Hausdorffova dimenzija i fraktalni skupovi

Vugrinec, Leo

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Studij Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Hausdorffova dimenzija i fraktalni skupovi

Diplomski rad

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Danijel Grahovac

Student:
Leo Vugrinec

Osijek, 2023.

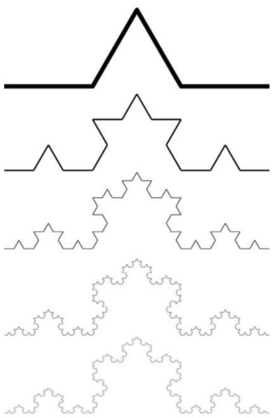
Sadržaj

1 | Uvod

Klasična geometrija je fokusirana na jednostavne i glatke objekte kao što su kružnice, elipse, sfere, kocke, piramide, ... te pokušava čim više pojava u prirodi prikazati i objasniti pomoću njih. Ipak, postoji mnogo pojava koje su previše kompleksne da bi ih objasnili klasičnom matematikom i geometrijom. Tako je u kasnim šezdesetim godinama prošlog stoljeća francusko-američki matematičar Benoit Mandelbrot, kojeg nazivaju ocem fraktala, počeo proučavati te iregularne kompleksne pojave. U svojoj knjizi "*The Fractal Geometry of Nature*" [4] napisao je: "Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale nisu kružnice, kora drveća nije glatka, ni svjetlost ne putuje pravocrtno". Predstavio je riječ "fraktal" koja predstavlja velik dio iregularnih objekata. Mandelbrot navodi sljedeće kao najbitnija svojstva fraktala:

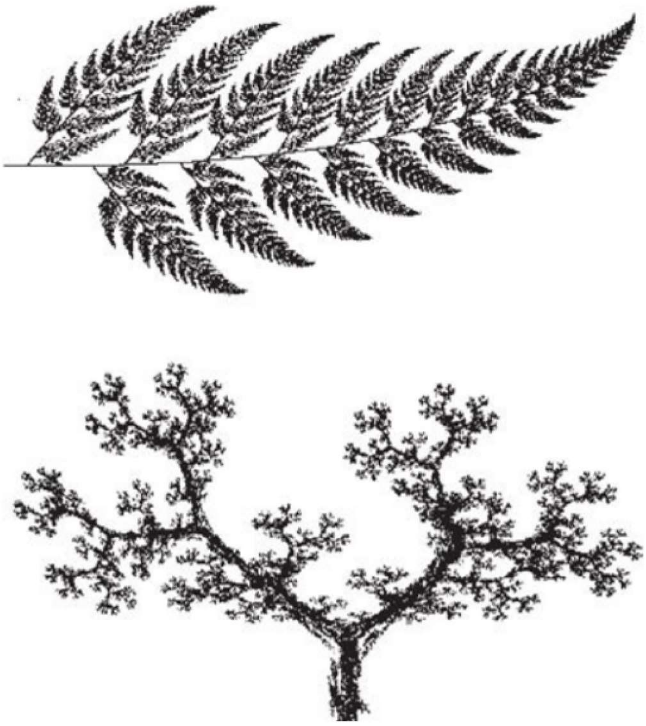
- imaju visoku razinu detalja na svim razinama skaliranja,
- samoslični su, to jest struktura im je slična koliko god ih mi skalirali,
- kao skupovi su iregularni, to jest ne može ih se opisati pomoću klasične geometrije,
- većinom ih je najlakše definirati rekurzivno.

Jedan od najpoznatijih te jedan od prvih opisanih fraktala je Von Kochova krivulja. Iako je kao i ostali fraktali vrlo kompleksna, njena konstrukcija se može sažeti u jednu rečenicu: "Podijeli liniju na tri jednaka dijela, srednji dio zamijeni s druge dvije stranice jednakostraničnog trokuta te ponavljaj postupak."



Slika 1.1: Von Kochova krivulja [13]

Dio kojim se nadomješta linija te nadograđuje fraktal zovemo generator ili motiv. Mnogi fraktali se mogu dobiti sličnom rekurzijom, mijenjajući dijelove linije nekim drugim motivom.



Slika 1.2: Fraktalni list i grana [13]

Koliko god skalirali i zumirali, detalji, to jest iregularnosti, na fraktalima sa Slike 1.2 su vidljivi. Svaki dio lista i grane je napravljen od istih samo manjih listova i grana. Za takve objekte kažemo da imaju finu strukturu. Sad kad smo naveli neka osnovna svojstva i nekoliko primjera fraktala, možemo krenuti s pozadinskom matematikom. U nastavku ćemo najprije objasniti pojam Hausdorffove mjere i dimenzije.

2 | Hausdorffova dimenzija

2.1 Uvod u Hausdorffovu mjeru

Prije nego definiramo samu Hausdorffovu mjeru, prisjetimo se pojmova kao što su σ-algebra, topologija, pokrivač te Borelov skup, koji su temelj za definiranje mjere.

Definicija 1 (σ-algebra [8]). *Familija podskupova skupa X, $\mathcal{A}$, naziva se σ-algebra na skupu X ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

σ1) $X \in \mathcal{A}$,

σ2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

σ3) *unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz samog $\mathcal{A}$, to jest*

$$\forall \text{ niz skupova iz } \mathcal{A},\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vrijedi } \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Uređeni par $(X, \mathcal{A})$ je izmjeriv prostor, a svaki element iz $\mathcal{A}$ je izmjeriv skup. Najmanja σ-algebra koja sadrži neku familiju A je $\sigma(A)$.

Definicija 2 (Topološki prostor [8]). *Uređeni par $(X, \mathcal{T})$, gdje X nije prazan skup, a $\mathcal{T}$ familija podskupova od X, naziva se topološki prostor ako $\mathcal{T}$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) *unija svake familije skupova iz $\mathcal{T}$ je skup iz $\mathcal{T}$, to jest*

$$U_i \in \mathcal{T},\ i \in I \text{ (skup indeksa)} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T},$$

(3) *presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{T}$ je skup iz $\mathcal{T}$, to jest*

$$U_1, \ldots U_n \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Familija $\mathcal{T}$ naziva se topologija, a njezini članovi su otvoreni skupovi.

Definicija 3 (Pokrivač [8]). *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i K neki podskup od X. Familija $\mathcal{K} = \{K_i \mid i \in I\}$ podskupova od X naziva se pokrivač od K ako je*

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} K_i.$$

Pokrivač $\mathcal{K}$ je otvoren pokrivač ako su svi njegovi elementi otvoreni skupovi.

Definicija 4 (Borelova $\sigma-$algebra [8])**.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. σ-algebru $\sigma(\mathcal{T})$ generiranu topologijom $\mathcal{T}$ nazivamo Borelovom σ-algebrom na skupu X. Označavamo je s $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ ili $\mathcal{B}(X)$.*

Njene članove nazivamo Borelovi skupovi. Bitno je napomenuti da su svi otvoreni i zatvoreni skupovi Borelovi skupovi te da je unija konačno mnogo ili prebrojivo mnogo Borelovih skupova također Borelov skup.

2.2 Mjere

Sad kad smo upoznati s osnovnim pojmovima možemo definirati mjeru.

Definicija 5 (Mjera [8])**.** *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na nekom skupu X. Mjera na $\mathcal{A}$ je preslikavanje $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, gdje je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, za koje vrijedi:*

m1) (nenegativnost) $m(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

m2) $m(\emptyset) = 0$,

m3) za svaki niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Svojstva mjere koja će nam biti bitna u nastavku su:

- ako $A \subseteq B$, onda vrijedi $m(A) \leq m(B)$ i
- za svaki niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Borelova mjera je mjera na $(X, \mathcal{B}(X))$, gdje je $\mathcal{B}(X)$ Borelova $\sigma-$algebra. Skup čiji su elementi svi podskupovi nekog skupa naziva se partitivni skup i označavamo ga s $\mathcal{P}$.

Definicija 6 (Vanjska mjera [8])**.** *Funkcija $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ je vanjska mjera na skupu $\mathbb{R}^n$ ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) (monotonost mjere) $\mu(A) \leq \mu(B)$, gdje je $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$,

(3) (prebrojiva ili σ-subaditivnost) za svaki niz podskupova od $\mathbb{R}^n$, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, vrijedi:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Mjera je vanjska mjera ako je definirana na cijelom partitivnom skupu. Također, vanjska mjera nije uvijek mjera.

Definicija 7. [8] *Neka je* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *vanjska mjera na* $\mathbb{R}^n$. *Skup* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *je* μ*-izmjeriv ako je*

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^C), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Teorem 1 (Caratheodory [8]). *Neka je* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *vanjska mjera te neka je* $\mathcal{M}_\mu$ *familija svih* μ*-izmjerivih podskupova od* $\mathbb{R}^n$. *Vrijedi:*

- $\mathcal{M}_\mu$ *je* σ*-algebra na* $\mathbb{R}^n$,
- *restrikcija funkcije* μ *na familiju* $\mathcal{M}_\mu$ *je mjera*

Ovaj teorem nećemo dokazivati, ali nam je vrlo bitan zbog toga što nam govori u kojem slučaju su vanjske mjere zapravo mjere, to jest kako od vanjskih mjera dobiti mjere.

Definicija 8 (σ-pokrivač [8]). *Neka je* X *neki neprazan skup. Familiju podskupova od* X, $\mathcal{C}$, *nazivamo* σ*-pokrivač od* X *ako zadovoljava sljedeće:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{C}$,

(2) *postoji niz* $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *gdje su* $C_n \in \mathcal{C}$, *takav da vrijedi*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Definicija 9. [8] *Neka je* $\mathcal{C}$ σ*-pokrivač nekog nepraznog skupa* X *te* $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ *funkcija za koju vrijedi* $\tau(\emptyset) = 0$. *Funkcija* $\mu_\tau : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *definirana kao*

$$\mu_\tau(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) \;\middle|\; C_n \in \mathcal{C} \;\&\; A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}$$

je vanjska mjera.

Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika $\langle a, b \rangle$, $a < b$. Pošto vrijedi

$$\emptyset = \langle a, a \rangle \quad \text{i} \quad \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle -i, i \rangle,$$

familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

U nastavku definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ tako da vrijedi:

$$\tau(\langle a, b \rangle) = b - a \;\text{ te } \tau(\emptyset) = 0.$$

Neka je A podskup skupa $\mathbb{R}$. Označimo familiju svih nizova $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdje su $C_n \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup A s $\mathcal{C}_A$. To možemo zapisati kao:

$$\mathcal{C}_A = \{ (\langle a_n, b_n \rangle, n \in \mathbb{N}) \mid a_n \leq b_n \;\&\; A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle \}.$$

Sada funkciju $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ definiramo s:

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) \;\middle|\; C_n \in \mathcal{C} \;\&\; A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}\\ &= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \;\middle|\; (\langle a_n, b_n\rangle, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A \right\}\end{aligned}$$

i nazivamo ju **Lebesgueova vanjska mjera.** Iz definicije Lebesgueove vanjske mjere te Definicije 9 slijedi da je Lebesgueova vanjska mjera vanjska mjera. Skupove oblika $I = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_d$, gdje su $T_1, \ldots T_d$ 1-intervali oblika $\langle a,b\rangle$, $[a,b]$, $\langle a,b]$, $[a,b\rangle$ za $a,b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, nazivamo d-intervalima na skupu $\mathbb{R}^d$. Volumen d-intervala I definiramo kao produkt duljina intervala T_i pa imamo:

$$\mathrm{vol}(I) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Neka je ovaj put $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih d-intervala na skupu $\mathbb{R}^d$. Pošto vrijedi $\emptyset = \langle a,a\rangle \times \langle -1,1\rangle \times \cdots \times \langle -1,1\rangle \in \mathcal{C}$ te $\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle -i,i\rangle \times \langle -i,i\rangle \times \cdots \times \langle -i,i\rangle$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}^d$.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Označimo familiju svih nizova d-intervala, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, koji pokrivaju A s $\mathcal{C}_A$. Sada funkciju $(\lambda_d)^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ definiramo s:

$$\lambda_d^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) \;\middle|\; (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A \right\}$$

i nazivamo ju **Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$.**

Definicija 10. [8] *Skup $A \subseteq \mathbb{R}$ je izmjeriv u smislu Lebesguea, to jest Lebesgue izmjeriv, ako je λ^*-izmjeriv.*

Koristeći Caratheodoryev teorem zaključujemo da je skup svih Lebesgue-izmjerivih podskupova od $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{\lambda^*}$, zapravo σ-algebra, a restrikcija Lebesgueove vanjske mjere λ^* na familiju $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ zapravo mjera. Ta restrikcija se označava s λ i zove Lebesgueova mjera.
Uz to, kasnije će nam biti potrebna i činjenica da je svaki Borelov skup na $\mathbb{R}^n$ izmjeriv u smislu Lebesguea, to jest da vrijedi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$.

