Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij: Matematika

Lucija Kerep

Otporna udaljenost u grafu

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij: Matematika

Lucija Kerep

Otporna udaljenost u grafu

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović Ergotić

Osijek, 2023.

Resistance distance in a graph

Sažetak

U ovome radu definirana je otporna udaljenost između dva vrha u grafu G kao ukupan otpor između dvije točke strujnog kruga reprezentiranog pomoću G, pri čemu su svim bridovima od G pridruženi otpornici jediničnog otpora. Navedeni su različite formule za računanje otporne udaljenosti. Posebno je iskazana i dokazana tvrdnja o računanju otporne udaljenosti pomoću determinanti podmatrica Laplaceove matrice grafa G. Definiran je Kirchhoffov indeks kao suma otpornih udaljenosti među svim vrhovima grafa G.

Ključne riječi

otporna udaljenost, Kirchhoffov indeks, Laplaceova matrica, otpor, udaljenost, ciklički graf

Abstract

In this paper, resistance distance between two vertices of a graph G is defined. It is calculated as a total resistance in an electrical cicuit represented by a graph G, such that the resistance of any edge of G is unity. Several formulas for calucating resistance distance are given. Specially, a theorem is presented that demonstrates how resistance distances in a graph G can be calculated by using determinants of Laplacian submatrices. Also, a Kirchhoff index of G is defined as the sum of resistance distances of all pairs of vertices of G.

Key words

resistance distance, Kirchhoff index, Laplacian matrix, resistance, distance, cyclic graph

Sadržaj

1 Uvod

Ako nacrtamo neke dvije točke u ravnini zajedno s njihovom spojnicom, možemo tvrditi da smo nacrtali graf. Pojam *grafa* dolazi iz grane diskretne matematike koju nazivamo teorija grafova. Laički rečeno, graf možemo reprezentirati skupom točaka tako da su neki ili svi parovi točaka spojeni crtom. Kasnije ćemo dati i točnu definiciju grafa pa ćemo vidjeti kako su te točke vrhovi grafa, a spojnice su bridovi. Prvi matematički problem vezan uz grafove zadao je i riješio Leonhard Euler.[1]. Taj problem danas je poznat kao problem sedam mostova Königsberga. Grafovi su u današnjem svijetu vrlo korisni jer služe za modeliranje raznih problema u ekonomiji, forenzici, prometu, a ponajviše u području računalnih mreža.

U ovome radu ćemo promatrati posebnu vrstu udaljenosti među vrhovima povezanog grafa koja se zove otporna udaljenost. Ona proizlazi iz graf-teorijskog pristupa u proučavanju strujnih krugova kojega je prvi razvio Kirchhoff prije 180 godina [8]. Za razumijevanje otporne udaljenosti kao posebne metrike na grafu, dovoljno je poznavati osnove pridruživanja grafa zadanom strujnom krugu. Nadalje, pretpostavljamo da je na svakom bridu grafa smješten jedinični otpornik. Otporna udaljenost između neka dva vrha u povezanom grafu definirana je kao ukupan otpor između ta dva vrha ukoliko je između njih postavljena baterija. Pritom treba voditi računa o vrsti spoja otpornika. Još je iz osnovnoškolskog gradiva iz fizike jasno da postoje serijski i paralelni spojevi otpornika i to će biti nužno uzeti u obzir pri računanju ukupnog otpora između dva vrha.

Rad je organiziran tako da su drugi i treći odjeljak posvećeni redom osnovnim pojmovima iz teorije grafova i osnovnim pojmovima iz teorije strujnih krugova. Četvrti odjeljak daje detaljan postupak računanja otporne udaljenosti između dva vrha koristeći formule serijski i paralelno spojenih otpornika. Peti odjeljak posvećen je Laplaceovoj matrici grafa, dok šesti odjeljak povezuje pseudoinverz Laplaceove matrice i otpornu udaljenost. U sedmom odjeljku je dokazana tvrdnja da je otporna udaljenost metrika, a osmi odjeljak se bavi računanjem otporne udaljenosti pomoću determinanti podmatrica Laplaceove matrice.

2 Osnovni pojmovi i tvrdnje o grafovima

Najprije ćemo definirati pojmove i iskazati teoreme koji dolaze iz područja teorije grafova, a važni su za razumijevanje glavnih rezultata ovoga rada.

Definicija 1. Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V = V(G)$, čiji su elementi vrhovi od G, skupa $E = E(G)$ disjunktnog s $V(G)$, čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije ψ_G koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par vrhova od G.

Ukoliko funkcija incidencije nije injekcija, graf sadrži višestruke bridove. Ukoliko funkcija incidencije nekom bridu pridruži par istih vrhova, onda taj brid zovemo petljom. Graf je jednostavan ako ne sadrži petlje ni višestruke bridove.

Za dva vrha u i v kažemo da su susjedni ako su krajevi nekog brida e. U tom slučaju kažemo da su vrh u (v) i brid e incidentni. Stupanj $d_G(v)$ vrha v u G je broj bridova incidentnih s v, pri čemu petlju računamo kao dva brida.

