Ocjene pogrešaka Newton-Cotesovih i Gauss-Čebiševljevih kvadraturnih formula pomoću Grüssove nejednakosti

Milas, Toni

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Toni Milas

Ocjene pogrešaka Newton-Cotesovih i Gauss-Čebiševljevih kvadraturnih formula pomoću Grüssove nejednakosti

Završni rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Toni Milas

Ocjene pogrešaka Newton-Cotesovih i Gauss-Čebiševljevih kvadraturnih formula pomoću Grüssove nejednakosti

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2015.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu ukratko ćemo se upoznati s Newton-Cotesovim formulama i Gauss-Čebiševljevim kvadraturnim formulama prve vrste, koje su od iznimne važnosti u području numeričke integracije. Izvest ćemo općenitu zatvorenu Newton-Cotesovu formulu n-tog reda te dati standardnu ocjenu pogreške formule. Detaljnije ćemo prikazati teoriju Gaussovih kvadraturnih formula i standardnu ocjenu pogreške te kao specijalan slučaj prikazati Gauss-Čebiševljevu formulu prve vrste. U drugom dijelu rada iskazat i dokazat ćemo Grüssovu nejednakost te druge nejednakosti koje će nam biti od velike važnosti u prikazu dodatnih ocjena formula obrađenih u radu. U zadnjem dijelu rada naglasak se stavlja na neke nedavno dokazane ocjene pogreške prethodno spomenutih pravila. Ocjene iz zadnjeg poglavlja utemeljene su prvenstveno na Grüssovoj nejednakosti.

Ključne riječi: numerička integracija, Newton-Cotesove formule, Gaussove kvadraturne formule, Grüssova nejednakost, ocjene pogreške aproksimacije

Abstract

In this paper we will be shortly introduced to Newton-Cotes formulae and Gauss-Chebyshev quadrature formulae of the first kind, which are extremely important in the field of numerical integration. We will derive the general closed Newton-Cotes formula of order n and provide the standard error estimate of the formula. The theory of Gaussian quadrature formulae and the error estimate will be given in great detail and the Gauss-Chebyshev formula of the first kind will be given as a special case. In the second part of the paper, the Grüss inequality will be formulated and proven, along with other inequalities which are important for proving some estimates of the previously mentioned formulae. The last part of the paper accentuates some newly proven error estimates of the formulae. The error estimates seen in the last part of the paper are primarily based on the Grüss inequality.

Keywords: numerical integration, Newton-Cotes formulae, Gaussian quadrature formulae, Grüss inequality, error estimates

1 Uvod i motivacija

Znanje integralnog računa jedan je od matematičarima i fizičarima prijeko potrebnih alata. Integrali se ne susreću samo u konkretnim problemima i primjerima, već su i pozadina bez koje bi bilo nemoguće proučavati brojne grane matematike te osnova teorijskog aspekta fizike kao znanosti. Primjerice, promotrimo funkciju normalne razdiobe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, koja je od iznimne važnosti u području vjerojatnosti i statistike. Želimo izračunati površinu ispod grafa funkcije na segmentu $[0, t]$, $t > 0$, tj. vrijednost integrala

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

Lako se vidi da je funkcija f neprekidna na cijeloj svojoj domeni, a kako je svaka neprekidna funkcija integrabilna, očekujemo da bismo mogli egzaktno izračunati ovaj integral. Međutim, problem leži u tome što primitivnu funkciju funkcije f nije moguće odrediti elementarnim metodama. S druge strane, jedna od fundamentalnih fizikalnih veličina - rad sile, definira se kao integral tangencijalne skalarne komponente sile duž putanje njezinog hvatišta, tj.

$$W = \int_A^B F \cos\alpha \, \mathrm{d}s,$$

gdje je F iznos sile, α je kut između smjera sile $\vec{F}$ i smjera gibanja (tj. brzine $\vec{v}$) hvatišta sile (pa je $F \cos\alpha$ tangencijalna skalarna komponenta sile), dok je s put hvatišta sile od točke A do točke B. Osim rada kao jednog od osnovnih primjera, brojne druge veličine u fizici također su definirane pomoću integrala, npr. moment inercije ili tromosti, centar mase te električni dipolni moment. Neovisno o tome koja vrsta integrala su prethodno spomenuti izrazi, svedemo li se pripadnim metodama na računanje jednostrukih integrala, želimo iskoristiti dobro poznatu Newton-Leibnizovu formulu iz Osnovnog teorema diferencijalnog i integralnog računa:

Teorem 1.1. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilo koja njena primitivna funkcija. Tada je*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Međutim, iako je prethodna formula često korišten alat, pokazalo se da postoji mnogo slučajeva kada ju ne možemo koristiti. Takve situacije dovele su do potrebe za numeričkim metodama rješavanja integrala.

2 Numerička integracija

Pojam numeričke integracije odnosi se na približno određivanje vrijednosti integrala. Kako smo se prisjetili u uvodnom dijelu, ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, a F njena primitivna funkcija, Riemannov integral se na segmentu $[a, b]$ može izračunati pomoću Newton-Leibnizove formule:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Problem je taj što se u praksi najčešće pojavljuju situacije u kojima ju nije moguće primijeniti, kao npr.

(i) kada funkciju F nije moguće odrediti elementarnim metodama,

(ii) kada je funkcija f poznata samo u konačno mnogo točaka,

te tada za približno izračunavanje integrala koristimo *kvadraturne formule*.

2.1 Gaussove kvadraturne formule

U ovom radu fokusirat ćemo se na poseban tip kvadraturnih formula - *Gaussove kvadraturne formule*[1]. Kvadraturna formula je oblika

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R(f),$$

gdje je $R(f)$ ostatak u formuli, $w_i \geq 0$ su težinski koeficijenti, $x_i \in [a, b]$ čvorovi koje biramo iz segmenta integracije, a *w težinska funkcija*, dakle nenegativna funkcija na proizvoljnom intervalu $[a, b]$ (slučajevi $a = -\infty$ i $b = \infty$ su također dozvoljeni) te je

$$\int_a^b w(x)|x|^n\,\mathrm{d}x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Gaussove kvadraturne formule koriste se za računanje integrala oblika

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

i bazirane su na ideji odabira čvorova iz segmenta integracije koji će maksimizirati stupanj egzaktnosti formule.

[1]Carl Friedrich Gauss (1777-1855), njemački matematičar.

Definicija 2.1. Kažemo da je kvadraturna formula *stupnja egzaktnosti* m ako je ostatak $R(p) = 0$ za sve polinome stupnja $\leq m$.

Dakle, nakon odabira čvorova $x_1 < x_2 < \cdots < x_n,\ x_i \in [a, b],\ i = 1, 2, \ldots, n$, integral se aproksimira formulom

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx Q(f) = \int_a^b w(x) \bigg(\sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) \bigg) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

gdje su

$$w_i = \int_a^b w(x) L_i(x)\,\mathrm{d}x, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

L_i nazivamo *bazni Lagrangeov polinom*, o čemu će biti više govora u poglavlju Newton-Cotesove formule.

