

[9] *Edutorij, Matematika 8, Modeliranje problemskih situacija Pitagorinim poučkom*, dostupno na https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/642179/html/4396_Modeliranje_problemskih_situacija_Pitagorinim_pouckom.html

[10] F. T. Lynch, *The Book of Yields: Accuracy in Food Costing and Purchasing*, John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[11] Clifford A. Pickover, *Veličanstvena matematika : od Pitagore do 57. dimenzije u riječi i slici* , Zagreb, Izvori, 2023.

[12] S. Zlatić, *Zlatni rez*, Tehnical journal 7, **1**(2013), 84–90

Sažetak

U ovom diplomskom radu prikazano je kako se matematika koristi u različitim aspektima svakodnevnog života, s posebnim naglaskom na njenu primjenu u kuhinji. Opisano je kako osnovne matematičke operacije, kao i razumijevanje postotaka i omjera, mogu pomoći u pripremi savršenog jela, bilo da kuhate za dvoje ili za petnaest osoba. Fascinantna je i poveznica slavnog omjera, poznatog kao zlatni rez, s prirodom i arhitekturom, gdje god se okrenemo vidimo njegovu primjenu, jer stvara sklad i ljepotu u savršenoj harmoniji. U radu se također spominje i Pitagorin poučak, jedan od najpoznatijih teorema u matematici, te njegova široka primjena u graditeljstvu, arhitekturi i tehnologiji.

Ključne riječi

mjerenje, mjerne jedinice, faktor skaliranja, postotak iskorištenja, postotak gubitka, zlatni rez, Fibonaccijevi brojevi, Pitagorin poučak

Mathematics in everyday life

Summary

This thesis shows how mathematics is used in different aspects of everyday life, with special emphasis on its application in the kitchen. It describes how basic mathematical operations, as well as an understanding of percentages and ratios, can help you prepare the perfect meal, whether you're cooking for two or fifteen people. The connection of the famous ratio, known as the golden ratio, with nature and architecture is also fascinating, wherever we turn we see its application, because it creates harmony and beauty in perfect harmony. The work also mentions Pythagoras' theorem, one of the most famous theorems in mathematics, and its wide application in construction, architecture and technology.

Keywords

measurement, measurement units, scaling factor, utilization percentage, loss percentage, golden ratio, Fibonacci numbers, Pythagorean theorem

Životopis

Rođena sam 15. listopada 1996. godine u Novom Sadu. Pohađala sam Osnovnu školu Jagodnjak u Jagodnjaku. Nakon osnovne škole upisujem srednju Ugostiteljsko turističku školu u Osijeku. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja upisala sam prijeddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, sada Fakultet primijenjene matematike i informatike. Prijeddiplomski studij završavam sa završnim radom na temu "Simetričan svojstveni problem" pod mentorstvom doc. dr. sc. Suzane Miodragović. Godine 2022. upisala sam diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na istom fakultetu.