Graf G je konačan ukoliko su $V(G)$ i $E(G)$ konačni skupovi.

[1]Leonhard Euler (1707.- 1783.) bio je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Razvio je teoriju redova, uveo tzv. *Eulerove integrale*, riješio mnoge diferencijalne jednadžbe, a u diferencijalnoj geometriji dao je prvu formulu zakrivljenosti ploha (Eulerov poučak). Posebno su važna dva njegova istraživanja u hidrodinamici, gdje je razvio teoriju turbina. Proučavao je širenje zvuka i svjetlosti.

Definicija 2. Šetnja u grafu G je niz $W = v_0e_1v_1e_2 \cdots v_h$, čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i $(1 \leq i \leq h)$.

Za šetnju W iz prethodne definicije kažemo da je $(v_0, v_h)-$šetnja, pri čemu je v_0 početak, a v_h kraj od W. Put je šetnja u kojoj su svi vrhovi (posljedično i bridovi) međusobno različiti. Put s n vrhova označavamo s P_n. Ciklus C_n je šetnja u kojemu su svi vrhovi (posljedično i bridovi) međusobno različiti, a početak i kraj joj se podudaraju.

Udaljenost $d_G(u,v)$ između vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg $(u,v)-$puta u G. Ako takav put ne postoji, stavljamo $d_G(u,v) = \infty$. Za graf G kažemo da je povezan ako između svaka dva njegova vrha postoji put.

Potpun graf K_n je jednostavan graf s n vrhova u kojem je svaki par vrhova spojen bridom.

Definicija 3. Neka je $V(G) = \{v_i \,:\, i = 1, \dots, n\}$ skup vrhova grafa G. Matrica susjedstva $A(G) = (a_{ij})$ grafa G je kvadratna matrica reda n, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju vrhove v_i i v_j.

Definicija 4. Graf H je podgraf od G, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, a $\psi_H = \psi_{G|E(H)}$, odnosno ψ_H je restrikcija ψ_G na $E(H)$.

Aciklički graf je graf kojemu niti jedan podgraf nije ciklus. Povezan aciklički graf zovemo stablo. Razapinjujući podgraf H grafa G je podgraf od G za koji vrijedi $V(H) = V(G)$. Razapinjujuće stablo od G je razapinjujući podgraf od G koji je stablo.

Korolar 1. *[10] Svaki povezan graf ima razapinjujuće stablo.*

Ukoliko graf nije povezan, onda ni ne sadrži razapinjujuće stablo. Ako je graf povezan, može sadržavati jedinstveno razapinjujuće stablo (ako je i sam stablo) ili može sadržavati više različitih razapinjujućih stabala. U dobivanju točnog broja razapinjujućih stabala nekog grafa pomaže Laplaceova matrica.

Definicija 5. Neka je $V(G) = \{v_i \,:\, i = 1, \dots, n\}$ skup vrhova grafa G. Laplaceova matrica $L(G) = (l_{ij})$ grafa G je kvadratna matrica reda n, pri čemu vrijedi: $l_{ij} = -1$ ako je $i \neq j$ i vrhovi v_i i v_j su susjedni, $l_{ij} = 0$, ako je $i \neq j$ i vrhovi v_i i v_j nisu susjedni, $l_{ij} = d_i$, ako je $i = j$, pri čemu je d_i stupanj vrha i.

Sljedeći teorem jedan je od najvažnijih teorema u teoriji grafova, a odnosi se na prebrojavanje razapinjujućih stabala grafa koristeći Laplaceovu matricu.

Teorem 1 (Kirchoffov matrični teorem o stablima). *[7]*
Neka je G graf s $n \geq 2$ vrhova, $L = L(G)$ Laplaceova matrica grafa G i $\tau(G)$ broj razapinjućih stabala od G. Tada vrijedi

$$\tau(G) = \det L_{ii} \quad \forall i \leq n,$$

pri čemu je L_{ii} podmatrica Laplaceove matrice dobivena izbacivanjem $i-$tog retka i $i-$tog stupca.

Preciznije, broj razapinjujućih stabala nekog grafa jednak je proizvoljnom kofaktoru Laplaceove matrice (svojstva Laplaceove matrice impliciraju jednakost svih njenih kofaktora), odnosno vrijedi

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} \det\, L_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

pri čemu je L_{ij} podmatrica Laplaceove matrice dobivena izbacivanjem $i-$tog retka i $j-$tog stupca.

3 Osnovni pojmovi i tvrdnje o strujnim krugovima

U nastavku ćemo se baviti osnovnim pojmovima i tvrdnjama iz teorije električnih strujnih krugova.

