Polinomi dviju varijabli

Perišin, Stjepan

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Polinomi dviju varijabli

Završni rad

Mentor:
prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Student:
Stjepan Perišin

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Polinome kao funkcije spominjemo već u osnovnoj školi. Prvo ćemo se upoznati s pojmom polinoma jedne varijable te prstenom polinoma. Poseban naglasak u radu je stavljen na polinome dviju varijabli te simetrične jednadžbe kao i sustave istih. Na kraju su navedeni i riješeni primjeri primjena polinoma dviju varijabli.

2 | Osnovni pojmovi

U ovome poglavlju navest ćemo osnovne definicije i rezultate koje ćemo koristiti u radu.

Definicija 1. *Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0,$$

odnosno skraćeno $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ nazivamo polinom, pri čemu se koeficijent a_n naziva vodeći koeficijent, a a_0 slobodni član. Stupanj polinoma, $st f = n$.

Nadalje, kako polinomi jedne i dvije varijable čine prsten, koristeći definiciju iz [2], definirajmo ovu algebarsku strukturu

Definicija 2. *Neka je R neprazan skup na kome su zadane binarne operacije zbrajanja $+$ i množenja $\cdot$, tj. $+ \colon R \times R \to R$, $\cdot \colon R \times R \to R$ sa sljedećim svojstvima:*

1. *$(R, +)$ je Abelova grupa*
2. *$(R, \cdot)$ je polugrupa*
3. *distributivnost operacije množenja $\cdot$ obzirom na operaciju zbrajanja $+$:*

$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$(a + b)c = ac + bc, \ \forall a, b, c \in R$$

Uređenu trojku $(R, +, \cdot)$ nazivamo prsten.

Nakon što smo uveli definiciju prstena kao algebarske strukture, sada možemo definirati prsten polinoma kao u [2].

Neka je $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, gdje su $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ polinom. Sada njega možemo identificirati nizom $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n, 0, 0, ...)$ njegovih koeficijenata. Označimo s $\mathbb{R}[x]$ skup svih nizova $(a_0, a_1, ...)$ elemenata iz $\mathbb{R}$ takvih da je $a_i = 0$ za sve osim konačno mnogo indekasa i, tj. svi elementi u nizu moraju biti jednaki 0 nakon što indeks premaši stupanj polinoma. Skup $\mathbb{R}[x]$ je prsten uz zbrajanje i množenje definirano s

$$(a_0, a_1, ..., a_n) + (b_0, b_1, ..., b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n),$$
$$(a_0, a_1, ...a_n) \cdot (b_0, b_1, ..., b_n) = (c_0, c_1, ..., c_n),$$

gdje je

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

3 | Polinomi dviju varijabli

3.1 Prsten polinoma dviju varijabli

Sljedeća definicija, preuzeta iz [3], definira polinome dviju varijabli.

Definicija 3. *Svako preslikavanje* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadano sa*

$$f(x,y) \ = \ f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n, \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

gdje su $f_i, i = 0, 1, ..., n$ *polinomi jedne varijable, zove se polinom dviju varijabli nad* $\mathbb{R}$.

Napomena 1. *Polinom iz gornje definicije se također može zapisati i u sljedećem obliku:*

$$f(x,y) = g_0(y) + g_1(y)x + g_2(y)x^2 + \cdots + g_m(y)x^m, \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Primjer 1. *Preslikavanje zadano formulom*

$$f(x,y) \ = \ 4 - xy^2 + (4x-1)y^5 + 2y^8$$

jest polinom dviju varijabli. Vidimo da je f *već zapisan po rastućim potencijama od* y.

Kada se proučavaju polinomi, vrlo važan pojam je i stupanj polinoma. Budući da sada imamo dvije varijable, definicija se malo razlikuje od one sa slučajem jedne varijable. Međutim, prvo definirajmo pojam monoma. Definicije su preuzete iz [3].

Definicija 4. *Preslikavanje* $f(x,y) = ax^my^n, \quad a \neq 0$, *također je polinom dviju varijabli. Taj se polinom naziva monom. Monom* ax^my^n *ima stupanj* m *u varijabli* x *i stupanj* n *u varijabli* y, *dok mu je ukupni stupanj* $m+n$.