Definicija 11 (Metrički prostor)**.** [9] *Neka je X neki proizvoljan skup. Funkcija $d_* : X \times X \to \mathbb{R}$ je metrika ako vrijede sljedeća svojstva:*

- $d_*(a,b) \geq 0$,
- $d_*(a,b) = 0$ *ako i samo ako* $a = b$,
- $d_*(a,b) = d_*(b,a)$ *i*
- $d_*(a,c) \leq d_*(a,b) + d_*(b,c)$

za bilo koje točke a, b, c iz skupa X. Uređeni par (X, d_*) je metrički prostor.

Neka je (X, d_*) metrički prostor. Vanjska mjera μ na X je metrička vanjska mjera ako vrijedi

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \text{ kad } d_*(A, B) > 0.$$

Ako je μ metrička vanjska mjera, tada je svaki Borelov skup μ-izmjeriv.

2.3 Hausdorffova mjera

Definicija 12 (Dijametar)**.** [14] *Neka je V neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Dijametar skupa V definiramo kao maksimalnu udaljenost svih parova točaka skupa V, to jest kao:*

$$diam(V) = |V| = \sup\{|x-y| \mid x, y \in V\}.$$

Definicija 13 (δ-pokrivač [14])**.** *Neka je X neki neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Ako je $\{V_i\}_{i \in I}$ konačna ili prebrojiva familija skupova dijametra najviše δ koja pokriva X, tada $\{V_i\}$ nazivamo δ-pokrivač od X (I konačan ili prebrojiv skup indeksa).*

Skup je prebrojiv ako postoji bijekcija sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ na taj skup. Svaki skup $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ima prebrojivi pokrivač.

Definicija 14. [14] *Neka je X neki podskup od $\mathbb{R}^n$ i α neki nenegativan broj. Ako je $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ δ-pokrivač od X tada sa*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (diam(V_i))^\alpha \text{ , to jest } \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^\alpha$$

definiramo α-potencijal pokrivača $\mathcal{V}$.

Za iste X i α te $\forall \delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(X) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^\alpha \;\middle|\; \{V_i\} \text{ prebrojiv } \delta\text{-pokrivač od } X \right\}.$$

Pošto pokrivačima možemo dodavati nove skupove te ih tako nepotrebno učiniti proizvoljno velikim, mi tražimo njihov minimum, to jest minimiziramo zbroj α-potencija dijametara svih skupova u pokrivaču od X po svim δ-pokrivačima.

Ako je $\mathcal{V}$ $\delta-$pokrivač, tada vrijedi da je i δ_d-pokrivač, $\forall \delta_d \geq \delta$. Smanjivanjem δ, smanjuje se broj mogućih δ-pokrivača od X. Zbog toga se infimum od $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ povećava te teži limesu kad $\delta \to 0$.

Definicija 15 (Hausdorffova vanjska mjera)**.** [14] *Neka je α nenegativan realan broj. α-dimenzionalnu Hausdorffovu vanjsku mjeru skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo s:*

$$\mathcal{H}^\alpha(X) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(X).$$

α-dimenzionalna Hausdorffova vanjska mjera postoji za svaki skup $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i poprima vrijednosti iz $[0, \infty]$. Skupovi V_i u definiciji $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ su proizvoljni podskupovi od $\mathbb{R}^n$, ali isti rezultat je moguće dobiti za zatvorene ili otvorene skupove, to jest Borelove skupove V_i zbog jednakosti njihovih dijametara pa ćemo u nastavku koristiti samo Borelove skupove.

U nastavku ćemo pokazati da je Hausdorffova vanjska mjera i vanjska mjera i metrička vanjska mjera, no prije toga ćemo navesti lemu koja nam je potrebna.

Lema 1. [22] *Neka je X podskup od $\mathbb{R}^n$ te $\alpha > 0$ takav da je $\mathcal{H}^\alpha(X)$ konačna. Za svake $\beta > 0$ i $\delta > 0$ postoji prebrojivi otvoreni δ-pokrivač $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ od X tako da vrijedi:*

$$\left| \mathcal{H}^\alpha(X) - \sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^\alpha \right| \leq \beta.$$

Dokaz. Neka je X podskup od $\mathbb{R}^n$ te $\alpha > 0$. Iz Definicije 15 znamo da vrijedi

$$\mathcal{H}^\alpha(X) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(X).$$

Koristeći definiciju limesa možemo napisati: $\forall \beta > 0 \;\; \exists\, \delta_\beta$ takav da za $0 < \delta \leq \delta_\beta$ vrijedi:

$$|\mathcal{H}^\alpha(X) - \mathcal{H}^\alpha_\delta(X)| < \frac{\beta}{2}.$$

Znamo da je $\mathcal{H}^\alpha_\delta(X)$ infimum skupa α-potencijala pokrivača od X po svim δ-pokrivačima pa je on i najveća donja međa tog skupa. Stoga $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists$ prebrojivi δ-pokrivač od X, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tako da vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^\alpha - \varepsilon \leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^\alpha.$$

Uzmimo da je $\varepsilon = \dfrac{\beta}{2}$ pa slijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^\alpha - \mathcal{H}^\alpha_\delta(X) \leq \frac{\beta}{2}.$$

Naposljetku dobivamo nejednakost:

$$\left| \mathcal{H}^\alpha(X) - \sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^\alpha \right| \leq |\mathcal{H}^\alpha(X) - \mathcal{H}^\alpha_\delta(X)| + \left| \mathcal{H}^\alpha_\delta(X) - \sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^\alpha \right| < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta.$$

Time smo pokazali da vrijedi tvrdnja. □

Propozicija 1 (Svojstva Hausdorffove mjere [14]). *$\mathcal{H}^\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0, \forall\, \alpha > 0,$

(2) $\mathcal{H}^\alpha(X_1) \leq \mathcal{H}^\alpha(X_2)$, *gdje* $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$,

(3) $\mathcal{H}^\alpha\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\alpha(X_j)$, *za svaku prebrojivu familiju podskupova od* $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. (1) Prazan skup može biti pokriven proizvoljnim otvorenim skupom. Kako $\delta \to 0$, tako i dijametar tog skupa pokrivača teži nuli. Stoga $\mathcal{H}^\alpha_\delta(\emptyset) = 0$, to jest $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0, \forall \delta$.

(2) Za skupove X_1 i X_2, $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, vrijedi da je δ-pokrivač skupa X_2 također i δ-pokrivač skupa X_1. Tako je skup pokrivača od X_1 nadskup skupa pokrivača od X_2. Pošto je po definiciji infimuma, infimum podskupa veći ili jednak infimumu nadskupa, vrijedi tvrdnja $\mathcal{H}(X_1)^\alpha \leq \mathcal{H}(X_2)^\alpha$.

(3) Fiksirajmo $\beta > 0$ te $\delta > 0$ i zapišimo X kao uniju njegovih podskupova,

$$X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j.$$

Primijenimo tvrdnju iz Leme 1 na svaki X_j kako bi dobili prebrojive δ-pokrivače V_j tako da:

$$\left| \mathcal{H}^\alpha(X_j) - \sum_{n=1}^{\infty} |V_{jn}|^\alpha \right| \leq \frac{\beta}{2^j}.$$

Pošto je $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{V}_j$ prebrojivi otvoreni δ-pokrivač od X vrijedi:

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(X) \leq \sum_{n,j=1}^{\infty} |V_{jn}|^\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |V_{jn}|^\alpha \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}^\alpha(X_j) + \frac{\beta}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^\alpha(X_j) + \beta.$$

Sada pustimo da $\delta \to 0$ te $\beta \to 0$ pa dobijemo tvrdnju koju smo htjeli dokazati:

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(X) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^\alpha(X_j) + \beta,$$

$$\mathcal{H}^\alpha(X) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^\alpha(X_j) + \beta,$$

$$\mathcal{H}^\alpha(X) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^\alpha(X_j).$$

□

Ako uzmemo $\alpha = 0$, tada je $|V_i|^0 = 1$ za svaki skup V_i iz pokrivača. Stoga, za neograničene skupove X_1 i X_2 imamo $\mathcal{H}^0_\delta(X_1) = \mathcal{H}^0_\delta(X_2) = \infty$. Zaključujemo da Hausdorffova vanjska mjera nije vanjska mjera za $\alpha = 0$.

Propozicija 2. [9] *Hausdorffova vanjska mjera je metrička vanjska mjera.*

Dokaz. Ranije smo pokazali kako je $\mathcal{H}^\alpha$ vanjska mjera. Ako imamo metriku d_* za koju je $d_*(A, B) > 0$, za neke $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ te ako $\{V_n\}$ pokriva $A \cup B$ tako da vrijedi $\mathrm{diam} V_n \leq \delta < d_*(A, B)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi:

$$V_n \cap A = \emptyset \quad \text{ili} \quad V_n \cap B = \emptyset.$$

Iz toga slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam} V_n)^\alpha \geq \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \mathcal{H}^\alpha_\delta(B),$$

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \mathcal{H}^\alpha_\delta(B).$$

Naposlijetku, kad pustimo $\delta \to 0$ dobivamo traženi izraz:

$$\mathcal{H}^{\alpha}(A \cup B) \geq \mathcal{H}^{\alpha}(A) + \mathcal{H}^{\alpha}(B).$$

Pošto je obrat ove nejednakosti zagarantiran zbog subaditivnosti, pokazali smo da vrijedi jednakost

$$\mathcal{H}^{\alpha}(A \cup B) = \mathcal{H}^{\alpha}(A) + \mathcal{H}^{\alpha}(B),$$

što znači da Hausdorffova vanjska mjera je metrička vanjska mjera. □

Pošto vrijedi da je Hausdorffova vanjska mjera metrička vanjska mjera, također vrijedi i da su svi Borelovi skupovi $\mathcal{H}^{\alpha}$-izmjerivi, to jest Hausdorff-izmjerivi. Zbog toga što možemo koristiti samo Borelove skupove, to jest zbog toga što smo napravili restrikciju Hausdorffove vanjske mjere na samo Borelove skupove te da su svi Borelovi skupovi $\mathcal{H}^{\alpha}$-izmjerivi, slijedi da je Hausdorffova vanjska mjera s tom restrikcijom zapravo mjera. Zovemo je α-dimenzionalna Hausdorffova mjera te također označavamo s $\mathcal{H}^{\alpha}$.

Također, vrijedi da je α-dimenzionalna Hausdorffova mjera (s restrikcijom na Borelove skupove) zapravo α-dimenzionalna Lebesgueova mjera (s razlikom u jednom faktoru), to jest $c_{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}(X)$ je Lebesgueova mjera, gdje je c_{α} α-dimenzionalan volumen kugle dijametra 1.