Još iz osnovne škole znamo da je jednostavan električki strujni krug spoj izvora električne energije, električnog trošila i električne sklopke. Električni izvor, trošilo ili otpornik, sklopka ili prekidač i spojne žice su ujedno i glavni dijelovi strujnog kruga. Strujni se krug zatvara i otvara s pomoću sklopke. Električna struja teče jedino u zatvorenome strujnom krugu. O vrsti izvora ovisi hoće li struja u krugu imati točno određen smjer i jakost ili će ih neprestano mijenjati. Zato razlikujemo istosmjerne i izmjenične električne strujne krugove. Osim jednostavnih, postoje i složeni strujni krugovi u kojima je međusobno povezano više jednostavnih strujnih krugova s većim brojem različitih elemenata. Trošila ili otpornici u strujnom krugu mogu se spojiti na dva načina: serijski i paralelno. Paralelno spajanje omogućuje jednako dobivanje energije u svim otpornicima, a serijski spoj omogućuje lakše paljenje ili gašenje svih trošila.

Električni otpor je karakteristika vodiča da se opire prolasku električne struje. Fizikalnu veličinu električni otpor označavamo slovom R, a mjernu jedinicu nazivamo *om*. Oznaka mjerne jedinice om je veliko grčko slovo omega Ω. Vrijedi poznati *Ohmov zakon* koji kaže da je električni otpor omjer primijenjenog napona na krajevima vodiča i jakosti struje koja njime prolazi, odnosno $R = U/I$, gdje je U napon izražen u voltima V, a I je jakost električne struje izražena u amperima A.

U strujnom krugu otpor prolasku električne struje pružaju trošila. Ukupan otpor otpornika u serijskom strujnom krugu jednak je zbroju otpora svih otpornika. Ako je serijski spojeno t otpornika, svaki s otporom R_i, $i = 1, \ldots, t$, tada vrijedi formula za ukupan otpor R_{uk} otpornika:

$$R_{uk} = R_1 + R_2 + \cdots + R_t.$$

Nadalje, vrijedi da je zbroj električnih napona na otpornicima jednak naponu izvora električne struje.

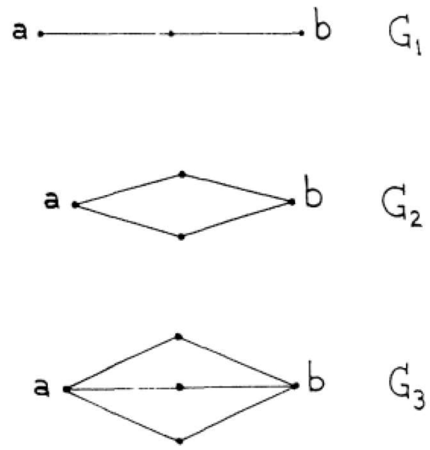
Kad su otpornici R_i, $i = 1, \ldots, t$ spojeni u paralelni spoj, električni napon jednak je u svakoj točki strujnog kruga. Što se tiče električne struje, ona se grana na svakom otporniku, pa se iznos električne struje može izračunati zbrajanjem električnih struja u svim granama strujnog kruga. Ukupan otpor otpornika R_{uk} dan je formulom

$$R_{uk} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_t}}.$$

4 Otporna udaljenost

U električnom inženjerstvu često se strujni krugovi proučavaju pomoću grafova. Svakom strujnom krugu, odnosno električnoj mreži možemo pridružiti graf.

Promotrimo grafove na slici 1. Uz pretpostavku da svi bridovi imaju jediničnu težinu, mogli bismo pomisliti da je teže "putovati" od vrha a do vrha b u G_1 jer je put između tih vrhova jedinstven, za razliku od G_2 i G_3 u kojima imamo više načina za takvo putovanje. Ovakvo razmatranje nameće potrebu za uvođenjem neke druge metrike na skupu vrhova grafa pored uobičajene udaljenosti. "Nova udaljenost" će uzeti u obzir višestrukost putova između vrhova pa će vrhovi biti bliži što je broj putova između njih veći.



Slika 1: Tri grafa s istom udaljenosti među vrhovima a i b. Slika je preuzeta iz [9].

Promotrimo graf koji odgovara električnoj mreži tako da svaki brid grafa predstavlja granu strujnog kruga kroz koju teče ista struja, a na kojoj se nalazi otpornik jediničnog otpora. Vrhovi grafa su čvorovi strujnog kruga, odnosno, mjesta u kojima se spajaju nekoliko grana. "Nova udaljenost" između vrhova takvog grafa bit će definirana kao ukupan otpor između tih vrhova kada su oni spojeni baterijom. Ako grafove na slici 1 promatramo kao grafove pridružene strujnom krugu na gore opisan način, dobivamo grafove kao na slici 2, a "nove udaljenosti", označimo ih s r_{ab}, između vrhova a i b u tim grafovima dane s

$$
\begin{aligned}
r_{ab} &= 1 + 1 = 2 \text{ u } G_1, \\
r_{ab} &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \text{ u } G_2, \\
r_{ab} &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \text{ u } G_3.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

