Benfordova razdioba u analizi valutnog rizika

Stanić, Dajana

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Dajana Stanić

Benfordova razdioba u analizi valutnog rizika

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Dajana Stanić

Benfordova razdioba u analizi valutnog rizika

Diplomski rad

Voditelj: doc.dr.sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod

Benfordov zakon, poznat i kao fenomen prve znamenke, tvrdi da se određene znamenke pojavljuju češće od ostalih kao prve znamenke. Prema Benfordovom zakonu u skupu brojeva s bazom 10 broj 1 ima vjerojatnost pojavljivanja kao prve znamenke 30.10%, nakon njega slijedi broj 2 s vjerojatnošću pojavljivanja od 17.61%, itd. Što je broj veći manja je vjerojatnost njegova pojavljivanja kao prve znamenke. Tako broj 9 ima najmanju vjerojatnost pojavljivanja kao prve znamenke. Benfordov zakon daje vjerojatnosti pojavljivanja i druge, treće i ostalih znamenki ili kombinacija znamenki.

Ovaj je fenomen prvi zapazio američki astronom Simon Newcomb u 19. stoljeću. On je primjetio da su stranice logaritamskih knjiga u prvom dijelu više iskorištene i upotrebljivanije od kasnijih stranica, što upućuje da su ljudi više tražili brojeve čiji logaritmi počinju znamenkom 1. Objavio je rad *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers* 1881. godine u časopisu American Journal of Mathematics [18], ali on je ostao nezapažen. Zakon nosi ime po američkom inženjeru i fizičaru Franku Albertu Benfordu koji je došao do istog saznanja kao i Newcomb. Objavio je 1938. godine o tome rad *The Law of Anomalous Numbers* u časopisu Proceedings of the American Philosophical Society [2]. Benford se koristio puno većom bazom podataka nego Newcomb i dao je matematičku pozadinu Benfordovog zakona.

Tek je s razvojem tehnologije Benfordov zakon postao primjenjiv na velikim skupovima podataka i koristi se u različitim poljima kao što su matematika, fizika, ekonomija, bankarstvo, informatika, revizija i drugdje. Posebno je koristan zbog otkrivanja računovodstvenih prijevara i lažiranja podataka kod plaćanja poreza pa je u nekim državama (npr. Kalifornija) postao standardan alat u otkrivanju utaja poreza. Isto tako, Benfordov zakon se u računarstvu koristi da se preko veličine datoteka u mapama otkriju anomalije, a mogu se otkriti i modifikacije JPEG fotografija. Naime, PEG koeficijenti u JPEG fotografijama slijede Benfordovu distribuciju ako su komprimirani JPEG tehnikom samo jednom. Zanimljivo otkriće pomoću Benfordovog zakona bilo je otkrivanje lažnih makroekonomskih izvještaja Grčke prilikom pristupanja Europskoj Uniji. Tek nakon ulaska Grčke u Europsku Uniju provele su se analize primjenom Benfordovog zakona. Zapaženo je veliko odstupanje izvještaja u odnosu na Benfordov zakon, što sugerira na manipulacije nad podacima.

Vidimo da Benfordov zakon ima široku primjenu, ali ne može se primijeniti na svim podacima. Očekivano, podaci koji su šifrirani (poštanski brojevi, brojevi telefona, OIB-i, itd.), podaci koji su ograničeni minimalnom i maksimalnom vrijednošću, podaci koje je čovjek dodijelio (npr. cijene), te podaci izraženi različitim mjernim jedinicama ne prate Benfordov zakon. S druge strane, podaci koji se pojavljuju prirodno, financijske transakcije (uplate, isplate, refundiranje) i većina računovodstvenih podataka su Benfordovi.

Jedna od glavnih zadaća ovog rada je analizirati prate li valutni tečajevi prema nekoj osnovnoj valuti Benfordovu distribuciju. No prije toga ćemo proučiti matematičku pozadinu Benfordovog zakona.

U prvom poglavlju definiramo Benfordov niz i uniformno distribuiran modulo 1 niz te dajemo teoreme o uniformno distribuirano modulo 1 nizovima. Najvažniji takav teorem je Weylov kriterij kojeg ćemo i dokazati. Navodimo najvažnija svojstva Benfordovih nizova od kojih su neka povezana s uniformno distribuiranim modulo 1 nizovima.

U drugom poglavlju definiramo Benfordov zakon te na konkretnom primjeru statističkim testom ispitujemo prate li empirijski podaci Benfordovu distribuciju. Navodimo poznati zakon o distribuciji riječi u tekstu, tzv. Zipfov zakon, te objašnjavamo njegovu povezanost s Benfordovim zakonom. Na kraju poglavlja dajemo objašnjenje fenomena prve znamenke.

Nakon što smo dali matematičku osnovu Benfordovog zakona, u trećem poglavlju uvodimo osnovne pojmove vezane za trgovanje valutama i valutni rizik. Na kraju rada testiramo prate li razdiobe valutnih tečajeva na slučajno odabrane datume Benfordovu razdiobu.

2 Benfordovi nizovi

2.1 Značajne znamenke i signifikantna funkcija

Definicija 2.1. Za svaki realan broj x različit od 0, *prva značajna decimalna znamenka* broja x, u oznaci $D_1(x)$, je jedinstveni prirodni broj $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ koji zadovoljava

$$10^k j \leq |x| < 10^k(j+1),$$

za jedinstveni $k \in \mathbb{Z}$.
Za svaki $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$, *m-ta značajna decimalna znamenka* broja x, u oznaci $D_m(x)$, je jedinstveni prirodni broj $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ koji zadovoljava

$$10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j \right) \leq |x| < \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j + 1 \right),$$

za jedinstveni $k \in \mathbb{Z}$.
Definiramo $D_m(0) := 0, \forall m \in \mathbb{N}$.

Primijetimo da prema Definiciji 2.1 prva značajna znamenka $D_1(x)$ broja $x \neq 0$ nikada nije jednaka 0. Druga, treća, itd. značajna znamenka može biti bilo koji broj iz skupa $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Primjer 2.1. *Odredimo značajne decimalne znamenke broja* $\sqrt{2} = 1.41421356237$.
$D_1(\sqrt{2}) = D_1(-\sqrt{2}) = D_1(100\sqrt{2}) = D_1(0.0001\sqrt{2}) = 1,$
$D_2(\sqrt{2}) = D_2(-\sqrt{2}) = D_2(100\sqrt{2}) = D_2(0.0001\sqrt{2}) = 4,$
$D_7(\sqrt{2}) = D_7(-\sqrt{2}) = D_7(100\sqrt{2}) = D_7(0.0001\sqrt{2}) = 3.$

Definicija 2.2. Za $x \neq 0$ *mantisa* (ili signifikant) $S(x)$ je jedinstveni broj iz intervala $[1, 10\rangle$ za koji vrijedi $|x| = 10^k S(x)$, za jedinstveni $k \in \mathbb{Z}$.
Posebno, za $x = 0$ definiramo $S(0) := 0$.
Funkcija $S : \mathbb{R} \longrightarrow [1, 10\rangle$ koja svakom realnom broju pridružuje njegovu mantisu zove se *(decimalna) signifikantna funkcija.* Signifikantnu funkciju $S(x)$ definiramo

$$S(x) = \frac{x}{10^{n-1}}, x \in [10^{n-1}, 10^n\rangle, n \in \mathbb{N}.$$

Navedimo još neka svojstva signifikantne funkcije $S(x)$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$,

i) $S(10^k x) = S(x)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$,

ii) $S(S(x)) = S(x)$,

iii) $S(x) = 10^{\log|x| - \lfloor \log|x| \rfloor}$ za svaki $x \neq 0$.

Primjer 2.2. *Neka je* $x = 54359$*. Odredimo mantisu* $S(54359)$*.*

$$\begin{aligned} S(x) &= 10^{\log|x| - \lfloor \log|x| \rfloor} \\ &= 10^{\log|54359| - \lfloor \log|54359| \rfloor} \\ &= \frac{10^{\log 54359}}{10^{\lfloor \log|54359| \rfloor}} \\ &= \frac{54359}{10^4} \\ &= 5.4359. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $S(5.4359) = S(54359) = 5.4359 \in [1, 10\rangle$*.*

Mantisa jedinstveno određuje značajne znamenke i obratno, značajne znamenke jednoznačno određuju mantisu. Taj odnos između mantise i značajnih znamenki dobijemo izravno iz Definicija 2.1 i 2.2, a prikazan je u sljedećoj Propoziciji 2.1.

Propozicija 2.1. *Za svaki realan broj* x *vrijedi:*

i) $S(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$,

ii) $D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$, *za svaki* $m \in \mathbb{N}$.

Tako mantisu broja $S(x)$ možemo izraziti kao eksplicitnu funkciju značajnih znamenki tog broja i obrnuto, m-tu decimalnu značajnu znamenku $D_m(x)$ broja možemo izraziti pomoću funkcije signifikanti.

A. Berger i T. P. Hill su detaljnije obradili značajne znamenke i signifikantne funkcije u svom radu *A basic theory of Benford's law* iz 2011. godine [4].

2.2 Benfordovi nizovi i uniformno distribuirani nizovi

Označavat ćemo logaritam broja x u bazi 10 s $\log x$, dok je $\ln x$ prirodni logaritam broja x.

Za distribuciju prve značajne znamenke D_1 u nekim nizovima brojeva u bazi 10 vrijedi

$$P(D_1 = d_1) = \log\left(1 + \frac{1}{d_1}\right), \tag{1}$$

gdje je $d_1 = 1, 2, \dots, 9$. Takve nizove zovemo Benfordovi nizovi.

Definicija 2.3. Niz realnih brojeva (x_n) je *Benfordov niz* u bazi 10 ako

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : S(x_n) \le t\}|}{N} = \log t \text{ za svaki } t \in [1, 10\rangle.$$

Ekvivalentno, niz je Benfordov ako $\forall m \in \mathbb{N}$, za sve $d_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}$ i za sve $d_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, j \ge 2$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : D_j(x_n) = d_j \text{ za } j = 1, 2, \dots, m\}|}{N} = \log\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right).$$

Definiciju 2.3 za prvu značajnu znamenku interpretiramo na sljedeći način.
Niz (x_n) je Benfordov niz u bazi 10 ako za slučajno odabranih N elemenata u nizu (x_n), vjerojatnost da su prve značajne znamenke tih elemenata jednake d konvergira prema

$$\log(1 + d^{-1})$$

kada $N \to +\infty$, za svaki $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Slično se interpretira za ostale decimalne značajne znamenke.

Primjeri nekih Benfordovih nizova u bazi 10 su nizovi potencija (2^n) i (3^n), niz faktorijela $(n!)$, niz Fibonaccijevih brojeva (F_n), dok su primjeri nizova koji nisu Benfordovi niz prirodnih brojeva (n), niz prostih brojeva (p_n), niz logaritama $(\log n)$.

Propozicija 2.2. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Tada*

i) (x_n) je Benfordov niz ako i samo ako je niz (αx_n^k) također Benfordov, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ tako da $\alpha k \neq 0$,

ii) za $x_n \neq 0$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$, (x_n) je Benfordov niz ako i samo ako je (x_n^{-1}) Benfordov niz.

Definicija 2.4. Niz (x_n) realnih brojeva je uniformno distribuiran niz na intervalu $[a, b]$ ako za svaki podinterval $[c, d]$ od $[a, b]$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : (x_n) \in [c, d]\}|}{N} = \frac{d - c}{b - a}. \tag{2}$$

Ako je niz (x_n) realnih brojeva uniformno distribuiran na intervalu $[a,b]$, onda (2) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \tag{3}$$

gdje je $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann integrabilna funkcija.

Svojstva Benfordovog niza mogu se opisati pomoću niza koji je uniformno distribuiran modulo 1. Stoga ćemo prvo definirati taj niz i navesti neka njegova svojstva.

Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Tada definiramo cijeli dio realnog broja, u oznaci $[x_n]$, s $[x_n] := \sup\{m\in\mathbb{Z} : m \le x_n\}$. Decimalni dio realnog broja x_n, u oznaci $\langle x_n\rangle$, definiramo s $\langle x_n\rangle := x_n - [x_n]$. Primijetimo da je $0 \le \langle x_n\rangle < 1$.

Definicija 2.5. Niz (x_n) realnih brojeva je uniformno distribuiran modulo 1 niz ako za svaki a, b, tako da je $0\le a<b<1$, vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1\le n\le N : \langle x_n\rangle \in [a,b]\}|}{N} = b-a. \tag{4}$$

(Uvjet kaže da proporcija niza $\langle x_n\rangle$ koji leži u $[a,b]$ konvergira prema duljini intervala $b-a$.)

Primjedba 2.1. Rezultat će biti isti i ako zamijenimo $[a,b]$ s $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ ili $\langle a,b\rangle$.

Primjer 2.3. *Niz* $(n\pi) = (\pi, 2\pi, 3\pi, \dots)$ *je uniformno distribuiran modulo 1. Slično, niz* $(n\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots)$ *je uniformno distribuiran modulo 1, dok npr. niz* $(2n) = (2,4,6,\dots)$ *očito nije uniformno distribuiran modulo 1 jer je* $\langle 2n\rangle = 0$ *za svaki* $n\in\mathbb{N}$.

Primjer 2.4. *Niz* $(\log n)$ *nije uniformno distribuiran modulo 1. Dobije se da za sve* $0\le a<b<1$ *niz*

$$\left(\frac{|\{1\le n\le N : \langle \log n\rangle \in [a,b]\}|}{N}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

ima donju granicu $\frac{1}{9}(10^{b-a}-1)$ *i gornju granicu* $\frac{10}{9}(1-10^{-(b-a)})$.