Primjedba 2.1. Neovisno o odabiru čvorova $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, formula (1) stupnja je egzaktnosti $n - 1$. □

Kvadraturna formula (1) ima $2n$ parametara: n čvorova x_i te n težina $w_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Stoga se nadamo da formulu možemo učiniti takvom da bude stupnja egzaktnosti $2n - 1$ (budući da polinom stupnja $2n - 1$ ima $2n$ koeficijenata). Čvorovi i težine rješenja su sustava $2n$ jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i^k = \int_a^b w(x) x^k\,\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n - 1. \quad (2)$$

No, sustav (2) nije stabilan; riječ je o nelinearnom i loše uvjetovanom sustavu. Ideja kako riješiti ovaj problem jest generirati skup ortogonalnih polinoma, čije će nultočke biti upravo čvorovi koje tražimo. O tome da takav pristup daje maksimalan stupanj egzaktnosti govori sljedeći teorem, koji se može (s dokazom) naći u [15]:

Teorem 2.2. *Neka je* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *skup ortogonalnih polinoma na* $[a, b]$ *s obzirom na skalarni produkt*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x,$$

te neka su $x_i,\ i = 1, \ldots, n$, *nultočke polinoma* p_n. *Tada je kvadraturna formula (1) stupnja egzaktnosti* $2n - 1$.

Dokaz. Neka je f polinom stupnja $2n-1$. Tada po teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom možemo pisati

$$f(x) = q(x)p_n(x) + r(x), \quad q, r \in P_{n-1},$$

tj. q i r polinomi su stupnja najviše $n-1$. Kako je $r \in P_{n-1}$, to je formula (1) egzaktna za r pa vrijedi

$$I(f) = I(qp_n + r) = \int_a^b w(x)q(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b w(x)r(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b w(x)r(x)\,\mathrm{d}x = Q(r),$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je polinom p_n ortogonalan na sve polinome stupnja $\leq n-1$. Kako su x_i nultočke polinoma p_n, to je

$$I(f) = Q(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i r(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i (p_n(x_i)q(x_i) + r(x_i)) = Q(f).$$

Preostaje dokazati da formula (1) nije egzaktna za sve polinome stupnja $2n$. Označimo prvo $\tilde{p}_n(x) = p_n(x)/\|p_n(x)\|$ te neka je f polinom stupnja $2n$. Sada je

$$f(x) = q(x)\tilde{p}_n(x) + r(x), \quad q \in P_n, \quad r \in P_{n-1}.$$

S jedne strane, vrijedi

$$I(f) = I(q\tilde{p}_n + r) = \int_a^b w(x)q(x)\tilde{p}_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b w(x)r(x)\,\mathrm{d}x = \langle q, \tilde{p}_n\rangle + Q(r). \quad (3)$$

S druge strane, kako su x_i nultočke od $\tilde{p}_n$, to vrijedi

$$Q(f) = Q(q\tilde{p}_n + r) = Q(r). \quad (4)$$

Sada je iz (3), (4) i činjenice da je $\langle q, \tilde{p}_n\rangle \neq 0$ očito $I(f) \neq Q(f)$ te je dokaz gotov. Q.E.D.

Prije nego iskažemo teorem koji nam dokazuje da veći broj čvorova daje bolju aproksimaciju, što je intuitivno i jasno, spomenimo Weierstrassov aproksimacijski teorem[2]. On glasi

Teorem 2.3 (**Weierstrassov aproksimacijski teorem**). *Za svaku neprekidnu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji polinom P takav da je*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

[2]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), njemački matematičar.

Ono što Weierstrassov aproksimacijski teorem zapravo govori je da se svaka neprekidna funkcija na segmentu može uniformno aproksimirati polinomom.

Teorem 2.4. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ skup ortogonalnih polinoma na $[a,b]$, x_i nultočke polinoma p_n te w_i kao što smo ih definirali u formuli (1). Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = \int_a^b w(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Prema Weierstrassovom aproksimacijskom teoremu $\forall \varepsilon > 0$ postoji polinom P takav da je

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2S}, \quad \forall x \in [a,b],$$

pri čemu ovdje uzimamo da je

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i = \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kao i do sada, koristimo oznake

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\,\mathrm{d}x, \quad Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

Sada je

$$|I(f) - I(P)| \le \int_a^b w(x)|f(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2S}\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2S}\cdot S = \frac{\varepsilon}{2}$$

te

$$|Q(f) - Q(P)| \le \sum_{i=1}^{n} w_i |f(x_i) - P(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dodatno, iskoristimo li uzastopno nejednakost trokuta, dobivamo

$$|Q(f) - I(f)| \le |Q(f) - Q(P)| + |Q(P) - I(P)| + |I(P) - I(f)|.$$

Uzmemo li sada polinom P takav da je $\deg P \le 2n-1$, to po Teoremu 2.2 vrijedi $Q(P) = I(P)$ pa slijedi

$$|Q(f) - I(f)| < \varepsilon,$$

iz čega slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Prethodni teorem i dokaz mogu se naći u [3, str. 251-252]. Dakle, što je veći broj čvorova u formuli, to je veća i egzaktnost. No, u slučaju odabira n čvorova vrijedi sljedeća ocjena pogreške formule (1), koja se može naći u [15].

Teorem 2.5 (Ocjena pogreške). *Neka je $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ težinska funkcija, $p_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ normiran polinom stupnja n, ortogonalan na sve polinome stupnja manjeg od n te $f \in C^{2n}([a, b])$. Neka je $Q(f)$ kvadraturna formula (1) te $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ nultočke polinoma p_n. Tada postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x = Q(f) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)p_n^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. U dokazu koristimo Hermiteovu interpolaciju[3] (vidi npr. [11, str. 70-73]). Postoji jedinstveni polinom h_{2n-1} stupnja $2n - 1$ takav da je

$$h_{2n-1}(x_i) = f(x_i),\;\; h'_{2n-1}(x_i) = f'(x_i),\;\; \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Dodatno, postoji $\lambda = \lambda(x) \in \langle a, b\rangle$ takav da

$$f(x) = h_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\lambda)}{(2n)!}(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = h_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\lambda)}{(2n)!}p_n^2(x).$$

Dakle,

$$\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b w(x)h_{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{f^{(2n)}(\lambda)}{(2n)!}w(x)p_n^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Kako smo pokazali da je formula egzaktna za polinome stupnja $2n - 1$, to je egzaktna i za h_{2n-1} pa je

$$\int_a^b w(x)h_{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x = Q(h_{2n-1}) = \sum_{i=1}^{n} w_i h_{2n-1}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = Q(f), \tag{6}$$

a kako $w(x)p_n^2(x) \geq 0$ na $[a, b]$, to po teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$\int_a^b \frac{f^{(2n)}(\lambda)}{(2n)!}w(x)p_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)p_n^2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

Konačno, iz (5), (6) i (7) slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

[3] Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar.