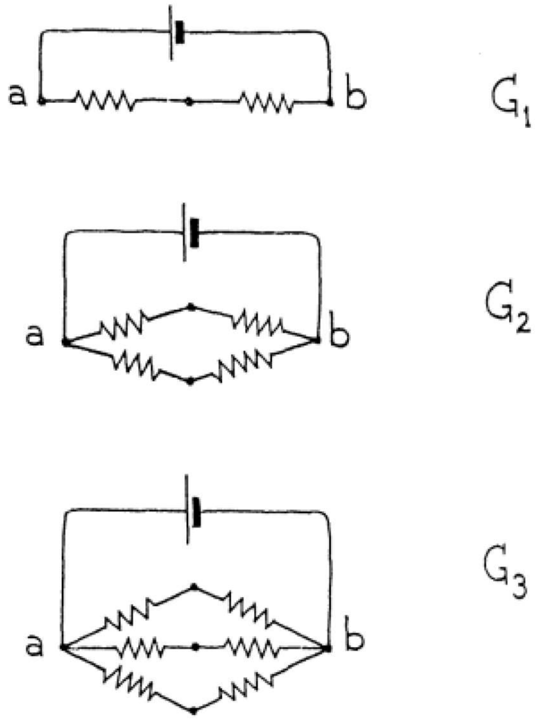
Primijetimo da smo u računanju r_{ab} koristili formule za serijski i paralelni spoj otpornika. S obzirom na način na koji ju računamo, "novu udaljenost" zvat ćemo *otpornom udaljenosti između vrhova.*

Ako bismo htjeli izračunati otpornu udaljenost između neka druga dva vrha, dovoljno je maknuti bateriju s vrhova a i b te ju staviti na ta druga dva vrha i postupiti kao u grafovima na slici 2: izračunati ukupan otpor između tih vrhova koristeći pretpostavku da su na bridovima fiksirani jedinični otpornici.

Sjetimo se još nekih pojmova iz fizike. Električni potencijal promatrane točke električnog polja je po iznosu jednak radu koji treba obaviti nad nabojem kako bismo ga iz beskonačnosti pomaknuli u promatranu točku. Formula za električni potencijal u nekoj promatranoj točki električnog polja glasi:

$$v = \frac{E_{ep}}{Q_0},$$

pri čemu je E_{ep} električna potencijalna energija koju naboj ima u toj točki električnog polja, a Q_0 je količina naboja. Mjerna jedinica za potencijal je volt V. Razliku električnih potencijala između dvaju tijela ili dviju točaka u strujnom krugu nazivamo električni napon, u oznaci U.



Slika 2: Grafovi sa slike 1 promatrani kao grafovi pridruženi strujnom krugu. Slika je preuzeta iz [9].

Općenito, za graf G i neka njegova dva vrha a i b spojena baterijom vrijedi formula za napon (razliku potencijala između vrhova a i b):

$$U_{ab} = I \cdot r_{ab}.$$

Definirajmo sada G-tok od vrha a do vrha b grafa G kao funkciju i definiranu na parovima susjednih vrhova tako da vrijedi

$$i_{xy} = -i_{yx} \tag{4.2}$$

i

$$\sum_{y}^{\sim x} i_{xy} = I\delta(x,a) - I\delta(x,b), \quad x \in V(G), \tag{4.3}$$

gdje je δ Kronecker delta funkcija, a sumiramo po svim vrhovima y iz $V(G)$ koji su susjedi vrhu x. Ovdje smo uveli oznaku susjednosti vrhova x i y: $x \sim y$. Kažemo da je I jakost struje koja izlazi iz izvora a i ulazi u ponor b. Relacija 4.3 poznata je i kao prvi Kirchhoffov zakon koji kaže da je zbroj struja u svakom čvorištu strujnog kruga jednak nuli, odnosno u grafu G zbroj struja koje izlaze iz vrha mora biti jednak zbroju struja koje izlaze iz tog vrha.

Za $G-$tok ćemo reći da je *fizikalan* ako postoji potencijal v na skupu vrhova G tako da vrijedi

$$i_{xy} r_{xy} = v_x - v_y, \quad x, y \in V(G), \tag{4.4}$$

pri čemu pišemo $r_{xy} = r_e$ ako $e = \{x, y\}$. Ako pažljivije pogledamo formulu (4.4), uočit ćemo da je ona ustvari Ohmov zakon.

Ukoliko promatramo proizvoljan ciklus C u grafu G, vrijedi

$$\sum_{x\sim y}^{C} i_{xy} r_{xy} = 0 \quad \forall C, \tag{4.5}$$

pri čemu sumiramo po svim bridovima ciklusa C u G koji se sekvencijalno pojavljuju u C. Primijetimo da je formula (4.5) drugi Kirchhoffov zakon koji kaže da je suma napona u svakoj (zatvorenoj) konturi strujnog kruga jednaka nuli.