Neka je $\chi_{[a,b\rangle}$ karakteristična funkcija intervala $[a,b\rangle \subset [0,1\rangle$. Tada (4) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b\rangle}(\langle x_n\rangle) = \int_0^1 \chi_{[a,b\rangle}(x)dx. \tag{5}$$

Teorem 2.1. *Niz realnih brojeva* (x_n) *je uniformno distribuiran modulo 1 ako i samo ako za svaku realnu neprekidnu funkciju* f *definiranu na intervalu* $[0,1]$ *vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\langle x_n\rangle) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{6}$$

Dokaz. Neka je (x_n) uniformno distribuiran modulo 1 niz i neka je $f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \chi_{[a_i,a_{i+1}]}(x)$ *step* funkcija na $[0,1]$ tako da $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1$. Iz relacije (5) slijedi da za takvu funkciju f vrijedi (6).
Pretpostavimo sada da je f realna neprekidna funkcija definirana na $[0,1]$. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$, prema definiciji Riemannovog integrala, postoje dvije *step* funkcije f_1 i f_2 tako da vrijedi

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \text{ i } \int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx \leq \varepsilon$$

za svaki $x \in [0,1]$. Tada vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \varepsilon &\leq \int_0^1 f_1(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\langle x_n \rangle) \\
&\leq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\langle x_n \rangle) \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\langle x_n \rangle) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(\langle x_n \rangle) = \int_0^1 f_2(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vidimo da za ovakvu neprekidnu funkciju f vrijedi relacija (6).
Obratno, neka je dan niz (x_n) i pretpostavimo da vrijedi (6) za svaku realnu neprekidnu funkciju f na $[0,1]$. Neka je $[a,b\rangle \subset [0,1\rangle$ proizvoljan. Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoje dvije neprekidne funkcije g_1 i g_2 tako da vrijedi

$$g_1(x) \leq \chi_{[a,b\rangle}(x) \leq g_2(x) \text{ i } \int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))dx \leq \varepsilon$$

za svaki $x \in [0,1]$. Tada vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
b - a - \varepsilon &\leq \int_0^1 g_2(x)dx - \varepsilon \leq \int_0^1 g_1(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(\langle x_n \rangle) \\
&\leq \liminf_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle \in [a,b]\}|}{N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle \in [a,b]\}|}{N} \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_2(\langle x_n \rangle) = \int_0^1 g_2(x)dx \leq \int_0^1 g_1(x)dx + \varepsilon \leq b - a + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kako je ε proizvoljno mali, vrijedi (4), tj. (x_n) je uniformno distribuiran modulo 1 i time je dokaz završen. □

Lema 2.1. *Niz (x_n) je uniformno distribuiran modulo 1 ako i samo ako je niz $(kx_n + \alpha)$ uniformno distribuiran modulo 1 za svaki $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Dovoljnost ove tvrdnje je očita kada stavimo da je $k = 1$, $b = 0$. Kako bi dokazali nužnost, pretpostavimo da je niz (x_n) uniformno distribuiran modulo 1. Napomenimo da vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle \in C\}|}{N} = \lambda_{0,1}(C),$$

gdje je C konačna unija intervala i $\lambda_{0,1}$ *Lebesguova mjera* na intervalu $[0,1]$. Za Lebesguovu mjeru na intervalu $[0,1]$ vrijedi $\lambda_{0,1}([a,b]) = b-a$ za svaki interval $[a,b] \subset [0,1]$.
Za $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ i za sve $0 \leq a < b < 1$ vrijedi

$$\{x : \langle kx \rangle \in [a,b]\} = \begin{cases} \left\{x : \langle x \rangle \in \bigcup_{j=0}^{k-1} \left[\frac{j}{k}, \frac{j+b-a}{k}\right]\right\} & \text{ako je } k > 0, \\ \left\{x : \langle x \rangle \in \bigcup_{j=0}^{|k|-1} \left[\frac{j+1-b+a}{|k|}, \frac{j+1}{|k|}\right]\right\} & \text{ako je } k < 0. \end{cases}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle kx_n \rangle \in [a,b]\}|}{N} &= \begin{cases} \lambda_{0,1}\Big(\bigcup_{j=0}^{k-1} \left[\frac{j}{k}, \frac{j+b-a}{k}\right]\Big) & \text{ako je } k > 0, \\ \lambda_{0,1}\Big(\bigcup_{j=0}^{|k|-1} \left[\frac{j+1-b+a}{|k|}, \frac{j+1}{|k|}\right]\Big) & \text{ako je } k < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} k\frac{b-a}{k} & \text{ako je } k > 0, \\ |k|\frac{b-a}{|k|} & \text{ako je } k < 0, \end{cases} \\ &= b-a, \end{aligned}$$

što nam pokazuje da je niz (kx_n) uniformno distribuiran modulo 1.
Slično, za svaki $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ i za sve $0 \leq a < b < 1$ vrijedi

$$\{x : \langle k + \alpha \rangle \in [a,b]\} = \begin{cases} \{x : \langle x \rangle \in [0, b-a-\alpha] \cup [1-\alpha, 1\rangle\} & \text{ako je } b-a \geq \alpha, \\ \{x : \langle x \rangle \in [1-\alpha, 1+b-a-\alpha]\} & \text{ako je } b-a < \alpha. \end{cases}$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $0 < \alpha < 1$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle x_n + \alpha \rangle \in [a,b]\}|}{N} \\ &= \begin{cases} \lambda_{0,1}([0, b-a-\alpha] \cup [1-\alpha, 1\rangle) & \text{ako je } b-a \geq \alpha, \\ \lambda_{0,1}([1-\alpha, 1+b-a-\alpha]) & \text{ako je } b-a < \alpha. \end{cases} \\ &= b-a, \end{aligned}$$

što nam pokazuje da je niz $(x_n + b)$ također uniformno distribuiran modulo 1. □

Teorem 2.2. *Ako je niz (x_n) uniformno distribuiran modulo 1, onda je i niz (y_n) sa svojstvom $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \alpha$, gdje je α realna konstanta, uniformno distribuiran modulo 1.*

Dokaz. Zbog Leme 2.1 dovoljno je pokazati da tvrdnja vrijedi za $\alpha = 0$.
Neka je $\varepsilon_n = x_n - y_n$ za $n \geq 1$. Neka su a, b takvi da $0 < a < b < 1$ i izaberemo ε tako da

$$0 < \varepsilon < \min\Big(a, 1-b, \frac{b-a}{2}\Big).$$

Postoji $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tako da $-\varepsilon \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$ za $n \geq N_0$.
Neka je $n \geq N_0$, tada $a+\varepsilon \leq \langle x_n \rangle < b-\varepsilon$ povlači $a \leq \langle y_n \rangle < b$. S druge strane, $a \leq \langle y_n \rangle < b$ povlači $a - \varepsilon \leq \langle x_n \rangle < b + \varepsilon$. Dakle, ako je $\sigma = (x_n)$ i $\omega(y_n)$, imamo

$$\begin{aligned}
b - a - 2\varepsilon &= \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon\rangle\}|}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle y_n \rangle \in [a, b\rangle\}|}{N} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle y_n \rangle \in [a, b\rangle\}|}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle\}|}{N} \\
&= b - a + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Kako je ε proizvoljno mali, niz $\omega = (y_n)$ zadovoljava (4) za sve a i b iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$. □

Propozicija 2.3. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \theta$ za neki iracionalan broj θ, onda je (x_n) uniformno distribuiran modulo 1.

ii) Ako je (x_n) periodičan, tj. $x_{n+p} = x_n$ za neki $p \in \mathbb{N}$ i za sve n, onda je $(n\theta + x_n)$ uniformno distribuiran modulo 1 ako i samo ako je θ iracionalan broj.

iii) Niz (x_n) je uniformno distribuiran modulo 1 ako i samo ako je $(x_n + \alpha \log n)$ uniformno distribuiran modulo 1 za sve $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) Ako je (x_n) je uniformno distribuiran modulo 1 i neopadajući niz, tada je $(x_n / \log n)$ neomeđen niz.

2.3 Weylov kriterij

Sada ćemo iskazati važan teorem za uniformno distribuirane modulo 1 nizove, poznat kao Weylov kriterij. Dokaz ovog teorema su dali L. Kupiers i H. Niederreiter u svom radu *Uniform distribution of sequences* 1974. godine [16].

Teorem 2.3 (**Weylov kriterij**). *Niz realnih brojeva (x_n) je uniformno distribuiran modulo 1 ako i samo ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i h x_j} = 0,$$

za svaki $h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Dokaz. Kako je $e^{2\pi i x_n} = e^{2\pi i \langle x_n \rangle}$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_n = \langle x_n \rangle$.
Za dokazivanje nužnosti, pretpostavimo da je (x_n) uniformno distribuiran modulo 1.
Ako je $\chi_{[a,b]}$ karakteristična funkcija intervala $[a, b]$ možemo zapisati definiciju uniformne distribuiranosti u obliku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(x_j) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x)dx.$$

Iz tog oblika dobijemo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)dx,$$

gdje je f *step* funkcija, tj. linearna kombinacija karakterističnih funkcija intervala. Neka je g neprekidna funkcija na $[0, 1]$ (tako da $g(0) = g(1)$). Tada, za proizvoljni $\varepsilon > 0$, možemo pronaći *step* funkciju f tako da je $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Imamo nejednakosti

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(x_j) - \int_0^1 g(x)dx\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(g(x_j) - f(x_j))\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \int_0^1 f(x)dx\right| \\
&+ \left|\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx\right| \\
&\leq 2\varepsilon + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \int_0^1 f(x)dx\right|.
\end{aligned}$$

Zadnji izraz pod apsolutnom vrijednošću konvergira u nulu pa vrijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(x_j) - \int_0^1 g(x)dx\right| \leq 2\varepsilon.$$

Kako je ε proizvoljan, dobijemo izraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(x_j) = \int_0^1 g(x)dx$$

koji vrijedi, specijalno, za $g(x) = e^{2\pi i h x}$. Ako je $h \neq 0$, onda

$$\int_0^1 e^{2\pi i h x} dx = 0.$$

Kako bi dokazali dovoljnost, pretpostavimo da vrijedi Weylov kriterij. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(x_j) = \int_0^1 g(x) dx,$$

gdje je $g(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^{2\pi i h_k x}$ trigonometrijski polinom.
Neka je f neka neprekidna funkcija na $[0,1]$ tako da $f(0) = f(1)$.
Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ možemo pronaći trigonometrijski polinom g tako da je $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.
Kao i prvom dijelu dokaza, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Sada promotrimo interval $[a,b] \subset [0,1\rangle$. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ možemo pronaći neprekidne funkcije f_1, f_2 (tako da $f_1(0) = f_1(1), f_2(0) = f_2(1)$) tako da vrijedi

$$f_1 \leq \chi_{[a,b]} \leq f_2 \text{ i } \int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Imamo nejednakosti

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(x_j) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_1(x_j) = \int_0^1 f_1(x) dx \\
&\geq \int_0^1 f_2(x) dx - \varepsilon \\
&\geq \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x) dx - \varepsilon
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(x_j) &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_2(x_j) = \int_0^1 f_2(x) dx \\
&\leq \int_0^1 f_1(x) dx + \varepsilon \\
&\leq \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x) dx + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kako je ε proizvoljan, pokazali smo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(x_j) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x) dx = b - a$$

pa je (x_n) uniformno distribuiran modulo 1. □

Primjer 2.5. *Ponašanje niza* $(x_n) = (n\alpha)$ *ovisi o tome je li* α *racionalan ili iracionalan broj. Ako je* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *lako se vidi da* $\langle n\alpha \rangle$ *može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti u* $[0,1\rangle$*, tj. ako je* $\alpha = \frac{p}{q}(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, nzd(p,q) = 1)$*, onda* $\langle n\alpha \rangle$ *poprima* q *vrijednosti*

$$0, \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle \frac{2p}{q} \right\rangle, \ldots, \left\langle \frac{(q-1)p}{q} \right\rangle.$$

U ovom slučaju $\langle n\alpha \rangle$ *nije uniformno distribuiran modulo 1.*
Ako je $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *imamo drugačiju situaciju. Primijenimo Weylov kriterij. Za* $h \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $e^{2\pi i h\alpha} \neq 1$*, imamo*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i h j \alpha} = \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i h n \alpha} - 1}{e^{2\pi i h \alpha} - 1}.$$

Stoga,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i h j \alpha} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{2}{|e^{2\pi i h \alpha} - 1|} \ \ i \ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{2}{|e^{2\pi i h \alpha} - 1|} = 0.$$

Dakle, $\langle n\alpha \rangle$ *je uniformno distribuiran modulo 1 niz.*

Sada ćemo iskazati Teoreme 2.4 i 2.5 koji nam pokazuju još neka svojstva uniformno distribuiranih modulo 1 nizova. Za dokaze se upućuje čitatelja na [16].

Teorem 2.4. *Neka su* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tako da* $a < b$ *i* f *dva puta diferencijalna funkcija na* $[a, b]$ *tako da* $f''(x) \geq \rho > 0$ *ili* $f''(x) \leq -\rho < 0$ *za* $x \in [a, b]$*. Tada*

$$\left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq (|f'(b) - f'(a)| + 2)\left(\frac{4}{\sqrt{\rho}} + 3 \right). \tag{7}$$

Teorem 2.5 (Fejerov teorem). *Ako je niz realnih brojeva (f(n)) uniformno distribuiran modulo 1, onda*

$$\limsup_{n \to \infty} n|f(n+1) - f(n)| = \infty.$$

2.4 Svojstva Benfordovog niza

Teorem 2.6. *Niz realnih brojeva* (x_n) *je Benfordov niz ako i samo ako je niz* $(\log x_n)$ *uniformno distribuiran modulo 1.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Tada, za svaki $s \in [0, 1\rangle$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : \langle \log x_n \rangle \le s\}|}{N} &= \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : \log x_n \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k, k+s]\}|}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : x_n \in [10^k, 10^{k+s}]\}|}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : S(x) \le 10^s\}|}{N}.
\end{aligned}$$

Prema Definicijama 2.3 i 2.5 niz je Benfordov ako i samo ako

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : S(x) \le 10^s\}|}{N} = \log 10^s = s \text{ za svaki } s \in [0, 1\rangle,$$

tj. ako i samo ako je $(\log x_n)$ uniformno distribuiran modulo 1. □

Primjer 2.6. *Nizovi* $(n!)$ *i* (n^n) *su Benfordovi nizovi, a to možemo dokazati pomoću Weylovog kriterija (Teorem 2.3) i Teorema 2.4.*
Dokažimo tvrdnju prvo za (n^n). *Neka je* $h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *i* $f(n) = hn \log n$ *u (7).*

$$f^{'}(n) = h \log n + h$$
$$f^{''}(n) = \frac{h}{n}\left(\Rightarrow \rho = \frac{|h|}{N}\right)$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n \log n}\right| &\le \frac{1}{N}(|h|\log N + 2)\left(4\sqrt{\frac{N}{|h|}} + 3\right) \\
&= O\left(\frac{\log N}{N^{\frac{1}{2}}}\right) \to 0 \textit{ kada } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Prema Weylovom kriteriju (Teorem 2.3) $(n \log n)$ *je uniformno distribuiran modulo 1 pa je prema Teoremu 2.6* (n^n) *Benfordov niz.*

Za dokaz da je $(n!)$ *Benfordov niz pogledajmo prvo Stirlingovu formulu*

$$n! \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{(n+\frac{1}{2})} e^{-n}.$$

Sljedeći niz

$$\log(n!) - \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - \frac{1}{\ln 10} n\right)$$

konvergira prema konstanti kada $n \to \infty$ *i prema Teoremu 2.2 treba pokazati da je niz* $\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + kn\right)$ *uniformno distribuiran modulo 1 (gdje je* $k = -\frac{1}{\ln 10}$ *konstanta).*
Neka je $h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *i* $f(n) = h(n+\frac{1}{2})\log n + hkn$ *u (7).*

$$f^{'}(n) = h\log n + h + \frac{h}{2n} + hk$$

$$f^{''}(n) = \frac{h}{n} - \frac{h}{2n^2}\left(\Rightarrow \rho = |h|\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2}\right)\right)$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| &\leq \frac{1}{N}\left(|h|\log N + \left|\frac{h}{2}\right|\left(\frac{1}{N} - 1\right) + 2\right)\left(\frac{4\sqrt{2}N}{\sqrt{|h|(2N-1)}} + 3\right) \\ &= O\left(\frac{\log N}{N^{\frac{1}{2}}}\right) \to 0 \textit{ kada } N \to \infty. \end{aligned}$$

Prema Weylovom kriteriju (Teorem 2.3) $(\log n!)$ *je uniformno distribuiran modulo 1 pa je prema Teoremu 2.6* $(n!)$ *Benfordov niz. Sličan dokaz da je* $(n!)$ *Benfordov niz dao je P. Diaconis u članku* The Distribution of Leading Digits and Uniform Distribution Mod 1 *1977. godine [11].*

Teorem 2.7. *Ako su* a, b, α, β *realni brojevi takvi da je* $a \neq 0$ *i* $|\alpha| > |\beta|$ *onda je* $(\alpha^n a + \beta^n b)$ *Benfordov niz ako i samo ako je* $\log|\alpha|$ *iracionalan broj.*

Dokaz. Kako su $a \neq 0$, $|\alpha| > |\beta|$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta^n b}{\alpha^n a} = 0$, onda slijedi

$$\log|\alpha^n a + \beta^n b| - \log|\alpha^n a| = \log\left|1 + \frac{\beta^n b}{\alpha^n a}\right| \to 0,$$

iz čega vidimo da je $(\log|\alpha^n a + \beta^n b|)$ uniformno distribuiran modulo 1 ako i samo ako je $(\log|\alpha^n a|) = (\log|a| + n\log|\alpha|)$ uniformno distribuiran modulo 1. Prema Propoziciji 2.3 to je jedino moguće kada je $\log|\alpha|$ iracionalan broj. U slučaju da je $\log|\alpha|$ racionalan broj onda $\langle\log|a| + n\log|\alpha|\rangle$ postiže konačno mnogo vrijednosti i tada $(\log|a| + n\log|\alpha|)$ nije uniformno distribuiran modulo 1. Pomoću Teorema 2.6 dokaz je završen. □

Primjer 2.7. *Prema Teoremu 2.7 niz* (2^n) *je Benfordov niz jer je* $\log 2$ *iracionalan broj, dok* (10^n) *nije Benfordov niz jer* $\log 10 = 1 \in \mathbb{Q}$.
Slično, (0.2^n), (0.3^n), (3^n), $(0.01 \cdot 0.2^n + 0.2 \cdot 0.01^n)$ *su Benfordovi nizovi, dok* (0.1^n), $(\sqrt{10}^n)$, $(0.1 \cdot 0.02^n + 0.02 \cdot 0.1^n)$ *nisu Benfordovi nizovi.*

Primjer 2.8. *Neka je* (F_n) *niz Fibonnacijevih brojeva, definiran rekurzivnom relacijom* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = F_1 = 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Eksplicitni izraz za* n*-ti član ovog niza dan je Binetovom formulom*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Nadalje, za $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *imamo*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi^{-1})^n).$$

Kako je $\varphi > 1$ *i* $\log\varphi$ *iracionalan broj, prema Teoremu 2.7 niz* (F_n) *je Benfordov.*

Sljedeći Korolar 2.1 pomoću kojeg možemo lako ispitati je li neki niz Benfordov slijedi iz Teorema 2.6 i Fejerovog teorema 2.5.