2.1.1 Gauss-Čebiševljeve kvadraturne formule

Ovisno o izboru familije ortogonalnih polinoma čije će nultočke biti čvorovi kvadraturne formule postoji više vrsta Gaussovih kvadraturnih formula, npr. Gauss-Legendreove, Gauss-Jacobijeve itd. Kako je princip određivanja formule sličan za većinu familija polinoma, osvrnut ćemo se samo na Gauss-Čebiševljeve kvadraturne formule prve vrste.[4] *Čebiševljevi polinomi prve vrste*[5] rješenja su Čebiševljeve diferencijalne jednadžbe

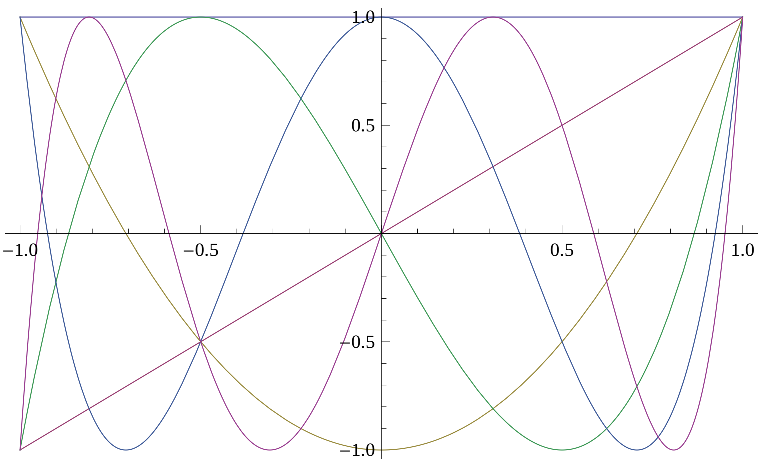
$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n^2y = 0,$$

kao specijalnog slučaja Sturm-Liouvilleove diferencijalne jednadžbe (detaljnije o Sturm-Liouvilleovoj jednadžbi može se naći u [6, str. 66-101]). Mogu se zapisati u obliku

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

a zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \;\; n \geq 1.$$



Slika 1: Grafovi prvih 6 Čebiševljevih polinoma prve vrste

Da bismo pokazali da Čebiševljevi polinomi prve vrste zaista čine familiju ortogonalnih polinoma na $[-1, 1]$, prisjetimo se prvo ortogonalnosti funkcije kosinus; na segmentu $[0, \pi]$ vrijedi

$$\int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

[4]Vrsta (prva ili druga) Gauss-Čebiševljevih formula ovisi o tome jesu li čvorovi formule nultočke Čebiševljevih polinoma prve ili druge vrste.

[5]Pafnuti Lvovič Čebišev (1821-1894), ruski matematičar.

Supstituiramo li sada $x = \cos t$, to slijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0, \end{cases}$$

tj. Čebiševljevi polinomi prve vrste ortogonalni su na $[-1, 1]$ s obzirom na težinsku funkciju $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Nadalje, sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_n leže u $[-1, 1]$ i dane su s

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Konačno, Gauss-Čebiševljeva kvadraturna formula prve vrste glasi

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \approx Q(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Za detaljan izvod gornje formule vidi npr. [11, str. 109-110].

Primjedba 2.2. Za grešku $R(f)$ Gauss-Čebiševljeve kvadraturne formule prve vrste vrijedi

$$|R(f)| \leq \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} M_{2n},$$

gdje je $M_{2n} = \max_{x \in [-1,1]} |f^{(2n)}(x)|$. Zaista, neka vrijede pretpostavke Teorema 2.5. No, primijetimo da Čebiševljev polinom prve vrste n-tog stupnja nije normiran, što je jedan od uvjeta Teorema 2.5. Međutim, uvijek ga možemo zamijeniti normiranim polinomom $\tilde{T}(x) = 2^{1-n}T_n(x)$. Sada po Teoremu 2.5 slijedi

$$|R(f)| \leq \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \frac{\tilde{T}_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2^{2n-2}(2n)!} \int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Iskoristimo li ortogonalnost Čebiševljevih polinoma prve vrste koju smo prethodno spomenuli, točnije, činjenicu da je

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

te $\left|f^{(2n)}(\xi)\right| \leq M_{2n}$, to slijedi

$$|R(f)| \leq \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} M_{2n}.$$

$\square$

2.2 Newton-Cotesove formule

Još jedan od načina kojim možemo aproksimirati vrijednost integrala

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest aproksimirati funkciju f na $[a,b]$ jednostavnijom funkcijom $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ te izračunati

$$I^* = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

pri čemu funkcija φ treba biti takva da apsolutna pogreška $\Delta I^* = |I - I^*|$ bude što manja. Newton[6] je kao rješenje problema određivanja funkcije φ vidio interpolaciju funkcije f na segmentu $[a,b]$. Neka su čvorovi interpolacije x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Nađimo najprije bazni Lagrangeov polinom L_i stupnja n, za koji vrijedi

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \;\; i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov simbol. U geometrijskom smislu, polinom L_i ima nultočke u svim čvorovima interpolacije, osim u x_i u kojem prima vrijednost 1, pa je L_i oblika

$$L_i(x) = c_i(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n),$$

gdje je c_i konstanta koju određujemo iz uvjeta $L_i(x_i) = 1$, iz kojeg dobivamo

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Uvrstimo li dobiveni izraz za c_i u početni oblik polinoma L_i dobivamo

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Prema tome, polinom P_n stupnja n za koji vrijedi $P_n(x_i) = f(x_i)$ glasi

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

i nazivamo ga *Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma*[7].

[6] Isaac Newton (1642-1717), engleski matematičar, fizičar i astronom.
[7] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), talijanski matematičar i astronom.

Primjedba 2.3. Važno je napomenuti kako je interpolacijski polinom n-tog stupnja jedinstven, tj. ne ovisi o tome jesmo li ga konstruirali Lagrangeovom, Newtonovom, Hermiteovom ili drugim metodama. Zaista, neka je $P_n : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ t.d. je } P_n(x_i) = f(x_i), \;\; i = 0,1,\ldots,n.$$

Uvjeti $P_n(x_i) = f(x_i)$ daju sustav $n+1$ jednadžbi u varijablama $a_0, \ldots, a_n$:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

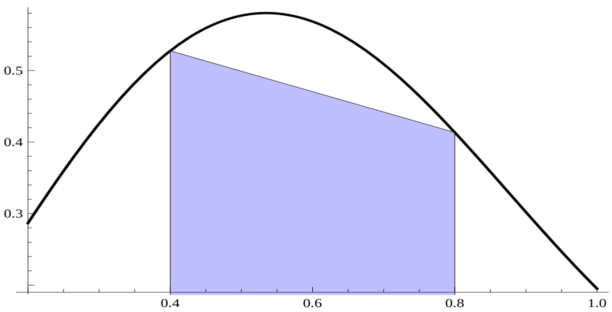
Matrica sustava je transponirana Vandermondeova matrica $V^T(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, a kako je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, jasno je da je $\det(V^T(x_0, x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$ pa sustav zaista ima jedinstveno rješenje. $\square$

Primjedba 2.4. Neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$ te neka je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Neka je P_n odgovarajući interpolacijski polinom. Tada $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi \in \langle a,b \rangle$ takav da je

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

gdje je $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.
Dokaz ove tvrdnje može se pogledati u npr. [12, str. 23]. $\square$

Promotrimo sada najjednostavniju aproksimaciju integrala funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tj. računanje površine trapeza kojeg dobijemo provlačenjem pravca kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (vidi primjer: Slika 2).



Slika 2: Trapez ispod funkcije $e^{\sqrt{x}} \sin x \cos^4 x$ na $[0.4, 0.8]$.