Definicija 5. *Stupanj polinoma dviju varijabli je maksimalni stupanj svih njegovih ne-nul monoma.*

Primjer 2. *Polinom*

$$f(x,y) \ = \ x^8 + 2x^5y^4 - 6x^2y^6$$

ima stupanj 8 *u varijabli* x, *stupanj* 6 *u varijabli* y, *a stupanj polinoma* f *maksimalan stupanj svih njegovih ne-nul monoma, a on iznosi* $\mathrm{st} f = 9$.

Zbrajanje i množenje polinoma definira se kao zbrajanje i množenje funkcija. Dakle, zbroj polinoma f i g dviju varijabli je funkcija $f+g$ definirana sa

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y), \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Vidimo da je rezultat zbrajanja polinoma dviju varijabli, baš kao i u slučaju jedne varijable, opet polinom $f+g$.
Polinomi dviju varijabli se množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugoga, a dobiveni produkti zbroje.
Dakle, produkt polinoma f i g dviju varijabli je funkcija $f \cdot g$ definirana sa

$$(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Vidimo da je rezultat množenja polinoma dviju varijabli, baš kao i u slučaju jedne varijable, opet polinom $f \cdot g$.

Primjer 3. *Za polinome $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ i $g(x,y) = y^3 + x^3 + xy$ odredite $f \cdot g$ i $f+g$.*
Prema prethodnom pravilu, imamo:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x,y) &= (x^3 + y^2 - xy)(y^3 + x^3 + xy)\\ &= x^3y^3 + x^6 + x^4y + y^5 + x^3y^2 + xy^2 - xy^4 - x^4y - x^2y^2\\ &= y^5 + x(y^2 - y^4) - x^2y^2 + x^3(y^3 + y^2) + x^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g)(x,y) &= (x^3 + y^2 - xy) + (y^3 + x^3 + xy)\\ &= y^3 + y^2 + 2x^3.\end{aligned}$$

Napomena 2. *Ukoliko je g konstantni polinom, tada svaki član polinoma f pomnožimo konstantom, a dobivene produkte zbrojimo.*

Nadalje, bitan nam je i pojam djeljivosti. Stoga, uvedimo pojam djeljivosti polinoma dviju varijabli, a definiciju preuzetu iz [3]

Definicija 6. *Kažemo da je polinom $f \in \mathbb{R}[x,y]$ djeljiv polinomom $g \in \mathbb{R}[x,y]$, ako postoji polinom $h \in \mathbb{R}[x,y]$ takav da je $f = g \cdot h$. Polinom h, ukoliko postoji, zove se kvocijent polinoma f i g, označava se $f : g$ ili $\frac{f}{g}$, a nalazi se istim postupkom kojim se dijele polinomi jedne varijable.*

Primjer 4. *Polinomi $f(x,y) = x^3 - y^3$ i $g(x,y) = x - y$ su djeljivi. To možemo najlakše provjeriti na način da polinom f podijelimo polinomom g.*

$$\begin{array}{l}(x^3 - y^3) : (x - y) = x^2 + xy + y^2\\ \underline{-x^3 + x^2y}\\ \quad x^2y - y^3\\ \quad \underline{-x^2y + xy^2}\\ \qquad xy^2 - y^3\\ \qquad \underline{-xy^2 + y^3}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

Označimo polinom $h(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Prema gornjoj definiciji, našli smo polinom h takav da je $f = g \cdot h$. Dakle, možemo reći da polinom g dijeli polinom f.

Prsten polinoma u više varijabli se definira induktivno pa je prsten polinoma u dvije varijable $\mathbb{R}[x_1, x_2] = (\mathbb{R}[x_1])[x_2]$ jer polinom u varijablama x_1 i x_2 možemo promatrati kao polinom u varijabli x_2 čiji su koeficijenti polinomi u varijabli x_1. Jedinica u prstenu je polinom $f(x, y) = 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

3.2 Simetrični polinomi dviju varijabli

Započnimo poglavlje definicijom i primjerom simetričnog polinoma, preuzet iz [3].