Korolar 2.1. *Ako je niz realnih brojeva* (x_n) *Benfordov, onda*

$$\limsup_{n\to\infty} n \log\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \infty.$$

Primjer 2.9. *Pomoću Korolara 2.1 možemo dokazati da nizovi* (n^b), (bn), $(log_b n)$ *nisu Benfordovi.*

i) Za (n^b)*:*

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{(n+1)^b}{n^b}\right) = \lim_{n\to\infty} nb \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = b.$$

ii) Za (bn)*:*

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{b(n+1)}{bn}\right) = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

iii) Za $(log_b n)$*:*

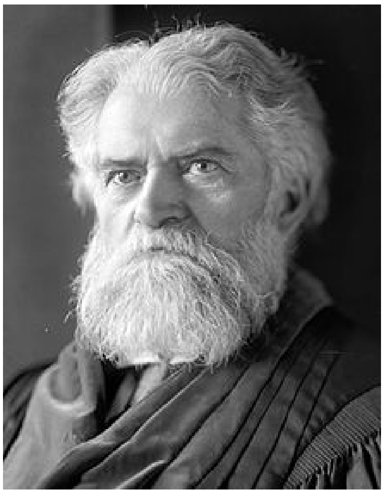
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{\log_b(n+1)}{\log_b n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}\right) \\ &\approx \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0.\end{aligned}$$

3 Benfordov i Zipfov zakon

3.1 Otkriće Benfordovog zakona

3.1.1 Zapažanje Simona Newcomba

Simon Newcomb je rođen 12. ožujka 1835. godine u gradu Wallace u Novoj Škotskoj u Kanadi, a umro je 11. lipnja 1909. godine u Washingtonu. Njegova majka Emily Prince bila je kći poznatog sudca, a otac John Burton Newcomb bio je učitelj u školi. Zbog očeva posla često su se selili po različitim dijelovima Kanade, a iz istog razloga Simon nije imao mogućnost formalnog školovanja nego ga je John podučavao kod kuće. 1851. godine Simon se zaposlio kod jednog travara, doktora Foshaya, u Novom Brunswiku gdje je trebao naučiti koristiti bilje u svrhu liječenja bolesti. Nakon dvije godine tamošnjeg rada postao je nezadovoljan jer je shvatio da doktor Foshay nema znanstveni pristup, nakon čega je dao otkaz i zaputio se s ocem u Maryland gdje je dvije godine proveo obrazujući se. U slobodno vrijeme proučavao je raznolika područja kao što su politička ekonomija i religija, a najviše su ga zanimale matematika i astronomija. Godine 1856. dobio je poziciju privatnog učitelja u neposrednoj blizini Washingtona što mu je omogućilo česta putovanja u Washington gdje je sam učio matematiku u knjižnici. Godine 1857. zaposlen je u Nautical Almanac Office-u u Cambridgeu kako bi računao složenije matematičke operacije. Upisao je Lawrence znanstvenu školu na Hardvardu, a diplomirao je 1858. godine. U kasnijem životu postao je direktor Nautical Almanac Office-a, radio je kao profesor matematike i astronomije na Johns Hopkins sveučilištu, a mnogo godina bio je urednik matematičkog časopisa *American Journal of Mathematics*. Simon Newcomb je umro 1909. godine u Washingtonu od raka mjehura. Na njegovom sprovodu pojavio se čak i tadašnji američki predsjednik William Howard Taft (vidi [17]).



Slika 1: Simon Newcomb (1835 – 1909).

U vrijeme Simona Newcomba nisu postojala džepna računala i računalo se samo pomoću papira i olovke, a složene matematičke operacije su se obavljale pomoću logaritamskih tablica. Newcomb je primijetio da su stranice logaritamskih knjiga u prvom dijelu bile više iskorištene i upotrebljivanije od kasnijih stranica. Došao je do iznenađujućeg zaključka koji je objavljen 1881. godine u matematičkom časopisu *American Journal of Mathematics* pod nazivom *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers* [18].
Članak počinje:
"Da se 10 znamenki ne pojavljuju jednakom frekvencijom očito je svakome tko koristi logaritamske tablice, i primjećuje se kako se prve stranice puno brže habaju nego zadnje. Prva znamenka je znamenka 1 češće nego bilo koja druga znamenka, i frekvencije prve znamenke se smanjuju do znamenke 9."

Članak završava Tablicom 1 koja daje vjerojatnosti pojavljivanja prve i druge znamenke bez eksplicitne formule za dobivene vjerojatnosti.

d	Vjerojatnost prve znamenke d	Vjerojatnost druge znamenke d
0		0.1197
1	0.3010	0.1139
2	0.1761	0.1088
3	0.1249	0.1043
4	0.0969	0.1003
5	0.0792	0.0967
6	0.0669	0.0934
7	0.0580	0.0904
8	0.0512	0.0876
9	0.0458	0.0850

Tablica 1: Newcombova tablica vjerojatnosti pojavljivanja prve i druge znamenke.

Newcombov statistički princip ostao je ignoriran i tek nakon skoro 60 godina dobio je naziv *Benfordov zakon*, po američkom fizičaru Franku Albertu Benfordu koji je razradio i popularizirao Newcombovo zapažanje.

3.1.2 Rad Franka Alberta Benforda

Frank Albert Benford je rođen 1883. godine u Johnstownu u Pennsylvaniji, a umro je 4. prosinca 1948. godine u New Yorku. Bio je američki inženjer elektrotehnike i fizičar, najpoznatiji po ponovnom otkriću i generalizaciji Benfordovog zakona. Također, poznat je i po tome što je 1937. godine izumio instrument za mjerenje indeksa loma stakla. S obzirom da je bio stručnjak za optička mjerenja, objavio je čak 109 članaka u poljima optike i matematike, a autorizirao je 20 patenata za svoje optičke uređaje. Diplomirao je 1910. godine na Sveučilištu u Michiganu, a nakon toga se zaposlio u tvrtki General Electric. Tamo je prvih 18 godina radio u inženjerskom laboratoriju za svjetlost, nakon čega je dobio promaknuće i počeo raditi za istraživački laboratorij. Umro je iznenada 4. prosinca 1948. godine u svom domu (vidi [17]).

Slika 2: Frank Albert Benford (1883 – 1948).

Benfordov rad *The Law of Anomalous Numbers* [2] iz 1938. godine nije ostao nezapažen; Benford je došao do istog saznanja kao i Newcomb, a ta zanimljiva činjenica o različitoj vjerojatnosti pojavljivanja prve znamenke u skupu brojeva dobila je po njemu naziv *Benfordov zakon.*

Newcomb je promatrao samo logaritamske tablice, ali Benford se koristio puno većom bazom podataka. Napravio je analizu pojavljivanja znamenaka po pozicijama na skupu od 20229 slučajeva iz 20 različitih izvora podataka koji nisu povezani jedni s drugima, kao npr. duljine rijeka, površine jezera, brojnost populacija, brojeve iz telefonskog imenika, novinske stranice, kućne adrese, atomska težina,... Prvo je analizirao prve znamenke brojeva u 20 različitih skupova podataka. Prva znamenka je skroz lijeva znamenka broja, npr. prva znamenka od 131249 je 1. Nula ne može biti prva znamenka, što znači da je devet mogućih prvih znamenki $(1, 2, \ldots, 9)$. Znak za negativne brojeve je ignoriran pa je tako prva znamenka od npr. -50.7 upravo 5. Benford je sve ručno računao i za to mu je vjerojatno trebalo dosta vremena. Tek razvojem računala i programskih alata omogućena je jednostavnija i brža primjena Benfordovog zakona na velikoj količini podataka.

Naziv	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Br. podataka
Rijeke, površina	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
Stanovništvo	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
Konstante	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
Novine	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
Specifična toplina	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
Tlak	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
H. P. gubitak	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
Molekularna težina	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
Isušivanje	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
Atomska težina	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
$n^{-1}, \sqrt{n}$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
Dizajn	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
Časopis Reader's Digest	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
Cijene	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
Rendgenska voltaža	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
Statistika za bejzbol	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Vodljivost	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
Adrese	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
$n, n^2, \ldots, n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
Stopa smrtnosti	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
Prosjek	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
Benfordov zakon	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6	

Tablica 2: Benfordova analiza prvih znamenki u 20 različitih skupina podataka.

Benfordovi empirijski rezultati su prikazani u Tablici 2. Pokazuju da je u prosjeku relativna frekvencija pojavljivanja jedinice kao prve znamenke upravo 0.306, što je približno jednako $\log 2$ (ili $\log \frac{2}{1}$). Relativna frekvencija pojavljivanja dvojke kao prve znamenke je 0.185, što je malo veće od $\log \frac{3}{2}$. Nastavljajući tako, relativna frekvencija pojavljivanja devetke kao prve znamenke je 0.047, što je približno jednako $\log \frac{10}{9}$.

Dakle, relativna frekvencija prvih znamenki približno prati logaritamsku relaciju

$$F_d = \log\left(\frac{d+1}{d}\right),$$

gdje je F_d relativna frekvencija prve znamenke d, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3.2 Fenomen prve znamenke

Benfordov zakon tvrdi da u velikom skupu brojeva (matematički skupovi, podaci iz stvarnog života ili kombinacije tih skupova) vodeće značajne znamenke nisu uniformno distribuirane nego su manje vodeće znamenke više distribuirane od većih. Tako je znamenka 1 najviše distribuirana, a znamenka 9 najmanje distribuirana vodeća znamenka. Točnije, Benfordov zakon kaže da značajne znamenke u mnogim skupovima podataka prate posebnu logaritamsku distribuciju.

U svom osnovnom obliku i gledajući u dekadskom sustavu, Benfordov zakon glasi

$$P(D_1 = d_1) = \log(1 + d_1^{-1}), \tag{8}$$

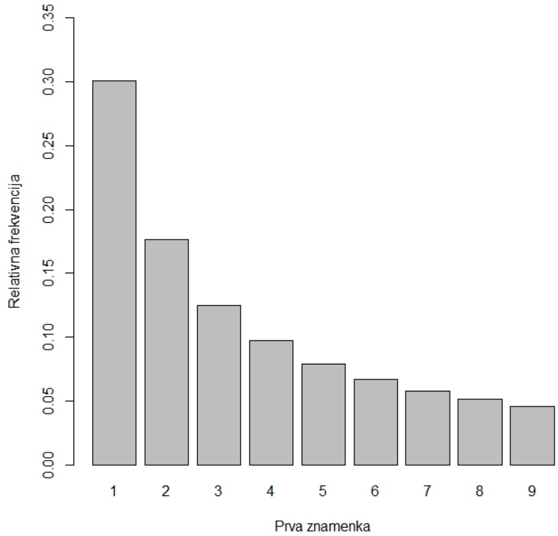
za sve $d_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. D_1 predstavlja prvu značajnu znamenku broja. P je oznaka za vjerojatnost, npr. za slučajnu varijablu X, $P(D_1(X) = 1)$ je vjerojatnost da je prva značajna znamenka od X jednaka 1. U Tablici 3 možemo vidjeti vjerojatnosti pojavljivanja prvih značajnih znamenki prema Benfordovom zakonu izračunate pomoću (8).

d_1	$\log\left(1 + \frac{1}{d_1}\right)$	[%]
1	0.3010	30.10
2	0.1761	17.61
3	0.1249	12.49
4	0.0969	9.69
5	0.0792	7.92
6	0.0669	6.69
7	0.0580	5.80
8	0.0510	5.10
9	0.0458	4.58

Tablica 3: Vjerojatnosti pojavljivanja prvih značajnih znamenki prema Benfordovom zakonu.

Primijetimo da se prva značajna znamenka iz skupa najmanjih znamenki $\{1, 2\}$ realizira s vjerojatnošću od približno 0.5, dok se prva značajna znamenka iz skupa najvećih znamenki $\{8, 9\}$ realizira s vjerojatnošću od približno 0.1.

Na Slici 3 možemo vidjeti i stupčasti dijagram relativnih frekvencija prvih značajnih znamenki prema Benfordovom zakonu.



Slika 3: Stupčasti dijagram relativnih frekvencija prvih značajnih znamenki prema Benfordovom zakonu.

Zajednička distribucija svih decimalnih znamenki u dekadskom sustavu dana je sljedećom potpunijom Definicijom 3.1 Benfordovog zakona.

Definicija 3.1. Benfordov zakon za svaki prirodni broj m glasi

$$P((D_1, D_2, \ldots, D_m) = (d_1, d_2, \ldots, d_m)) = \log\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right) \tag{9}$$

i vrijedi za sve m-torke $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$, gdje je d_1 prirodni broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$, a za $j \geq 2$, d_j je prirodni broj iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Ovdje D_1, D_2, D_3, itd. predstavljaju prvu, drugu, treću, itd. značajnu decimalnu znamenku.

Primjer 3.1. *Izračunajmo vjerojatnost da niz značajnih znamenki bude* 382, *tj. da prva značajna znamenka bude 3, druga 8 i treća 2.*
Prema Definiciji 3.1 vidimo da je

$$\begin{aligned}
P((D_1, D_2, D_3) = (3, 8, 2)) &= \log\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{3} 10^{3-j} d_j\right)^{-1}\right) \\
&= \log(1 + (10^2 d_1 + 10^1 d_2 + 10^0 d_3)^{-1}) \\
&= \log(1 + (10^2 3 + 10^1 8 + 10^0 2)^{-1}) \\
&= \log(1 + (10^2 3 + 10^1 8 + 10^0 2)^{-1}) \\
&= \log \frac{383}{382} \\
&= 0.001135.
\end{aligned}$$

U Tablici 4 dane su vjerojatnosti pojavljivanja prvih, drugih, trećih i četvrtih decimalnih značajnih znamenki prema Benfordovom zakonu. Prema Definiciji 3.1 značajne znamenke su zavisne, a ne nezavisne kako bismo očekivali.

Znamenka	Prva značajna znamenka	Druga značajna znamenka	Treća značajna znamenka	Četvrta značajna znamenka
0		0.11968	0.10178	0.10018
1	0.30103	0.11389	0.10138	0.10014
2	0.17609	0.10882	0.10097	0.10010
3	0.12494	0.10433	0.10057	0.10006
4	0.09691	0.10031	0.10018	0.10002
5	0.07918	0.09668	0.09979	0.09998
6	0.06695	0.09337	0.09940	0.09994
7	0.05799	0.09035	0.09902	0.09990
8	0.05115	0.08757	0.09864	0.09986
9	0.04576	0.08500	0.09827	0.09982

Tablica 4: Vjerojatnosti prve, druge, treće i četvrte značajne znamenke prema Benfordovom zakonu.