Interpolacijski polinom prvog stupnja glasi

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Aproksimaciju integrala sada dobivamo integracijom interpolacijskog polinoma P_1, dakle

$$\begin{aligned} I^* &= \int\limits_a^b \big(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{bf(a) - af(b)}{b - a}x + \frac{f(b) - f(a)}{2(b - a)}x^2\right)\Bigg|_a^b \\ &= bf(a) - af(b) + \frac{1}{2}(f(b) - f(a))(b + a) \\ &= \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b)). \end{aligned}$$

Dobivena formula naziva se *trapezna formula.*

Primjedba 2.5. Uz pretpostavku da je $f \in C^2([a, b])$ i oznaku $M_2 := \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ greška trapezne formule je

$$\Delta I^* \leq \frac{(b - a)^3}{12} M_2,$$

što slijedi direktno iz sljedećeg teorema. □

Teorem 2.6. *Neka je $f \in C^2([a, b])$. Tada postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b - a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) - \frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi).$$

Dokaz. Primijenimo prvo tvrdnju iz Primjedbe 2.4 na interpolacijski polinom P_1. Imamo

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b) \ \text{ za neki } \ \xi \in \langle a, b\rangle$$

pa to slijedi

$$\begin{aligned} I - I^* &= \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b P_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi)}{2} \int\limits_a^b (x - a)(x - b)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{a + b}{2}x^2 + abx\right)\Bigg|_a^b = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Kako smo kod trapezne formule imali samo dva čvora, pokušajmo odrediti formulu (za koju očekujemo da će biti egzaktnija) pomoću 3 čvora. Uzmimo ekvidistantnu razdiobu segmenta $[a, b]$, dakle $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ te promotrimo kvadraturnu formulu oblika

$$I^* = w_0 f(a) + w_1 f\big(\frac{a+b}{2}\big) + w_2 f(b).$$

Trebamo odrediti nepoznate težinske koeficijente w_0, w_1 te w_2, dakle treba postaviti tri uvjeta za egzaktnost formule na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja. Za $f(x) = 1$, $f(x) = x$ te $f(x) = x^2$ redom imamo

$$b - a = \int\limits_a^b \mathrm{d}x = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1,$$

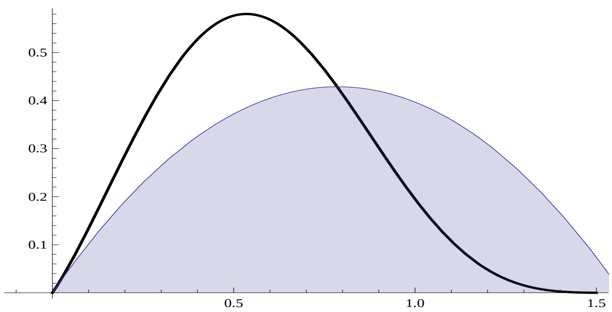
$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int\limits_a^b x \,\mathrm{d}x = w_0 \cdot a + w_1 \frac{a+b}{2} + w_2 \cdot b,$$

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int\limits_a^b x^2 \,\mathrm{d}x = w_0 \cdot a^2 + w_1 \frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Rješavanjem prethodnog linearnog sustava dobivamo $w_0 = w_2 = \frac{b-a}{6}$, $w_1 = \frac{2(b-a)}{3}$ pa kvadraturna formula koju smo tražili glasi

$$I = \int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6} \Big(f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b) \Big)$$

te je poznata kao *Simpsonova formula*.[8]



Slika 3: Aproksimacija integrala funkcije $e^{\sqrt{x}} \sin x \cos^4 x$ na $[0, 1.6]$ Simpsonovim pravilom

[8]Thomas Simpson (1710-1761), britanski matematičar i izumitelj.

Primjedba 2.6. Iako je Simpsonova formula dobivena iz uvjeta egzaktnosti za polinome stupnja manjeg ili jednakog 2, egzaktno integrira i sve polinome stupnja 3. Da bismo ovo provjerili, dovoljno je pokazati da egzaktno integrira x^3. Egzaktni integral je

$$\int_a^b x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{b^4 - a^4}{4},$$

a to daje i Simpsonova formula:

$$I^* = \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3 + b^3\right) = \frac{b-a}{4}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

□

Razmotrimo sada slučaj kada funkciju f interpoliramo polinomom proizvoljnog stupnja n, kao što je to napravljeno u [12, str. 130]. Napravimo ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[a, b]$, tj. neka je $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Neka je P_n pripadni interpolacijski polinom n-tog stupnja u Lagrangeovom obliku:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x), \quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Integracijom interpolacijskog polinoma dobivamo aproksimaciju I_n^*:

$$\begin{aligned} I_n^* &= \int_a^b P_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)\Big) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x) \, \mathrm{d}x \\ &= (b-a) \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(x) \, \mathrm{d}x = (b-a) \sum_{k=0}^{n} f(x_k) w_k. \end{aligned}$$

pri čemu smo uveli oznaku $w_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(x) \, \mathrm{d}x$. Prednost ovakve kvadraturne formule je u tome što se svaki w_k može egzaktno izračunati. Općenito, vrijedi

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(x) \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = a + (b-a)t \\ \mathrm{d}x = (b-a)\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 L_k(a + (b-a)t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a + (b-a)t - a - i\frac{b-a}{n}}{a + k\frac{b-a}{n} - a - i\frac{b-a}{n}} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{nt - i}{k - i}. \end{aligned}$$

I_n^* nazivamo *Newton-Cotesova formula n-tog reda*. Razlikujemo dva tipa Newton-Cotesovih formula: otvorenog i zatvorenog tipa. Ograničit ćemo se na one zatvorenog tipa, kod kojih rubove segmenta integracije uključujemo kao čvorove u formuli. Promotrimo sada dva specijalna slučaja Newton-Cotesovih formula.

Primjer 1. *Odredimo Newton-Cotesovu formulu 1. reda. Vrijedi*

$$I_1^* = (b-a)[w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)],$$

a kako je $n=1$*, to su* $x_0 = a, x_1 = b$*. Lako se pokaže da je* $w_0 = w_1 = \frac{1}{2}$ *pa slijedi da Newton-Cotesova formula 1. reda glasi*

$$I_1^* = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)),$$

a to je upravo trapezna formula.

Primjer 2. *Newton-Cotesova formula 2. reda ima opći oblik*

$$I_2^* = (b-a)[w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)].$$

Čvorovi interpolacije su $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$*, a težinski koeficijenti lako se izračunaju:*

$$w_0 = \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6},\ w_1 = \int_0^1 (-4t^2 + 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3},\ w_2 = \int_0^1 (2t^2 - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}.$$

Dakle, tražena formula glasi

$$I_2^* = \frac{b-a}{6}\Bigg(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Bigg),$$

što je prethodno spomenuta Simpsonova formula.

3 Nejednakosti

U ovom poglavlju razmotrit ćemo određene nejednakosti potrebne za daljnje razumijevanje rada. S $L^p[a,b]$ za $1 \leq p < \infty$ označavat ćemo prostor svih funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takvih da je $|f|^p$ R-integrabilna funkcija, tj. takvih da p-norma tih funkcija zadovoljava

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \infty.$$

Čebiševljev funkcional definiramo izrazom

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x,$$

gdje su $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ realne funkcije takve da su $f, g, f \cdot g \in L^1[a,b]$. U [7] Mitrinović, Pečarić i Fink dokazali su *Grüssovu nejednakost*[9]:

Teorem 3.1 (Grüssova nejednakost). *Neka su $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabilne funkcije na segmentu $[a,b]$ te*

$$\phi \leq f(x) \leq \Phi, \quad \gamma \leq g(x) \leq \Gamma, \quad \forall x \in [a,b], \quad \phi, \Phi, \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}.$$

Tada vrijedi

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \phi)(\Gamma - \gamma).$$

Prije dokaza napomenimo tvrdnju potrebnu za provedbu dokaza. U [2] K.A.Andréief razmatrao je identitet

$$\int_a^b F_1(x)F_2(x) \, \mathrm{d}x \int_a^b G_1(x)G_2(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b F_1(x)G_2(x) \, \mathrm{d}x \int_a^b F_2(x)G_1(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (F_1(x)G_1(y) - F_1(y)G_1(x))(F_2(x)G_2(y) - F_2(y)G_2(x)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Stavimo li $F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = g(x)$ te $G_1(x) = G_2(x) = 1$, to identitet postaje

$$(b-a) \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

[9]Gerhard Christian Grüss (1902-1950), njemački matematičar.

