Gornja granica Graovac-Ghorbani indeksa

Grbeša, Andrea

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Grbeša

Graovac-Ghorbani indeks

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Grbeša

Graovac-Ghorbani indeks

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović Ergotić

Osijek, 2023.

Graovac-Ghorbani indeks

Sažetak

Tema ovog rada je upoznavanje s Graovac-Ghorbani (ABC_{GG}) indeksom te određivanje njegove donje i gornje granice u klasi jednostavnih povezanih grafova s n vrhova. U radu je predstavljena karakterizacija jednostavnih povezanih grafova koji imaju najmanji i najveći ABC_{GG} indeks.

Ključne riječi

povezan graf, udaljenost, Graovac-Ghorbani index, koktel party graf

Abstract

The topic of this project is the introduction of Graovac-Ghorbani (ABC_{GG}) index and establishment of its lower and upper bound in the class of simple connected graphs with n vertices. A characterization of simple connected graphs with maximum ABC_{GG} index is presented.

Keywords

connected graph, distance, Graovac-Ghorbani index, cocktail party graph

Sadržaj

1 Uvod

Godine 1998. uveden je $ABC(G)$ indeks grafa G kao grafovska invarijanta koja posjeduje značajnu moć predviđanja i predstavlja jedan od najistraženijih nasljednika Randićevog indeksa. U posljednja dva desetljeća definirane su i proučavane različite topološke invarijante ABC indeksa. U ovom radu se baziramo na Graovac-Ghorbani indeksu koji je prvu put predstavljen 2010. godine u radu [7]. Graovac-Ghorbani indeks je topološki deskriptor temeljen na udaljenosti koji daje bolje predviđanje u slučaju entropije i acentričnog faktora od ABC indeksa.

U posljednjem desetljeću, grafovi s najmanjim i najvećim Graovac-Ghorbani indeksom bili su proučavani u različitim publikacijama. Rostami i Sohrabi–Haghighat su u [9] našli grafove koji minimiziraju ABC_{GG} indeks. Rostami i ostali su u [11] odredili donje i gornje granice ABC_{GG} indeksa stabala sa zadanim brojem listova. Das i ostali su u radu [3] našli gornju granicu ABC_{GG} indeksa unicikličkih grafova, ostavljajući problem određivanja donje granice i dalje otvorenim. Dimitrov i ostali su u [4] dokazali da se među svi bipartitnim grafovima s n vrhova, najveći Graovac-Ghorbani indeks jedinstveno postiže na potpunom bipartitnom grafu.

Na temelju računalne pretrage, Furtula je u [6] okarakterizirao povezane grafove s najvećim ABC_{GG} indeksom, pri čemu je istaknuo da je potrebna stroga matematička potvrda te karakterizacije.

U ovom radu ćemo karakterizirati jednostavne povezane grafove s n vrhova koji minimiziraju i maksimiziraju ABC_{GG} indeks. Štoviše, predstavit ćemo dokaz Furtuline hipoteze o izgledu ekstremalnih grafova s najvećim Graovac-Ghorbani indeksom.

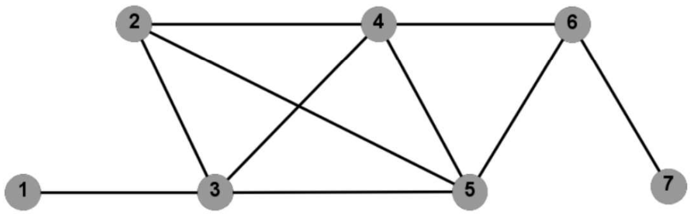
2 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Kako bismo lakše razumjeli glavne tvrdnje i njihove dokaze koje ćemo predstaviti u ovom radu, potrebno je uvesti neke od osnovnih pojmova iz teorije grafova.

Definicija 2.1. ***Graf*** *G je uređeni par $G = (V(G), E(G))$ koji se sastoji od nepraznog konačnog skupa $V = V(G)$, čije elemente zovemo* ***vrhovima*** *od G te od skupa $E = E(G)$ čije elemente zovemo* ***bridovi*** *od G. Skup E je disjunktan sa skupom V, a svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koji se zovu krajevi od e.*

Graf možemo nacrtati u ravnini tako da su vrhovi grafa točke ili kružići, a bridovi spojnice između vrhova koje mogu biti dužine ili krivulje.