Propozicija 3 (Svojstvo skaliranja [14]). *Neka je S transformacija sličnosti skalarnim faktorom $\lambda > 0$, to jest linearna funkcija za koju vrijedi $S(X) = \lambda X$. Ako je $X \subset \mathbb{R}^n$, onda vrijedi:*

$$\mathcal{H}^{\alpha}(S(X)) = \mathcal{H}^{\alpha}(\lambda X) = \lambda^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}(X).$$

Dokaz. Ako imamo δ-pokrivač $\{V_i\}$ od X, tada vrijedi da je $\{S(V_i)\}$ $\lambda\delta$-pokrivač od $S(X)$ pa slijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda V_i|^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^{\alpha}$$

te zatim iz toga i definicije infimuma dobijemo

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\lambda\delta}(\lambda X)) \leq \lambda^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(X).$$

Sada $\mathcal{H}^{\alpha}(\lambda X)) \leq \lambda^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}(X)$ kad $\delta \to 0$. Kako bi se pokazala obrnuta nejednakost, potrebno je samo zamijeniti S sa S^{-1} te X sa $S(X)$, to jest λ s $\frac{1}{\lambda}$ te X s λX. Tako dobijemo:

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\frac{\delta}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda X\right) \leq \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(\lambda X),$$
$$\lambda^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\frac{\delta}{\lambda}}(X) \leq \mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(\lambda X)$$

te kad pustimo da $\delta \to 0$

$$\lambda^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}(X) \leq \mathcal{H}^{\alpha}(\lambda X).$$

□

Neka su $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : X \to Y$ zadovoljava $\beta-$Hölderov uvjet, to jest ona je $\beta-$Hölder neprekidna za $\beta > 0$ ako postoji konstanta $c > 0$ tako da vrijedi:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\beta}, \text{ gdje su } x, y \in X.$$

Ako je konstanta $\beta = 1$, tada se radi o Lipschitz neprekidnoj funkciji.

Propozicija 4. [14] *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te $f : X \to \mathbb{R}^n$ $\beta-$Hölder neprekidna funkcija. Tada za svaki α vrijedi:*

$$\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{\beta}}(f(X)) \leq c^{\frac{\alpha}{\beta}} \mathcal{H}^{\alpha}(X).$$

Dokaz. Neka je $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δ-pokrivač od X i f $\beta-$Hölder neprekidna. Tada zbog $X \cap V_n \subseteq V_n$ slijedi

$$|f(X \cap V_n)| \leq c|X \cap V_n|^{\beta} \leq c|V_n|^{\beta}$$

te zaključujemo da je $\{f(X \cap V_n)\}$ $\varepsilon = c\delta^{\beta}$-pokrivač od $f(X)$. Nakon potenciranja i sumiranja obiju strana dobivamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(X \cap V_n)|^{\frac{\alpha}{\beta}} \leq c^{\frac{\alpha}{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^{\alpha}.$$

Sada s obje strane tražimo infimum po δ-pokrivačima pa imamo:

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\frac{\alpha}{\beta}}(f(X)) \leq c^{\frac{\alpha}{\beta}} \mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(X).$$

Naposljetku, pustimo $\delta \to 0$ pa slijedi $\varepsilon \to 0$ te dobivamo traženi izraz:

$$\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{\beta}}(f(X)) \leq c^{\frac{\alpha}{\beta}} \mathcal{H}^{\alpha}(X).$$

□

2.4 Hausdorffova dimenzija

Gledajmo sad $\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}$ kao funkciju varijable α. Za $t > \alpha$ i δ-pokrivač $\{V_n\}$ od X imamo:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |V_n|^t \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |V_n|^{t-\alpha}|V_n|^{\alpha} \leq \delta^{t-\alpha} \sum_{n\in\mathbb{N}} |V_n|^{\alpha}.$$

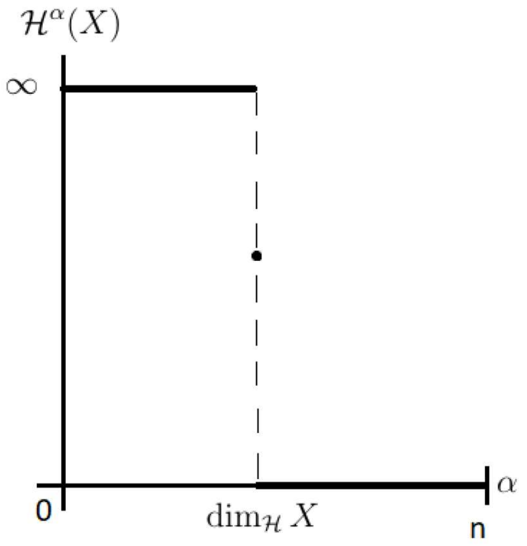
Ako tražimo infimum prijašnja nejednakost postaje $\mathcal{H}_{\delta}^{t}(X) \leq \delta^{t-\alpha}\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(X)$. Ako pustimo $\delta \to 0$ zbog $\mathcal{H}^{\alpha}(X) < \infty$ vrijedi $\mathcal{H}^{t}(X) = 0$. Tako na grafu s apscisom α i ordinatom $\mathcal{H}^{\alpha}(X)$ vidimo prisutnost kritične vrijednosti od α, za koju vrijednost od $\mathcal{H}^{\alpha}(X)$ skače s ∞ na 0.

Definicija 16 (Hausdorffova dimenzija [14])**.** *Hausdorffova dimenzija skupa $X \subset \mathbb{R}^n$ je kritična vrijednost α_X za koju vrijednost funkcije $\mathcal{H}^{\alpha}(X)$ prelazi s ∞ na 0, to jest vrijednost:*

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \mathcal{H}^{\alpha}(X) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 \mid \mathcal{H}^{\alpha}(X) = \infty\}.$$

Napomena 1. *Naravno, Hausdorffova dimenzija skupa $X \subset \mathbb{R}^n$ može biti najviše n, a najmanje 0. Za kritičnu vrijednost, to jest Hausdorffovu dimenziju, $\dim_{\mathcal{H}} X$, vrijedi $0 \leq \mathcal{H}^\alpha(X) \leq \infty$, dok je za sve ostale ili jednaka 0 ili ∞.*

$$\mathcal{H}^\alpha X = \begin{cases} \infty & 0 \leq \alpha < \dim_{\mathcal{H}} X \\ 0 & \alpha > \dim_{\mathcal{H}} X \\ 0 \leq \mathcal{H}^\alpha(X) \leq \infty & \alpha = \dim_{\mathcal{H}} X \end{cases}$$



Slika 2.1: Graf $\mathcal{H}^\alpha(X)$ i Hausdorffova dimenzija

Prije nego što krenemo s primjerima i računanjem Hausdorffovih dimenzija, u nastavku ćemo navesti neka bitna svojstva.

Propozicija 5 (Svojstva Hausdorffove dimenzije [9])**.** *Hausdorffova dimenzija zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $\dim_{\mathcal{H}} \emptyset = 0$,

(2) (*monotonost*) $\dim_{\mathcal{H}} X_1 \leq \dim_{\mathcal{H}} X_2$, *za sve* $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$,

(3) (*prebrojiva stabilnost*) *za prebrojivu familiju* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n \subseteq \mathbb{R}^n$, *vrijedi*

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}} X_n,$$

(4) $\dim_{\mathcal{H}} X = 0$ *ako je* X *prebrojiv skup,*

(5) *Hausdorffova dimenzija* $n-$*dimenzionalne otvorene kugle u* $\mathbb{R}^n$ *je* n,

(6) $\dim_{\mathcal{H}} X = n$ *ako je* X *otvoren skup.*

Dokaz. (1) Iz Propozicije 1 znamo kako vrijedi $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0$ za svaku vrijednost od $\alpha > 0$ pa zbog definicije Hausdorffove dimenzije slijedi da je $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = 0$.

(2) Neka su X_1 i X_2 podskupovi od $\mathbb{R}^n$ takvi da $X_1 \subseteq X_2$. Iz Propozicije 1 znamo kako za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\mathcal{H}^\alpha(X_1) \leq \mathcal{H}^\alpha(X_2)$$

te iz toga slijedi tvrdnja koju želimo pokazati po definiciji Hausdorffove dimenzije. Ako je kojim slučajem $\mathcal{H}^\alpha(X_1) = \infty$ tada je i $\mathcal{H}^\alpha(X_2) = \infty$ pa iz definicije Hausdorffove dimenzije slijedi:

$$\sup\{\alpha \geq 0 \mid \mathcal{H}^\alpha(X_1) = \infty\} \leq \sup\{\alpha \geq 0 \mid \mathcal{H}^\alpha(X_2) = \infty\} \text{ to jest}$$
$$\dim_{\mathcal{H}} X_1 \leq \dim_{\mathcal{H}} X_2$$

(3) Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija podskupova od $\mathbb{R}^n$. Iz svojstva monotonosti slijedi da je

$$\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \geq \dim_{\mathcal{H}} X_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Znamo da je $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ gornja međa, no mi tvrdimo da je i supremum od $\dim_{\mathcal{H}} X_n$. Kako bi to pokazali, pretpostavimo suprotno, to jest da postoji $\varepsilon > 0$ za koji je

$$\dim_{\mathcal{H}} X_n < \dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n - \varepsilon.$$

Neka je vrijednost od $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ jednaka α_0 pa možemo pisati $\dim_{\mathcal{H}} X_n < \alpha_0 - \varepsilon$. Sada slijede tvrdnje $\mathcal{H}^{\alpha_0-\varepsilon}(X_n) = 0$ i $\mathcal{H}^{\alpha_0-\varepsilon}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time smo dobili tvrdnju kontradiktornu sa svojstvom Hausdorffove mjere da je $\mathcal{H}^\alpha\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\alpha(X_j)$. Stoga zaključujemo da je $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}} X_n$.

(4) Neka je X prebrojiv skup. Ako je X_i skup koji sadrži jedan element tada je $\mathcal{H}^0(X_i) = 1$ pa slijedi $\dim_{\mathcal{H}} X_i = 0$. Sada prema svojstvu prebrojive stabilnosti vrijedi da je $\dim_{\mathcal{H}} \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n = 0$. Dakle, ako je Hausdorffova dimenzija, u čijoj definiciji tražimo infimum, skupa s jednim elementom jednaka nuli, tada će i dimenzija cijelog prebrojivog skupa biti jednaka nuli.

(6) Neka je X otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Pošto zbog otvorenosti X sadrži kuglu n-dimenzionalnog volumena s Hausdorffovom dimenzijom n, iz svojstva monotonosti slijedi

$$\dim_{\mathcal{H}} X \geq n.$$

Naposlijetku, iz same definicije Hausdorffove dimenzije slijedi obrnuta nejednakost te zaključujemo da je $\dim_{\mathcal{H}} X = n$.

□

Lema 2. [22] *Ako postoji neka konstanta* $c > 0$ *takva da* $\forall\delta > 0$ *postoji* $\delta-$*pokrivač* $\mathcal{V} = \{V_n\}$ *skupa* $X \subset \mathbb{R}^n$ *s* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |V_n|^\alpha \leq c$, *onda vrijedi* $\dim_{\mathcal{H}} X \leq \alpha$.

Dokaz. Uvjet leme nam zbog definicije Hausdorffove mjere garantira $\mathcal{H}^\alpha_\delta \leq c$ pa tako i $\mathcal{H}^\alpha < \infty$. Pošto je $\mathcal{H}^\alpha < \infty$, iz definicije Hausdorffove dimenzije direktno slijedi tvrdnja $\dim_{\mathcal{H}} X \leq \alpha$. □

Lema 3. [22] *Ako postoje konstanta* $c > 0$ *i* $\delta > 0$ *takvi da* $\sum_n |V_n|^\alpha \geq c$, *za sve* $\delta-$*pokrivače* $\mathcal{V} = \{V_n\}$, *tada vrijedi* $\dim_{\mathcal{H}} X \geq \alpha$.