Dakle, Čebiševljev funkcional može se zapisati kao

$$T(f,g) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Dokaz Teorema 3.1. Kako smo upravo komentirali, po (8) vrijedi

$$T(f,g) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarza za dvostruke integrale na gornji izraz dobivamo

$$T^2(f,g) \leq T(f,f)T(g,g). \tag{9}$$

Označimo li s $A(f)$ aritmetičku integralnu sredinu

$$A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

to iz nejednakosti između kvadratne i aritmetičke integralne sredine slijedi

$$T(f,f) = A(f^2) - A^2(f) \geq 0.$$

Dodatno, lako se provjeri da vrijedi jednakost

$$T(f,f) = (\Phi - A(f))(A(f)-\phi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (\Phi - f(x))(f(x)-\phi)\,\mathrm{d}x,$$

pa to implicira da je

$$T(f,f) \leq (\Phi - A(f))(A(f)-\phi).$$

Na analogan način se dobije i relacija

$$T(g,g) \leq (\Gamma - A(g))(A(g)-\gamma).$$

Iz prethodnih dviju relacija te iz (9) slijedi

$$T^2(f,g) \leq (\Phi - A(f))(A(f)-\phi)(\Gamma - A(g))(A(g)-\gamma).$$

Konačno, iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine brojeva zaključujemo

$$(\Phi - A(f))(A(f)-\phi) \leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)^2, \;\; (\Gamma - A(g))(A(g)-\gamma) \leq \frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)^2$$

pa to slijedi

$$T^2(f,g) \leq \frac{1}{16}(\Phi-\phi)^2(\Gamma-\gamma)^2,$$

odnosno

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)(\Gamma-\gamma).$$

Q.E.D.

U dokazu prethodnog teorema zapravo smo dokazali i sljedeću nejednakost, poznatu kao *pre-Grüssova nejednakost*.

Korolar 3.1 (Pre-Grüssova nejednakost). *Neka su $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabilne funkcije takve da je i fg R-integrabilna te neka postoje konstante $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ takve da je $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma, \ \forall x \in [a,b]$. Tada je*

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{T(f,f)}(\Gamma-\gamma).$$

Još jedna nejednakost koja će nam biti od koristi je *Hölderova nejednakost*[10].

Definicija 3.2. Za realne brojeve p i q, $1 \leq p, q \leq \infty$, kažemo da su *konjugirani eksponenti* ako je

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Dodatno, uzima se da je 1 konjugirani eksponent od ∞.

Teorem 3.3 (Hölderova nejednakost). *Neka su $p > 1$ i q konjugirani eksponenti, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ takve da je $f \in L^p[a,b]$ i $g \in L^q[a,b]$. Tada je*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, ,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A|f|^p = B|g|^q$ skoro svuda, za neke konstante $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz općenitog slučaja Hölderove nejednakosti može se naći u npr. [5, str. 140].

[10] Otto Ludwig Hölder (1859-1937), njemački matematičar.

4 Ocjene pogrešaka kvadraturnih formula

Kako se bavimo aproksimacijama, prirodno nas zanima koliko smo pogriješili, tj. kolika je maksimalna moguća devijacija dobivene aproksimacije od točnog rezultata. U ovom dijelu bit će predstavljene razne ocjene kvadraturnih formula obrađenih kroz rad, a u pozadini svih ocjena je Grüssova nejednakost.

4.1 Ocjene Newton-Cotesovih formula

U nastavku se koristi teorija Peanovih jezgri o kojoj se detaljno može pogledati u npr. [14, str. 44-55]. U [13] je korištenjem Čebiševljeva funkcionala Ujević dao ocjenu pogreške Simpsonova pravila pomoću Peanove jezgre $K_1(x)$, što ćemo predstaviti u nastavku. Označimo prvo $\sigma(f) = (b-a)T(f,f)$, gdje je $T(f,f)$ Čebiševljev funkcional.

Teorem 4.1. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna funkcija takva da je $f' \in L^2([a,b])$. Tada vrijedi*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right)\right| \le \frac{(b-a)^{3/2}}{6}\sqrt{\sigma(f')}. \tag{10}$$

Nejednakost (10) je oštra u smislu da se konstanta $1/6$ ne možemo zamijeniti manjom.

Dokaz. Za Peanovu jezgru

$$K_1(x) = \begin{cases} x - \frac{5a+b}{6}, & x \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ x - \frac{a+5b}{6}, & x \in \langle \frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

za Simpsonovo pravilo vrijedi

$$\int_a^b K_1(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

S druge strane, kako je $\int_a^b K_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$, to vrijedi

$$\int_a^b K_1(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b K_1(x)\Big[f'(x) - A(f')\Big]\,\mathrm{d}x,$$

pa ćemo nejednakost (10) dokazati ako ju dokažemo za izraz s desne strane prethodne jednakosti. Prema Hölderovoj nejednakosti za $p = q = 2$ imamo

$$\left|\int_a^b K_1(x)\Big[f'(x) - A(f')\Big]\,\mathrm{d}x\right| \le \|K_1\|_2 \,\|f' - A(f')\|_2$$

$$= \|K_1\|_2 \left(\|f'\|_2^2 - \frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a} \right)^{1/2}.$$

Lako se pokaže da je $\|K_1\|_2^2 = (b-a)^3/36$, a uz činjenicu da je

$$\sqrt{\sigma(f')} = \left(\|f'\|_2^2 - \frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a} \right)^{1/2}$$

direktno slijedi tvrdnja.
Pokažimo sada da je nejednakost (10) oštra. U tu svrhu definirajmo funkciju

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x, & x \in [0, 1/2] \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}, & x \in \langle 1/2, 1] \end{cases}.$$

Kako je g po dijelovima definirana neprekidna polinomijalna funkcija, to je g apsolutno neprekidna pa vrijede pretpostavke teorema. Pretpostavimo da (10) vrijedi s konstantom $C > 0$, tj.

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\Big(g(a) + 4g\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + g(b) \Big) \right| \\ &\qquad \le C(b-a)^{3/2} \left(\|g'\|_2^2 - \frac{(g(b)-g(a))^2}{b-a} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Kako vrijede sljedeće jednakosti:

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad g(0) = g(1) = 0, \quad g\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{24},$$

to je lijeva strana u (11) jednaka $1/36$, a desna strana $C/6$ pa je to $C \ge 1/6$. Dakle, $1/6$ je zaista najbolja moguća konstanta.

Q.E.D.