Primjer 2.1. Međusobna rukovanja u skupu od 7 osoba možemo prikazati grafom u kojemu vrhovi predstavljaju osobe, a bridovi njihova rukovanja. Primjerice, na slici 1 osoba 7 rukovala se s osobom 6, ali nije s osobama $1, 2, 3, 4$ i 5.



Slika 1: Graf rukovanja 7 osoba.

Za brid $e = uv$ kažemo da spaja vrhove u i v i zovemo ih **susjednim** vrhovima ili krajevima brida e. Također, kažemo da je vrh u (v) **incidentan** s bridom e.

Jednostavan graf je graf koji nema petlju (vrh koji je bridom spojen sa samim sobom) i kojemu su dva vrha povezana najviše jednim bridom.

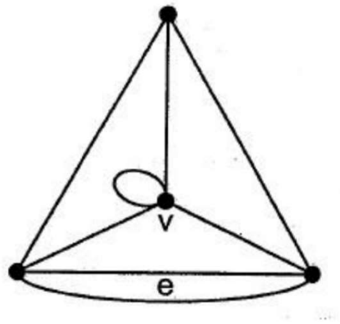
Primjer 2.2. Na slici 2 nalazi se graf koji nije jednostavan jer sadži petlju pri vrhu v te ima dvostruki brid.

Definicija 2.2. *U jednostavnom grafu G* ***stupanj*** *$d(v)$ vrha $v \in V(G)$ jednak je broju bridova incidentnih s v.*

U primjeru 2.1 stupanj vrha 3 grafa prikazanog na slici 1 jednak je 4.

Lema 2.1. ***(o rukovanju)*** *Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu je paran broj.*

Dokaz. Pokazat ćemo da vrijedi $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$.
Stupanj svakog vrha definiran je kao broj bridova incidentnih tom vrhu. Kako svaki brid ima dva kraja, broj stupnjeva u grafu mora biti jednak dvostrukom broju bridova. $\square$



Slika 2: Graf s petljom

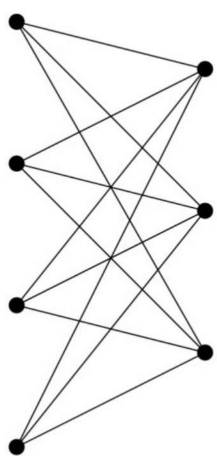
Naziv ove leme može se interpretirati ovako:

Broj ruku koji je uključen u rukovanje bilo kojeg broja ljudi nužno je paran.

Iz toga proizlazi sljedeći korolar:

Korolar 2.2. *Broj vrhova s neparnim stupnjem je paran.*

Za graf G kažemo da je **regularan** ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Jednostavan graf u kojemu su svaka dva vrha spojena bridom naziva se **potpun** graf. Potpun graf s n vrhova označava se s K_n. Ako skup vrhova grafa G možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa A i B tako da svaki brid od G ima jedan kraj u skupa A, a drugi u skupu B, onda kažemo da je G **bipartitan** graf. **Potpun bipartitan** graf je jednostavan bipartitan graf s biparticijom (A, B) u kojem je svaki vrh iz A spojen sa svakim vrhom iz B. Ako je $|A| = m$ i $|B| = n$, takav graf označavamo s $K_{m,n}$. Analogno se definira $k-$partitan i potpun $k-$partitan graf.



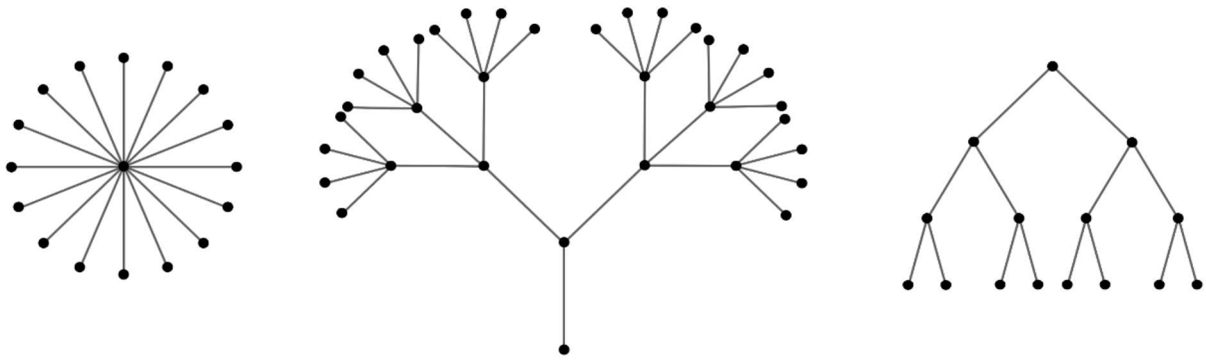
Slika 3: Bipartitni graf $K_{4,3}$

Definicija 2.3. ***Šetnja*** *u grafu G je niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_h$, čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i $(1 \leq i \leq h)$.*