Primjer 3.2. *Prema Definiciji 3.1 vjerojatnost da je druga znamenka jednaka 1 je*

$$P(D_2 = 1) = \sum_{j=1}^{9} \log\left(1 + \frac{1}{10j+1}\right) = \log\frac{6029312}{4638501} = 0.1138,$$

tj. druga znamenka je jednaka 1 ako su prve dvije znamenke $11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81$ *ili* 91*. Vjerojatnost da je druga znamenka jednaka 1, uz dani uvjet da je prva znamenka jednaka 1, je*

$$P(D_2 = 1 | D_1 = 1) = \frac{\log 12 - \log 11}{\log 2} = 0.1255.$$

Zavisnost između značajnih znamenki opada eksponencijalno kako se razlika između decimalnih mjesta znamenaka povećava. Npr., iz Definicije 3.1 slijedi

$$P(D_m = 1 | D_1 = 1) = P(D_m = 1) + \mathcal{O}(10^{-m}) \text{ kada } m \to \infty.$$

Ako su (a_n) i (b_n) nizovi realnih brojeva onda izraz $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ kada $n \to \infty$ označava da vrijedi $|a_n| \le c|b_n|$ za svaki n i s nekom konstantom $c > 0$.

Distribucija m-te značajne znamenke eksponencijalno konvergira prema uniformnoj distribuciji na $\{0, 1, \ldots, 9\}$, tj.

$$P(D_m = 1) = \frac{1}{10} + \frac{63}{20 \ln 10} 10^{-m} + \mathcal{O}(10^{-2m}) \text{ kada } m \to \infty.$$

Benfordov zakon vrijedi u bilo kojoj bazi, što nam kaže sljedeća Definicija 3.2.

Definicija 3.2. Benfordov zakon za svaki prirodni broj m u bazi b glasi

$$P((D_1^{(b)}, D_2^{(b)}, \ldots, D_m^{(b)}) = (d_1, d_2, \ldots, d_m)) = \log_b \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right) \tag{10}$$

gdje $\log_b$ označava logaritam po bazi b, a $D_1^{(b)}, D_2^{(b)}, D_3^{(b)}$ itd. predstavljaju prvu, drugu, treću, itd. značajnu znamenku u bazi b. d_1 je prirodni broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, b-1\}$, a za svaki $j \geq 2$, d_j je prirodni broj iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.

Primjedba 3.1. Prva značajna znamenka svakog broja u bazi 2 je upravo 1, stoga je

$$P(D_1^{(2)} = 1) = 1.$$

A. Berger i T. P. Hill u članku *What is... Benford's law?* [5] uvode pojmove Benfordove slučajne varijable i Benfordove funkcije te neka njihova svojstva.

Definicija 3.3. Slučajna varijabla X je Benfordova (u bazi 10) ako

$$\mathbb{P}(S(X) \leq s) = \log s \text{ za sve } 1 \leq s < 10. \tag{11}$$

Jedan od načina analiziranja (11) je pomoću *signifikantne σ-algebre* $\mathbb{S}$ koja je σ-algebra na $\mathbb{R}^+$ generirana signifikantnom funkcijom S, tj. $\mathbb{S} = \mathbb{R}^+ \cap \sigma(S)$ (ili, ekvivalentno, generirana značajnim znamenkama $D_1, D_2, D_3 \ldots$). σ-algebra $\mathbb{S}$ ima sljedeća svojstva:

i) svaki neprazan skup $A \in \mathbb{S}$ je beskonačan s graničnim točkama 0 i $+\infty$,

ii) $\mathbb{S}$ je samoslična s obzirom na množenje s potencijama broja 10, tj. $10^k A = A$ za svaki $A \in \mathbb{S}$ i $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $\mathbb{S}$ je zatvorena na množenje skalarom i cjelobrojno korijenovanje, tj. $\alpha A^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{S}$ za svaki $A \in \mathbb{S}$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Iz svojstva *iii)* slijedi da Benfordov zakon slijedi jedinstvenu vjerojatnosnu distribuciju značajnih znamenki i da su distribucije od $S(X)$ i $S(\alpha X)$ identične za svaki $\alpha > 0$.

Suma slučajnih varijabli generalno nije Benfordova, čak i ako su sumandi nezavisne i Benfordove slučajne varijable. S druge strane, produkt XY dvije nezavisne pozitivne slučajne varijable je Benfordova slučajna varijabla ako je ili X ili Y Benfordova.

Niz potencija $(X, X^2, X^3, \ldots)$ slučajne varijable X je Benfordov niz s vjerojatnošću 1 ako i samo ako

$$\mathbb{P}(\log |X| \text{ je racionalan}) = 0.$$

Niz $(X_1, X_1X_2, X_1X_2X_3, \ldots)$ produkata nezavisnih jednako distribuiranih kopija X_j od X je Benfordov niz s vjerojatnošću 1 ako i samo ako

$$\mathbb{P}(\log |X| \in m^{-1}\mathbb{Z}) < 1 \text{ za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

Oba uvjeta su zadovoljena kad je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla.

Definicija 3.4. Realna funkcija f na $\mathbb{R}^+$ je Benfordova ako

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{|\{0 < t \leq T : S(f(t)) \leq s\}|}{N} = \log s \text{ za svaki } s \in [1, 10\rangle,$$

ili, ekvivalentno, ako je $\log |f|$ (neprekidno) uniformno distibuirana.

Sve funkcije $f(t) = e^{at}p(t)$, gdje je $a \neq 0$ i $p \neq 0$ bilo koji polinom, su Benfordove.

3.3 Testiranje Benfordovog zakona

Sada ćemo na konkretnom primjeru pokazati prati li dani skup empirijskih podataka Benfordovu razdiobu pomoću statističkog testa. Za primjer ćemo uzeti tablicu množenja brojeva $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Podatke prikupljamo iz Tablice 5 koja prikazuje umnoške brojeva $\{1, 2, \ldots, 10\}$, a nama trebaju samo prve znamenke umnožaka.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tablica 5: Tablica množenja brojeva $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

U Tablici 6 vidimo dobivene frekvencije prvih značajnih znamenki. Primijetimo da prve značajne znamenke mogu biti iz skupa brojeva $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Neka su B_i očekivane frekvencije prema Benfordovom zakonu, a N_i opažene frekvencije, $i = 1, 2, \ldots, 9$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
B_i	30.10	17.61	12.49	9.69	7.92	6.69	5.80	5.12	4.58	100
N_i	21	17	13	14	8	9	6	7	5	100

Tablica 6: Očekivane frekvencije prema Benfordovom zakonu B_i i opažene frekvencije N_i.

Za testiranje pripadaju li podaci Benfordovoj distribuciji koristimo Pearsonov χ^2-test. Prilikom testiranja, nulta i alternativna hipoteza su:

H_0: Podaci prate Benfordovu distribuciju,
H_1: Podaci ne prate Benfordovu distribuciju.

U χ^2-testu sve očekivane frekvencije moraju biti veće ili jednake broju 5, a možemo primijetiti u Tablici 6 da je broj očekivanih frekvencija u 9. razredu 4.58. Kako bimo mogli provesti testiranje, združit ćemo 8. i 9. razred. Od sada za testiranje koristimo sljedeću Tablicu 7.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
B_i	30.10	17.61	12.49	9.69	7.92	6.69	5.80	9.70	100
N_i	21	17	13	14	8	9	6	12	100

Tablica 7: Modificirane očekivane frekvencije prema Benfordovom zakonu B_i i opažene frekvencije N_i.

Sada imamo 8 razreda te je df, uz 0 stupnjeva slobode,

$$df = \text{broj razreda} - \text{broj stupnjeva slobode} - 1 = 8 - 0 - 1 = 7.$$

Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ iz tablice kvantila za χ^2 razdiobu iščitamo da je kritična vrijednost

$$\chi^2_\alpha(df) = \chi^2_{0.05}(7) = 14.0671.$$

Računamo sada vrijednost testne statistike.

i	N_i	B_i	$\frac{(N_i-B_i)^2}{B_i}$
1	21	30.10	2.751163
2	17	17.61	0.021130
3	13	12.49	0.020824
4	14	9.69	1.917038
5	8	7.92	0.000808
6	9	6.69	0.797623
7	6	5.80	0.006896
8	12	9.70	0.545360
$\sum$			6.060842

Tablica 8: Računanje testne statistike.

Dakle, vrijednost testne statistike je 6.060842, što možemo dobiti i korištenjem programskog paketa R. Kritično područje je $[\chi^2_{0.05}(7), +\infty\rangle = [14.0671, +\infty\rangle$. Kako je vrijednost dobivene testne statistike 6.060842 manja od 14.0671 nemamo razloga odbaciti nultu hipotezu koja kaže da podaci prate Benfordovu distribuciju uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

3.4 Zipfov zakon

George Kingsley Zipf (1902 – 1950) je bio američki lingvist i filolog te profesor njemačkog jezika na sveučilištu Hardvard. Proučavao je statističke pravilnosti u većim korpusima tekstova različitih jezika (posebno kineskog) koje su dobile po njemu naziv *Zipfov zakon*. Zipf je došao do saznanja da postoji obrnuto proporcionalan odnos između ranga riječi i njezine frekvencije.

Ako se riječi poredaju po frekvenciji te se svakoj riječi odredi rang (najfrekventnija riječ ima rang 1, itd.), onda je umnožak ranga riječi i frekvencije pojavljivanja riječi konstantan. Matematički zapisano, to je

$$\begin{aligned} n \cdot F_n &= K \\ &\text{ili} \\ n \cdot f_n &= k, \end{aligned} \tag{12}$$

gdje je n rang riječi, F_n frekvencija riječi ranga n, f_n relativna frekvencija riječi ranga n i K, k konstante. Dakle, najfrekventnija riječ će se pojaviti dvostruko češće nego druga najfrekventnija riječ, trostruko češće nego treća najfrekventnija riječ, itd.

Suma svih relativnih frekvencija po rangovima od 1 do N u Zipfovoj distribuciji je jednaka

$$\sum_{n=1}^{N} f_n = 1 = k \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \Rightarrow k = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}.$$

Za velike n, imamo

$$f_n = \frac{k}{n} \approx k \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{N} f_n = 1 = k \ln(N+1) \approx k \ln N \Rightarrow k = \frac{1}{\ln N}.$$

Primijetimo da koeficijent k ovisi samo o broju različitih riječi N, a ne o jeziku ili vrsti teksta. Ako jednadžbu (13) zapišemo u bazi N, dobijemo

$$f_n \approx k \log_N \left(1 + \frac{1}{n}\right) = k \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln N}. \tag{14}$$

Matematičar B. Mandelbrot je predložio formulu u slučaju većeg broja ranga n. Imamo

$$F_n = \frac{B}{n^{\alpha}},$$

gdje su B i α jedinstvene konstante. Za $\alpha \approx 1$ imamo Zipfovu formulu (12) i vrijedi $B = K$. Najčešće je $\alpha > 1$. Mandelbrot je naknadno modificirao prethodnu jednadžbu u

$$F_n = \frac{A}{(n+a)^{\alpha}} \text{ tako da je } A = M(\alpha - 1)a^{\alpha-1},$$

gdje su A, a, α konstante, a M je ukupan broj riječi u promatranom tekstu (za detalje vidi [14]).
Znamo da Benfordov zakon u bazi 10 možemo zapisati kao

$$f_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \tag{15}$$

te u bazi N kao

$$f_n = \log_N\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln N}. \tag{16}$$

Iz relacija (14) i (16) vidimo da postoji 1-1 korespondencija između Benfordove distribucije i Zipfove distribucije jer je k u relaciji (14) konstanta. To možemo dokazati na sljedeći način. Neka je rang 1 najfrekventnije riječi u bazi brojeva N, tj. imamo rangove (bazu brojeva) $1, 2, \ldots, N-1$. Pretpostavimo da je $F(1) = 25$ u bazi N. Pojavljivanja riječi možemo zapisati sukcesivno na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccc}
 & 110 & 120 \\
101 & 111 & 121 \\
102 & 112 & 122 \\
103 & 113 & 123 \\
104 & 114 & 124 \\
105 & 115 & 125. \\
\vdots & \vdots & \\
10(N-1) & 11(N-1) &
\end{array}$$

Neka za drugu najfrekventniju riječ vrijedi $F(2) = 15$. Pojavljivanja riječi opet zapišemo sukcesivno na sljedeći način:

$$\begin{array}{cc}
 & 210 \\
201 & 211 \\
202 & 212 \\
203 & 213 \\
204 & 214 \\
205 & 215. \\
\vdots & \\
20(N-1) &
\end{array}$$

Analogno nastavljamo za ostale najfrekventnije riječi.

Primjena Zipfovog zakona je u planiranju jezika za indeksiranje i u planiranju administrativnih poslova biblioteka, a njega koriste i suvremene jezične tehnologije na Internetu.

3.5 Objašnjenje fenomena

Razmotrimo prvo logično i intuitivno objašnjenje Benfordovog zakona. Uzmimo na primjer grad s 10000 stanovnika. Prva značajna znamenka broja stanovnika je 1 i mi želimo doći do prve značajne znamenke 2. To znači da broj stanovnika mora biti 20000, a do promjene broja stanovnika na 20000 potrebno je povećanje prvog broja stanovnika za 100%. Ako sada grad ima 20000 stanovnika potrebno je povećanje od 50% kako bi broj stanovnika narastao na 30000. Ako grad ima npr. 80000 stanovnika potrebno je povećanje od 12.5% kako bi se promijenila prva značajna znamenka broja stanovnika na 9. Dakle, potrebno je više vremena kako bi broj stanovnika porastao s 10000 na 20000 nego s 20000 na 30000. Posljedično, u ovakvim podacima najviše će biti onih s prvom znamenkom 1.

Neka je $S(k)$ skup prirodnih brojeva kojima je prva značajna znamenka k. Asimptotska gustoća skupa prirodnih brojeva S je definirana na sljedeći način:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\text{broj elemenata skupa } S < n)}{n}.$$

Niz brojeva koji imaju prvu značajnu znamenku 1 je $S(1) = \{1, 10, 11, \dots, 100, 101, \dots\}$. Za $S = S(1)$ limes ne postoji. Kada je n potencija broja 10, minimalni kvocijent je $\frac{1}{9} = 0.1111$, a kada je n dvostruka potencija broja 10 maksimalni kvocijent je $\frac{5}{9} = 0.5555$. Kako n raste kvocijent oscilira između te dvije vrijednosti.

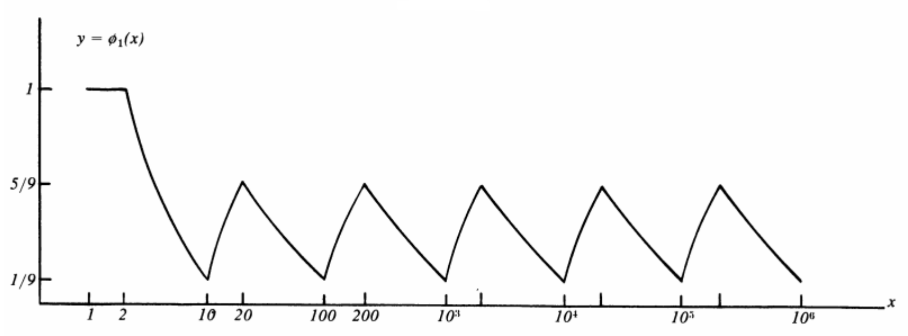
Raimi [21] je dao eksplicitnu formulu za vjerojatnost pojavljivanja prvih značajnih znamenki u skupu $\mathbb{R}^+$. Ako je χ_k karakteristična funkcija skupa $D_k = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}[10^n, (k+1)10^n]$ na $[1, \infty\rangle$, onda je

$$\phi_k(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \chi_k(t)dt.$$

Ako je prva značajna znamenka upravo 1, tj. $k = 1$, imamo:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= 1 && \text{na } [1,2] \\
&= \tfrac{1}{x-1} && \text{na } [2,10] \\
&= \tfrac{1-8}{x-1} && \text{na } [10,20] \\
&= \tfrac{11}{x-1} && \text{na } [20,100] \\
&= \tfrac{1-88}{x-1} && \text{na } [100,200]\text{; itd.}
\end{aligned}$$

Graf funkcije ϕ_1 možemo vidjeti na Slici 4.