5 Laplaceova matrica grafa

Definirajmo normirani prostor s ortonormiranom bazom čiji su elementi u bijekciji s vrhovima grafa G. Vektor baze takvog prostora ćemo označiti s $|x)$, $x \in V(G)$. Postoje razne matrice koje djeluju na ovakvom prostoru, a povezane su s grafom G. Jedna takva matrica zove se *prijemna matrica*, označavamo ju s A, a za njene elemente A_{xy} vrijedi

$$A_{xy} = (x \,|\, A \,|\, y) = \left\{ \begin{matrix} 1/r_{xy} & \text{za } x \sim y \\ 0 & \text{inače} \end{matrix} \right\} \; x, y \in V(G). \tag{5.1}$$

Ukoliko su svi otpori na bridovima jedinični, onda je jasno da je ovo matrica susjednosti grafa G. Nadalje, korisna je i matrica stupnjeva D s elementima D_{xy} koji su dani s:

$$D_{xy} = (x \,|\, D \,|\, y) = \delta(x, y) \sum_{z}^{\sim x} \frac{1}{r_{xz}}, \tag{5.2}$$

pri čemu sumiramo po svim $z \in V(G)$ koji su susjedni vrhu x. Nama je od posebnog interesa promatrati razliku $D - A$, a nije teško uočiti da je u slučaju jediničnih otpora na bridovima grafa G takva matrica zapravo Laplaceova matrica L pridružena grafu G (pogledati definiciju 5).

Lema 1. *Matrica $L = D - A$ ima realne svojstvene vrijednosti, od kojih je najmanja jednaka nuli. Ako je G povezan, svojstveni prostor te svojstvene vrijednosti je jednodimenzionalan, a pridruženi svojstveni vektor je (do na skalarni faktor)*

$$|\,\phi) \equiv \sum_{x} |\, x). \tag{5.3}$$

Dokaz. Tvrdnja da su svojstvene vrijednosti Laplaceove matrice realne proizlazi iz činjenice da je L Hermitska matrica. Nadalje, s obzirom da su svi elementi izvan glavne dijagonale manji ili jednaki nuli, prema Perron-Frobeniusovom teoremu [5], L ima svojstveni vektor čije su sve ne-nul komponente realne i pozitivne. Vrijedi

$$(L \,|\, \phi) = 0,$$

tako da vektor $|\,\phi)$ ima sve nenegativne komponente (konkretno, sve komponente su jednake 1). S obzirom da svi ostali svojstveni vektori moraju biti okomiti na $|\,\phi)$, oni nemaju svojstvo svih pozitivnih komponenti pa je nula najmanja svojstvena vrijednost od L.

Konačno, ako je G povezan, tada za svaki par vrhova $x, y \in V(G)$ vrijedi $(x \,|\, L^m \,|\, y) \neq 0$, pri čemu izbor broja m ovisi o paru x, y. Iz Perron-Frobeniusovog teorema proizlazi i tvrdnja da je svojstveni prostor pridružen svojstvenoj vrijednosti 0 jednodimenzionalan pa je dokaz gotov. □

Posljedica leme 1 je tvrdnja da L nije invertibilna matrica. No, znamo da tada možemo promatrati pseudoinverz $L^\dagger$ matrice L te vrijedi

$$L^\dagger L = LL^\dagger = Q$$
$$L^\dagger Q = QL^\dagger = L^\dagger,$$

pri čemu je Q (hermitska i idempotentna) projekcija

$$Q = \mathbf{1} - \frac{1}{(\phi\,|\,\phi)}\,|\,\phi)(\phi\,|.$$

6 Računanje otporne udaljenosti pomoću pseudoinverza $L^\dagger$

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Lema 2. *Fizički G-tok of vrha a do vrha b u povezanom grafu G postoji, jedinstven je i dan je formulom*

$$i_{xy} = \frac{I}{r_{xy}}(x - y\,|\,L^\dagger\,|\,a - b), \tag{6.1}$$

gdje je $|a - b) \equiv |a) - |b)$.

Dokaz. Uvrstimo li (4.4) u (4.3), dobivamo

$$\sum_y^{\sim x} \frac{1}{r_{xy}}(v_x - v_y) = I\delta(x, a) - I\delta(x, b). \tag{6.2}$$

No, uz pomoć (5.1) i (5.2), gornja jedankost postaje

$$(x\,|\,D\,|\,x)v_x - \sum_y (x\,|\,A\,|\,y)v_y = I(x\,|\,a - b). \tag{6.3}$$

Kako (6.3) vrijedi za proizvoljan $x \in V(G)$, to imamo

$$L\sum_x v_x\,|\,x) = I\,|\,a - b) \tag{6.4}$$

pa zbog leme 1 ova relacija se može invertirati na potprostoru okomitom na $|\,\phi)$. Kao posljedicu dobivamo

$$\sum_x v_x\,|\,x) = IL^\dagger\,|\,a - b) + c\,|\,\psi), \tag{6.5}$$

gdje je c neodređena konstanta. Iz ovoga direktno slijedi formula naše tvrdnje. Razlika potencijala između vrhova a i b dana je s