Za šetnju W iz prethodne definicije kažemo da je $(v_0, v_h)-$šetnja, pri čemu je v_0 početak, a v_h kraj od W. Put je šetnja u kojoj su svi vrhovi (posljedično i bridovi) međusobno različiti. Put s n vrhova označavamo s P_n. Ciklus C_n je šetnja u kojemu su svi vrhovi (posljedično i bridovi) međusobno različiti, a početak i kraj joj se podudaraju.

Udaljenost $d_G(u, v)$ između vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg $(u, v)-$puta u G. Ako takav put ne postoji, stavljamo $d_G(u, v) = \infty$. Za graf G kažemo da je **povezan** ako između svaka dva njegova vrha postoji put.

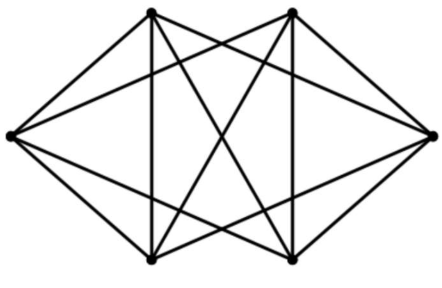
Šuma je graf bez ciklusa, pri čemu povezanu šumu zovemo **stablo**.



Slika 4: Šuma koja se sastoji od tri stabla

Definicija 2.4. ***Koktel party graf*** *je graf s n vrhova, n paran broj, koji je potpun $n/2-$partitan graf $K_{2,2,\ldots,2}$.*

Napomena 2.1. Koktel party graf dobio je naziv po tome što se može vizualizirati kao skup rukovanja od $n/2$ parova koji idu na zabavu, pri čemu se svaka osoba rukuje sa svakom osobom osim sa svojim partnerom.



Slika 5: Primjer koktel party grafa $K_{2,2,2}$.

3 Graovac-Ghorbani indeks

Neka je $G = (V, E)$ jednostavan, neusmjeren povezan graf s n vrhova. Graovac-Ghorbani indeks $ABC_{GG}(G)$ grafa G definiran je na sljedeći način:

$$ABC_{GG}(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{n_u + n_v - 2}{n_u n_v}},$$

gdje je n_u broj vrhova koji su bliži vrhu u nego vrhu v, a n_v je broj bridova koji su bliži v nego u.

Lako je vidjeti da se među svim povezanim grafovima na n vrhova, minimalna vrijednost ABC_{GG} postiže za potpune grafove.

Rostami i Haghighat su predstavili donju i gornju granicu ABC_{GG} indeksa za proizvoljne grafove s n vrhova i m bridova, no gornja granica nije optimalna.

Teorem 3.1. *[10] Let G be a simple graph on n vertices and m edges, then*

$$0 \leq ABC_{GG}(G) < m.$$

Donja granica se postiže za potpun graf K_n, dok se gornja granica ne može dostići.

Dokaz. Iz definicije Graovac-Ghorbani indeksa oučavamo $n_u \geq 1$ i $n_v \geq 1$ pa $ABC_{GG} \geq 0$ te je $ABC_{GG} = 0$ ako i samo ako $n_u = n_v = 1$ za svaki brid grafa G. No, to je slučaj ako i samo ako je G potpun graf, tj. $G = K_n$. Nadalje, za svaki brid $e = uv$ proizvoljnog grafa G vrijedi $n_u + n_v - 2 < n_u n_v$ pa je zato

$$\frac{n_u + n_v - 2}{n_u n_v} < 1$$

te zaključujemo $ABC_{GG}(G) < m$.