Definicija 7. *Polinom $f \in \mathbb{R}[x, y]$ zovemo simetrični polinom, ako za $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Primjer 5. *Polinom $f(x, y) = x^6y^2 + x^2y^6$ je simetričan jer vrijedi*

$$\begin{aligned} f(y, x) &= y^6x^2 + y^2x^6 \\ &= x^2y^6 + x^6y^2 \\ &= x^6y^2 + x^2y^6 \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

Napomena 3. *Također su simetrični polinomi i $\sigma_1(x, y) = x + y$ i $\sigma_2(x, y) = xy$. Polinomi σ_1 i σ_2 imaju važnu ulogu u teoriji simetričnih polinoma te ih nazivamo osnovni (elementarni) simetrični polinomi.*
Često se susrećemo i s polinomima oblika $s_k(x, y) = x^k + y^k$. Ovi polinomi nazivaju se i Newtonovi polinomi.

Sada ćemo navesti teorem i lemu koju ćemo koristiti pri dokazu teorema preuzeto iz [3]

Lema 1. *Za svaki Newtonov polinom s_k postoji $f \in \mathbb{R}[x, y]$ takav da je $s_k(x, y) = f(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y))$, odnosno $s_k(x, y) = f(x + y, xy)$.*

Dokaz. Dokaz možemo provesti totalnom indukcijom. Najprije, provjerimo da je tvrdnja istinita za $k = 1$ i $k = 2$. Slijedi da je $s_1 = \sigma_1$ i $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Sada pretpostavimo da je tvrdnja istinita za polinome s_{k-2} i s_{k-1}, tj. da postoje polinomi $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ takvi da je

$$s_{k-2} = f_1(\sigma_1, \sigma_2), \quad s_{k-1} = f_2(\sigma_1, \sigma_2).$$

Iz Newtonove formule

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2},$$

koja vrijedi za sve prirodne brojeve $k > 2$, slijedi:

$$s_k = \sigma_1 f_2(\sigma_1, \sigma_2) - \sigma_2 f_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Budući da je desna strana polinom u dvije varijable, s_k možemo zapisati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2. $\square$

Teorem 1 (Osnovni teorem o simetričnim polinomima za dvije varijable)**.** *Za svaki simetrični polinom $f \in \mathbb{R}[x,y]$ postoji jedinstven polinom $h \in \mathbb{R}[x,y]$ takav da je $f(x,y) = h(\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y))$ ili $f(x,y) = h(x+y, xy)$.*

Dokaz. Budući da je svaki polinom dviju varijabli zbroj monoma oblika $ax^k y^p$, moguća su samo dva slučaja, tj. pojavljuju se monomi oblika $ax^k y^p, p \neq k$ i $bx^k y^k$. Sada uočimo u zadanom simetričnom polinomu f monom $ax^k y^k$. Tada je

$$ax^k y^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k,$$

pa se takav član simetričnog polinoma može izraziti pomoću σ_1 i σ_2. Nadalje, u f imamo i članove oblika $bx^k y^p, k \neq p$. Ako polinom sadrži takav monom, onda on sadrži i monom oblika $bx^p y^k$, jer inače f ne bi bio simetričan polinom. Prema tome, kao pribrojnik f sadrži polinom

$$g(x,y) = b(x^k y^p + x^p y^k).$$

Dakle, treba pokazati da se polinom g može prikazati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2. Pretpostavimo da je $k < p$. Tada imamo

$$g(x,y) = bx^k y^k (x^{p-k} + y^{p-k}) = b(xy)^k s_{p-k}$$

i konačno

$$g(x,y) = b\sigma_2^k s_{p-k}.$$

Prema lemi, s_{p-k} se može zapisati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2, pa iz prethodne formule zaključujemo da to vrijedi i za g, čime je teorem dokazan. □

Pokazat ćemo još kako se simetrični polinomi mogu faktorizirati.