$$v_x - v_y = I(x - y\,|\,L^\dagger\,|\,a - b). \tag{6.6}$$

Sada Ohmovov zakon daje formulu leme, jedinstvenost od I i njegovo postojanje. □

Neka je $\bigtriangledown$ dijagonalna matrica s elementima $\bigtriangledown_{ab} = \delta_{ab}(a \,|\, L^{\dagger} \,|\, b)$. Iz ovoga je vidljivo da je razlika potencijala između dvije točke izravno proporcionalna s I. Za odabir $x = a$ i $y = b$ tu konstantu proporcionalnosti nazivamo efektivnim otporom između a i b. Slijedi glavni rezultat ovog odjeljka, teorem o formuli za računanje otporne udaljenosti između vrhova a i b grafa G.

Teorem 2. *Za fizički G-tok od vrha a do vrha b vrijedi*

$$r_{ab} = (a - b \,|\, L^{\dagger} \,|\, a - b). \tag{6.7}$$

Koristeći gore navedeni teorem i matricu $\bigtriangledown$, dobivamo sljedeću tvrdnju:

Korolar 2. *Graf G ima matricu otpora* $\Omega = \bigtriangledown |\, \phi)(\phi \,| + |\, \phi)(\phi \,| \bigtriangledown -2L^{\dagger}$.

Kao posljedicu imamo da su svi otpori između vrhova dobiveni pomoću matrične inverzije. Formulu iz teorema 2 možemo zapisati na sljedeći način:

$$r_{ab} = (L^{\dagger})_{aa} + (L^{\dagger})_{bb} - 2(L^{\dagger})_{ab}.$$

Valja primijetiti da ako G ne sadrži cikluse, tada nema paralelnih spojeva otpornika, odnosno, ukupan otpor između vrhova a i b računa se prema formuli za serijski spoj otpornika. No, tada je $r_{ab} = d(a, b)$, tj. otporna udaljenost jednaka je "običnoj" udaljenosti između vrhova. Štoviše, Klein i Randić [9] su pokazali da vrijedi

$$d(a, b) \geq r_{ab} \quad \forall a, b \in V(G),$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako postoji jedinstven put između a i b. Stoga je jedino zanimljivo proučavati otpornu udaljenost u grafovima koji sadrže cikluse.

U radu [9] je uvedena formula slična Winerovom indeksu (zbroju svih udaljenosti među vrhovima grafa), a koja je kasnije nazvana *Kirchhoffov indeks*:

$$Kf(G) = \sum_{\{a,b\} \subseteq V(G)} r_{ab}.$$

Također je pokazano da za graf s n vrhova vrijedi da je Kirchhoffov indeks jednak tragu matrice $L^{\dagger}$ pomnožene s n, odnosno $Kf(G) = n\mathrm{Tr}(L^{\dagger})$, a Gutman i Mohar [6] su dokazali da je $\mathrm{Tr}(L^{\dagger}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$, pri čemu su λ_i pozitivne svojstvene vrijednosti od $L(G)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Stoga, vrijedi formula

$$Kf(G) = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}. \tag{6.8}$$

7 Otporna udaljenost kao metrika

U nastavku ćemo dokazati tvrdnju da je otporna udaljenost među vrhovima grafa G metrika na $V(G)$. Sjetimo se definicije metrike na nekom skupu, npr. na $V(G)$. To je preslikavanje $\rho\colon V(G) \times V(G) \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava sljedeće uvjete za sve $a, x, b \in V(G)$.:

$$\begin{aligned}
\rho(a,b) \geq 0 &: \text{nenegativnost},\\
\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b &: \text{definitnost},\\
\rho(a,b) = \rho(b,a) &: \text{simetričnost},\\
\rho(a,x) + \rho(x,b) \geq \rho(a,b) &: \text{nejednakost trokuta}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Kažemo da je vrijednost $\rho(a,b)$ *ρ-udaljenost* između vrhova a i b.

Slijedi glavna tvrdnja.

Teorem 3. *Otporna udaljenost u grafu G je metrika na $V(G)$.*

Dokaz. Primjetimo da korolar 2 i svojstva operatora L koja se pojavljuju u lemi 2 daju rezultat koji kaže da je r_{ab} simetrična i nenegativna funkcija, pri čemu vrijedi $r_{ab} = 0 \Leftrightarrow a = b$. Preostaje nam dokazati nejednakost trokuta. Neka su i i i' G-tokovi od a do x i od x do b pridruženi potencijalima v i v'. Lako se provjeri da je $j \equiv i + i$' I-tok od a do b pridružen potencijalu $w = v + v$'. Sada je $Ir_{ab} = w_a - w_b = (v_a - v_b) + (v'_a - v'_b)$.
No, ekstremne vrijednosti potencijala v_y moraju biti u $y = a$ i x, jer inače bi neki drugi vrh bio izvor ili ponor. Također je v'_y ekstreman na $y = x$ i b. Slijedi $Ir_{ab} \leq (v_a - v_x) + (v'_x - v'_b) = Ir_{ax} + Ir_{xb}$. □

8 Računanje otporne udaljenosti pomoću determinanti Laplaceovih podmatrica

U poglavlju 4 smo vidjeli da otpornu udaljenost među proizvoljnim vrhovima povezanog grafa možemo računati koristeći znanje o paralelnim i serijskim spojevima otpornika, a kasnije, u poglavlju 6, vidjeli smo da se možemo poslužiti i elementima pseudoinverza $L^\dagger$ matrice L. U nastavku ćemo pokazati kako računati otpornu udaljenost u grafu pomoću determinanti specijalnih podmatrica Laplaceove matrice.