□

Furtula je u svome radu iz 2016. godine [6] računalno pretražio sve grafove s njviše 10 vrhova te među njima našao one koji maksimiziraju ABC_{GG} indeks. Za neparan $n \leq 10$ pronašao je jedinstven graf koji maksimizira ABC_{GG}, dok je za paran $n \geq 10$ našao dva neizomorfna ekstremalna grafa. Graf s neparnim brojem vrhova je biregularan, odnosno vrhovi mu imaju točno dvije različite vrijednosti stupnjeva. Jedan vrh je stupnja $n - 1$, dok su preostali vrhovi stupnja $n - 2$, vidi sliku 6. Graovac-Ghorbani indeks takvog grafa iznosi $\frac{(n-1)^2}{4}\sqrt{2} = B_1$. Za paran n jedan je graf koktel party graf, dok je drugi graf također biregularan. Sadrži točno dva vrha stupnja $n-1$, dok su svi ostali vrhovi stupnja $n-2$, vidi sliku 6. U oba slučaja ABC_{GG} indeks jednak je $\frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2} = B_2$. Iako je Furtulino istraživanje pokazalo pravilnu i jednostavnu strukturu grafova koji maksimiziraju Graovac-Ghorbani indeks, neophodno je njegove zaključke formalno dokazati ili opovrgnuti za prozivoljan broj n.

3.1 Grafovi koji maksimiziraju Graovac-Ghorbani indeks

Neka je G povezan graf s n vrhova i m bridova. Uočimo da je Graovac-Ghorbani indeks grafova koji ne sadrže trokute manji od B_1 ili B_2. Ako je G graf bez trokuta s m bridova i n vrhova, prema Mantelovom teoremu [8] znamo da je $m \leq \frac{n^2}{4}$. S druge strane, budući da je $\sqrt{\frac{n_u+n_v-2}{n_u n_v}} < 1$ za proizvoljni brid uv, to imamo $ABC_{GG}(G) < m$. Stoga se za $n \geq 7$ lako pokaže da je

$$ABC_{GG}(G) < m \leq \frac{n^2}{4} \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2} < \frac{(n-1)^2}{4}\sqrt{2}.$$

Slučaj kada je $n < 7$ razmatran je u [6].

U nastavku ćemo pretpostaviti da G sadrži barem jedan trokut. Za brid uv grafa G definiramo $n_{uv} = |\{z \,|\, d(z,v) = d(z,u)\}|$. Tada imamo $0 \leq n_{uv} \leq n-2$. Štoviše, za neki brid uv grafa G vrijedi jednakost $n_u + n_v = n - n_{uv}$.

Neka je $t(G)$ broj trokuta u grafu G. Vrijede sljedeći rezultati:

Lema 3.2. *[1] Za jednostavan povezan graf G s n vrhova, m bridova te $t(G)$ trokuta vrijedi*

$$\frac{m(4m-n^2)}{n} \leq 3t(G) \leq \sum_{uv \in E(G)} n_{uv}.$$

Lijevu nejednakost izveo je Bollobás [1]. Budući da n_{uv} broji cikluse neparne duljine koji sadrže uv, lijeva nejednakost je očita. Za dokaz našeg glavnog rezultata trebat će nam lema koju je Cambie dobio u [2] .

Lema 3.3. *[2] Za proizvoljan brid $e = uv \in E(G)$, imamo*

$$n_u + n_v + d(u) + d(v) \leq 2n.$$

Kao posljedicu Leme 3.2 (isti rezultat također slijedi iz Leme 3.3) dobivamo sljedeću lemu.

Lema 3.4. *Ako je G povezani graf s m bridova i n vrhova, tada*

$$\sum_{uv \in E(G)} (n_u + n_v) \leq 2mn - \frac{4m^2}{n}.$$

□

Koristeći Lemu 3.2 nije teško za pokazati da, ako je n paran broj i ako $n_u > 1, n_v > 1$ za svaki brid $uv \in E(G)$, tada se najveća vrijednost ABC_{GG} indeksa postiže za koktel party grafove.

Propozicija 3.5. *Neka je G povezan graf s m bridova i n vrhova. Ako je n paran broj i ako $n_u \geq 2$, $n_v \geq 2$ za svaki brid $uv \in E(G)$, tada*

$$ABC_{GG}(G) \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}$$

Maksimalna vrijednost se postiže za koktel party grafove.