Slika 4: Vjerojatnost pojavljivanja znamenke 1 kao prve značajne znamenke u skupu $[1, \infty\rangle$. (Izvor: R. A. Raimi, *The First Digit Problem* [21]).

D. I. A. Cohen je dao sljedeće matematičko objašnjenje fenomena prve znamenke u svom članku *An Explanation of the First Digit Phenomenon* [8].
Neka je S bilo koji skup prirodnih brojeva i definiramo skup $T(S)$ tako da svaki element $x \in S$ zamijenimo elementima $2x$ i $2x + 1$. Definiramo posebnu asimptotsku gustoću kao konačnu gustoću definiranu na skupu prirodnih brojeva koja dodjeljuje asimptotsku gustoću svim skupovima prirodnih brojeva koji imaju asimptotsku gustoću i koja dodjeljuje jednaku gustoću skupovima S i $T(S)$ za svaki skup S. Uvjeti koji impliciraju takvo stanje su:

i) gustoća od $2S = \frac{1}{2}$ gustoće od S,

ii) gustoća od $S =$ gustoća od $S + 1$.

Neka je d posebna asimptotska gustoća. Želimo pokazati da je $d(1) = \log 2$.
Preslikavanje T transformira skup $S(1)$ u uniju skupova $S(2)$ i $S(3)$.

$$d(1) = d(2) + d(3),$$

što je prvi razlog zašto $d(k)$ nisu jednaki.
Preslikavanje T^2 transformira skup $S(1)$ u uniju skupova $S(4)$, $S(5)$, $S(6)$ i $S(7)$.

$$d(1) = d(4) + d(5) + d(6) + d(7).$$

Generalno, za preslikavanje T^p imamo

$$d(1) = d(2^p) + d(2^p + 1) + \cdots + d(2^{p+1} - 1).$$

Ako sumiramo prvih m ovakvih jednadžbi, tj. za $p = 0, 1, \ldots, (m - 1)$ dobijemo

$$md(1) = \sum_{i=1}^{2^m - 1} d(i).$$

Prema definiciji nadasimptotske gustoće imamo

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(9) = 1.$$

Slično,

$$d(10) + d(11) + \cdots + d(99) = 1,$$

i

$$d(100) + d(101) + \cdots + d(999) = 1,$$

itd.
Dakle, najveći broj u $\sum d(i)$ je potencija broja 10 manja od 2^m. To je broj

$$[\log 2^m] = [m \log 2],$$

gdje uglate zagrade označavaju funkciju najvećeg broja. Dakle,

$$[md(1)] = [m \log 2],$$

za svaki m. Iz toga slijedi $d(1) = \log 2$. Generalno, može se pokazati da je

$$d(k) = \log \frac{k+1}{k}, \text{ za svaki } k.$$

4 Trgovanje valutama

Valuta je jedinica razmjene koja olakšava transfer roba i usluga neke zemlje. Određena valuta je dominantno sredstvo razmjene u državi ili regiji, tj. *valutnoj zoni*. *Valutni tečajevi* su cijene po kojima se pojedine valute iz različitih valutnih zona razmjenjuju jedna za drugu. Najčešće zemlja ima svoju jedinstvenu valutu koja je pod kontrolom središnje banke. Postoje i iznimke, npr. kada nekoliko zemalja koristi isto ime valuta (australski, kanadski ili američki dolar), kada nekoliko zemalja koristi istu valutu (EUR) ili kada država proglasi valutu druge zemlje ili regije kao svoje zakonsko sredstvo plaćanja (Panama koristi USD, Crna Gora koristi EUR). Na svijetu trenutno postoji oko 180 različitih valuta.

Povijest valuta usko slijedi povijest novca. Prije stvaranja novca ljudi su se koristili razmjenom dobara, ali društvo je trebalo nešto što će koristiti kao univerzalno sredstvo plaćanja. Ubrzo su za razmjenu koristili zlato, srebro i broncu, a njihova vrijednost je bila konstantna. U početku su prodavači i trgovci topili te metale u poluge različitih težina i čistoća metala, a s vremenom su posao topljenja preuzela državna tijela. Zlato je postalo prvi put glavno međunarodno sredstvo plaćanja 1696. godine kada je Velika Britanija prešla sa srebrnog na zlatni standard. Srebrne kovanice su tada bile topljene ili jednostavno izbačene iz upotrebe. Godine 1816. zlato je priznato kao jedini standard za mjeru cijena i jedino legalno platežno sredstvo u Velikoj Britaniji. Standardna mjera za vrijednost bio je zlatnik propisane težine i čistoće. Vrijednost jedne valute prema drugoj određivala se prema zlatu koje je sadržavala. U ostalim zemljama srebro je ostalo vodeće platežno sredstvo sve do sredine 19. stoljeća kada su se počeli istraživati rudnici zlata u Kaliforniji.

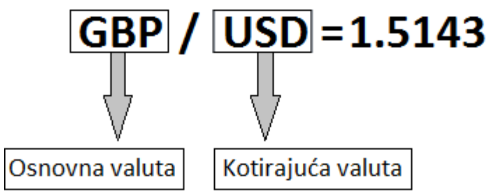
Papirnate valute su bile rasprostranjene u Europi u 18. stoljeću, a pretpostavlja se da su kineski trgovci još u antičko vrijeme koristili papirnati novac. Unatoč tome, početkom 20. stoljeća glavna valuta je još uvijek bila zlato. To se promijenilo 1944. godine Sustavom iz Bretton Woodsa koji je donio pravila po kojima su se odvijali novčarski i trgovinski odnosi između vodećih industrijskih zemalja. Osnovane su organizacije Međunarodni monetarni fond (MMF) i Međunarodna banka za obnovu i razvoj (IBRD), koje su počele s radom 1945. godine. Odlučeno je da se američki dolar koristi kao rezervna valuta jednaka zlatu, tj. cijena unce[1] zlata je bila 35 američkih dolara. Države članice su morale održavati tečaj svojih valuta u okviru utvrđenih vrijednosti, uz najveće odstupanje od 1 % u odnosu na zlato. Krajem 1964. godine rezerve američkih dolara u središnjim bankama su dosegnule rezerve zlata SAD-a. Drugim riječima, dolar više nije mogao konvertirati u zlato. Američki predsjednik Richard Nixon je 15. kolovoza 1971. godine ukinuo konvertibilnost američkog dolara u zlato i taj događaj je poznat kao *Nixonov šok*. Od tada je jedino američki dolar služio kao pričuvna valuta drugih zemalja, a visine njihovih stopa su postale ovisne o tržišnoj ponudi i potražnji.

[1] Unca je povijesna težinska mjera za plemenite kovine, te je jednaka težini od 31,1034768 grama.

Slika 5: Američki dolar koji je imao pokriće u zlatu.

Međunarodno financijsko tržište valuta (engl. Forex market) je najveće necentralizirano tržište na svijetu na kojem se slobodno trguje valutama, tj. valutnim parovima. *Valutni par* predstavlja odnos jedne valute prema drugoj.

Pretpostavimo da imamo 1000 dolara i želimo ih razmijeniti u kune. Odlazimo u mjenjačnicu gdje piše da je tečaj USD =7.02 HRK, što znači da za 1 dolar dobijemo 7.02 kuna, pa tako za 1000 dolara dobijemo 7020 kuna. Tečaj USD = 7.02 HRK je oznaka za valutni par koja u ovom primjeru označava koliko ćemo jedinica domaće valute dobiti za jednu jedinicu strane valute. Na tržištima se valutni parovi označavaju malo drugačije pa bi gornji primjer na deviznom tržištu bio prikazan kao par USD/HRK=7.02. Prva oznaka (USD) prikazuje osnovnu valutu koja se mijenja, dok druga oznaka označava valutu u koju želimo pretvoriti baznu valutu.
Na Slici 6 prikazan je ilustrirani zapis valutnog para GBP/USD na deviznom tržištu. GBP je osnovna valuta (valuta koju želimo zamijeniti), dok je USD kotirajuća valuta (valuta koju želimo dobiti). Tako u ovom primjeru za jednu britansku funtu možemo dobiti 1.5143 američkih dolara.



Slika 6: Zapis tečaja na deviznom tržištu.

Osam najzastupljenijih valuta koje kreiraju valutne parove su: Američki dolar (USD), Euro (EUR), Švicarski franak (CHF), Britanska funta (GBP), Kanadski dolar (CAD), Australski dolar (AUD), Novozelandski dolar (NZD) i Japanski jen(JPY). Dolar je najzastupljeniji u valutnim transakcijama, što je i očekivano obzirom da USD obavlja funkciju svjetskog novca i sve važne sirovine poput zlata i nafte su vezane za USD. Osnovne valute uparene s USD čine *osnovne valutne parove*, npr. EUR/USD, USD/CHF, AUD/USD, USD/JPY.

Posebno imamo valutne parove u kojima nije prisutan USD (engl. cross currency pairs), npr. EUR/JPY, što je jednako kao da kupujemo EUR/USD i prodajemo JPY/USD. Parovi koji uključuju valutu velike svjetske ekonomije i valutu neke ekonomije koja nema veliki utjecaj i kojom se ne trguje puno zovu se *egzotični valutni parovi*, npr. USD/HRK, USD/HUF. Za detalje o trgovanju valutama vidi [9].

Slika 7: Kupovna i prodajna cijena.

Valutni parovi se na deviznom tržištu prikazuju preko *prodajne cijene* (engl. bid price) i *kupovne cijene* (engl. ask price). Prodajna cijena je cijena po kojoj se prodaje osnovna valuta, a kupovna cijena je cijena po kojoj se kupuje osnovna valuta. Na Slici 7 je prodajna cijena 1.0858, tj. prodajemo 1 EUR za 1.0858 USD. Kupovna cijena je 1.0859, tj. kupujemo 1 EUR za 1.0859 USD. Kupovna cijena je uvijek veća od prodajne cijene, a razlika između tih cijena se zove *raspon* (engl. spread) i predstavlja proviziju brokeru koji posreduje u trgovini.

Matematika se sve više koristi u financijama, a o načinima upotrebe matematike govori M. Joshi u članku *Mathematics of Money* u *The Princeton Companion to Mathematics* [12]: "Matematika je našla svoj put do financija uglavnom preko primjene dva principa iz ekonomije: učinkovitost tržišta i nepostojanje arbitraže. Ideja učinkovitog tržišta je da su financijske tržišne cijene sve imovine točne. Nepostojanje arbitraže, drugi temeljni princip, jednostavno kaže da je nemoguće zaraditi novac bez rizika."

4.1 Valutni rizik

Rizik definiramo kao neizvjesnost budućeg događaja, tj. mogućnost nastanka nepovoljnog događaja. S financijskog stajališta, taj nepovoljni događaj je gubitak financijskih sredstava. Valutni rizik, kojeg još nazivamo i tečajni rizik, je rizik da će neka valuta imati manju ili veću vrijednost na tržištu u budućnosti u odnosu na drugu valutu. Ako tvrtke ili investitori posjeduju imovinu ili poslovne operacije u nekoj stranoj valuti, oni doživljavaju valutni rizik ako dođe do smanjenja vrijednosti strane valute u odnosu na domaću valutu.
Valutni rizik je najčešće vezan uz promjene vrijednosti neke valute koje zovemo devalvacija i revalvacija. Devalvacija je smanjenje vrijednosti valute neke zemlje u odnosu na druge valute, dok je revalvacija povećanje vrijednosti valute neke zemlje u odnosu na druge valute. U praksi se izbjegava primjenom valutne klauzule koja se unosi u kupoprodajne ugovore i služi kao oblik zaštite od valutnog rizika. Valutna klauzula se veže uz tečaj stabilne valute (npr. EUR) da bi se davatelj zaštitio od devalvacije (smanjenja), a dužnik od revalvacije (povećanja) ugovorenog iznosa plaćanja.

4.1.1 Vrste valutnog rizika

Osnovne vrste valutnog rizika su: *transakcijski rizik, translacijski rizik* i *ekonomski rizik.*

1. Transakcijski rizik nastaje kada poduzeće ima monetarnu imovinu i obveze izražene u stranoj valuti te pristaje danas na primitak ili izdatak koji će se izvršiti u stranoj valuti u budućnosti po deviznom tečaju aktualnom u to vrijeme. U razdoblju između prodaje i transakcije sredstava valutni tečaj se može promijeniti negativno za poduzeće.

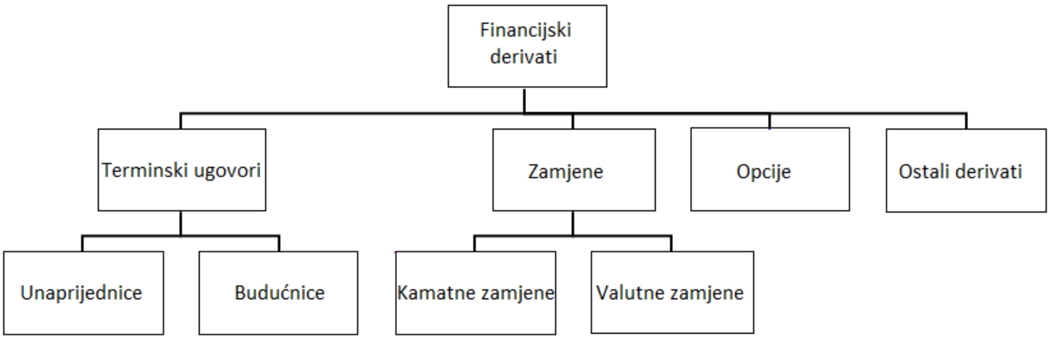
2. Translacijski rizik nastaje kada poduzeće ima podružnice, stvarnu imovinu (npr. zemljište) ili obveze denominirane u stranoj valuti. Pripremajući godišnja izvješća poduzeće mora konvertirati svu imovinu i obveze denominirane u stranoj valuti u domaću valutu.

3. Ekonomski rizik se odnosi na neostvarene novčane tokove ili očekivane, ali još neostvarene, novčane tokove poduzeća koji djeluju internacionalno. Poduzeće ima svoje sjedište u nekoj zemlji gdje koristi domaću valutu i podružnice koje posluju u stranim valutama. Buduće prodaje i budući novčani tokovi mogu biti smanjeni kada su konvertirani iz strane u domaću valutu ako podružnice prodaju na isti način samo u stranoj valuti, a tečaj se pomiče povoljno za kupce u stranoj podružnici. Produkti u stranim podružnicama su sada jeftiniji nego oni u sjedišnom poduzeću. Poduzeće će izgubiti vrijednost u terminima domaće valute iako njihovi produkti mogu biti jednako dobri ili čak bolji od onih u podružnicama.

Jako je važno da poduzeće prepozna i razumije ove tri vrste valutnog rizika kako bi se moglo na pravilan način zaštititi.

4.1.2 Upravljanje valutnim rizikom

Postoje različiti načini kako bi se poduzeće zaštitilo od rizika koji se javlja zbog promjene valutnog tečaja. To se zove *živičenje* (engl. hedging) - strategija za smanjenje mogućih gubitaka u poslovanju poduzeća. Tehnike živičenja uključuju korištenje izvedenih financijskih instrumenata, koje još nazivamo financijski derivati. Detaljno opisane tehnike živičenja se mogu pronaći u [13, 22]. Najpoznatiji derivati su: *unaprijednica* (engl. forward contract), *budućnica* (engl. futures contract), *zamjena* (engl. swap) i *opcija* (engl. options contract). Ta raspodjela financijskih derivata je prikazana na Slici 8.