U poglavlju 5 smo se bavili osnovnim svojstvima Laplaceove matrice. U nastavku ćemo, radi jednostavnosti, pretpostaviti da su otpori na svim bridovima grafa jedinični pa vrijedi definicija 5, odnosno, Laplaceova matrica na glavnoj dijagonali sadrži stupnjeve vrhova, a svi ostali elementi su ili -1 ili 0, ovisno o tome jesu li odgovarajući vrhovi spojeni bridom. Znamo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} = 0$$

te da je $\det L(G) = 0$, odnosno $L(G)$ je singularna. Označimo s $L(i,j)$ podmatricu Laplaceove matrice dobivenu izbacivanjem i-tog i j-tog retka te i-tog i j-tog stupca, pri čemu je $i \neq j$. Prema matričnom teoremu o stablima 1 znamo da vrijedi $\tau(G) = \det L_{ii}$, gdje smo s L_{ii} označili podmatricu od L dobivenu izbacivanjem $i-$tog retka i $i-$tog stupca.

Svojstvene vrijednosti Laplaceove matrice grafa G označit ćemo kao i u formuli (6.8), s λ_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ tako da vrijedi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. S obzirom da je $\lambda_n = 0$ te vrijedi $\lambda_{n-1} \neq 0$ ako i samo ako je graf povezan, u nastavku će se podrazumijevati $\lambda_{n-1} \neq 0$ jer će nas zanimati jedino povezani grafovi.

Slijedi glavna tvrdnja ovog poglavlja u kojoj je predstavljena vrlo jednostavna formula za računanje otporne udaljenosti među vrhovima grafa. Radi jednostavnosti, u nastavku ćemo s $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ označiti skup vrhova grafa G.

Teorem 4. *Neka je G povezan graf s n vrhova, $n \geq 3$ i $1 \leq i \neq j \leq n$. Tada vrijedi*

$$r_{ij} = \frac{\det L(i,j)}{\det L_{ii}}. \tag{8.1}$$

Primijenimo li teorem 1 na gore navedenu formulu, dobivamo

$$r_{ij} = \frac{\det L(i,j)}{\tau(G)}. \tag{8.2}$$

Prije nego predstavimo dokaz ovog teorema, potrebne su odgovarajuće pripreme.

Svakome vrhu i grafa G pridružit ćemo realnu varijablu x_i te definirati pomoćnu funkciju

$$f(x_1, x_2 \dots, x_n) := \sum_{\{k,l\} \in E(G)} (x_k - x_l)^2.$$

Tada za $i \neq j$ imamo

$$r_{ij} = \sup \left\{ \frac{1}{f(x_1, x_2 \dots, x_n)} \,\middle|\, x_i = 1, x_j = 0, 0 \leq x_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n \right\}. \tag{8.3}$$

Formula (8.3) je rezultat dobiven iz teorije električnih mreža [3], a parcijalnim deriviranjem dobivamo jednadžbu koja vrijedi za sve $k \neq i, j$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_{l \in N(k)} (x_k - x_l) = 0, \tag{8.4}$$

gdje je $N(k)$ skup susjeda vrha k. S obzirom da smo vrhove grafa G proizvoljno označili, bez smanjenja općenitosti možemo se ograničiti na slučaj $i = n-1$ i $j = n$. Laplaceovu matricu od G ćemo zapisati na sljedeći način:

$$L(G) = \begin{pmatrix} L(n-1,n) & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Tada (8.4) možemo zapisati kao

$$L(n-1,n)\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T, \tag{8.5}$$

gdje je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-2})$.
Ako su vrhovi v_{n-1} i v_k susjedni, vrijedi da je $b_k = 0$ budući da je $x_{n-1} = 1$ i $x_n = 0$. Inače je $b_k = 0$ za $k = 1, \dots, n-2$. Nadalje, vrijedi

$$\mathbf{x}B(x_{n-1}, x_n)^T = (x_{n-1}, x_n)C\mathbf{x}^T = -\sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1,i}x_i \tag{8.6}$$

i

$$(x_{n-1}, x_n)D(x_{n-1}, x_n)^T = d_{n-1}, \tag{8.7}$$

pri čemu je $a_{n-1,i}$ element matrice susjedstva A. Kombiniranjem formula (8.5)-(8.7), dobivamo