Primjer 6 (preuzet iz [3])**.** *Rastavite na faktore na poljem $\mathbb{Q}$ simetrični polinom*

$$f(x,y) = 2x^4 + x^3 y + 3x^2 y^2 + xy^3 + 2y^4.$$

Rješenje: Izrazimo najprije f pomoću σ_1 i σ_2. Imamo:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x^4 + y^4) + xy(x^2 + y^2) + 3x^2 y^2 \\ &= 2s_4 + \sigma_2 s_2 + 3\sigma_2^2 \\ &= 2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) + \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Konačno imamo

$$f(x,y) = 2\sigma_1^4 - 7\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_2^2.$$

Dobili smo funkciju koja je u varijabli σ_2 kvadratna. Imamo

$$5\sigma_2^2 - 7\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1^4 = 0$$

pa slijedi da je

$$\sigma_2 = \sigma_1^2, \quad \sigma_2 = \frac{2}{5}\sigma_1^2$$

Slijedi:

$$5\sigma_2^2 - 7\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1^4 = (\sigma_2 - \sigma_1^2)(5\sigma_2 - 2\sigma_1^2),$$

tj.

$$f(x,y) = [xy - (x+y)^2][5xy - 2(x+y)^2]$$

te konačno

$$f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)(2x^2 - xy + 2y^2)$$

3.3 Simetrične jednadžbe

Ovo ćemo potpoglavlje započeti definicijom simetrične jednadžbe, kako je navedeno u [3]

Definicija 8. *Za polinom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedne varijable zadan formulom*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

kažemo da je simetričan ako vrijedi $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \ldots, a_{n-k} = a_k$. Simetričnom polinomu f pridružena jednadžba $f(x) = 0$ naziva se simetrična jednadžba.

Razlikujemo simetrične jednadžbe parnog i neparnog stupnja. Takve se jednadžbe rješavaju na osnovi sljedeća dva teorema, počevši od parnog stupnja.

Teorem 2. *Svaki simetrični polinom*

$$f(x) = a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \cdots + a_{2k-1}x + a_{2k}$$

parnog stupnja može se predočiti u obliku

$$f(x) = x^k h(\sigma),$$

gdje je h polinom stupnja k u varijabli $\sigma = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Dokaz. Napišimo f u obliku:

$$f(x) = x^k \left(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{2k-1}\frac{1}{x^{k-1}} + a_{2k}\frac{1}{x^k} \right).$$

Kako je $a_0 = a_{2k}, a_1 = a_{2k-1}, \ldots,$ imamo:

$$f(x) = x^k \left(a_0 \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) + a_1 \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} \right) + \cdots + a_{k-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_k \right).$$

Da bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je dokazati da se funkcije $x \mapsto x^k + \frac{1}{x^k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ mogu napisati u obliku polinoma u varijabli $\sigma = x + \frac{1}{x}$. Zaista, stavimo li $\frac{1}{x} = y$ dobivamo:

$$x^k + \frac{1}{x^k} = x^k + y^k = s_k.$$

Kako se svi s_k mogu prikazati pomoću $\sigma_1 = x + y$ i $\sigma_2 = xy$, odnosno pomoću $\sigma_1 = x + \frac{1}{x}$ i $\sigma_2 = 1$ slijedi da se i $x^k + \frac{1}{x^k}$ može napisati u obliku polinoma u varijabli σ. $\square$

Stavimo li u formulu za s_k redom $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 1$, dobijemo:

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} &= \sigma; \\
x^2 + \frac{1}{x^2} &= \sigma^2 - 2; \\
x^3 + \frac{1}{x^3} &= \sigma^3 - 3\sigma; \\
x^4 + \frac{1}{x^4} &= \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2; \\
x^5 + \frac{1}{x^5} &= \sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma; \\
x^6 + \frac{1}{x^6} &= \sigma^6 - 6\sigma^4 + 9\sigma^2 - 2.
\end{aligned}$$