Slika 8: Podjela financijskih derivata.

4.2 Testiranje razdiobe valutnih tečajeva

Digitalna analiza koristeći Benfordov zakon detektira nedosljednosti, utaje i prevare u financijskim podacima. Mogu je provoditi sva poduzeća i financijske institucije koje prikupljaju računovodstvenu evidenciju podataka.
Osnovni koraci digitalne analize su:

i) odabir uzorka,

ii) deskriptivna statistika uzorka,

iii) prilagođavanje uzorka,

iv) računanje raspodjele koju formiraju elementi uzorka,

v) statistička testiranja.

Kako bi analiza bila što bolja, potrebno je da je uzorak što veći. Benfordov zakon se primjenjuje samo na pozitivnim brojevima, stoga koristimo apsolutne vrijednosti svih elemenata uzorka.

Želimo li provjeriti prate li podaci Benfordovu distribuciju možemo koristiti nekoliko statističkih testova. Prilikom testiranja, nulta i alternativna hipoteza su:

H_0: Podaci prate Benfordovu distribuciju,
H_1: Podaci ne prate Benfordovu distribuciju.

Testiranja se provode računanjem uzoračkih statistika. Nakon toga, izaberemo nivo značajnosti (obično 0.05 ili 0.01) na temelju kojeg određujemo kritičnu vrijednost. Ako je vrijednost statistike uzorka veća od kritične vrijednosti odbacuje se nulta hipoteza za izabrani nivo značajnosti i prihvaća se alternativna hipoteza. U suprotnom, ako je vrijednost statistike uzorka manja od kritične vrijednosti, nemamo razloga za odbacivanje nulte hipoteze.

Nigrini [19] za digitalnu analizu podataka predlaže četiri statistička testa: Z-test, χ^2 test, Kolmogorov - Smirnov (KS) test i MAD (Mean Absolute Deviation) test. Mi ćemo za testiranje valutnih tečajeva koristiti samo χ^2 test.

Pearsonov χ^2 test je neparametarski test koji koristimo kada želimo utvrditi odstupaju li opažene frekvencije od očekivanih (teorijskih) frekvencija. U našem slučaju očekivana frekvencija je Benfordova distribucija. Konkretno, test promatra frekvencije znamenki na prvoj poziciji dobivene na osnovu uzorka i pokušava utvrditi je li učestalost pojavljivanja znamenki u skladu s Benfordovim zakonom. χ^2 test statistika je dana s

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

gdje je O_i uzoračka frekvencija, E_i očekivana frekvencija i k je konačan broj klasa na koje je uzorak podijeljen. Vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} E_i = N,$$

gdje je N ukupna frekvencija. Broj klasa u našem slučaju je broj značajnih znamenki za koje se pravi analiza (9 za prvu značajnu znamenku i 10 za drugu i ostale značajne znamenke). Broj stupnjeva slobode je broj nezavisnih varijabli uključenih u izračun χ^2 vrijednosti. Granična vrijednost je vrijednost testa za koju se nulta hipoteza odbacuje. Nivo značajnosti testa α je vjerojatnost odbacivanja nulte hipoteze kada je istinita. Korištenje χ^2 testa je prikladno ako su sve teorijske frekvencije veće od 5, zato je poželjno da imamo što veći uzorak (svakako veći od 40 podataka).

4.2.1 Rezultati statističkog testa

Testirat ćemo χ^2 testom prate li valutni tečajevi pet osnovnih valuta (USD, EUR, GBP, HRK, CZK) Benfordovu distribuciju. Uzet ćemo valutne tečajeve na slučajno odabrane datume. Podaci su preuzeti s web stranice *http://www.xe.com/currencytables/*. Valutne tečajeve koji su manji od 1 ne uzimamo u obzir pri testiranju.

Frekvencije prvih značajnih znamenki u valutnim tečajevima u odnosu na svih pet promatranih valuta možemo vidjeti u Tablici 9.

Valuta i datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
USD, 15.3.2013.	46	19	16	12	10	7	10	9	12	141
EUR, 20.10.2015.	51	22	18	17	5	7	14	5	7	146
GBP, 4.4.2010.	63	34	9	14	10	11	5	7	2	155
HRK, 5.1.2017.	42	13	10	11	5	5	2	6	7	101
CZK, 17.6.2014.	22	15	6	10	8	2	3	4	3	73
Benfordov zakon	30.10	17.61	12.49	9.69	7.92	6.69	5.80	5.12	4.58	100

Tablica 9: Opažene frekvencije prvih značajnih znamenki u valutnim tečajevima prema danim valutama i očekivane frekvencije prvih značajnih znamenki prema Benfordovom zakonu.

i) Tečajevi 141 valute prema USD na datum 15.3.2013. mogu se vidjeti u Prilogu 8.1. Uzimamo samo prve značajne znamenke valutnih tečajeva za testiranje. Kako bi mogli provesti pravilno testiranje grupiramo zadnja dva razreda u jedan jer je broj očekivanih frekvencija u 9. razredu 4.58, što je manje od 5 (vidi Tablicu 9).

Granična vrijednost uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ je $\chi^2_\alpha(df) = \chi^2_{0.05}(7) = 14.0671$. Dobivena vrijednost testne statistike je 7.1137 što je manje od granične vrijednosti 14.0671. Nemamo razloga odbaciti nultu hipotezu koja kaže da podaci prate Benfordovu distribuciju uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

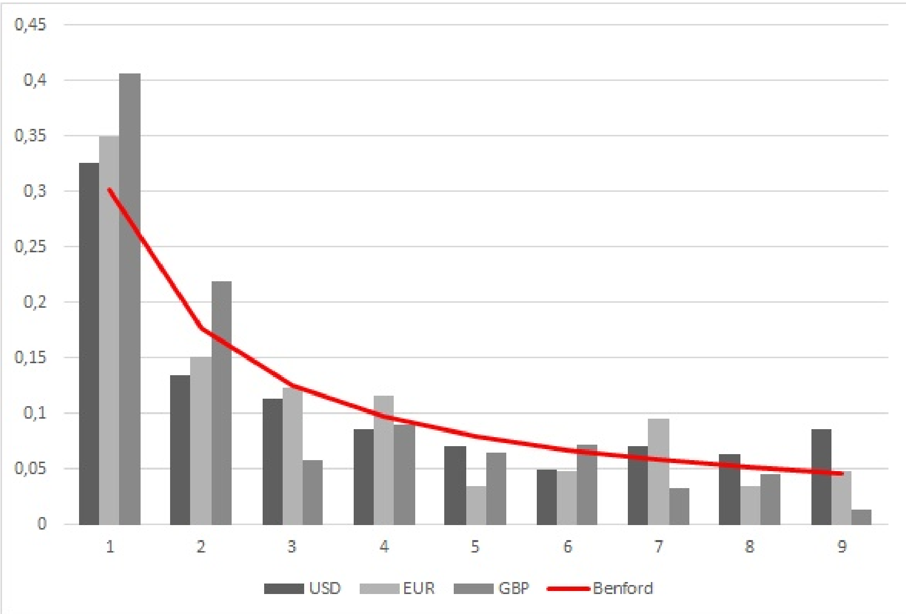
ii) Tečajevi 146 valuta prema EUR na datum 20.10.2015. mogu se vidjeti u Prilogu 8.2. Za testiranje također grupiramo zadnja dva razreda u jedan jer je broj očekivanih frekvencija u 9. razredu 4.58, što je manje od 5 (vidi Tablicu 9).

Granična vrijednost uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ je $\chi^2_\alpha(df) = \chi^2_{0.05}(7) = 14.0671$. Dobivena vrijednost testne statistike je 10.696 i manja je od granične vrijednosti 14.0671 pa nemamo razloga odbaciti nultu hipotezu koja kaže da podaci prate Benfordovu distribuciju uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

iii) Tečajevi 155 valuta prema GBP na datum 4.4.2010. mogu se vidjeti u Prilogu 8.3. Za testiranje također grupiramo zadnja dva razreda u jedan jer je broj očekivanih frekvencija u 9. razredu 4.58, što je manje od 5 (vidi Tablicu 9).

Granična vrijednost uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ je $\chi^2_\alpha(df) = \chi^2_{0.05}(7) = 14.0671$. Dobivena vrijednost testne statistike je 17.63 što je veće od granične vrijednosti 14.0671. Odbacujemo nultu hipotezu koja kaže da podaci prate Benfordovu distribuciju uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

Na Slici 9 možemo pomoću stupčastog dijagrama usporediti relativne frekvencije prvih značajnih znamenki tečajeva valuta prema USD, EUR i GBP s Benfordovom razdiobom.



Slika 9: Stupčasti dijagram relativnih frekvencija prvih značajnih znamenki tečajeva valuta prema USD, EUR i GBP usporedno s Benfordovom razdiobom.

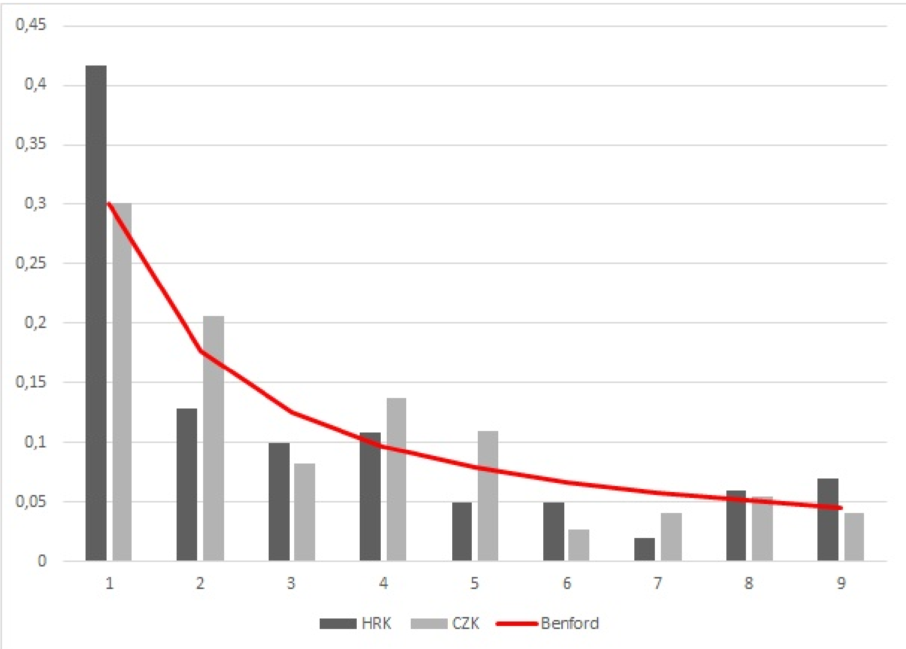
iv) Tečajevi 101 valute prema HRK na datum 5.1.2017. mogu se vidjeti u Prilogu 8.4. Za testiranje grupiramo 8. i 9. razred jer je broj očekivanih frekvencija u 9. razredu 4.58, te grupiramo 6. i 7. razred jer je broj opaženih frekvencija u 7. razredu jednak 2 (vidi Tablicu 9).

Granična vrijednost uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ je $\chi^2_\alpha(df) = \chi^2_{0.05}(6) = 12.592$. Dobivena vrijednost testne statistike je 11.083 što je manje od granične vrijednosti 12.592 pa nemamo razloga odbaciti nultu hipotezu koja kaže da podaci prate Benfordovu distribuciju uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

v) Tečajevi 73 valuta prema CZK na datum 17.6.2014. mogu se vidjeti u Prilogu 8.5. Za testiranje grupiramo 8. i 9. razred jer je broj očekivanih frekvencija u 9. razredu 4.58, te grupiramo 6. i 7. razred jer je broj opaženih frekvencija u 6. razredu jednak 2 (vidi Tablicu 9).

Granična vrijednost uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ je $\chi^2_\alpha(df) = \chi^2_{0.05}(6) = 12.592$. Dobivena vrijednost testne statistike je 5.3504 što je manje od granične vrijednosti 12.592 pa nemamo razloga odbaciti nultu hipotezu koja kaže da podaci prate Benfordovu distribuciju uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

Na Slici 10 možemo pomoću stupčastog dijagrama usporediti relativne frekvencije prvih značajnih znamenki tečajeva valuta prema HRK i CZK s Benfordovom razdiobom.



Slika 10: Stupčasti dijagram relativnih frekvencija prvih značajnih znamenki tečajeva valuta prema HRK i CZK usporedno s Benfordovom razdiobom.

Dakle, testiranjem smo dobili da distribucije prvih značajnih znamenki u valutnim tečajevima prema USD, EUR, HRK i CZK ne odstupaju statistički značajno od Benfordove distribucije, a samo distribucije prvih značajnih znamenki u valutnim tečajevima prema GBP odstupaju značajno od Benfordove distribucije.

Promatrajući mikroskopski ne možemo predvidjeti ponašanje valutnih tečajeva, ali na makroskopskoj razini vidimo da valutni tečajevi prate određene pravilnosti, tj. Benfordovu razdiobu.

Literatura

[1] B. Basrak, I. Varga, *Benfordov zakon,* Hrvatski matematički elektronički časopis, Vol. 23

[2] F. Benford, *The Law of Anomalous Numbers,* Proceedings of the American Philosophical Society, 1938., Vol. 78, No. 4, 551-572

[3] M. Benšić, N. Šuvak, *Primijenjena statistika,* Sveučilište J.J.Strossmayera, Odjel za matematiku, 2013.

[4] A. Berger, T. P. Hill, *A basic theory of Benford's law,* Probability Surveys, 2011., Vol. 8, 1-126

[5] A. Berger, T. P. Hill, *What is... Benford's law?,* Notices of the AMS, 2017., Vol. 64, No. 2, 132-134

[6] J. Bessis, *Risk Management in Banking,* Wiley, 2015.

[7] K. Chandrasekharan, *Introduction to Analytic Number Theory,* Springer-Verlag, New York, 1968.

[8] D. I. A. Cohen, *An Explanation of the First Digit Phenomenon,* Journal of Combinatorial Theory (A), 1976., 20, 367-370

[9] L. Copeland, *Exchange Rates and International Finance,* Pearson Education Limited, 2005.

[10] T. Crilly, *50 mathematical ideas you really need to know,* Quercus, London, 2007.

[11] P. Diaconis, *The Distribution of Leading Digits and Uniform Distribution Mod 1,* The Annals of Probability, 1977., Vol. 5, No. 1, 72-81

[12] T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader, *The Princeton Companion to Mathematics,* Princeton University Press, 2008.

[13] J. C. Hull, *Options, Futures, and other Derivatives,* 9. izdanje, Pearson Education, Inc., 2015.

[14] S. Irmay, *The relationship between Zipf's law and the distribution of first digits,* Journal of Applied Statistics, 1997., Vol. 24, No. 4, 383-393

[15] S. Jančikić, *Benfordov zakon,* Sveučilište J.J.Strossmayera, Odjel za matematiku, 2013.

[16] L. Kupiers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences,* John Wiley & Sons, New York, 1974.

[17] S. J. Miller, *Benford's law: Theory and Applications,* Princeton University Press, 20015.

[18] S. Newcomb, *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers,* American Journal of Mathematics, 1881., Vol. 4, No. 1, 39-40

[19] M. Nigrini, *Forensic Analytics: Methods and Techniques for Forensic Accounting Investigations,* John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2011.

[20] M. Nigrini, J. T. Wells, *Benford's law: Applications for Forensic accounting , Auditing and Fraud Detection,* John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2012.

[21] R. A. Raimi, *The First Digit Problem,* The American Mathematical Monthly, 1976., Vol. 83, No. 7, 521-538

[22] J. J. Stephens, *Managing currency risk using financial derivatives,* John Wiley & Sons Ltd, 2001.