Dokaz. Uvjet leme nam zbog definicije Hausdorffove mjere garantira $\mathcal{H}^\alpha_\delta \geq c$ pa i $\mathcal{H}^\alpha > 0$. Pošto je $\mathcal{H}^\alpha > 0$, iz definicije Hausdorffove dimenzije direktno slijedi tvrdnja $\dim_{\mathcal{H}} X \geq \alpha$. □

Za sljedeća svojstva će nam biti potrebna definicija bi-Lipschitz neprekidne funkcije pa ćemo je navesti u nastavku.

Definicija 17. *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Funkcija* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *je bi-Lipschitz neprekidna funkcija ako postoje konstante* c_1, c_2 *za koje vrijedi* $0 \leq c_1 \leq c_2 < \infty$, *tako da za svake* $x, y \in X$ *vrijedi:*

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|.$$

Također vrijedi da je bi-Lipschitz neprekidna funkcija i Lipschitz neprekidna funkcija.

Propozicija 6 (Hausdorffova dimenzija i Hölder neprekidne funkcije [14]).

(1) *Neka je* $X \subset \mathbb{R}^n$ *te* $f : X \to \mathbb{R}^n$ $\beta-$*Hölder neprekidna funkcija. Tada vrijedi* $\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \frac{1}{\beta} \dim_{\mathcal{H}} X$.
Ako je f *Lipschitz neprekidna funkcija, onda vrijedi* $\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \dim_{\mathcal{H}} X$.

(2) *Ako je* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *bi-Lipschitz neprekidna funkcija, onda vrijedi* $\dim_{\mathcal{H}} f(X) = \dim_{\mathcal{H}} X$.

Dokaz. (1) Neka je $\alpha > \dim_{\mathcal{H}} X$. Uz pomoć Propozicije 4 i definicije Hausdorffove dimenzije zaključujemo da vrijedi:

$$\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{\beta}}(f(X)) \leq c^{\frac{\alpha}{\beta}} \mathcal{H}^\alpha(X) = 0.$$

Pošto iz definicije Hausdorffove mjere znamo kako je ona nenegativna, za svaki $\alpha > \dim_{\mathcal{H}} X$ slijedi:

$$\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{\beta}}(f(X)) = 0.$$

Iz toga pomoću definicije Hausdorffove dimenzije zaključujemo da vrijedi

$$\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \frac{\alpha}{\beta}, \quad \forall\alpha \geq \dim_{\mathcal{H}} X.$$

Naposlijetku dolazimo do tvrdnje:

$$\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \frac{1}{\beta} \cdot \dim_{\mathcal{H}} X.$$

Što se tiče tvrdnje vezane za Lipschitz neprekidnu funkciju, ona slijedi direktno iz prijašnje tvrdnje u slučaju kad je $\beta = 1$.

(2) Ako imamo bi-Lipschitz neprekidnu funkciju f, tada je ona bijektivna te postoji njen inverz $f^{-1} : f(X) \to X$. Njen inverz je također Lipschitz neprekidna funkcija. Primjenjujući postupak dokazivanja prethodne tvrdnje (za Hölder neprekidnu funkciju) na Lipschitz neprekidnu funkciju i njen inverz, dobivamo izraze

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} f(X) &\leq \dim_{\mathcal{H}} X, \\ \dim_{\mathcal{H}} f^{-1}(f(X)) = \dim_{\mathcal{H}} X &\leq \dim_{\mathcal{H}} f(X) \end{aligned}$$

pa njima dolazimo do zaključka da vrijedi $\dim_{\mathcal{H}} f(X) = \dim_{\mathcal{H}} X$.

□

Napomena 2. *Ova propozicija nam govori o temeljnom svojstvu Hausdorffove dimenzije, a to svojstvo je da je Hausdorffova dimenzija invarijantna na bi-Lipschitzove transformacije. Ako imamo skupove s različitim dimenzijama, ne možemo konstruirati bi-Lipschitz neprekidnu funkciju s jednog u drugi.*

Hausdorffova dimenzija se, uz našu definiciju, može definirati na još mnogo načina, a jedan od njih je pomoću pokrivača sastavljenog od kugli. Neka je X neki podskup od $\mathbb{R}^n$ te

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\delta}(X) = \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n|^{\alpha} \;\middle|\; \{B_n\}\ \delta\text{-pokrivač od } X \text{ sastavljen od kugli} \right\}.$$

Mjeru dobivamo puštanjem $\delta \to 0$:

$$\mathcal{B}^{\alpha} = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{B}^{\alpha}_{\delta}(X),$$

a dimenzija nam je vrijednost za koju $\mathcal{B}^{\alpha}(X)$ prelazi s ∞ na 0. Možemo zaključiti da vrijedi

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(X) \leq \mathcal{B}^{\alpha}_{\delta}(X)$$

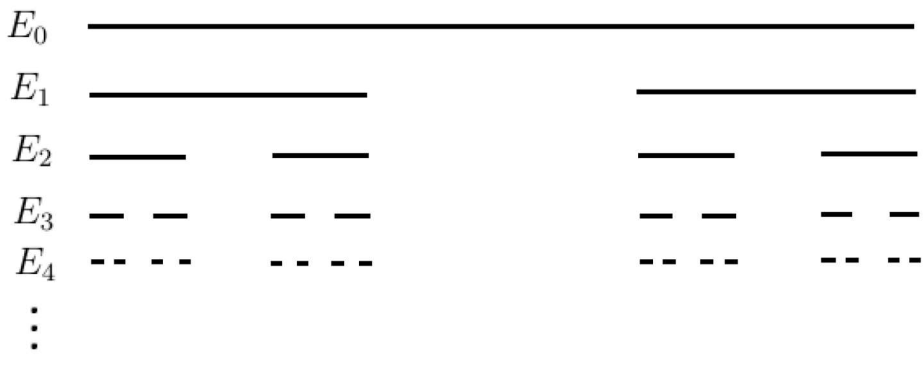
pošto su $\delta-$pokrivači sastavljeni od kugli samo dio postojećih $\delta-$pokrivača, no Hausdorffova dimenzija koristeći obje definicije je jednaka.

3 | Primjeri fraktala i njihove Hausdorffove dimenzije

Sad kad smo definirali Hausdorffovu dimenziju i objasnili njena osnovna svojstva, možemo se vratiti priči o fraktalima. Fraktali su skupovi čija Hausdorffova dimenzija nije prirodan broj. U nastavku ćemo prikazati neke fraktale te navesti njihove Hausdorffove dimenzije. Hausdorffova dimenzija predstavlja, to jest mjeri grubost, iregularnosti, razgranatost ili kompleksnost. Što je veća Hausdorffova dimenzija fraktala, to je veća njegova kompleksnost.

3.1 Cantorov skup i slični skupovi

Cantorov skup je jedan od najpoznatijih fraktalnih skupova. Nazvan je po poznatom njemačkom matematičaru Georgu Cantoru. Kako bismo ga konstruirali, uzet ćemo zatvoreni interval $[0,1]$ te ga označiti s E_0. Nakon uklanjanja otvorenog intervala $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$, koji je zapravo srednja trećina skupa E_0, dobivamo skup $E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Induktivno nastavljamo uklanjati srednje trećine svakog zatvorenog intervala koji dobijemo te tako dobivamo skupove E_2, $E_3 \ldots$



Slika 3.1: Cantorov skup

Propozicija 7. [22] *Neka je s X označen Cantorov skup.*

(1) *Za* $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$*−dimenzionalnu Hausdorffovu mjeru vrijedi:*

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(X) \leq 1.$$

(2) *Za Hausdorffovu dimenziju Cantorovog skupa X vrijedi*

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309.$$

Dokaz. (1) Skup E_k, koji je k-ti skup po redu, sastoji se od 2^k intervala duljina 3^{-k}. Ti intervali čine $3^{-k}-$pokrivač od X pa iz definicije Hausdorffove mjere slijedi

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{3^{-k}} \leq 2^k 3^{-k\alpha}.$$

Za $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ dobivamo da je $2^k 3^{-k\alpha} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ pa vrijedi $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}_{3^{-k}} \leq 1$. Kako bi pokazali da vrijedi i $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq 1$, uzmimo proizvoljan δ. Za njega postoji neki k_δ tako da je $3^{-k_\delta}-$pokrivač Cantorovog skupa X zapravo i $\delta-$pokrivač Cantorovog skupa X. Možemo primijetiti da je skup svih $3^{-k_\delta}-$pokrivača podskup skupa svih $\delta-$pokrivača. Iz toga slijedi:

$$\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}_{\delta}(X) \leq \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}_{3^{-k_\delta}}(X)$$

jer je infimum nadskupa garantirano manji ili jednak infimumu podskupa. Kako je $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}_{3^{-k_\delta}} \leq 1$, za $k_\delta \in \mathbb{N}$, iz definicije Hausdorffove mjere slijedi $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq 1$. Pokažimo još i drugu nejednakost. Cantorov skup je kompaktan jer je omeđen i zatvoren u $[0, 1]$ (komplement unije izbačenih otvorenih skupova). Slijedi da možemo otvorene pokrivače svesti na konačne potpokrivače čiji će elementi biti otvoreni intervali. Neka nam je $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav pokrivač. Za svaki od skupova pokrivača, V_n, postoji $k_n \in \mathbb{N}$ tako da je:

$$3^{-(k_n+1)} \leq |V_n| < 3^{-k_n}.$$

Takav V_n može imati presjek s najviše jednim intervalom od E_{k_n} jer je razmak među njima najmanje 3^{-k_n}. Iz toga slijedi da V_n presijeca najviše

$$2^{j-k_n} = 2^j 3^{-k_n\alpha} \leq 2^j 3^{\alpha} |V_n|^{\alpha}$$

intervala u E_j, $\forall j \geq k_n$. Uzmimo proizvoljan $j \geq k_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki V_n vrijedi $3^{-(j+1)} \leq |V_n|$. Pošto $\{V_n\}$ presijeca svih 2^j intervala duljine 3^{-j}, brojenjem intervala dolazimo do:

$$2^j \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^j 3^{\alpha} |V_n|^{\alpha}.$$

Sređivanjem nejednakosti dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{2} = 3^{-\alpha} = 3^{-\frac{\log 2}{\log 3}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |V_n|^{\frac{\log 2}{\log 3}},$$

koja nam je dovoljna da zaključimo da tražena tvrdnja vrijedi.

(2) Pošto smo dokazali da za $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ vrijedi $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq 1$, to jest da postoji kritična vrijednost α Hausdorffove mjere za koju ona nije 0 ili ∞, tada ta kritična vrijednost $\frac{\log 2}{\log 3}$ mora biti jednaka Hausdorffovoj dimenziji Cantorovog skupa X.

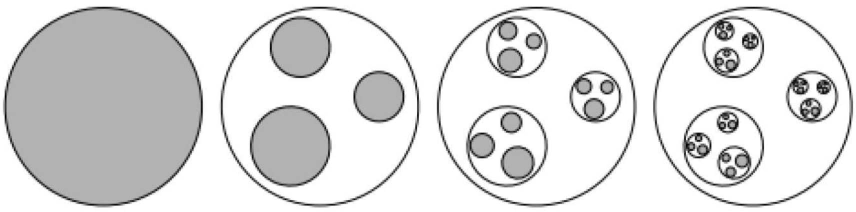
□

Sljedeća klasa fraktalnih skupova koje ćemo analizirati su skupovi slični Cantorovom, to jest Cantor-like skupovi. Generalan postupak njihove konstrukcije je sljedeći:

- počinjemo s 2 disjunktna intervala $I_1, I_2 \subset [0, 1]$ i dva koeficijenta $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tako da vrijedi $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$,
- umećemo dva zatvorena intervala duljina $\lambda_1|I_1|, \lambda_2|I_2|$ u I_1 te ih označavamo s I_{11} i I_{12},
- isto ponovimo za interval I_2 pa dobivamo I_{21} i I_{22},
- umećemo nove intervale u intervale $I_{i_1 i_2}$ te time dobivamo 8 disjunktnih zatvorenih intervala oblika $I_{i_1 i_2 i_3}$,
- ponavljamo postupak induktivno kako bi dobili intervale $I_{i_1 \ldots i_n}$ duljine $|I_{i_1}| \prod_{j=2}^{n} \lambda_{i_j}$.