Dakle, pomoću teorema 2, svaka simetrična jednadžba reda $2k$ može se supstitucijom $\sigma = x + \frac{1}{x}$ napisati u obliku:

$$h(\sigma) = 0,$$

gdje je h polinom stupnja k u varijabli σ. Nađu li se korijeni σ_1, σ_2 jednadžbe $h(\sigma) = 0$, rješavanje simetrične jednadžbe svodi se na rješavanje kvadratnih jednadžbi s jednom nepoznanicom

Primjer 7. *Riješite jednadžbu*

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Rješenje:
Izlučimo iz jednadžbe x^3 i dobijemo

$$x^3 \left[x^3 - 6x^2 + 14x - 18 + 14\frac{1}{x} - 6\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = 0$$

budući da $x = 0$ nije rješenje, možemo faktor x^3 zanemariti. Slijedi

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0.$$

Sada možemo uvesti supstituciju:

$$x + \frac{1}{x} = \sigma$$

pa dobivamo

$$\sigma^3 - 3\sigma - 6(\sigma^2 - 2) + 14\sigma - 18 = 0,$$

odnosno

$$\sigma^3 - 6\sigma^2 + 11\sigma - 6 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 2,\ \sigma_3 = 3.$$

Nakon vraćanja supstitucija, dobivamo tri jednadžbe:

$$x + \frac{1}{x} = 1,$$
$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad i$$
$$x + \frac{1}{x} = 3.$$

Riješimo prvu jednadžbu

$$x + \frac{1}{x} = 1 / \cdot x \neq 0$$
$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Zatim riješimo drugu jednadžbu:

$$x + \frac{1}{x} = 2 / \cdot x \neq 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_3 = x_4 = 1.$$

Na kraju riješimo treću jednadžbu

$$x + \frac{1}{x} = 3 / \cdot x \neq 0$$
$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_{5,6} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Konačna rješenja početne jednadžbe su:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ x_6 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Teorem 3. *Svaki simetrični polinom neparnog stupnja djeljiv je sa $x+1$, a pripadni kvocijent je simetrični polinom parnog stupnja.*

Dokaz. Neka je simetrični polinom neparnog stupnja oblika:

$$f(x) = a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + a_2x^{2k-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Možemo ga zapisati na sljedeći način

$$f(x) = a_0\left(x^{2k+1} + 1\right) + a_1\left(x^{2k} + x\right) + a_2\left(x^{2k-1} + x^2\right) + \cdots + a_k\left(x^{k+1} + x^k\right),$$

odnosno:

$$f(x) = a_0\left(x^{2k+1} + 1\right) + a_1x\left(x^{2k-1} + 1\right) + a_2x^2\left(x^{2k-3} + 1\right) + \cdots + a_kx^k\left(x + 1\right).$$

Kako je svaki od binoma $x^{2k+1} + 1, x^{2k-1} + 1, \ldots, x + 1$ djeljiv sa $x + 1$, to je i $f(x)$ djeljiv sa $x + 1 \quad (*)$. Dokazali smo, dakle, da je $f(x) = (x + 1)g(x)$. Treba pokazati da je g simetrični polinom parnog stupnja. Kako je f simetričan, vrijedi:

$$x^{2k+1}f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Zamijenimo sada u $(*)$ x sa $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)g\left(\frac{1}{x}\right),$$

i pomnožimo tu jednadžbu sa x^{2k+1}, dobivamo:

$$x^{2k+1}f\left(\frac{1}{x}\right) = (1 + x)x^{2k}g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Zbog $(**)$, slijedi:

$$f(x) = (x + 1)x^{2k}\frac{1}{g(x)}.$$

Ako podijelimo tu jednadžbu sa $x + 1$, $x \neq -1$, dobivamo:

$$x^{2k}g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x),$$

pa je zaista g simetrični polinom parnog stupnja. □

Primjer 8. *Riješite jednadžbu*

$$8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Rješenje: prema teoremu 3, znamo da je polinom

$$f(x) = 8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8$$

djeljiv s $x + 1$. *Stoga, dobivamo:*

$$(x + 1)\left[8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8\right] = 0.$$