Primjer 3. *Promotrimo funkciju normalne razdiobe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Može se pokazati da je f Lipschitzova funkcija, a kako je svaka Lipschitzova funkcija ujedno i apsolutno neprekidna, zadovoljen je prvi uvjet Teorema 4.1. Lako se provjeri da vrijedi i drugi uvjet, tj. da je $f' \in L^2[-1,1]$. Dakle, prema Teoremu 4.1 vrijedi*

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1) \Big) \right| \le \frac{c\sqrt{2}}{3},$$

gdje je $c = \sqrt{\sigma(f')}$. Jednostavnim računom dobije se da je $c \approx 0.245583$ pa je apsolutna pogreška Simpsonova pravila u ovom slučaju maksimalno 0.115769.

Još jednu ocjenu Simpsonova pravila koristeći Grüssovu nejednakost dali su autori Pearce, Pečarić, Ujević i Varošanec u [8]. Za početak, neka su $\{P_n\}$ i $\{Q_n\}$ nizovi harmonijskih polinoma, dakle polinoma koji zadovoljavaju

$$P_0(x) = Q_0(x) = 1, \;\; P_n'(x) = P_{n-1}(x), \;\; Q_n'(x) = Q_{n-1}(x), \;\; n \geq 1.$$

Nadalje, pretpostavimo da je $f \in C^n([a,b])$ te stavimo

$$S_n(t,x) = \begin{cases} P_n(t), & t \in [a,x] \\ Q_n(t), & t \in \langle x,b] \end{cases}.$$

Parcijalnom integracijom dobije se identitet

$$(-1)^n \int_a^b S_n(t,x) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = I_n(x),$$

gdje je

$$\begin{aligned} I_n(x) := &\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \Big(Q_i(b) f^{(i-1)}(b) + (P_i(x) - Q_i(x)) f^{(i-1)}(x) - P_i(a) f^{(i-1)}(a) \Big). \end{aligned}$$

Sada smo u mogućnosti iskazati teorem pomoću kojeg ćemo dati nove ocjene pogreške.

Teorem 4.2. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da je $f^{(n)}$ R-integrabilna i omeđena na $[a,b]$, tj.*

$$\exists \gamma_n, \Gamma_n \in \mathbb{R}, \;\; \gamma_n \leq f^{(n)}(t) \leq \Gamma_n, \;\; \forall t \in [a,b].$$

Stavimo

$$U_n(x) := \left[Q_{n+1}(b) - Q_{n+1}(x) + P_{n+1}(x) - P_{n+1}(a) \right] / (b-a).$$

Tada je

$$\left| I_n(x) - (-1)^n U_n(x) \left[f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a) \right] \right| \leq \frac{1}{2} K (\Gamma_n - \gamma_n)(b-a),$$

gdje je

$$K := \left(\frac{1}{b-a} \left[\int_a^x P_n^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^b Q_n^2(t)\,\mathrm{d}t \right] - U_n^2(x) \right)^{1/2}.$$

Dokaz. Iz definicije od S_n imamo

$$\left|I_n(x) - (-1)^n U_n(x)\left[f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)\right]\right|$$

$$= (b-a)\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b S_n(t,x) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{b-a}\int_a^b S_n(t,x)\,\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= (b-a)|T(S_n, f^{(n)})|$$

Primijenimo li Korolar 3.1 na posljednju jednakost, to slijedi

$$\left|I_n(x) - (-1)^n U_n(x)\left[f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)\right]\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{T(S_n, S_n)}(b-a)(\Gamma_n - \gamma_n).$$

Lako se provjeri da je $K = \sqrt{T(S_n, S_n)}$ te slijedi tvrdnja. Q.E.D.

Da bismo pomoću prethodnog teorema dali nove ocjene Simpsonova pravila potreban nam je sljedeći niz harmonijskih polinoma:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, & Q_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x - \frac{5a+b}{6}, & Q_1(x) &= x - \frac{a+5b}{6},\\
P_2(x) &= \frac{1}{2!}(x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right), & Q_2(x) &= \frac{1}{2!}(x-b)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right),\\
P_3(x) &= \frac{1}{3!}(x-a)^2\left(x - \frac{a+b}{2}\right), & Q_3(x) &= \frac{1}{3!}(x-b)^2\left(x - \frac{a+b}{2}\right),\\
P_4(x) &= \frac{1}{4!}(x-a)^3\left(x - \frac{a+2b}{3}\right), & Q_4(x) &= \frac{1}{4!}(x-b)^3\left(x - \frac{2a+b}{3}\right).
\end{aligned}$$

Teorem 4.3. *Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da je $f^{(n)}$ integrabilna i takva da postoje $\gamma_n, \Gamma_n \in \mathbb{R}$ za koje je*

$$\gamma_n \leq f^{(n)}(x) \leq \Gamma_n, \ \ \forall x \in [a,b], \ \ n \in \{1,2,3\}.$$

Tada za $n = 1, 2, 3$, vrijedi

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right]\right| \leq C_n(\Gamma_n - \gamma_n)(b-a)^{n+1},$$

pri čemu je

$$C_1 = \frac{1}{12}, \ \ C_2 = \frac{1}{24\sqrt{30}}, \ \ C_3 = \frac{1}{96\sqrt{105}}.$$

Dokaz. Iako tvrdnja slijedi direktnom primjenom prethodnog teorema, navesti ćemo neke rezultate koji se koriste u provedbi dokaza, a svi se lako pokažu računski. U slučaju $n = 1$ imamo

$$U_1(x) = \frac{2x - (a+b)}{3},$$

$$I_1(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(x) + f(b)\right).$$

U slučaju $n = 2$ imamo

$$U_2(x) = \frac{(2x - (a+b))^2}{12},$$

$$I_2(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(x) + f(b)\right) + \frac{f'(x)}{3}(a^2 - b^2 + 2(b-a)x).$$

U slučaju $n = 3$ imamo

$$U_3(x) = \frac{(2x - (a+b))^3}{72},$$

$$I_3(x) = I_2(x) - \frac{f''(x)}{12}(2x - (a+b))(a^2 - b^2 + 2(b-a)x).$$

Uzmemo li $x = \frac{a+b}{2}$, to je

$$K_1 = \frac{(b-a)}{2}, \quad K_2 = \frac{(b-a)^2}{12\sqrt{30}}, \quad K_3 = \frac{(b-a)^3}{48\sqrt{105}}$$

te po Teoremu 4.3 slijedi

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right]\right| \leq \frac{1}{12}(\Gamma_1 - \gamma_1)(b-a)^2,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right]\right| \leq \frac{1}{24\sqrt{30}}(\Gamma_2 - \gamma_2)(b-a)^3.$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right]\right| \leq \frac{1}{96\sqrt{105}}(\Gamma_3 - \gamma_3)(b-a)^4.$$

Q.E.D.