Tako uzimanjem limesa ovog iterativnog postupka konstruiramo skup sličan Cantorovom, $\mathcal{C}$, te ga definiramo kao:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{i_1, \ldots i_n} I_{i_1 \ldots i_n} \right).$$



Slika 3.2: Skup sličan Cantorovom konstruiran krugovima. [22]

Jedan takav skup se konstruira pomoću induktivnog postupka koji smo ranije objasnili, ali umetanjem krugova unutar jediničnog kruga u $\mathbb{R}^2$. Na prethodnoj slici je prikazan taj skup za $n = 3$.

Teorem 2. [22] *Svaki skup sličan Cantorovom s koeficijentima $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ima jedinstvenu Hausdorffovu dimenziju t za koju vrijedi jednakost*

$$\lambda_1^t + \lambda_2^t + \cdots + \lambda_p^t = 1.$$

Sljedeći fraktalni skup koji je zanimljiv za analizu je Cantorova prašina pošto kod nje Hausdorffova dimenzija ipak je prirodan broj. Za konstrukciju nam je potreban jedinični kvadrat kojeg podijelimo na 16 jednakih dijelova od kojih ostavljamo 4, tako da ostane po 1 u svakom od 4 stupca. Nastavljamo u svakom koraku dijeliti kvadrate na 16 jednakih dijelova i ostavljati samo 4.

Primjer 1. [21] *Za Hausdorffovu mjeru i dimenziju Cantorove prašine X vrijedi:*

$$1 \leq \mathcal{H}^1(X) \leq \sqrt{2} \quad i \quad \dim_{\mathcal{H}} X = 1.$$

U k-tom koraku prethodno opisane konstrukcije Cantorova prašina se sastoji od 4^k kvadrata s duljinom stranica 4^{-k} pa tako i dijametra $4^{-k}\sqrt{2}$. Uzimanjem tih kvadrata za $\delta-$pokrivač po definiciji Hausdorffove mjere dobivamo:

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{4^{-k}\sqrt{2}} \leq 4^k 4^{-\alpha k} \sqrt{2}^{\alpha}.$$

Za $\alpha = 1$ dobivamo:

$$\mathcal{H}^1_{4^{-k}\sqrt{2}}(X) \leq \sqrt{2}$$

te puštanjem $k \to \infty$ dobivamo da za $\delta \to 0$ vrijedi $\mathcal{H}^1 \leq \sqrt{2}$, što smo i htjeli pokazati. Kako bi pokazali drugi dio nejednakosti, uzmimo π kao oznaku za ortogonalnu projekciju na x-os. Ortogonalna projekcija ne povećava udaljenosti pa stoga vrijedi $|\pi(x) - \pi(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in X$, to jest ona je Lipschitz neprekidna funkcija. Projekcijom $\pi(X)$ dobivamo interval $[0, 1]$ pa zbog definicije Hausdorffove mjere vrijedi:

$$1 = \mathcal{H}^1([0,1]) = \mathcal{H}^1(\pi(X)) \leq \mathcal{H}^1(X).$$

□

3.2 Fraktali Sierpinskog

Sljedeća skupina fraktala koju ćemo promatrati su fraktali Sierpinskog. Prvi kojim ćemo se baviti je tepih Sierpinskog.

Uzmimo jedinični kvadrat, podijelimo ga na devet jednakih kvadrata (kojima je duljina stranice trećina duljine stranice originalnog kvadrata) te izbacimo središnji. Postupak ponavljamo za sve dobivene kvadrate. U sljedećoj iteraciji ćemo imati 64 još manja kvadrata kojima će duljina stranica biti jednaka devetini duljine stranice originalnog kvadrata. Ako broj manjih objekata (u našem primjeru kvadrata) označimo s N, a faktor skaliranja kojim treba pomnožiti stranice manjeg objekta kako bismo dobili originalni označimo s r, tada vrijedi:

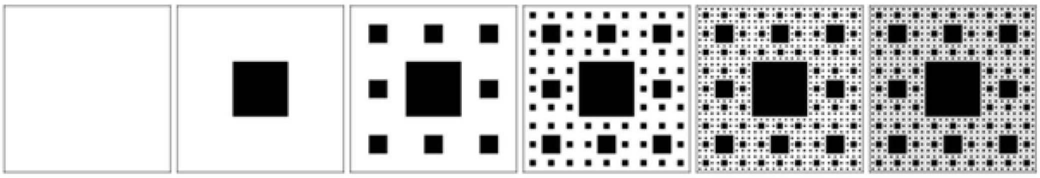
$$N = r^{\dim_{\mathcal{H}} X}, \text{ to jest } \dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log N}{\log r},$$

gdje je $\dim_{\mathcal{H}} X$ Hausdorffova dimenzija nekog objekta X. Ove jednakosti vrijede za svaku iteraciju u postupku konstrukcije fraktala. Tako za prvu iteraciju tepiha Sierpinskog, u kojoj imamo 8 kvadrata i faktor skaliranja 3, vrijedi:

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.8927.$$

U drugoj pak iteraciji imamo 64 manja kvadrata i faktor skaliranja 9, što nam daje jednaku dimenziju:

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log 64}{\log 9} = 1.8927.$$



Slika 3.3: Tepih Sierpinskog. [21]

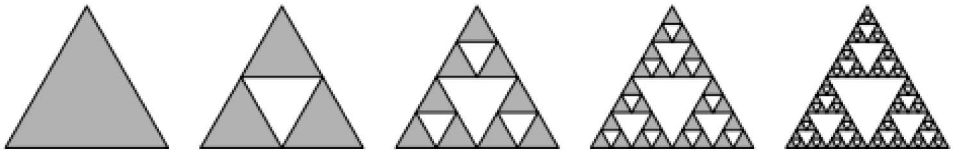
Topološku dimenziju gledamo kao običnu dimenziju objekata u prostoru. Na primjer, točka ima topološku dimenziju 0, pravac 1, kvadrat 2 pošto ima i duljinu i širinu, kocka 3 jer ima i visinu,. . . . Tepih Sierpinskog ima topološku dimenziju 2 pošto je on kvadrat u ravnini kojem smo izbacili neke dijelove. Stoga, fraktal možemo definirati i kao objekt kojem se Hausdorffova i topološka dimenzija razlikuju. Kad bismo gledali običan kvadrat X podijeljen na 9 jednakih dijelova, to jest kad ne bismo izbacili središnji kvadrat kao kod tepiha Sierpinskog, vrijedilo bi:

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.$$

Stoga, zaključujemo da kvadrat sam po sebi nije fraktal jer su mu Hausdorffova i topološka dimenzija jednake.

Drugi fraktal Sierpinskog koji nas zanima je trokut Sierpinskog. Konstruira se podjelom jednakostraničnog trokuta na 4 manja slična međusobno kongruentna trokuta te odstranjivanjem srednjeg. Postupak nastavljamo induktivno za sve ostale trokute. Njegovu Hausdorffovu dimenziju ćemo jednostavno izračunati koristeći prethodno navedenu formulu. U prvoj iteraciji postupka konstrukcije imamo 3 trokuta kojima je stranica upola kraća od stranice originalnog trokuta pa je faktor skaliranja 2. Uzet ćemo i podatke iz druge iteracije kako bismo provjerili je li nam dimenzija zaista jednaka neovisno o iteraciji i broju manjih trokuta. Dakle, u drugoj iteraciji imamo 9 trokuta i faktor skaliranja 4. Iz toga slijedi da je Hausdorffova dimenzija trokuta Sierpinskog X jednaka:

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\log 9}{\log 4} = 1.585.$$



Slika 3.4: Trokut Sierpinskog. [22]

3.3 Von Kochovi fraktali

Vratimo se sada prvom fraktalu koji smo spomenuli, takozvanoj Von Kochovoj krivulji. Ranije u uvodu smo pokazali kako izgleda te ukratko objasnili njenu konstrukciju. Krivulja E_1 se u prvom koraku nakon zamjene sastoji od 4 kopije početne krivulje E_0 (smanjene na trećinu duljine). Krivulja E_2 se tako sastoji od 16 dužina duljine $\frac{1}{9}$. Tako se u k-tom koraku krivulja sastoji od 4^k dužina duljine $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ pa je njena cjelokupna duljina $\left(\frac{4}{3}\right)^k$.

Primjer 2. [22] *Hausdorffova dimenzija Von Kochove krivulje X iznosi* $\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log 4}{\log 3}$.

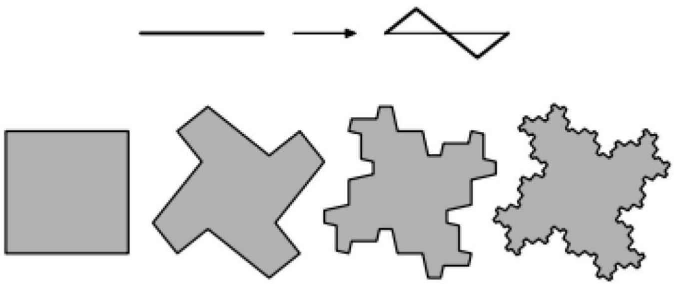
Pošto se početna Von Kochova krivulja sastoji od 4 smanjene kopije same sebe (koje su skalirane faktorom $\frac{1}{3}$), iz definicije Hausdorffove mjere te svojstva skaliranja iz Propozicije 3 za svaki α slijedi:

$$\mathcal{H}^{\alpha}(X) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha} \mathcal{H}^{\alpha}(X).$$

Dijeljenjem obiju strana jednakosti s $\mathcal{H}^{\alpha}(X)$ te logaritmiranjem dobivamo jednakost $\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$.

□

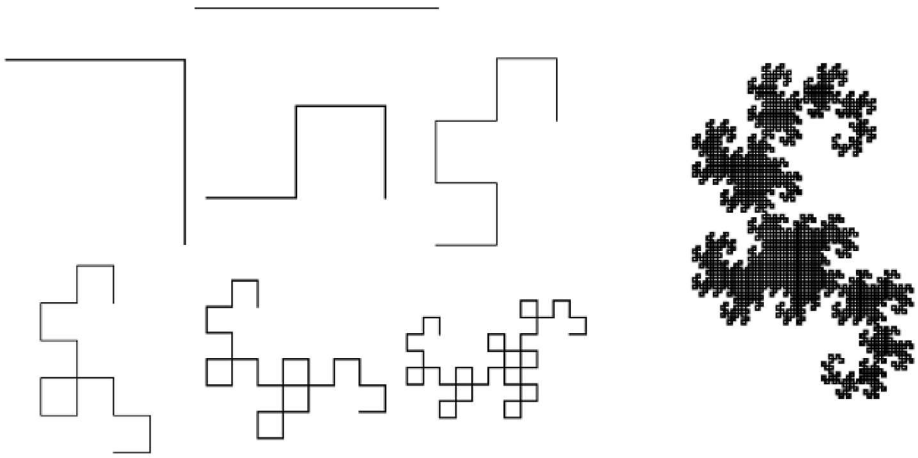
Postoji još fraktala nazvanih po Von Kochu. Jedan od njih je Von Kochov fraktalni otok. Konstruira se mijenjajući stranice jediničnog kvadrata linijama prikazanim na sljedećoj slici. Svakom zamjenom maknemo i dodajemo jednaku površinu pa stoga površina fraktalnog otoka uvijek ostaje ista. Kako je Von Kochov otok fraktal, tako možemo i otoke s njihovim obalama u stvarnosti gledati kao fraktale te pokušavati izračunati njihovu dimenziju ([4]).