Dokaz. Najprije pokažimo da $n_u n_v \geq 2(n - n_{uv} - 2)$ za svaki brid $uv \in E(G)$. Neka je $s = n - n_{uv} = n_u + n_v$. Nejednakost $n_u n_v \geq 2(n - n_{uv} - 2)$ je ekvivalentna s $n_u(s - n_u) \geq 2(s-2)$ jer $s \geq n_u + 2$ i $n_u \geq 2$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} ABC_{GG}(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{n_u + n_v - 2}{n_u n_v}} \\ &\leq \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{n - n_{uv} - 2}{2(n - n_{uv} - 2)}} = \frac{m\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Iz $n_u \geq 2$ i $n_v \geq 2$ dobivamo $n_{uv} = n - n_u - n_v \leq n - 4$. Sada iz Leme 3.2 imamo

$$\frac{m(4m - n^2)}{n} \leq \sum_{(u,v) \in E(G)} n_{uv} \leq m(n-4).$$

Stoga je $m \leq \frac{n(n-2)}{2}$ i $ABC_{GG}(G) \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}$. Jednakost vrijedi ako je $n_u = n_v = 2$ za svaki brid $uv \in E(G)$ i $m = \frac{n(n-2)}{2}$. Ako graf ne sadrži vrh u stupnja $n-1$, onda $n_v = 1$ za svaki vrh v koji je spojen s u. Počevši od $2m = n(n-2) = \sum_{i=1}^{n} di \geq n(n-2)$, zaključujemo da su svi vrhovi od G stupnja $n-2$. □

Jasno je da gornji pristup ne funkcionira ako G sadrži brid uv za koji je $n_u = 1$ ili $n_v = 1$. Kako bismo okarakterizirali grafove na n vrhova s maksimalnim ABC_{GG} primjenjujemo metodu Lagrangeovih multiplikatora.

Teorem 3.6. *Neka je G povezan graf s n vrhova. Ako je n paran broj, tada vrijedi*

$$ABC_{GG}(G) \leq \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}.$$

Jednakost vrijedi za $(n-2)$-regularni koktel party graf i za graf koji sadrži dva vrha stupnja $n-1$ gdje su svi ostali vrhovi stupnja $n-2$.
Ako je n neparan broj, tada vrijedi

$$ABC_{GG}(G) \leq \frac{(n-1)^2}{4}\sqrt{2}.$$

Jednakost vrijedi za graf s jednim vrhom stupnja $n-1$ i $n-1$ vrhova stupnja $n-2$.

Dokaz. Neka je G povezan graf s n vrhova i m bridova.
Neka je $F\colon (x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) \to \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable definirana s

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}{x_{2i-1}x_{2i}}}.$$

Jasno je da $ABC_{GG}(G) = F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2m})$ gdje je $x'_{2i-1} = n_u$ i $x'_{2i} = n_v$ za svaki brid $e_i = uv \in E(G)$, $1 \leq i \leq m$. Kako bi maksimizirali $ABC_{GG}(G)$ indeks, maksimizirajmo funkciju F primjenom metode Lagrangeovih multiplikatora uz uvjet $2m \leq g(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) := x_1 + x_2 + \cdots + x_{2m} \leq 2m\left(n - \frac{2m}{n}\right)$. Granice za funkciju $g(x_1, x_2, \ldots, x_{2m})$ proizlaze iz uvjeta $2 \leq n_u + n_v$ i Leme 3.4.
Imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_{2i-1}} = \frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i}(2 - x_{2i})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}}$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial x_{2i}} = \frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i-1}(2 - x_{2i-1})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}}.$$

Dakle $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ ako i samo ako $x_i = 2$. Prema tome točka $(2, 2, \ldots, 2)$ je jedinstvena kritična točka funkcije F. Ako je $n_u = n_v = 2$ za svaki brid uv grafa G, tada

$$F(2, 2, \ldots, 2) = ABC_{GG}(G) = \frac{m\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

Iz $\nabla g = (1, 1, \ldots, 1)$ i $\nabla F = \lambda \cdot \nabla g$, za svaki $i = 1, \ldots, m$ dobivamo

$$\frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i}(2 - x_{2i})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}} = \lambda, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2(x_{2i-1}x_{2i})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x_{2i-1}(2 - x_{2i-1})}{\sqrt{x_{2i-1} + x_{2i} - 2}} = \lambda. \tag{3}$$