5 Sažetak

Benfordov zakon, poznat i pod nazivom fenomen prve znamenke, govori o vjerojatnosti pojavljivanja jednoznamenkastog prirodnog broja na pojedinoj poziciji broja. Fenomen prve znamenke je prvi otkrio S. Newcomb u 19. stoljeću. Newcombovo nezapaženo otkriće je popularizirao F. A. Benford, po kojem je zakon dobio naziv. U radu najprije definiramo Benfordov niz i uniformno distribuiran modulo 1 niz. Prikazujemo svojstva takvih nizova i navodimo primjere. Dokazujemo važan teorem za uniformno distribuirane nizove, poznat kao Weylov kriterij. Analogno pojmu Benfordovog niza, razmatramo Benfordovu distribuciju za empirijske podatke i testiramo je na jednostavnom primjeru. Objašnjavamo Zipfov zakon te njegovu povezanost s Benfordovim zakonom. U nastavku uvodimo osnovne pojmove vezane za trgovanje valutama i valutni rizik. Posebni je zadatak ovog rada ispitati prate li valutni tečajevi Benfordovu distribuciju. U tu svrhu analiziramo povijesne podatke za pet valuta. Rezultati dobiveni statističkim testom ukazuju da kretanja valutnih tečajeva slijede Benfordovu razdiobu.

Ključne riječi: Benfordov zakon, Benfordov niz, uniformno distribuiran modulo 1 niz, Weylov kriterij, fenomen prve znamenke, Zipfov zakon, tržišni rizik, valutni rizik, analiza rizika, statistički test, ekonofizika

6 Abstract

Benford's law, known also as the the first digit phenomenon, is a statement about probability of appearance of single-digit integer in certain number position. The phenomenon of the first digit was first discovered by S. Newcomb in 19th century. It is named after F. A. Benford who rediscovered and popularized Newcomb's unnoticed discovery. In this thesis we first define Benford sequence and uniformly distributed sequence modulo 1. We show the properties of such sequences and present examples. We prove an important theorem for uniformly distributed sequences, known as Weyl's criterion. By analogy to the concept of Benford sequence, we study Benford distribution for empirical data and test it on a simple example. We explain Zipf's law and its relationship with Benford's law. Furthermore, we introduce the basic concepts related to currency trading and currency risk. In particular, we examine whether exchange rates follow Benford distribution. For this purpose, we analyze historical data for the five currencies. The results obtained with statistical test indicate that exchange rates follow Benford distribution.

Keywords: Benford's law, Benford sequence, uniformly distributed sequence modulo 1, Weyl's criterion, Zipf's law, market risk, currency risk, risk analysis, statistical test, econophysics

7 Životopis

Rođena sam 28. veljače 1992. u Slavonskom Brodu te sam tamo završila osnovnu školu 2006. godine i opću gimnaziju "Matija Mesić" 2010. godine. Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku upisujem 2011. godine i završavam ga nakon tri godine uz završni rad *Fibonaccijevi brojevi i djeljivost* pod mentorstvom doc.dr.sc. Ivana Matića. Iste godine upisujem diplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, smjer Financijska matematika i statistika. Godine 2016. sam tri mjeseca provela na stručnom usavršavanju u sklopu Erasmus+ programa u Lisabonu. U koautorstvu s I. Martinjakom sam napisala znanstveni rad *A short combinatorial proof of derangement identity* koji je prihvaćen za objavljivanje u časopisu *Elemente der Mathematik*.

8 Prilog

8.1 Prilog A

Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema USD
INR	Indian Rupee	54.07097
CAD	Canadian Dollar	1.02012
SGD	Singapore Dollar	1.24833
MYR	Malaysian Ringgit	3.12149
JPY	Japanese Yen	95.16946
CNY	Chinese Yuan Renminbi	6.21680
NZD	New Zealand Dollar	1.20876
THB	Thai Baht	29.52898
HUF	Hungarian Forint	233.33188
AED	Emirati Dirham	3.67305
HKD	Hong Kong Dollar	7.75962
MXN	Mexican Peso	12.43617
ZAR	South African Rand	9.19112
PHP	Philippine Peso	40.59746
SEK	Swedish Krona	6.39420
IDR	Indonesian Rupiah	9707.00000
SAR	Saudi Arabian Riyal	3.75012
BRL	Brazilian Real	1.97326
TRY	Turkish Lira	1.80691
KES	Kenyan Shilling	85.44991
KRW	South Korean Won	1111.09160
EGP	Egyptian Pound	6.78403
IQD	Iraqi Dinar	1152.99384
NOK	Norwegian Krone	5.77089
RUB	Russian Ruble	30.63907
DKK	Danish Krone	5.70527
PKR	Pakistani Rupee	98.09547
ILS	Israeli Shekel	3.68095
PLN	Polish Zloty	3.17122
QAR	Qatari Riyal	3.64059
COP	Colombian Peso	1797.49011
CLP	Chilean Peso	471.74957
TWD	Taiwan New Dollar	29.74408
ARS	Argentine Peso	5.08739
CZK	Czech Koruna	19.57223
VND	Vietnamese Dong	20933.63522
MAD	Moroccan Dirham	8.51242
XOF	CFA Franc	501.79095
LKR	Sri Lankan Rupee	126.15001
UAH	Ukrainian Hryvnia	8.13099
NGN	Nigerian Naira	159.49593
TND	Tunisian Dinar	1.56399
UGX	Ugandan Shilling	2636.99503
RON	Romanian New Leu	3.35938
BDT	Bangladeshi Taka	78.72527
PEN	Peruvian Sol	2.59359
GEL	Georgian Lari	1.65878
XAF	Central African CFA	501.79095
FJD	Fijian Dollar	1.78728
VEF	Venezuelan Bolivar	6.28769
HRK	Croatian Kuna	5.80221
UZS	Uzbekistani Som	2030.74548
BGN	Bulgarian Lev	1.49782
DZD	Algerian Dinar	79.34469
IRR	Iranian Rial	12282.39672
DOP	Dominican Peso	41.05986
ISK	Icelandic Krona	124.86000
CRC	Costa Rican Colon	499.69911
SYP	Syrian Pound	70.82974
LYD	Libyan Dinar	1.28150
JMD	Jamaican Dollar	96.74796
MUR	Mauritian Rupee	31.44680
GHS	Ghanaian Cedi	1.93429
AOA	Angolan Kwanza	95.97085
UYU	Uruguayan Peso	18.89998
AFN	Afghan Afghani	52.77991
LBP	Lebanese Pound	1503.79126
XPF	CFP Franc	91.28584
TTD	Trinidadian Dollar	6.42396
TZS	Tanzanian Shilling	1621.36996
ZMW	Zambian Kwacha	5.39000
XCD	East Caribbean Dollar	2.70000
GTQ	Guatemalan Quetzal	7.81050
NPR	Nepalese Rupee	86.51709
BOB	Bolivian Bolíviano	6.94978
ZWD	Zimbabwean Dollar	361.90000
BBD	Barbadian or Bajan Dollar	2.00000
CUC	Cuban Convertible Peso	1.00000
LAK	Lao or Laotian Kip	7845.31297
BND	Bruneian Dollar	1.24833
BWP	Botswana Pula	8.21018
HNL	Honduran Lempira	19.76400
PYG	Paraguayan Guarani	4004.26603
ETB	Ethiopian Birr	18.46159
NAD	Namibian Dollar	9.19112
PGK	Papua New Guinean Kina	2.13675
SDG	Sudanese Pound	4.41248
MOP	Macau Pataca	7.99241
NIO	Nicaraguan Cordoba	24.82697
BMD	Bermudian Dollar	1.00000
KZT	Kazakhstani Tenge	150.65501
PAB	Panamanian Balboa	1.00000
BAM	Bosnian Convertible Marka	1.49616
GYD	Guyanese Dollar	203.93750
YER	Yemeni Rial	214.25086
MGA	Malagasy Ariary	2220.87947
MZN	Mozambican Metical	30.19971
RSD	Serbian Dinar	85.41035
SCR	Seychellois Rupee	11.78083
AMD	Armenian Dram	414.23819
SBD	Solomon Islander Dollar	7.29394
SLL	Sierra Leonean Leone	4317.76173
TOP	Tongan Pa'anga	1.75162
BZD	Belizean Dollar	2.00279
MWK	Malawian Kwacha	386.47223
GMD	Gambian Dalasi	33.99230
BIF	Burundian Franc	1559.97416
SOS	Somali Shilling	1594.36346
HTG	Haitian Gourde	42.69231
GNF	Guinean Franc	7022.23373
MVR	Maldivian Rufiyaa	15.36399
MNT	Mongolian Tughrik	1387.56872
CDF	Congolese Franc	914.79164
STD	Sao Tomean Dobra	18805.00000
TJS	Tajikistani Somoni	4.75409
KPW	North Korean Won	131.70150
MMK	Burmese Kyat	872.49376
LSL	Basotho Loti	9.19112
ALL	Albanian Lek	107.17952
LRD	Liberian Dollar	73.99864
KGS	Kyrgyzstani Som	47.85840
MDL	Moldovan Leu	12.32087
CUP	Cuban Peso	26.50000
KHR	Cambodian Riel	3984.91450
MKD	Macedonian Denar	47.03541
VUV	Ni-Vanuatu Vatu	91.20505
MRO	Mauritanian Ouguiya	285.23990
ANG	Dutch Guilder	1.79060
SZL	Swazi Lilangeni	9.19112
CVE	Cape Verdean Escudo	84.09936
SRD	Surinamese Dollar	3.27484
SVC	Salvadoran Colon	8.75000
BSD	Bahamian Dollar	1.00000
RWF	Rwandan Franc	633.98972
AWG	Aruban or Dutch Guilder	1.79000
DJF	Djiboutian Franc	179.66412
BTN	Bhutanese Ngultrum	54.07097
KMF	Comoran Franc	376.34321
WST	Samoan Tala	2.29252
ERN	Eritrean Nakfa	15.09973
TMT	Turkmenistani Manat	2.85000

8.2 Prilog B

Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema EUR	Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema EUR
USD	US Dollar	1.13580	XCD	East Caribbean Dollar	3.06667
INR	Indian Rupee	73.80618	GTQ	Guatemalan Quetzal	8.69857
AUD	Australian Dollar	1.56514	NPR	Nepalese Rupee	118.15938
CAD	Canadian Dollar	1.47358	BOB	Bolivian Bolíviano	7.79209
SGD	Singapore Dollar	1.57917	ZWD	Zimbabwean Dollar	411.04857
CHF	Swiss Franc	1.08364	BBD	Barbadian or Bajan Dollar	2.27161
MYR	Malaysian Ringgit	4.86953	CUC	Cuban Convertible Peso	1.13580
JPY	Japanese Yen	136.06653	LAK	Lao or Laotian Kip	9239.79047
CNY	Chinese Yuan Renminbi	7.20928	BND	Bruneian Dollar	1.57917
NZD	New Zealand Dollar	1.68176	BWP	Botswana Pula	11.66192
THB	Thai Baht	40.23380	HNL	Honduran Lempira	25.07294
HUF	Hungarian Forint	310.87327	PYG	Paraguayan Guarani	6422.98895
AED	Emirati Dirham	4.17176	ETB	Ethiopian Birr	23.96552
HKD	Hong Kong Dollar	8.80266	NAD	Namibian Dollar	15.06578
MXN	Mexican Peso	18.82721	PGK	Papua New Guinean Kina	3.28816
ZAR	South African Rand	15.06578	SDG	Sudanese Pound	6.92274
PHP	Philippine Peso	52.66169	MOP	Macau Pataca	9.06674
SEK	Swedish Krona	9.40976	NIO	Nicaraguan Cordoba	31.18358
IDR	Indonesian Rupiah	15572.22115	BMD	Bermudian Dollar	1.13580
SAR	Saudi Arabian Riyal	4.25950	KZT	Kazakhstani Tenge	314.84573
BRL	Brazilian Real	4.41191	PAB	Panamanian Balboa	1.13580
TRY	Turkish Lira	3.29145	BAM	Bosnian Convertible Marka	1.95583
KES	Kenyan Shilling	116.05108	GYD	Guyanese Dollar	232.78365
KRW	South Korean Won	1282.85119	YER	Yemeni Rial	244.36889
EGP	Egyptian Pound	9.12053	MGA	Malagasy Ariary	3515.32286
IQD	Iraqi Dinar	1275.51133	MZN	Mozambican Metical	48.52735
NOK	Norwegian Krone	9.21843	RSD	Serbian Dinar	119.71931
RUB	Russian Ruble	70.46912	SCR	Seychellois Rupee	15.21981
DKK	Danish Krone	7.45983	AMD	Armenian Dram	536.94083
PKR	Pakistani Rupee	118.69183	SBD	Solomon Islander Dollar	9.08645
ILS	Israeli Shekel	4.37826	AZN	Azerbaijani New Manat	1.19009
PLN	Polish Zloty	4.25961	SLL	Sierra Leonean Leone	5111.13179
QAR	Qatari Riyal	4.13490	TOP	Tongan Pa'anga	2.55812
COP	Colombian Peso	3331.33244	BZD	Belizean Dollar	2.24889
CLP	Chilean Peso	780.83689	MWK	Malawian Kwacha	626.39759
TWD	Taiwan New Dollar	36.70837	GMD	Gambian Dalasi	44.83598
ARS	Argentine Peso	10.78846	BIF	Burundian Franc	1779.80967
CZK	Czech Koruna	27.07516	SOS	Somali Shilling	726.91652
VND	Vietnamese Dong	25158.12649	HTG	Haitian Gourde	60.44765
MAD	Moroccan Dirham	10.95824	GNF	Guinean Franc	8234.60122
XOF	CFA Franc	655.95700	MVR	Maldivian Rufiyaa	17.37784
LKR	Sri Lankan Rupee	160.09503	MNT	Mongolian Tughrik	2260.25605
UAH	Ukrainian Hryvnia	25.17857	CDF	Congolese Franc	1041.53507
NGN	Nigerian Naira	225.99721	STD	Sao Tomean Dobra	24510.71646
TND	Tunisian Dinar	2.21783	TJS	Tajikistani Somoni	7.45087
UGX	Ugandan Shilling	4083.22639	KPW	North Korean Won	146.02231
RON	Romanian New Leu	4.42506	MMK	Burmese Kyat	1445.88239
BDT	Bangladeshi Taka	88.28628	LSL	Basotho Loti	15.06578
PEN	Peruvian Sol	3.69194	LRD	Liberian Dollar	105.06206
GEL	Georgian Lari	2.69507	KGS	Kyrgyzstani Som	78.18851
XAF	Central African CFA	655.95700	MDL	Moldovan Leu	22.40379
FJD	Fijian Dollar	2.39087	CUP	Cuban Peso	30.09888
VEF	Venezuelan Bolivar	7.16268	KHR	Cambodian Riel	4604.56184
HRK	Croatian Kuna	7.62981	MKD	Macedonian Denar	61.36765
UZS	Uzbekistani Som	3018.97517	VUV	Ni-Vanuatu Vatu	124.20050
BGN	Bulgarian Lev	1.95612	MRO	Mauritanian Ouguiya	336.76679
DZD	Algerian Dinar	119.88443	ANG	Dutch Guilder	2.01015
IRR	Iranian Rial	34019.69321	SZL	Swazi Lilangeni	15.06578
DOP	Dominican Peso	51.43502	CVE	Cape Verdean Escudo	110.82637
ISK	Icelandic Krona	142.08946	SRD	Surinamese Dollar	3.69137
CRC	Costa Rican Colon	599.70613	SVC	Salvadoran Colon	9.93831
SYP	Syrian Pound	214.42459	BSD	Bahamian Dollar	1.13580
LYD	Libyan Dinar	1.53901	RWF	Rwandan Franc	843.90464
JMD	Jamaican Dollar	135.38819	AWG	Aruban or Dutch Guilder	2.03309
MUR	Mauritian Rupee	40.15077	DJF	Djiboutian Franc	201.60575
GHS	Ghanaian Cedi	4.41828	BTN	Bhutanese Ngultrum	73.80618
AOA	Angolan Kwanza	154.44143	KMF	Comoran Franc	491.96775
UYU	Uruguayan Peso	33.39272	WST	Samoan Tala	3.02076
AFN	Afghan Afghani	72.41337	ERN	Eritrean Nakfa	11.89189
LBP	Lebanese Pound	1716.77237	TMT	Turkmenistani Manat	3.97532
XPF	CFP Franc	119.33174	TVD	Tuvaluan Dollar	1.56514
TTD	Trinidadian Dollar	7.18454	ZMW	Zambian Kwacha	13.68647
TZS	Tanzanian Shilling	2510.13361	ALL	Albanian Lek	139.64747

8.3 Prilog C

Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema GBP	Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema GBP
USD	US Dollar	1.52079	NPR	Nepalese Rupee	109.33093
EUR	Euro	1.12635	BOB	Bolivian Bolíviano	10.68478
INR	Indian Rupee	68.04059	ZWD	Zimbabwean Dollar	550.37751
AUD	Australian Dollar	1.65358	BBD	Barbadian or Bajan Dollar	3.04408
CAD	Canadian Dollar	1.53783	CUC	Cuban Convertible Peso	1.45391
SGD	Singapore Dollar	2.12425	LAK	Lao or Laotian Kip	12871.69523
CHF	Swiss Franc	1.61296	BND	Bruneian Dollar	2.12425
MYR	Malaysian Ringgit	4.94031	BWP	Botswana Pula	10.29803
JPY	Japanese Yen	143.83726	HNL	Honduran Lempira	28.75947
CNY	Chinese Yuan Renminbi	10.38174	PYG	Paraguayan Guarani	7222.10618
NZD	New Zealand Dollar	2.15319	ETB	Ethiopian Birr	20.48698
THB	Thai Baht	49.18267	NAD	Namibian Dollar	10.98777
HUF	Hungarian Forint	298.33533	PGK	Papua New Guinean Kina	4.08599
AED	Emirati Dirham	5.58513	SDG	Sudanese Pound	3.38606
HKD	Hong Kong Dollar	11.81296	MOP	Macau Pataca	12.16735
MXN	Mexican Peso	18.68774	NIO	Nicaraguan Cordoba	32.10414
ZAR	South African Rand	10.98777	BMD	Bermudian Dollar	1.52079
PHP	Philippine Peso	68.29912	KZT	Kazakhstani Tenge	223.77259
SEK	Swedish Krona	10.90367	PAB	Panamanian Balboa	1.52079
IDR	Indonesian Rupiah	13786.05194	BAM	Bosnian Convertible Marka	2.20295
SAR	Saudi Arabian Riyal	5.70284	GYD	Guyanese Dollar	310.79966
BRL	Brazilian Real	2.68345	YER	Yemeni Rial	310.62339
TRY	Turkish Lira	2.30370	MGA	Malagasy Ariary	3211.54385
KES	Kenyan Shilling	117.17657	KYD	Caymanian Dollar	1.24809
KRW	South Korean Won	1712.42079	MZN	Mozambican Metical	52.58661
EGP	Egyptian Pound	8.37200	RSD	Serbian Dinar	112.52429
IQD	Iraqi Dinar	1779.27275	SCR	Seychellois Rupee	18.07050
NOK	Norwegian Krone	8.99461	AMD	Armenian Dram	608.81684
RUB	Russian Ruble	44.49100	SBD	Solomon Islander Dollar	12.09932
DKK	Danish Krone	8.38295	AZN	Azerbaijani New Manat	1.22540
PKR	Pakistani Rupee	128.29468	SLL	Sierra Leonean Leone	5898.12489
ILS	Israeli Shekel	5.61555	TOP	Tongan Pa'anga	2.91975
PLN	Polish Zloty	4.32652	BZD	Belizean Dollar	2.96797
QAR	Qatari Riyal	5.53723	MWK	Malawian Kwacha	229.52020
COP	Colombian Peso	2912.33198	GMD	Gambian Dalasi	40.63860
CLP	Chilean Peso	800.82518	BIF	Burundian Franc	1872.09259
TWD	Taiwan New Dollar	48.27323	SOS	Somali Shilling	2235.57599
ARS	Argentine Peso	5.89309	HTG	Haitian Gourde	60.49437
CZK	Czech Koruna	28.53324	GNF	Guinean Franc	7558.37597
VND	Vietnamese Dong	28978.84389	MVR	Maldivian Rufiyaa	19.46623
MAD	Moroccan Dirham	12.61108	MNT	Mongolian Tughrik	2081.44537
JOD	Jordanian Dinar	1.07806	CDF	Congolese Franc	1369.03616
XOF	CFA Franc	738.83821	STD	Sao Tomean Dobra	27382.00390
LKR	Sri Lankan Rupee	173.09745	TJS	Tajikistani Somoni	6.64734
UAH	Ukrainian Hryvnia	12.05754	KPW	North Korean Won	217.59495
NGN	Nigerian Naira	228.42488	MMK	Burmese Kyat	9.79317
TND	Tunisian Dinar	2.13170	LSL	Basotho Loti	10.98777
UGX	Ugandan Shilling	3174.95793	LRD	Liberian Dollar	108.82618
RON	Romanian New Leu	4.60376	KGS	Kyrgyzstani Som	68.86509
BDT	Bangladeshi Taka	105.38665	GIP	Gibraltar Pound	1.00000
PEN	Peruvian Sol	4.32059	GGP	Guernsey Pound	1.00000
GEL	Georgian Lari	2.66817	MDL	Moldovan Leu	18.84626
XAF	Central African CFA	738.83821	CUP	Cuban Peso	40.30119
FJD	Fijian Dollar	2.92642	KHR	Cambodian Riel	6371.25765
VEF	Venezuelan Bolivar	6.53943	MKD	Macedonian Denar	69.65214
HRK	Croatian Kuna	8.18433	VUV	Ni-Vanuatu Vatu	145.44931
UZS	Uzbekistani Som	2354.59767	MRO	Mauritanian Ouguiya	403.31462
BGN	Bulgarian Lev	2.20566	ANG	Dutch Guilder	2.72440
DZD	Algerian Dinar	111.07779	SZL	Swazi Lilangeni	10.98777
IRR	Iranian Rial	15057.81699	CVE	Cape Verdean Escudo	123.48895
DOP	Dominican Peso	54.74879	SRD	Surinamese Dollar	4.17802
ISK	Icelandic Krona	193.70429	SVC	Salvadoran Colon	13.30699
CRC	Costa Rican Colon	844.95282	BSD	Bahamian Dollar	1.52079
SYP	Syrian Pound	70.16592	XDR	IMF Special Drawing Rights	1.00249
LYD	Libyan Dinar	1.93668	RWF	Rwandan Franc	872.92429
JMD	Jamaican Dollar	135.43566	AWG	Aruban or Dutch Guilder	2.72223
MUR	Mauritian Rupee	46.18295	DJF	Djiboutian Franc	270.49869
GHS	Ghanaian Cedi	2.16409	BTN	Bhutanese Ngultrum	68.04059
AOA	Angolan Kwanza	141.34135	KMF	Comoran Franc	554.12866
UYU	Uruguayan Peso	29.60410	WST	Samoan Tala	3.96558
AFN	Afghan Afghani	69.95679	ERN	Eritrean Nakfa	22.83119
LBP	Lebanese Pound	2281.19999	FKP	Falkland Island Pound	1.00000
XPF	CFP Franc	134.40949	SHP	Saint Helenian Pound	1.00000
TTD	Trinidadian Dollar	9.68013	JEP	Jersey Pound	1.00000
TZS	Tanzanian Shilling	2069.25006	TMT	Turkmenistani Manat	4.33427
ALL	Albanian Lek	155.89720	TVD	Tuvaluan Dollar	1.65358
XCD	East Caribbean Dollar	3.84002	IMP	Isle of Man Pound	1.00000
GTQ	Guatemalan Quetzal	12.15691			

8.4 Prilog D

Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema HRK	Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema HRK
INR	Indian Rupee	9.47581	ZWD	Zimbabwean Dollar	50.61684
JPY	Japanese Yen	16.14616	LAK	Lao or Laotian Kip	1145.03832
THB	Thai Baht	4.99039	BWP	Botswana Pula	1.48950
HUF	Hungarian Forint	40.65857	HNL	Honduran Lempira	3.26007
HKD	Hong Kong Dollar	1.08453	PYG	Paraguayan Guarani	810.16455
MXN	Mexican Peso	2.99376	ETB	Ethiopian Birr	3.14966
ZAR	South African Rand	1.89746	NAD	Namibian Dollar	1.89746
PHP	Philippine Peso	6.89398	MOP	Macau Pataca	1.11707
SEK	Swedish Krona	1.25848	NIO	Nicaraguan Cordoba	4.10421
IDR	Indonesian Rupiah	1870.52649	KZT	Kazakhstani Tenge	46.55890
KES	Kenyan Shilling	14.51113	GYD	Guyanese Dollar	28.84535
KRW	South Korean Won	165.32596	YER	Yemeni Rial	34.96965
EGP	Egyptian Pound	2.54503	MGA	Malagasy Ariary	467.87482
IQD	Iraqi Dinar	165.30618	MZN	Mozambican Metical	9.96720
NOK	Norwegian Krone	1.18795	RSD	Serbian Dinar	16.31130
RUB	Russian Ruble	8.35217	SCR	Seychellois Rupee	1.85086
ZMW	Zambian Kwacha	1.40094	AMD	Armenian Dram	67.68592
PKR	Pakistani Rupee	14.65596	SBD	Solomon Islander Dollar	1.09013
COP	Colombian Peso	410.63193	SLL	Sierra Leonean Leone	768.24715
CLP	Chilean Peso	92.60187	MWK	Malawian Kwacha	101.49414
TWD	Taiwan New Dollar	4.45149	GMD	Gambian Dalasi	6.12573
ARS	Argentine Peso	2.23784	BIF	Burundian Franc	235.10123
CZK	Czech Koruna	3.56474	SOS	Somali Shilling	80.66914
VND	Vietnamese Dong	3172.3435	HTG	Haitian Gourde	9.41847
MAD	Moroccan Dirham	1.40966	GNF	Guinean Franc	1321.72039
XOF	CFA Franc	86.55731	MVR	Maldivian Rufiyaa	2.13879
LKR	Sri Lankan Rupee	20.76562	MNT	Mongolian Tughrik	348.40551
UAH	Ukrainian Hryvnia	3.68593	CDF	Congolese Franc	150.49384
NGN	Nigerian Naira	43.32835	STD	Sao Tomean Dobra	3255.96960
UGX	Ugandan Shilling	506.94880	TJS	Tajikistani Somoni	1.10191
BDT	Bangladeshi Taka	11.03901	KPW	North Korean Won	18.38455
XAF	Central African CFA	86.55731	MMK	Burmese Kyat	188.04884
VEF	Venezuelan Bolivar	1.39364	LSL	Basotho Loti	1.89746
UZS	Uzbekistani Som	453.10408	LRD	Liberian Dollar	12.76060
DZD	Algerian Dinar	15.44905	KGS	Kyrgyzstani Som	9.66899
IRR	Iranian Rial	4529.37494	MDL	Moldovan Leu	2.81838
DOP	Dominican Peso	6.48098	CUP	Cuban Peso	3.70640
ISK	Icelandic Krona	15.76611	KHR	Cambodian Riel	562.69434
CRC	Costa Rican Colon	77.38432	MKD	Macedonian Denar	8.11313
SYP	Syrian Pound	29.83444	VUV	Ni-Vanuatu Vatu	15.78623
JMD	Jamaican Dollar	17.98368	MRO	Mauritanian Ouguiya	50.10789
MUR	Mauritian Rupee	5.06224	SZL	Swazi Lilangeni	1.89746
AOA	Angolan Kwanza	23.18253	CVE	Cape Verdean Escudo	14.65276
UYU	Uruguayan Peso	4.00749	SRD	Surinamese Dollar	1.03839
AFN	Afghan Afghani	9.34753	SVC	Salvadoran Colon	1.22381
LBP	Lebanese Pound	210.98940	RWF	Rwandan Franc	114.79685
XPF	CFP Franc	15.74651	DJF	Djiboutian Franc	24.89229
TZS	Tanzanian Shilling	304.07980	BTN	Bhutanese Ngultrum	9.47581
ALL	Albanian Lek	17.87761	KMF	Comoran Franc	64.91798
GTQ	Guatemalan Quetzal	1.05541	ERN	Eritrean Nakfa	2.14457
NPR	Nepalese Rupee	15.21127			

8.5 Prilog E

Oznaka valute	Naziv valute	Tečaj prema CZK
INR	Indian Rupee	2.97570
JPY	Japanese Yen	5.04276
THB	Thai Baht	1.60260
HUF	Hungarian Forint	11.21206
PHP	Philippine Peso	2.17106
IDR	Indonesian Rupiah	587.06530
KES	Kenyan Shilling	4.32534
KRW	South Korean Won	50.50886
IQD	Iraqi Dinar	57.39165
RUB	Russian Ruble	1.71904
PKR	Pakistani Rupee	4.86077
COP	Colombian Peso	93.70600
CLP	Chilean Peso	27.61504
TWD	Taiwan New Dollar	1.48392
VND	Vietnamese Dong	1046.42339
XOF	CFA Franc	23.90256
LKR	Sri Lankan Rupee	6.42677
NGN	Nigerian Naira	8.05852
UGX	Ugandan Shilling	127.46576
BDT	Bangladeshi Taka	3.83310
XAF	Central African CFA	23.90256
UZS	Uzbekistani Som	113.32373
DZD	Algerian Dinar	3.92433
IRR	Iranian Rial	1264.73875
DOP	Dominican Peso	2.12936
ISK	Icelandic Krona	5.62664
CRC	Costa Rican Colon	27.38564
SYP	Syrian Pound	7.36419
JMD	Jamaican Dollar	5.49489
MUR	Mauritian Rupee	1.51498
AOA	Angolan Kwanza	4.81916
UYU	Uruguayan Peso	1.13401
AFN	Afghan Afghani	2.84145
LBP	Lebanese Pound	74.54008
XPF	CFP Franc	4.34835
TZS	Tanzanian Shilling	82.97858
ALL	Albanian Lek	5.10796
NPR	Nepalese Rupee	4.78270
ZWD	Zimbabwean Dollar	17.85902
LAK	Lao or Laotian Kip	397.32506
PYG	Paraguayan Guarani	218.85818
NIO	Nicaraguan Cordoba	1.27836
KZT	Kazakhstani Tenge	9.05658
GYD	Guyanese Dollar	10.15087
YER	Yemeni Rial	10.60487
MGA	Malagasy Ariary	119.42205
MZN	Mozambican Metical	1.55199
RSD	Serbian Dinar	4.20496
AMD	Armenian Dram	20.30713
SLL	Sierra Leonean Leone	214.91034
MWK	Malawian Kwacha	19.47270
GMD	Gambian Dalasi	1.98131
BIF	Burundian Franc	75.74923
SOS	Somali Shilling	59.16737
HTG	Haitian Gourde	2.16834
GNF	Guinean Franc	337.04653
MNT	Mongolian Tughrik	90.08469
CDF	Congolese Franc	45.10414
STD	Sao Tomean Dobra	893.93781
KPW	North Korean Won	6.45257
MMK	Burmese Kyat	48.01556
LRD	Liberian Dollar	4.39196
KGS	Kyrgyzstani Som	2.55855
CUP	Cuban Peso	1.30772
KHR	Cambodian Riel	199.46443
MKD	Macedonian Denar	2.24039
VUV	Ni-Vanuatu Vatu	4.62390
MRO	Mauritanian Ouguiya	14.38492
CVE	Cape Verdean Escudo	3.96658
RWF	Rwandan Franc	33.40856
DJF	Djiboutian Franc	8.94179
BTN	Bhutanese Ngultrum	2.97570
KMF	Comoran Franc	17.92692