Slika 3.5: Kochov fraktalni otok [22]

3.4 Zmajevi fraktali

Pokazali smo kako izgleda nekoliko vrsta osnovnih fraktala i objasnili njihove jednostavne konstrukcije, no postoje i naizgled mnogo kompleksniji zapanjujući slučajevi kao što su Zmajeva krivulja i Zlatni zmaj. Konstrukcija Zmajeve krivulje kreće od hipotenuze jednakokračnog pravokutnog trokuta koju mijenjamo za druge dvije stranice trokuta koje su $\sqrt{2}$ puta kraće od hipotenuze. U koracima koji slijede ponavljamo postupak, to jest mijenjamo po jednu stranicu za druge dvije stranice jednakokračnog pravokutnog trokuta.

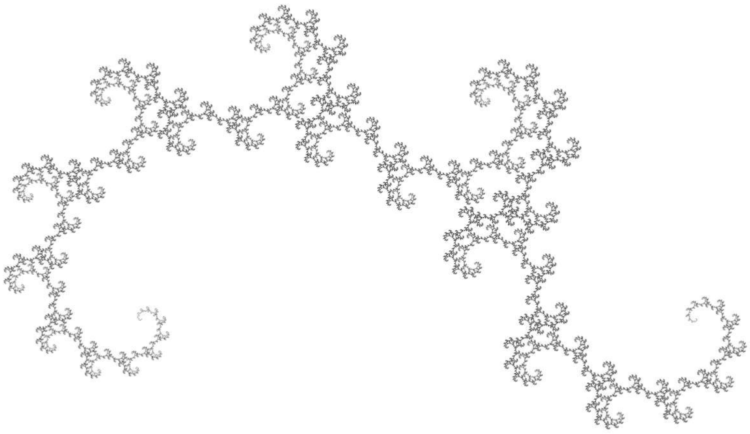


Slika 3.6: Fraktal "Zmajeva krivulja" s fraktalnom dimenzijom 2. [6]

Dakle, u prvoj iteraciji postupka konstrukcije iz jedne stranice dobijemo dvije $\sqrt{2}$ puta manje, to jest imamo broj manjih stranica $N = 2$ te faktor skaliranja $r = \sqrt{2}$. Koristeći formulu za računanje Hausdorffove dimenzije dobivamo da je Hausdorffova dimenzija fraktalne Zmajeve krivulje X jednaka

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \frac{\log N}{\log r} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = 2.$$

Drugi zmajev fraktal "Zlatni zmaj" dobiva se na sličan način, ali je zanimljiviji jer se kod njega pojavljuje zlatni rez. Konstrukcija mu počinje od linije koja je hipote-

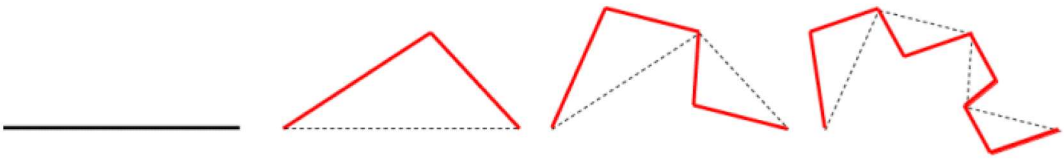


Slika 3.7: "Zlatni zmaj" s fraktalnom dimenzijom jednakom zlatnom rezu. [10]

nuza pravokutnog trokuta. Nju maknemo te nadomjestimo s ostale dvije stranice pravokutnog trokuta. U sljedećem koraku te dvije stranice gledamo kao hipotenuze te ih ponovo maknemo i nadomjestimo stranicama pravokutnog trokuta, ali moramo alternirati položaj trokuta kao što je prikazano na sljedećoj slici. Postupak ponavljamo u nedogled. Faktori skaliranja stranica su r i r^2 te vrijedi

$$r = \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\varphi}}},$$

gdje je φ zlatni rez $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803$. Ako pobliže pogledamo sliku Zlatnog



Slika 3.8: Konstrukcija fraktala "Zlatni zmaj". [5]

zmaja, možemo primijetiti kako je zapravo napravljen od dvije skalirane kopije samog sebe, jedne skalirane s r, a druge skalirane s r^2. Iz toga slijedi da je Hausdorffova dimenzija zlatnog zmaja vrijednost $\dim_{\mathcal{H}} X$ koja zadovoljava jednakost:

$$r^{\dim_{\mathcal{H}} X} + r^{2\dim_{\mathcal{H}} X} = 1.$$

Koristeći svojstvo zlatnog reza $\varphi^2 = \varphi + 1$, dobivamo

$$r^{\varphi} + r^{2\varphi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi+1} = 1,$$

to jest vrijedi da je baš zlatni rez jednak Hausdorffovoj dimenziji Zlatnog zmaja.

3.5 Iterativni funkcijski sustavi

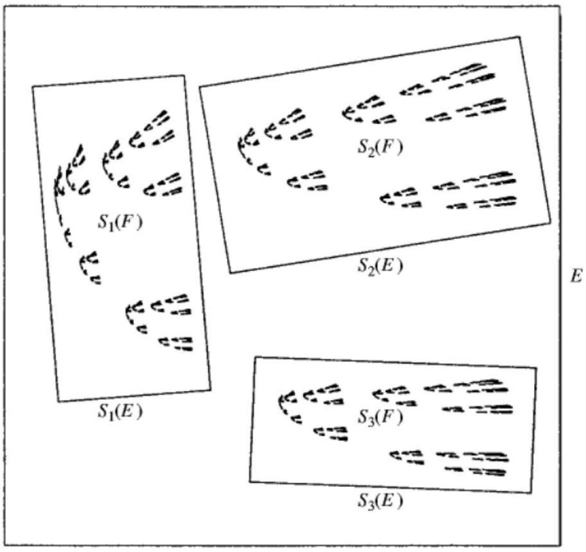
Definicija 18. [17] *Neka je (X, d_*) metrički prostor. Kontrakcija je funkcija $f : X \to X$ takva da vrijedi:*

$$d_*(f(x), f(y)) \leq p \cdot d_*(x, y), \; 0 < p < 1.$$

Afina transformacija je funkcija $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da vrijedi $S(x) = T(x) + b$, gdje je T linearna funkcija na $\mathbb{R}^n$, a b vektor u $\mathbb{R}^n$. Dakle, S je kombinacija translacije, rotacije i dilatacije (širenja). Iterativni funkcijski sustav (IFS) na (X, d_*) je konačna familija kontrakcija $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, gdje je I neki skup indeksa.

Promatramo iterativne funkcijske sustave jer se skupina funkcija (kontrakcija) koje djeluju na neki objekt nakon mnogo iteracija akumulira na fraktalni skup, to jest teže fraktalnom skupu koji zovemo atraktor. Ako se IFS sastoji od afinih kontrakcija $\{S_1, S_2, \dots\}$ na $\mathbb{R}^n$, tada atraktor F nazivamo samoafinim skupom. Dakle, iterativnim funkcijskim sustavima konstruiramo fraktale. Najjednostavnije primjere fraktala pomoću takvog sustava dobivamo korištenjem algoritma konstrukcije kojeg nazivamo "Igra kaosa". Uzima se IFS sa $\{S_1, S_2, \dots\}$ te jedna točka na koju iterativno primjenjujemo funkcije S_i kako bismo dobili nove točke. Tako po završetku postupka dobivamo fraktal.

Primjer 3. *Neka su S_1, S_2 i S_3 afine transformacije koje preslikavaju kvadrat E u 3 različita pravokutnika. Iterativno ponavljamo postupak transformirajući pravokutnike u još manje pravokutnike.*



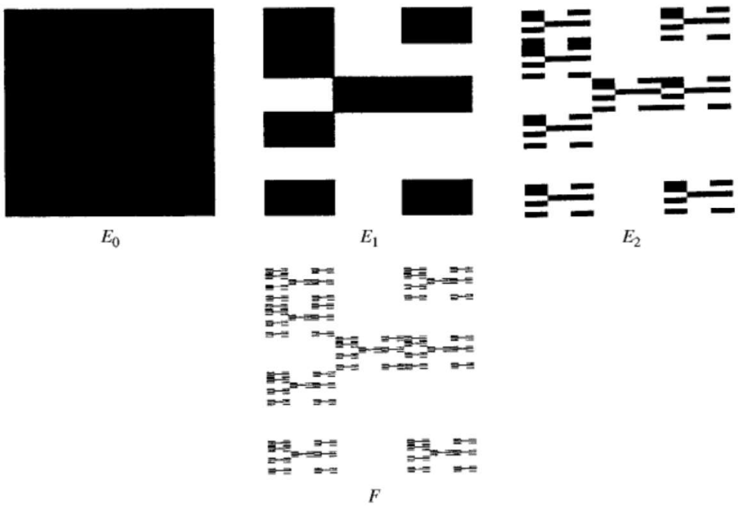
Slika 3.9: Iterativni funkcijski sustav - kompozicija afinih kontrakcija. [14]

Atraktor F je prikazan kao kombinacija kompozicija $S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \cdots \circ S_{i_n}$, za neki $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$. Dakle, F se sastoji od 3 afine kopije samog sebe $S_1(F)$, $S_2(F)$ i $S_3(F)$ te ga smatramo fraktalom.

Primjer 4. *Neka je E_0 jedinični kvadrat podijeljen na $q \times p$ polje pravokutnika s duljinama stranica $\frac{1}{q}$ i $\frac{1}{p}$, $p, q > 0$, $p < q$. Uzmimo proizvoljno mnogo tih pravokutnika i označimo taj skup s E_1. Neka je s N_j označen broj pravokutnika uzetih iz $j-$tog stupca, $1 \leq j \leq p$. Svaki od pravokutnika iz E_1 ponovo dijelimo na polje manjih pravokutnika i odabiremo pravokutnike s istim pozicijama kao i u početnom polju. Skup novoodabranih pravokutnika označavamo s E_2. Ponavljamo postupak iterativno mijenjajući pravokutnike afinim kopijama od E_1. Tada za atraktor F koji dobijemo nakon proizvoljno mnogo ponavljanja postupka vrijedi:*

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \log\left(\sum_{j=1}^{p} N_j^{\frac{\log p}{\log q}}\right) \cdot \frac{1}{\log p}.$$

Možemo primijetiti kako dimenzija ne ovisi samo o broju odabranih pravokutnika nego i njihovim pozicijama na polju.



Slika 3.10: Konstrukcija samoafinog skupa iterativnim postupkom. [14]

Sljedeće tvrdnje nam govore o dimenzijama fraktala nastalih iz iterativnih funkcijskih sustava s određenim navedenim svojstvima:

Propozicija 8. [14] *Neka je F atraktor iterativnog funkcijskog sustava koji je sastavljen od $\{S_1, \ldots, S_m\}$ na zatvorenom $D \subset \mathbb{R}^n$ tako da vrijedi:*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|,$$

gdje su $x, y \in D$ te $0 < c_i < 1$ za $i = 1, \ldots m$. Pretpostavimo da za F vrijedi da je disjunktna unija $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$. Tada vrijedi $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$, za $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

Propozicija 9. [14] *Neka je F atraktor iterativnog funkcijskog sustava koji je sastavljen od $\{S_1, \ldots, S_m\}$ na zatvorenom $D \subset \mathbb{R}^n$ tako da vrijedi:*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \geq b_i |x - y|,$$

gdje su $x, y \in D$, $0 < b_i < 1$ za $i = 1, \ldots m$. Pretpostavimo da za F vrijedi da je disjunktna unija $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$. Tada je $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$, za $\sum_{i=1}^{m} b_i^s = 1$.

4 | Fraktali vezani uz Brownovo gibanje

4.1 Graf Brownovog gibanja

Definirajmo sada Brownovo gibanje za čiji ćemo graf pokazati da je fraktal.