Primjer 4. *Promotrimo još jednom funkciju*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

na segmentu $[-1, 1]$. *Prve tri derivacije funkcije* f *neprekidne su na* $[-1, 1]$ *pa su i integrabilne na danom segmentu, što znači da je zadovoljen prvi uvjet Teorema 4.3. Dodatno, neprekidne su na kompaktnom skupu pa su po Weierstrassovom teoremu i omeđene. Dakle, vrijede svi uvjeti Teorema 4.3. Računski se lako dobiju gornje i donje međe prvih triju derivacija funkcije* f *na* $[-1, 1]$*:*

$$\begin{aligned} -0.24197 &\leq f'(x) \leq 0.24197, \\ -0.39895 &\leq f''(x) \leq 0, \\ 0.48395 &\leq f'''(x) \leq 0.55059. \end{aligned}$$

Po Teoremu 4.3 vrijede sljedeće ocjene pogreške Simpsonova pravila za integraciju funkcije f *na* $[-1, 1]$*:*

Za $n = 1$ *ocjena apsolutne pogreške je*

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) \right| \leq 0.16132.$$

Kada ocjenu dajemo pomoću derivacije drugog reda vrijedi

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) \right| \leq 0.02428.$$

U slučaju $n = 3$ *za apsolutnu pogrešku vrijedi ocjena*

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) \right| \leq 0.001084.$$

Važno je primijetiti da bismo u slučaju da zahtijevamo preciznost $\varepsilon = 0.1$ *na temelju prve ocjene vjerojatno zaključili da nam Simpsonova formula nije od koristi. No, ako promotrimo treću ocjenu, vidimo da Simpsonova formula zaista zadovoljava traženu preciznost. Upravo iz ovog razloga su ocjene pogrešaka kvadraturnih formula problem kojim se bavi velik broj matematičara.*

4.2 Ocjene Gaussovih kvadraturnih formula

4.2.1 Nejednakosti Grüssovog tipa

Vratimo se na trenutak definiranju kvadraturnih formula. Pretpostavimo da je $f^{(r-1)}$ neprekidna funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ za neki $r \geq 1$ i neka je $w : [a,b] \to [0,\infty\rangle$ težinska funkcija. U [10] autori Pečarić, Ribičić Penava i Vukelić dokazali su sljedeće težinske kvadraturne formule:

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + \sum_{i=1}^{r} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!}\left[f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)\right] \\ &\quad\times \left(\int_a^b w(x)B_i\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} w_k B_i\left(\frac{x_k-a}{b-a}\right)\right) \\ &\quad - \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\int_a^b G_r(x)\,\mathrm{d}f^{(r-1)}(x) \end{aligned} \tag{12}$$

te

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!}\left[f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)\right] \\ &\quad\times \left(\int_a^b w(x)B_i\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} w_k B_i\left(\frac{x_k-a}{b-a}\right)\right) \\ &\quad - \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\int_a^b \left(\int_a^b w(u)\left(B_r^*\left(\frac{u-x}{b-a}\right) - B_r\left(\frac{u-a}{b-a}\right)\right)\mathrm{d}u\right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n} w_k\left(B_r^*\left(\frac{x_k-x}{b-a}\right) - B_r\left(\frac{x_k-a}{b-a}\right)\right)\right)\mathrm{d}f^{(r-1)}(x), \end{aligned} \tag{13}$$

gdje je

$$G_r(x) = \int_a^b w(u)B_r^*\left(\frac{u-x}{b-a}\right)\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{n} w_k B_r^*\left(\frac{x_k-x}{b-a}\right) \quad \text{te} \quad \sum_{k=1}^{n} w_k = 1.$$

Stavimo li $r = m + s$, formule (12) i (13) stupnja su egzaktnosti $m - 1$. Funkcije $x \mapsto B_k(x)$, $k \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, su Bernoullijevi polinomi, $B_k = B_k(0)$, $k \geq 0$, su Bernoullijevi brojevi, a $x \mapsto B_k^*(x)$, $k \geq 0$, su periodične funkcije (s periodom 1) koje su vezi s Bernoullijevim polinomima, tj. $B_k^*(x) = B_k(x)$, $0 \leq x < 1$. Detaljnije o Bernoullijevim polinomima može se naći u [1, str. 804-808].

Slično kao u poglavlju Nejednakosti, označimo s $L^\infty[a,b]$ prostor svih esencijalno omeđenih funkcija na $[a,b]$ s normom definiramon s

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Prije nego iskažemo teoreme pomoću kojih ćemo lako pokazati neke ocjene trapeznog i Simpsonovog pravila te Gauss-Čebiševljevih kvadraturnih formula prve vrste, iskažimo neke nejednakosti Grüssovog tipa koje su u [4] dokazali Cerone i Dragomir.

Teorem 4.4. *Neka su $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne funkcije na $[a,b]$ takve da $(\cdot - a)(b-\cdot)(f')^2, (\cdot - a)(b-\cdot)(g')^2 \in L^1[a,b]$. Tada je*

$$|T(f,g)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{T(f,f)}\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b (x-a)(b-x)(g'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{2(b-a)}\left(\int_a^b (x-a)(b-x)(f'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b (x-a)(b-x)(g'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Konstante $1/\sqrt{2}$ i $1/2$ su najbolje moguće.

Teorem 4.5. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna funkcija takva da je $f' \in L^\infty[a,b]$ te neka je $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona rastuća funkcija. Tada je*

$$|T(f,g)| \le \frac{1}{2(b-a)}\|f'\|_\infty \cdot \int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}g(x).$$

Konstanta $1/2$ je najbolja moguća.

Koristeći Teorem 4.4 i Teorem 4.5 autori Pečarić, Ribičić Penava i Vukelić dokazali su u [9] sljedeći teorem.

Teorem 4.6. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da je $f^{(r)}$ apsolutno neprekidna funkcija i $\left(f^{(r+1)}\right)^2 \in L^1[a,b]$ za neki $r \ge 1$ i neka je $w : [a,b] \to [0,\infty\rangle$ težinska funkcija. Tada je*

$$\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) - \sum_{i=1}^r \frac{(b-a)^{i-1}}{i!}\left[f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)\right]$$
$$\times\left(\int_a^b w(x)B_i\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n w_k B_i\left(\frac{x_k-a}{b-a}\right)\right) = K_r(f),$$

pri čemu ostatak $K_r(f)$ zadovoljava

$$
\begin{aligned}
|K_r(f)| \leq \frac{(b-a)^{r-1}}{\sqrt{2}(r!)} & \left\{ \int_a^b \left(\int_a^b w(u) B_r^* \left(\frac{u-x}{b-a} \right) \mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}x + (-1)^{r-1} \frac{(b-a)(r!)^2}{(2r)!} \right. \\
& \left. \times \left(-2 \sum_{k=1}^{n} \left(w_k \int_a^b w(u) B_{2r}^* \left(\frac{u-x_k}{b-a} \right) \mathrm{d}u - \frac{B_{2r}}{2} w_k^2 \right) + \sum_{\substack{k,l=1 \\ l \neq k}}^{n} w_k w_l B_{2r}^* \left(\frac{x_k - x_l}{b-a} \right) \right) \right\}^{1/2} \\
& \times \left(\int_a^b (x-a)(b-x)(f^{(r+1)}(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Primjedba 4.1. Uz odabir $w(x) = 1$, $n = 2$, $w_k = 1/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $r = 1$, $[a, b] = [0, 1]$ dobije se sljedeća nejednakost vezana uz trapeznu formulu:

$$
\left| \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \left(f(0) + f(1) \right) \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\int_0^1 x(1-x)(f''(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.
$$

□

Primjedba 4.2. Uz odabir $w(x) = 1$, $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$, $r = 1$, $[a, b] = [0, 1]$ dobije se sljedeća nejednakost Simpsonovog tipa:

$$
\left| \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) \right| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\int_0^1 x(1-x)(f''(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.
$$