Dijeljenjem (2) s (3) dobivamo $x_{2i-1} = x_{2i} = c$ ili $x_{2i-1} + x_{2i} = 2$, tj. ukoliko promatramo F kao formulu za računanje ABC_{GG} indeksa, imamo $x_{2i-1} = x_{2i} = 1$. Slučaj $x_{2i-1} = x_{2i} = 1$ ne doprinosi sumi u formuli Graovac-Ghorbani indeksa pa ga izostavljamo. Iz uvjeta $g = 2m(n - \frac{2m}{n})$ dobivamo $2mc = 2m(n - \frac{2m}{n})$, tj. $x_i = n - \frac{2m}{n}$. Nadalje, ako pretpostavimo da je $n_u = n_v = n - \frac{2m}{n}$ za svaki brid $uv \in E(G)$, dobivamo

$$F\left(n - \frac{2m}{n}, n - \frac{2m}{n}, \ldots, n - \frac{2m}{n}\right) = ABC_{GG}(G) = \frac{m}{n^2 - 2m}\sqrt{n(2n^2) - 2n - 4m}. \tag{4}$$

Uspoređujući (1) i (4) lako se pokaže da je nejednakost

$$\frac{m}{n^2 - 2m}\sqrt{n(2n^2) - 2n - 4m} \leq \frac{m\sqrt{2}}{2}$$

ekvivalentna s

$$n^4 + 4n^2 + 4m^2 - 4n^3 - 4mn^2 + 8mn \geq 0 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 2m)^2 \geq 0.$$

Jednakost vrijedi ako je $m = \frac{n(n-2)}{2}$.
Dakle, za svaki povezani graf G s n vrhova i m bridova vrijedi

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) \leq \frac{m\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ABC_{GG}(G) \leq \frac{m\sqrt{2}}{2}. \tag{5}$$

U drugom dijelu dokaza razmatramo uvjete pod kojima vrijedi jednakost u 5.
Neka je n neparan broj. Budući da se maksimum od F postiže za $n_u = n_v = 2$, dobivamo $n_{uv} = n-4$. Sada iz Leme 3.2 dobivamo $m \leq \frac{n(n-2)}{2}$, ali je jasno da jednakost nije postignuta. Budući da svaki brid ekstremnog grafa doprinosi s $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sumi u formuli za ABC_{GG}, možemo pretpostaviti da postoje bridovi uv za koje $\sqrt{\frac{n_u+n_v-2}{n_u n_v}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $n_u \neq n_v$. Lako se pokaže da za svaki takav brid vrijedi $n_u = 2$ ili $n_v = 2$. Kako bismo maksimizirali broj m iz Leme 3.2, maksimiziramo vrijedost sume $\sum_{(u,v)\in E(G)} n_{uv}$. Nadalje, pretpostavljamo da je $n_u = 1$, tj. pretpostavljamo da graf G sadrži bridove uv za koje je $(n_u, n_v) = (1, 2)$. Neka G sadrži k vrhova stupnja $n-1$. Tada imamo $2m \leq k(n-1) + (n-k)(n-2)$, odakle dobivamo $m \leq \frac{n^2-2n+k}{2}$. Postoji $\binom{k}{2}$ bridova između tih k vrhova. Ako za brid uv vrijedi $d_u = d_v = n-1$, tada $n_u = n_v = 1$. U ovom slučaju imamo $\sqrt{\frac{n_u+n_v-2}{n_u n_v}} = 0$. Dakle

$$ABC_{GG}(G) \leq \left(m - \frac{k(k-1)}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left(\frac{n^2-2n+2k-k^2}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left(\frac{n^2-2n+1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{6}$$