Promotrimo faktor $x-1$*. Može se odmah uočiti da je* $x_1=-1$ *korijen polazne jednadžbe. Promotrimo drugi faktor*

$$8x^4-14x^3-69x^2-14x+8=0.$$

Sada je ovo simetrična jednadžba parnog stupnja

$$x^2\left(8x^2-14x-69-14\frac{1}{x}+8\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

odnosno

$$x^2\left(8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-14\left(x+\frac{1}{x}\right)-69\right)=0.$$

Kako $x=0$ *nije rješenje, možemo uvesti supstituciju:*

$$x+\frac{1}{x}=\sigma$$

pa imamo:

$$8\left(\sigma^2-2\right)-14\sigma-69=0,$$

$$8\sigma^2-14\sigma-85=0.$$

Sada slijedi

$$\sigma_1=-\frac{5}{2}\quad i\quad \sigma_2=\frac{17}{4}.$$

Riješimo sada jednadžbu:

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}/\cdot x\neq 0$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+1=0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_2=-2,x_3=-\frac{1}{2}.$$

Riješimo sada i posljednju:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}/\cdot x\neq 0.$$

Sređivanjem izraza imamo

$$x^2-\frac{17}{4}x+1=0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_4=\frac{1}{4},x_5=4.$$

Konačno, rješenja početne jednadžbe su:

$$x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=\frac{1}{4},\ x_5=4.$$

3.4 Sustav simetričnih jednadžbi

U nastavku ćemo navesti primjer sustava simetričnih jednadžbi, ali prvo definirajmo što je sustav simetričnih jednadžbi.

Definicija 9. *Sustav jednadžbi*

$$f(x,y) = a, \quad g(x,y) = b,$$

gdje su f i g simetrični polinomi, $a, b \in \mathbb{R}$, zove se sustav simetričnih jednadžbi, a uređeni par (x_1, y_1) rješenje tog sustava ako vrijedi:

$$f(x_1,y_1) = a, \quad g(x_1,y_1) = b.$$

Primjer 9 (preuzet iz [3])**.** *Riješite sustav*

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 7 \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Najprije simetrične polinome $f(x,y) = x^3 + y^3, \quad g(x,y) = x + y$ izrazimo pomoću σ_1 i σ_2. Dobijemo ovaj sustav:

$$\begin{aligned} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 &= 7 \\ \sigma_1 &= 1. \end{aligned}$$

Uvrstimo li prvu jednadžbu $\sigma_1 = 1$, dobivamo $\sigma_2 = -2$. Dakle, naš je sustav ekvivalentan sustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ xy &= -2. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da su x i y korijeni jednadžbe (Vieteove formule)

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

tj. $z_1 = -1, z_2 = 2$, pa su zbog simetrije $(-1,2)$ i $(2,-1)$ sva rješenja polaznog sustava.

4 | Primjeri primjena polinoma dviju varijabli

U ovom ćemo poglavlju navesti par primjera primjene polinoma dviju varijabli. Zadaci su preuzeti iz [1]

Primjer 10. *Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

Rješenje. *Dana nejednakost je ekvivalentna redom sa*

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y \geq 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0, \\ (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0, \\ (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0, \end{gathered}$$

koja je istinita za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa je i polazna nejednakost istinita za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x = y = 1$.

Primjer 11. *Dokažite da za sve realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost*

$$x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz - 2yz - 2z + 1 \geq 0.$$

Rješenje.

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz - 2yz - 2z + 1 \\ = (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2z + 1) \\ = (x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-1)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z = 1$

Primjer 12. *Odredite za koje vrijednosti realnih varijabli x i y polinom*

$$P(x, y) = -x^2 - y^2 + 26x + 10y + 2007$$

ima najveću vrijednost i kolika je ta vrijednost.

Rješenje:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (-x^2 + 26x - 169) + (-y^2 + 10y - 25) + 2201 \\ &= -(x^2 - 26x + 169) - (y^2 - 10y + 25) + 2201 \\ &= 2201 - (x-13)^2 - (y-5)^2 \leq 2201. \end{aligned}$$

Najveća vrijednost polinoma je 2201, a postiže se za $x = 13$ i $y = 5$. Dakle, $P_{max}(x, y) = 2201$ za $x = 13, y = 5$.