U slučaju kada je f polinom drugog stupnja, dobije se nejednakost kao u [13]. □

Primjer 5. *Zbog jednostavnosti provjera uvjeta Teorema 4.6 neka je $f(x) = \sin x$, koja je apsolutno neprekidna, i svaka njena derivacija je apsolutno neprekidna te integrabilna na svakom segmentu. Iz Primjedbe 4.1 i Primjedbe 4.2 slijedi da za apsolutne pogreške trapezne i Simpsonove formule vrijede ocjene*

$$
\left| \int_0^1 \sin x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \Big(\sin 0 + \sin 1 \Big) \right| \leq 0.04216,
$$

$$
\left| \int_0^1 \sin x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{6} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{1}{2} + \sin 1 \right) \right| \leq 0.02434.
$$

4.2.2 Ocjene Gauss-Čebiševljevih formula prve vrste

Vratimo se na Gauss-Čebiševljevu kvadraturnu formulu prve vrste. Neka je $f^{(r)}$ neprekidna funkcija ograničene varijacije na $[-1,1]$, za neki $r = m+s \geq 1$. U [10] autori su dokazali i sljedeću Gauss-Čebiševljevu formulu prve vrste Eulerovog tipa, koja je stupnja egzaktnosti $m-1$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + T_{m+s}(f,n) + \frac{2^{m+s-1}}{(m+s)!}\int_{-1}^{1} G_{m+s}(x,n)\mathrm{d}f^{(m+s-1)}(x),$$

gdje je

$$\begin{aligned} T_{m+s}(f,n) = {} & \sum_{j=0}^{s} \frac{2^{m+j-1}}{(m+j)!}\left(\int_{-1}^{1} \frac{B_{m+j}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} B_{m+j}\left(\frac{x_k+1}{2}\right)\right) \\ & \times \left[f^{(m+j-1)}(1) - f^{(m+j-1)}(-1)\right] \end{aligned}$$

te

$$G_{m+s}(x,n) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} B^*_{m+s}\left(\frac{x_k - x}{2}\right) - \int_{-1}^{1} \frac{B^*_{m+s}\left(\frac{u-x}{2}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Kao poseban slučaj Teorema 4.6 za $[a,b] = [-1,1]$, $r = m+s$, $w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ te $w_k = \frac{1}{n}$ u [9] se može naći i sljedeći teorem:

Teorem 4.7. *Neka je $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ takva da je $f^{(m+s)}$ apsolutno neprekidna te $(f^{(m+s+1)})^2 \in L^1[-1,1]$ za neki $r = m+s \geq 1$. Tada vrijedi*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - T_r(f,n) = K_r(f),$$

pri čemu ostatak $K_r(f)$ zadovoljava

$$\begin{aligned} |K_r(f)| \leq {} & \frac{2^{r-1}}{\sqrt{2}r!}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} B^*_r\left(\frac{u-x}{2}\right)\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}x\right. \\ & \left. + (-1)^{r-1}\frac{2(r!)^2}{(2r)!}\left[-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1} \frac{B^*_{2r}\left(\frac{u-x_k}{2}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u + \frac{\pi^2}{n^2}\sum_{\substack{k,l=1 \\ l\neq k}}^{n} B^*_{2r}\left(\frac{x_k - x_l}{2}\right)\right]\right\}^{1/2} \\ & \times \left[\int_{-1}^{1} (1-x^2)(f^{(r+1)}(x))^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Primjedba 4.3. It prethodnog teorema slijede sljedeće ocjene Gauss-Čebiševljeve kvadraturne formule prve vrste. Prvo, zbog jednostavnosti zapisa, uvedimo oznaku

$$S(f,r) = \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)(f^{(r+1)}(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

i) U slučaju $n = 1$, $x_1 = 0$, $m = 1$ te $s = 0$ dobije se sljedeća ocjena za formulu s jednim čvorom:

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x - \pi f(0) \right| \le \sqrt{\pi - 2} \cdot S(f,1).$$

ii) U slučaju $n = 2$, $x_1 = -\sqrt{2}/2$, $x_2 = \sqrt{2}/2$ te za $m < 4$, $s = 0$, dobiju se sljedeće ocjene formule s dva čvora:

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \right| \le C_m \cdot S(f,m),$$

gdje su $C_1 = \sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}-4}{2}} \approx 0.470576$, $C_2 \approx 0.0798678$ te $C_3 \approx 0.0222603$.

iii) Za $n = 3$, $x_1 = -\sqrt{3}/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}/2$ te $m < 6$, $s = 0$, dobiju se ocjene u slučaju tri čvora:

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x - \frac{\pi}{3} \left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] \right| \le C_m \cdot S(f,m),$$

gdje su $C_1 \approx 0.307328$, $C_2 \approx 0.0344436$, $C_3 \approx 0.00549894$, $C_4 \approx 0.00103907$ te $C_5 \approx 0.000246304$.

Kao što je intuitivno i jasno, konstante postaju to manje što je više čvorova u formuli (vidi Teorem 2.4) te što je višeg reda derivacija dane funkcije. □

5 Literatura

[1] M. Abramowitz, L. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulae, Graphs and Mathematical Tables,* Applied Math. Series 55, National Bureau of Standards, 4th printing, Washington, 1965.

[2] K. A. Andréief, *N'skol'ko slov' po povodu teorem' P. L. Čebyševa i V. G. Imšeneckogo ob' opred'lennyu' integralah' ot' proizvedenyja funkcii,* Soobščenja i Protokol Zasedanii Matematišeskogo Obšestva pri Imperatorskom Har'kovskom Universite, **1**(1883), 110-123.

[3] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications),* The University Press, Cambridge, 1999.

[4] P. Cerone, S. S. Dragomir, *Some new Ostrowski-type bounds for the Čebyšev functional and applications,* J. Math. Inequal. **8**(1)(2014), 159-170.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities,* Cambridge University Press, 1934.

[6] R. S. Johnson, *Second-order ordinary differential equations: Special functions, Sturm-Liouville theory and transforms,* Ventus Publishing, 2012.

[7] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A M. Fink, *Classical and new Inequalities in Analysis,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1993.

[8] C. E. M. Pearce, J. Pečarić, N. Ujević, S. Varošanec, *Generalizations of some inequalities of Ostrowski-Grüss type,* Mathematical Inequalities and Applications, **3**(1)(2000), 25-34.

[9] J. Pečarić, M. Ribičić Penava, A. Vukelić, *Bounds for the Chebyshev functional and applications to the weighted integral formulae,* Appl. Math. Comput. **268**(2015), 957-965.

[10] J. Pečarić, M. Ribičić Penava, A. Vukelić, *Euler's method for weighted integral formulae,* Appl. Math. Comput. **206**(2008), 445-456.

[11] A. Ralston, P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis,* Dover Publications, New York, 2001.

[12] R. Scitovski, *Numerička matematika,* Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 1999.

[13] N. Ujević, *Sharp Inequalities of Simpson Type and Ostrowski Type,* Computers and Mathematics with Applications, **48**(2004), 145-151.

[14] N. Ujević, *Uvod u numeričku matematiku,* skripta PMF-a, Split, 2004.

[15] Gaussian quadrature, University od Maryland. Dostupno na: `http://www2.math.umd.edu/~mariakc/teaching/gaussian.pdf`, pristupljeno: 27.08.2015.