Definicija 19 (Brownovo gibanje). [18] *Slučajni proces* $(B(t) \mid t \geq 0)$ *na* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *je standardno Brownovo gibanje ako vrijedi:*

(1) *trajektorije* $t \to B_t(\omega)$ *su gotovo sigurno neprekidne s* $[0, \infty\rangle$ *u* $\mathbb{R}$,

(2) $B(0) = 0$,

(3) $\forall\ 0 = t_0 < \cdots < t_m$ *prirasti* $B(t_1) - B(t_0), \ldots,\ B(t_m) - B(t_{m-1})$ *su nezavisne slučajne varijable,*

(4) $\forall\ 0 \leq s < t$ *i* $\forall h > 0$ *prirasti* $(B(t) - B(s))$ *su normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem* 0 *i varijancom jednakom* $(t - s)$, *to jest vrijedi*

$$B(t) - B(s) \stackrel{d}{=} B(t+h) - B(s+h).$$

Definicija 20. [15] $(B(t) \mid t \geq 0)$ *u* $\mathbb{R}^n$ *je* $n-$*dimenzionalno Brownovo gibanje s početkom u* $(x_1, \ldots,\ x_n)$ *ako je* $B(t) = (B_1(t), \ldots,\ B_n(t))$, *gdje su* $B_1, \ldots,\ B_n$ *nezavisna Brownova gibanja.* $n-$*dimenzionalno Brownovo gibanje je standardno ako počinje u* $(0, \ldots,\ 0)$.

Prije nego što definiramo sam graf Brownovog gibanja, odredimo njegovu Hausdorffovu dimenziju te zaključimo da je zaista fraktal, navest ćemo nekoliko propozicija uz pomoć kojih ćemo pokazati neka bitna svojstva Brownovog gibanja te tako i njegovog pripadnog grafa.

Definicija 21. [19] *Funkcija* $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}]$ *je lokalno* $\beta-$*Hölder neprekidna u nekom* $x \geq 0$ *ako* $\exists\ \gamma > 0,\ c > 0$ *takvi da vrijedi*

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\beta},$$

kad je $|y - x| \leq \gamma$.

Definicija 22. *Graf funkcije* $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset [0, \infty\rangle$ *definiramo kao*

$$Graf_f = \{(t, f(t)) \mid t \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Propozicija 10. [7] *Neka je* $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *lokalno* $\beta-$*Hölder neprekidna funkcija. Tada vrijedi:*

$$\dim Graf_f \leq 1 + (1-\beta) \min\left(n, \frac{1}{\beta}\right).$$

Dokaz. Funkcija f je lokalno $\beta-$Hölder neprekidna pa postoji konstanta c takva da ako za $s, t \in [0,1]$ vrijedi $|t-s| \leq \varepsilon$, onda vrijedi $|f(t) - f(s)| \leq c\varepsilon^\beta$. Pokrijmo $[0,1]$ s $\frac{1}{\varepsilon}$ intervala duljine ε. Slike tih intervala su sadržane u kugli promjera $2c\varepsilon^\beta$. Sada možemo pokriti svaku takvu kuglu s kuglama promjera ε. Broj takvih kugli je višekratnik od $\varepsilon^{n\beta - n}$. Sada promatramo pokrivač grafa koji se sastoji od Kartezijevog produkta intervala i kugli promjera ε. Broj takvih produkata, koje trebamo jer nam daju gornju granicu iz tvrdnje propozicije, je višekratnik od $\varepsilon^{n\beta-n-1}$. Tvrdnja propozicije sad slijedi iz definicije Hausdorffove dimenzije. □

U nastavku navodimo propozicije kojima pokazujemo u kojem je slučaju Brownovo gibanje lokalno Hölder neprekidno, no za to nam je najprije potrebna tvrdnja sljedeće leme.

Lema 4 (Borel-Cantelli [7])**.** *Neka je* $\{A_i\}_{i=0,\dots,\infty}$ *niz događaja na vjerojatnosnom prostoru za koji vrijedi:*

$$\limsup_{i \to \infty} A_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j.$$

Tada vrijedi:

(1) *ako* $\sum_{i=0}^{\infty} P(A_i) < \infty$, *onda* $P(\limsup_{i\to\infty} A_i) = 0$,

(2) *ako je* $\{A_i\}$ *nezavisan u parovima i* $\sum_{i=0}^{\infty} P(A_i) = \infty$, *onda* $P(\limsup_{i\to\infty} A_i) = 1$.

Propozicija 11. [7] *Postoji neka konstanta* $C > 0$ *tako da gotovo sigurno za proizvoljan* $h > 0$ *i svaki* $0 \leq t \leq 1-h$ *vrijedi:*

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C\sqrt{h \log \frac{1}{h}}.$$

Dokaz. Prvo pokažimo da Brownovo gibanje možemo zapisati kao sumu $B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j$, gdje su F_j nenegativne linearne funkcije neprekidne na $[0,1]$ jer će nam taj zapis biti potreban u dokazu tvrdnje. Definirajmo $D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \,\middle|\, 0 \leq k \leq 2^n \right\}$ i $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ te neka su $\{Z_t \mid t \in \mathcal{D}\}$ nezavisne standardno normalno distribuirane slučajne varijable. $\forall n \in \mathbb{N}$ definiramo $B(t)$, $t \in D_n$, tako da su $B(t) - B(s)$ normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$ te da su $(B(t) \mid t \in D_n)$ i $(Z_t \mid t \in \mathcal{D}/D_n)$ nezavisne.

Definirajmo slučajni proces

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \in D_{n-1} \\ 2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_t & , \ t \in D_n / D_{n-1} \end{cases}$$

Iz definicije od Z_t te činjenice da za $\mathcal{N}(0,1)$ varijable vrijedi $P(Z > x) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ slijedi

$$P(|Z_t| \geq c\sqrt{n}) \leq e^{\frac{-c^2 n}{2}}$$

pa $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t\in D_n} P(|Z_t| \geq c\sqrt{n})$ konvergira kad $c > \sqrt{2\log 2}$. Fiksirajmo neku takvu konstantu c. Iz Borel-Cantelli leme 4 slijedi da $\exists\, N < \infty$ takav da $\forall n > N$ i $t \in D_n$ vrijedi $|Z_t| < c\sqrt{n}$ te

$$\sup\{|F_n| \mid n > N\} < c\sqrt{n} \cdot 2^{\frac{-n}{2}}.$$

To implicira da $B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t)$ konvergira uniformno te da je $B(t)$ neprekidna na $[0,1]$ jer je uniformno konvergentan niz neprekidnih funkcija neprekidan. Sada možemo krenuti s dokazivanjem tvrdnje propozicije.
Za F_j postoji derivacija te $\forall c > \sqrt{2\log 2}\ \ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tako da $\forall j > N$ vrijedi:

$$\sup\{|F_j'|\} \leq \frac{2\sup\{|F_j|\}}{2^{-j}} \leq 2c\sqrt{j}\cdot 2^{\frac{j}{2}}.$$

Sada za svaki $l > N$ slijedi:

$$|B(t+h) - B(t) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |F_j(t+h) - F_j(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} h\sup\{|F_j'|\} + \sum_{j=l+1}^{\infty} 2\sup\{|F_j|\}.$$

Koristeći $\sup\{|F_n'| \mid n > N\} < c\sqrt{n}2^{\frac{-n}{2}}$ dobivamo da je gornji izraz omeđen s:

$$h\sum_{n=0}^{\infty}\sup\{|F_n'|\} + 2ch\sum_{n=N}^{l}\sqrt{n}\cdot 2^{\frac{n}{2}} + 2c\sum_{n=l+1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot 2^{\frac{-n}{2}}.$$

Uzmimo h tako da prvi pribrojnik bude manji od $\sqrt{h\log\frac{1}{h}}$ te neka je $l > N$ takav da $2^{-l} < h \leq 2^{-l+1}$. Tako će svi pribrojnici biti manji ili jednaki nekom višekratniku od $\sqrt{h\log\frac{1}{h}}$ pa iz toga slijedi tvrdnja propozicije. □

Propozicija 12. [15] *Neka je $C > 0$ definirana kao u prethodnoj propoziciji. Za $\beta < \frac{1}{2}$ Brownovo gibanje je lokalno $\beta-$Hölder neprekidno gotovo sigurno:*

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C|(t+h) - t|^{\beta}.$$

Dokaz. Neka je $(B(t) \mid t \geq 0)$ Brownovo gibanje te $C > 0$ konstanta tako da za $h > 0$ i $0 \leq t \leq 1-h$ vrijedi:

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C\sqrt{h\log\frac{1}{h}}.$$

Pošto za $\beta < \frac{1}{2}$ zasigurno vrijedi

$$C\sqrt{h \log \frac{1}{h}} \leq Ch^{\beta},$$

dobivamo traženi izraz

$$|B(t+h) - B - t| \leq Ch^{\beta} = Ch^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h^{\frac{1}{2}-\beta}}.$$

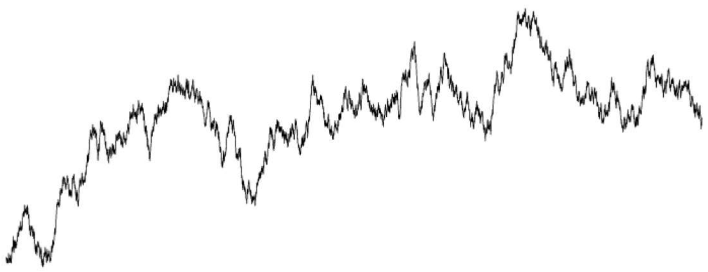
□

Također, Brownovo gibanje nije lokalno $\dfrac{1}{2}-$Hölder neprekidno, ali postoji t za koji vrijedi:

$$|B(t+h) - B(t)| \leq Ch^{\frac{1}{2}} \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Sada napokon možemo definirati graf Brownovog gibanja te predstaviti teorem koji govori o njegovoj Hausdorffovoj dimenziji.
Graf $n-$dimenzionalnog Brownovog gibanja definiramo kao:

$$Graf_B(t) = \{(t, B(t)) \mid t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$



Slika 4.1: Graf jednodimenzionalnog Brownovog gibanja. [20]

Teorem 3. [19] *Za graf $n-$dimenzionalnog Brownovog gibanja B gotovo sigurno vrijedi:*

$$\dim_{\mathcal{H}} Graf_B = \begin{cases} \frac{3}{2} & , n = 1 \\ 2 & , n \geq 2 \end{cases},$$

to jest graf Brownovog gibanja je fraktal.

Dokaz. Pokazat ćemo $\leq$ nejednakost dok se druga nejednakost može vidjeti u [7]. Iz propozicija 12 i 10 slijedi da je Brownovo gibanje $\beta-$Hölder neprekidno za $\beta < \dfrac{1}{2}$, da za neki t vrijedi $|B(t+h) - B(t)| \leq Ch^{\frac{1}{2}}$ gotovo sigurno (zbog čega kod dimenzije možemo koristiti i $\beta = \frac{1}{2}$) te da za grafove $\beta-$Hölder neprekidnih funkcija vrijedi

$$\dim Graf_f \leq 1 + (1-\beta) \min\left(d, \frac{1}{\beta}\right).$$

Tako za $n = 1$ te $\beta \leq \frac{1}{2}$ dobivamo da za dimenziju grafa Brownovog gibanja vrijedi:

$$\dim_{\mathcal{H}} Graf_B \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \min(1,2) = \frac{3}{2}.$$

Za $n \geq 2$ dobivamo kako je

$$\dim_{\mathcal{H}} Graf_B \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \min(n,2) = 2.$$

□

Mnogi fraktali se pojavljuju kao grafovi funkcija jer mnoge pojave imaju fraktalna obilježja kad im se nacrta i promatra graf kao funkcija vremena. Primjeri toga su brzina vjetra, razina vode, populacija, cijene dionica na burzi i tako dalje ([3], [12], [14]).

4.2 Skup nultočaka Brownovog gibanja

Definicija 23. [7] *Skup nultočaka jednodimenzionalnog Brownovog gibanja je skup Z_B definiran kao:*

$$Z_B = \{t \in [0, \infty\rangle \mid B(t) = 0\}.$$

Kako bismo izračunali Hausdorffovu dimenziju skupa nultočaka Brownovog gibanja uvest ćemo još jednu fraktalnu dimenziju koju nazivamo Box dimenzija. Naravno, pojasnit ćemo i u kakvom su odnosu Hausdorffova i Box dimenzija.