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =&(\mathbf{x}, x_{n-1}, x_n)L(G)(\mathbf{x}, x_{n-1}, x_n)^T \\
=&\mathbf{x}L_{n-2}\mathbf{x}^T + (x_{n-1}, x_n)C\mathbf{x}^T + \mathbf{x}B(x_{n-1}, x_n)^T + (x_{n-1}, x_n)D(x_{n-1}, x_n)^T \qquad (8.8) \\
=&\mathbf{x}\mathbf{b}^T - 2\sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1,i}x_i + d_{n-1}
\end{aligned}
$$

te zbog

$$\mathbf{x}\mathbf{b}^t = \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1,i}x_i = \sum_{k\in N(n-1)} x_k \tag{8.9}$$

dolazimo do relacije

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_{n-1} - \sum_{k\in N(n-1)} x_k, \tag{8.10}$$

koja vrijedi pod zadanim uvjetom $x_{n-1} = 1$ i $x_n = 0$.
Znamo da je matrica $L(G)$ pozitivno semidefinitna pa ako je G povezan graf, tada je $L(n-1, n)$ pozitivno definitna, što znači da njen inverz postoji. Označimo s t_{ij} (i, j)-ti element inverzne matrice $(L(n-1, n))^{-1}$. Tada $\mathbf{x}^T = (L(n-1, n))^{-1}\mathbf{b}^T$ implicira

$$x_k = \sum_{l\in N(n-1)} t_{kl}. \tag{8.11}$$

Sada možemo provesti dokaz teorema.

Dokaz teorema 4. Kao što smo ranije napomenuli, dovoljno je pokazati da tvrdnja teorema vrijedi za $i = n-1$ i $j = n$. Zbog (8.10) i (8.11) imamo:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_{n-1} - \sum_{k\in N(n-1)} \sum_{l\in N(n-1)} t_{kl}. \tag{8.12}$$

Neka je $L(n-1, n)_{kl}$ podmatrica dobivena uklanjanjem k-tog retka i l-tog stupca iz $L(n-1, n)$. Tada je

$$t_{kl} = (-1)^{k+l}\frac{\det L(n-1, n)_{kl}}{\det L(n-1, n)}, \tag{8.13}$$

pa zbog (8.12) slijedi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_{n-1} - \sum_{k\in N(n-1)} \sum_{l\in N(n-1)} (-1)^{k+l}\frac{\det L(n-1, n)_{kl}}{\det L(n-1, n)}. \tag{8.14}$$

Razvijanjem $\det L_{nn}$ po zadnjem stupcu, dobivamo

$$\det L_{nn} = d_{n-1}\det L(n-1, n) - \sum_{k\in N(n-1)} (-1)^{k+n-1}\det L_{nn}(k, n-1), \tag{8.15}$$

gdje je podmatrica $L_{nn}(k, n-1)$ dobivena uklanjanjem $k-$tog retka i $(n-1)-$og stupca iz matrice L_{nn}. Nadalje, razvijanjem $\det L_{nn}(k, n-1)$ po zadnjem retku, dobivamo:

$$\det L_{nn}(k, n-1) = \sum_{l \in N(n-1)} (-1)^{l+n-1} \det L(n-1, n)_{kl}, \tag{8.16}$$

što nam daje

$$d_{n-1} \det L(n-1, n) - \sum_{k \in N(n-1)} \sum_{l \in N(n-1} (-1)^{k+l} \det L(n-1, n)_{kl} = \det L_{nn}. \tag{8.17}$$

Kada uvrstimo gore navedenu relaciju u (8.14), dobijemo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\det L_{nn}}{det L(n-1, n)}, \tag{8.18}$$

a tvrdnja teorema dobije se kada (8.18) uvrstimo nazad u (8.3). $\square$

9 Literatura

Literatura

[1] R. B. Bapat, *The Laplacian Matrix of a Graph*, The Mathematics Student 65 (1996), 214–223.

[2] R. B. Bapat, I. Gutman, W. Xiao, *A Simple Method for Computing Resistance Distance*, Zeitschrift fur Naturforsc 58a (2003), 494–498.

[3] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998, poglavlje 9.

[4] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959, poglavlje 13.

[6] I. Gutman, B. Mohar, *The Quasi-Wiener and the Kirchhoff Indices Coincide*, The Journal for Chemical Information and Computer scientists 36 (1996), 982–985.

[7] D. Kablar, A. Nakić, *Prebiranje razapinjućih stabala grafa*, Acta Mathematica Spalatensia, 5 (2022), 41–57.

[8] G. Kirchhoff, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, Annual Review of Physical Chemistry 72 (1847), 497–508.
Translated by J. B. O'Toole in I.R.E. Trans. Circuit Theory, CT-5 (1958) 4.

[9] D. J. Klein, M. Randić, *Resistance distance*, Journal of Mathematical Chemistry 12 (1993), 81-95.

[10] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.