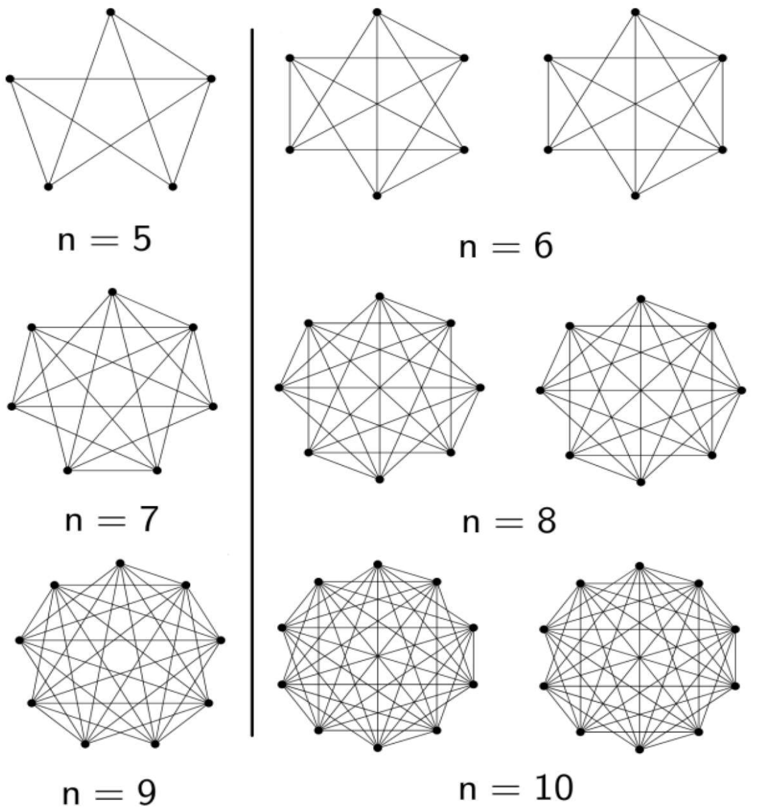
Jednakost u (6) vrijedi za $k = 1$, tj. ako G sadrži točno jedan vrh stupnja $n-1$ i $n-1$ vrh stupnja $n-2$. Graovac-Ghorbani indeks takvog grafa jednak je

$$ABC_{GG}(G) = \frac{(n-1)^2}{4}\sqrt{2}.$$

Ako je n paran broj i ako $n_u = n_v = 2$ za svaki brid uv, tada G ne sadrži vrh stupnja $n-1$ i vrijedi $m \leq \frac{n(n-2)}{2}$. Dakle, $m = \frac{n(n-2)}{2}$ ako i samo ako su svi vrhovi grafa G stupnja $n-2$. U tom slučaju dobivamo koktel party graf. Ako postoje bridovi uv za koje je $(n_u, n_v) = (1, 2)$, tada možemo pretpostaviti da G sadrži k vrhova stupnja $n-1$. Koristeći granice u (6), zaključujemo da se najveća vrijednost od m postiže za $k = 0$ (već smo razmotrili ovaj slučaj) i za $k = 2$. U tom slučaju imamo točno dva vrha stupnja $n-1$ i sve ostale vrhove stupnja $n-2$. U oba slučaja ($k = 0$ ili $k = 2$) zaključujemo

$$ABC_{GG}(G) = \frac{n(n-2)}{4}\sqrt{2}.$$

□



Slika 6: Grafovi s $5 \leq n \leq 10$ vrhova koji maksimiziraju ABC_{GG} index.

Literatura

[1] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Acad. Press, London, 1978, pp. 297—297

[2] S. Cambie, *Five results on maximizing topological indices of graphs*, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. 23 (2021) #6896.

[3] K. C. Das, K. Xu, A. Graovac, *Maximal unicyclic graphs with respect to new atom–bond connectivity index*, Acta Chim. Slov. 60 (2013) 34—42.

[4] D. Dimitrov, B. Ikica, R. Škrekovski, *Remarks on the Graovac-Ghorbani index of bipartite graphs*, Appl. Math. Comp. 293 (2017) 370—376.

[5] S. Filipovski, *Connected Graphs with Maximal Graovac-Ghorbani Index*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 89 (2023), 517–525.

[6] B. Furtula, Atom-bond connectivity index versus Graovac-Ghorbani analog, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 75 (2016) 233–242.

[7] A. Graovac, M. Ghorbani, A new version of atom-bond connectivity index, Acta Chim. Slov 57 (2010) 609—612.

[8] W. Mantel, *Solution to Problem 28*, by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh, and W. A. Wythoff, Wiskundige Opgaven 10 (1907) 60—61.

[9] M. Osvin-Pavčević, *Uvod u teroiju grafova*, Element, 2006.

[10] M. Rostami, M. Sohrabi–Haghighat, *Further results on new version of atom–bond connectivity index*, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 71 (2014) 21–32.

[11] M. Rostami, M. Sohrabi–Haghighat, M. Ghorbani, *On second atom–bond connectivity index*, Iranian J. Math. Chem. 4 (2013) 265—270.

[12] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.