Definicija 24. [17] *Neka je $\varepsilon > 0$ te $N(\varepsilon)$ broj $\varepsilon-$kugli potrebnih da pokrijemo neki skup $X \subseteq \mathbb{R}$. Gornju i donju Box dimenziju definiramo kao*

$$\overline{\dim_M} X = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \underline{\dim_M} X = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Box dimenzija skupa X postoji ako i samo ako postoje gornja i donja Box dimenzija koje su jednake. Tada je:

$$\underline{\dim_M} X = \dim_M X = \dim_{box} X = \overline{\dim_M} X.$$

Lema 5. [17] *Za Hausdorffovu i Box dimenziju skupa X vrijedi:*

$$\dim_{\mathcal{H}} X \leq \dim_M X.$$

Dokaz. Neka su $\mu > 0$, $\gamma = \dim_M X + \mu$ i $\delta = \dim_M X + 2\mu$. Iz definicije Box dimenzije $\forall \varepsilon > 0$ možemo pokriti X s $N(\varepsilon) \leq \varepsilon^{-\gamma}$ $\varepsilon-$kugli. Označimo to kao pokrivač $\mathcal{V}$. Sada iz definicije Hausdorffove mjere slijedi

$$\mathcal{H}^{\delta}_{\varepsilon}(X) \leq \varepsilon^{-\gamma} \varepsilon^{\delta} = \varepsilon^{\mu}, \quad \text{te} \quad \mathcal{H}^{\delta}(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^{\delta}_{\varepsilon}(X) = 0.$$

Sada zbog načina na koji smo definirali δ slijedi $\dim_{\mathcal{H}} X \leq \delta = \dim_M X + \mu$, a pošto je $\mu > 0$ dobivamo tvrdnju leme $\dim_{\mathcal{H}} X \leq \dim_M X$. □

Lema 6 (Princip distribucije mase [7]). *Neka je μ Borelova mjera na $(X, \mathcal{B}(X))$. Ako skup E nije mjere 0 za Borelovu mjeru μ takvu da je $\mu(B(x,r)) \leq Cr^{\alpha}$, za neku konstantu $0 < C < \infty$ i $\forall$ kuglu $B(x,r)$, onda vrijedi:*

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) \geq \frac{\mu(E)}{C}, \text{ to jest } \dim_{\mathcal{H}} E \geq \alpha.$$

Teorem 4. [19] *Neka je $M(t)$ maksimalan proces Brownovog gibanja, to jest $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s)$. Slučajni proces $Y(t) = M(t) - B(t)$ je Markovljev proces s distribucijom jednakom distribuciji Brownovog gibanja $B(t)$.*

Trenutak t je trenutak rekorda Brownovog gibanja ako za Markovljev proces $Y(t)$ vrijedi $Y(t) = M(t) - B(t) = 0$ gotovo sigurno. Sad kad smo uveli sve potrebne pojmove, možemo izračunati donju granicu Hausdorffove dimenzije skupa nultočaka Brownovog gibanja pomoću sljedeće leme.

Lema 7. [19] *Gotovo sigurno vrijedi* $\dim_{\mathcal{H}}\{t \in [0,1] \mid Y(t) = 0\} \geq \frac{1}{2}$.

Dokaz. Znamo da je $M(t)$ rastuća pa ju možemo gledati kao funkciju distribucije neke mjere μ, to jest $\mu[a,b] = M(b) - M(a)$. S vjerojatnošću 1 znamo da je Brownovo gibanje Hölder neprekidna za $\beta < \frac{1}{2}$ pa slijedi

$$M(b) - M(a) \leq \max_{0 \leq h \leq b-a} B(a+h) - B(a) \leq C_{\beta}(b-a)^{\beta},$$

za $\beta < \frac{1}{2}$ i neku konstantu C_{β} neovisnu o vrijednostima a i b. Po principu distribucije mase dobivamo $\dim\{t \in [0,1] \mid Y(t) = 0\} \geq \beta$ gotovo sigurno te puštanjem $\beta \to \frac{1}{2}$ dobivamo tvrdnju. $\square$

Pošto su $Y(t)$ i $B(t)$ jednako distribuirani, također vrijedi

$$\dim_{\mathcal{H}}\{t \in [0,1] \mid B(t) = 0\} \geq \frac{1}{2}, \text{ to jest } \dim_{\mathcal{H}} Z_B \geq \frac{1}{2}.$$

Navedimo sada leme koje su nam potrebne za dokazivanje suprotne nejednakosti za Hausdorffovu dimenziju skupa nultočaka Brownovog gibanja.

Lema 8. [19] *$\forall a, \varepsilon > 0$ vrijedi $P\Big(\exists\, t \in \langle a, a+\varepsilon\rangle$ tako da $B(t) = 0\Big) \leq C\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}$, gdje je $C > 0$ konstanta.*

Definicija 25. [19] *Funkciju $N_m(Z_B)$ koja broji intervale oblika $\left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right]$ presječene sa Z_B definiramo s:*

$$N_m(Z_B) = \sum_{k=1}^{2^m} 1_{\{0 \in B[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}]\}}.$$

Lema 9. [19] *Neka je A zatvoren podskup od $[0,1]$ takav da vrijedi $\mathbb{E}(N_m(A)) \leq c2^{m\alpha}$, za $c, \alpha > 0$. Tada je $\overline{\dim}_M A \leq \alpha$.*

Dokaz. Uzmimo $\mathbb{E}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{N_m(A)}{2^{m(\alpha+\varepsilon)}}$, za $\varepsilon > 0$. Slijedi

$$\mathbb{E}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m(A)}{2^{m(\alpha+\varepsilon)}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathbb{N}N_m(A)}{2^{m(\alpha+\varepsilon)}} < \infty.$$

To implicira da je $\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{N_m(A)}{2^{m(\alpha+\varepsilon)}} < \infty$ gotovo sigurno te zaključujemo:

$$P\left(\limsup_{m\to\infty}\frac{N_m(A)}{2^{m(\alpha+\varepsilon)}} = 0\right) = 1.$$

Slijedi $\overline{\dim}_M(A) \leq \alpha + \varepsilon$ gotovo sigurno te kad pustimo $\varepsilon \to 0$ dobijemo $\overline{\dim_M}(A) \leq \alpha$ gotovo sigurno. □

Kako bismo dobili $\dim_{\mathcal{H}} Z_B \leq \dfrac{1}{2}$ primijetimo kako je

$$\mathbb{E}N_m(Z_B) \leq C_1 \sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq C_2 2^{\frac{m}{2}},$$

jer $P\left(\exists\, t \in \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right] \text{ tako da } B(t) = 0\right) \leq \frac{C}{\sqrt{k}}$ pa po upravo dokazanoj lemi slijedi $\overline{\dim}_M Z_B \leq \frac{1}{2}$ gotovo sigurno. Pošto znamo da je $\dim_{\mathcal{H}} Z_B \leq \overline{\dim}_M Z_B$, slijedi $\dim_{\mathcal{H}} Z_B \leq \frac{1}{2}$ gotovo sigurno. Time smo dokazali da vrijede obje nejednakosti pa je Hausdorffova dimenzija skupa nultočaka Brownovog gibanja jednaka $\frac{1}{2}$ gotovo sigurno, to jest taj skup nultočaka je fraktal.

Literatura

[1] B. Guljaš, *Metrički prostori*, Osijek, 2010., dostupno na
\https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/metprost.pdf.

[2] B. Guljaš, *Osnove matematičke analize*, Zagreb, 2019., dostupno na
\https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/OSNMATANAL.pdf.

[3] Benoit B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, New York, 1997.

[4] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

[5] *Classic Iterated Function Systems*, dostupno na
\https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/heighway/goldenDragon.htm.

[6] *Dragon Curve*, dostupno na
https://i.stack.imgur.com/0W85S.png.

[7] Cristopher J. Bishop, *Fractals in Probability and Analysis*, Cambridge University Press, Stony Brook University, New York, 2016., dostupno na
\https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/fractalbook.pdf.

[8] D. Jukić, *Mjera i integral*, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Osijek, 2012., dostupno na
https://www.mathos.unios.hr/index.php/661.

[9] Gerald B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, INC., New York, 1999., dostupno na
\https://apachepersonal.miun.se/~andrli/Bok.pdf.

[10] *Hokus Fraktus!*, dostupno na
\https://www.complexity-explorables.org/explorables/hokus-fractus/.

[11] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[12] J. Orlin Grabbe, *Chaos and Fractals in Financial Markets*, 1999.-2003., dostupno na
\https://billstclair.com/grabbe/chaos_index.htm.

[13] K. Falconer, *Fractals, A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2013.

[14] K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2003.

[15] L. P. Hansen, *Brownian Motion and Hausdorff Dimension*, University of Chicago, Chicago, 2011., dostupno na
\www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Hansen.pdf.

[16] M. Pollicott, *Lectures on Fractals and Dimension Theory*, Univerity of Warwick, dostupno na
\https://homepages.warwick.ac.uk/~masdbl/dimension-total.pdf.

[17] M. Hochman, *Lectures on fractal geometry and dynamics*, 2012., dostupno na
\https://math.huji.ac.il/~mhochman/courses/fractals-2012/.

[18] N. Šuvak, *Slučajni procesi II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2022.

[19] P. Mörters, Y. Peres, *Brownian Motion*, University of Bath, Redmond, 2010., dostupno na
\https://people.bath.ac.uk/maspm/book.pdf.

[20] *Phytools*, dostupno na
\http://phytools.org/eqg/Exercise_4.1/.

[21] K. Vladimir, M. Raič Raguž, *Tepih Sierpinskog*, OŠ Don Mihovila Pavlinovića, dostupno na
\http://www.os-mpavlinovica-metkovic.skole.hr/?news_id=575.

[22] Y Pesin, V. Climenhaga, *Elements of Fractal Geometry and Dynamics* Pennsylvania State University, American Mathematical Society, 2009., dostupno na
\https://www.math.uh.edu/~climenha/doc/fractals.pdf.

Sažetak

Početak diplomskog rada uključuje uvođenje i osnovno objašnjenje temeljnog pojma fraktala. U radu se navode i definiraju pojmovi kao što su mjera, topološki prostor i pokrivač te se uz pomoć njih detaljno objašnjava pojam Hausdorffove mjere. Uz to, navode se i neka njena ključna svojstva te sličnosti s ostalim vrstama mjera. Kasnije se definira Hausdorffova dimenzija te se pobliže promatraju njena svojstva koja su esencijalna za daljnje analiziranje fraktala. Nakon toga se provode konstrukcije mnogih poznatih fraktala te se računaju njihove Hausdorffove dimenzije.

Ključne riječi

- Hausdorffova mjera
- Hausdorffova dimenzija
- fraktali
- Zlatni zmaj
- Brownovo gibanje

Hausdorff Dimension and Fractals

Summary

The start of this paper includes introduction and general description of a term fractal. Terms like measure, topological space and cover are defined and used to explain what Hausdorff measure is. Some of its properties and connections to other measures are also stated in this paper. Later, Hausdorff measure is defined and its properties that are essential for the analysis of fractals are described. After that, many fractals are constructed and their Hausdorff dimensions are calculated.

Keywords

- Hausdorff measure
- Hausdorff dimension
- fractals
- Golden dragon
- Brownian motion

Životopis

Rođen sam 3. studenog 1997. u Varaždinu. Dolazim iz mjesta Trnovec Bartolovečki gdje sam pohađao osnovnu školu. Završio sam prirodoslovnu gimnaziju u Graditeljskoj, prirodoslovnoj i rudarskoj školi u Varaždinu te krajem 2016. upisao 1. godinu preddiplomskog sveučilišnog studija matematike u Rijeci. Godine 2021. završio sam preddiplomski studij te krajem te godine upisao diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku na Sveučilištu u Osijeku.