Primjer 13. *Za koje vrijednosti realnih varijabli x i y polinom*

$$P(x,y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$$

poprima najmanju vrijednost?

Rješenje. Prema aritmetičko-geometrijskoj nejednakosti[1] je

$$1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} = 3x^2y^2,$$

pa je

$$P(x,y) \geq 3 + 3x^2y^2 - 3x^2y^2 = 3.$$

Stoga je $P_{min}(x,y) = 3$ i to za $x^2y^4 = x^4y^2 = 1$, odnosno za $x^2 = y^2 = 1$. Dakle,

$$(x,y) \in \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}.$$

Primjer 14. *Odredite najmanju vrijednost funkcije*

$$f(x) = (x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+(a+b))(x-(a+b))(x+(a-b))(x-(a-b)) \\ &= (x^2-(a+b)^2)(x^2-(a-b)^2) \\ &= (x^2-a^2-2ab-b^2)(x^2-a^2+2ab-b^2) \\ &= ((x^2-a^2-b^2)-2ab)((x^2-a^2-b^2)+2ab) \\ &= (x^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2 \\ &\geq -4a^2b^2. \end{aligned}$$

Najmanja vrijednost funkcije f iznosi $-4a^2b^2$ i postiže se kada $x^2-a^2-b^2=0$, tj. za

$$x = \pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Primjer 15. *Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$x^2y^4 - 4xy^3 + 2(x^2+2)y^2 + 4xy + x^2 \leq 0.$$

Rješenje. Dana nejednakost je ekvivalentna redom sa

$$\begin{aligned} x^2y^4 - 4xy^3 + 2x^2y^2 + 4y^2 + 4xy + x^2 &\leq 0, \\ x^2(y^4+2y^2+1) - 4x(y^3-y) + 4y^2 &\leq 0, \\ (y^2+1)^2x^2 - 4y(y^2-1)x + 4y^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Lijevu stranu nejednakosti možemo smatrati polinomom po varijabli x:

$$P(x) = (y^2+1)^2x^2 - 4y(y^2-1)x + 4y^2.$$

Kako je $(y^2+1)^2 > 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, to je $P(x) \leq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako diskriminanta od $P(x)$ nije pozitivna. Imamo

$$D = 16y^2(y^2-1)^2 - 16y^2(y^2+1)^2 = 16y^2(y^4-2y^2+1-y^4-2y^2-1) = -64y^4 \leq 0.$$

[1] Aritmetičko - geometrijska nejednakost za pozitivne realne brojeve $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ glasi

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Literatura

[1] I. Ilišević, *Nejednakosti među polinomima jedne ili više realnih varijabli i njihove primjene*, Osječki matematički list **7**(2007), 1–10.

[2] I. Matić, *Algebra*, Predavanja

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

Sažetak

U ovom radu ćemo definirati prsten polinoma dviju varijabli te same polinome dviju varijabli. Također ćemo navesti što su simetrični polinomi te kako se rješavaju simetrične jednadžbe parnog i neparnog stupnja. Za kraj ćemo navesti što je sustav simetričnih jednadžbi, kako se on rješava te dati primjere primjena simetričnih jednadžbi.

Ključne riječi

prsten polinoma dviju varijabli, simetrične jednadžbe, sustav simetričnih jednadžbi

Polynomials in two variables

Summary

This paper will define the ring of polynomials in two variables and the polynomials themselves. It will also cover symmetric polynomials and how to solve symmetric equations of even and odd degrees. Finally, it will address what a system of symmetric equations is, how it is solved, and provide examples of applications of symmetric equations.

Keywords

ring of polynomials in two variables, symmetric equations, system of symmetric equations

Životopis

Rođen sam 26.9.1996. u Osijeku. Završio Osnovnu školu "Dr. Franjo Tuđman" u Belom Manastiru 2011. nakon čega upisujem Gimnaziju Beli Manastir, također u Belom Manastiru koju završavam 2015. godine. Tada upisujem Odjel za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku.