

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lucijana Grgić

**Nelder-Meadova metoda: lokalna metoda direktne  
bezuovjetne optimizacije**

Završni rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lucijana Grgić

**Nelder-Meadova metoda: lokalna metoda direktne  
bezuvjetne optimizacije**

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2015.

# Sadržaj

Sažetak	2
1 Uvod i motivacija	3
2 Nastanak i povijest Nelder-Meadove metode	4
3 Nelder-Meadova metoda	5
3.1 Algoritam Nelder-Meadove metode u $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
3.2 Kriterij zaustavljanja . . . . .	7
4 Jedna iteracija Nelder-Meadove metode u $\mathbb{R}^n$	7
5 Konvergencija	12
6 Numerički primjer	13
Literatura	15

# Sažetak

Potreba za optimizacijom funkcija čije nam derivacije nisu poznate, 1965.godine dovela je do nastanka Nelder-Meadove metode. U ovome radu je opisana upravo ta metoda, koja se smatra jednom od popularnijih i raširenijih lokalnih metoda direktne bezuvjetne optimizacije. Nelder-Meadova metoda je zanimljiva zbog svoje jednostavnosti što je pokazano algoritmom u  $\mathbb{R}^2$ , kao i generalizacijom u  $\mathbb{R}^n$ . Izneseno je nekoliko informacija o konvergenciji ove metode nakon njezinog nastanka, no većinom negativni rezultati pošto dokaz o konvergenciji ove metode ne postoji. Na kraju je prikazan numerički primjer koji potkrijepljuje cijelu priču, kako o jednostavnosti, tako i o nedostacima.

**Ključne riječi:** *Nelder-Meadova metoda, Bezuvjetna optimizacija, Lokalna metoda, Simpleks metoda*

# Abstract

The need to optimize functions whose derivatives are unknown lead to the occurrence of Nelder-Mead's method in 1965. In this work precisely that method is described which is considered one of the most popular and wideused local methods for direct unconstrained optimization. Nelder-Mead's method is interesting because of its simplicity shown by algorithm in  $\mathbb{R}^2$ , as the generalization in  $\mathbb{R}^n$ . There are several informations about convergence of this method since its apperance, but mostly negative results due to lack of evidence. Finally, a numerical example in this work comfirms the whole story, in terms of both simplicity and the disadvantages.

**Keywords:** *Nelder-Mead's method, Unconstrained optimization, Local method, Simplex search algorithm*

# 1 Uvod i motivacija

Mnogi problemi koji potječu iz različitih područja primjena, bilo kemije, inženjerstva ili pak medicine, svode se na traženje globalnog minimuma ili maksimuma funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  na skupu  $\mathbb{R}^n$ , odnosno točke iz  $\mathbb{R}^n$  u kojoj se taj minimum, odnosno maksimum postižu. Za  $x^* \in \mathbb{R}^n$  kažemo da je točka globalnog minimuma funkcije  $f$  na  $\mathbb{R}^n$  ako vrijedi  $f(x^*) \leq f(x)$ , za svaki  $x \in \mathbb{R}^n$ . U tom slučaju pišemo

$$x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f(x).$$

Vrijednost funkcije  $f$  u točki  $x^*$  zovemo globalni minimum funkcije te pišemo

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Nažalost, određivanje točke globalnog minimuma funkcije  $f$ , općenito je vrlo ozbiljan i zahtjevan posao i obično zahtjeva poznavanje svih točaka lokalnih minimuma funkcije  $f$  na  $\mathbb{R}^n$ .

Za  $x^* \in \mathbb{R}^n$  kažemo da je točka lokalnog minimuma funkcije  $f$  na  $\mathbb{R}^n$ , ako postoji otvorena kugla  $K(x^*, \delta)$  sa središtem u točki  $x^*$  polumjera  $\delta > 0$  takva da vrijedi  $f(x^*) \leq f(x)$ , za svaki  $x \in K(x^*, \delta)$ . Pri tome vrijednost  $f(x^*)$  zovemo lokalnim minimumom funkcije  $f$ . Metode za traženje točke lokalnog minimuma nazivaju se lokalne optimizacijske metode. Ovisno o uvjetima koje zadovoljava funkcija  $f$ , za traženje točke lokalnog minimuma, mogu se koristiti različite lokalne optimizacijske metode. Jedna od lokalnih optimizacijskih metoda je upravo Nelder-Meadova metoda. Ova metoda traži lokalni minimum nelinearnih funkcija  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  koristeći samo funkcijske vrijednosti točaka domene funkcije  $f$  zbog čega ova metoda spada u skupinu direktnih metoda. Dakle, je li funkcija  $f$  diferencijabilna i da li se njezin gradijent ili Hessijan mogu izračunati, kod ove metode je nebitno jer ona ne zahtjeva nikakve uvjete na funkciju, pa Nelder-Meadovu metodu nazivamo direktnom metodom bezuvjetne optimizacije.

Nelder-Meadovu metodu nazivamo i simpleks metodom, odnosno metodom zasnovanom na simpleksu. Simpleks  $S$  u  $\mathbb{R}^n$  je  $n$ -dimenzionalan politop koji je konveksna ljuska od  $n + 1$  vrhova. To je najosnovniji geometrijski oblik omeđen ravnim stranicama koji ima minimalni broj vrhova u danoj dimenziji. U 1-dimenziji to bi bila dužina, u 2-dimenziji trokut, u 3-dimenziji tetraedron itd.

Dakle, metoda počinje sa skupom  $n + 1$  točaka  $x_1, \dots, x_{n+1}$  iz  $\mathbb{R}^n$  koje predstavljaju vrhove početnog simpleksa  $S$  s kojim ćemo raditi, te sa skupom pripadajućih funkcijskih vrijednosti u vrhovima, tj.  $f_j = f(x_j)$  za  $j = 1, \dots, n + 1$ . Metoda se zasniva na uspoređivanju funkcijskih vrijednosti u svim točkama simpleksa. Točka s najvećom funkcijskom vrijednosti se odbacuje i uvodi se nova točka dobivena nizom transformacija na početnom simpleksu koja s ostalima čini novi simpleks. Nelder-Meadova metoda izvodi niz transformacija s ciljem smanjenja funkcijskih vrijednosti u vrhovima te proces staje kada se simpleks dovoljno smanji ili kada se funkcijske vrijednosti  $f_j$  dovoljno približe istom broju.

U sljedećem poglavlju predstaviti ćemo nastanak Nelder-Meadove metode, dok ćemo u trećem objasniti kako metoda počinje, prikazati njezin algoritam te navesti kriterij zaustavljanja iterativnog procesa ove metode. Nadalje, generalizirat ćemo metodu u 2-dimenzionalnom prostoru kako bi transformacije simpleksa mogli potkrijepiti slikama. Nakon toga slijedi poglavlje Konvergencija koje govori o nedostatku dokaza i teorijske pozadine Nelder-Meadove metode, a na kraju jedan numerički primjer gdje ćemo se dotaknuti nekih nedostataka.

## 2 Nastanak i povijest Nelder-Meadove metode

Kako su se razvijala računala i povećavala memorija za pohranu podataka, tako su se 1950-tih i 1960-tih godina pojavile direktne metode za optimizaciju funkcija. Prvu takvu simpleks-metodu su predložili Spendley, Hext i Himsworth 1962.godine [11]. Kako bi se tvorilo novi simpleks, ova metoda je koristila samo dvije vrste transformacija: *refleksiju* od vrha s najvećom vrijednošću od  $f$  i *smanjivanje* prema vrhu s najmanjom vrijednošću od  $f$ . Na taj način je oblik simpleksa uvijek ostajao isti dok se njegova veličina mijenjala. Godine 1965. John Nelder i Roger Mead su poboljšali Spendlejevju metodu dodajući još dvije vrste transformacija: *ekspanziju* i *kontrakciju*, koje su simpleksu, uz promjenu veličine, dopuštale i promjenu oblika. Svoju metodu su predstavili u radu nazvanom ***A simplex method for function minimization*** (vidi [8]) te iste godine i opisali ju kao metodu u kojoj se simpleks prilagođava lokalnom prostoru, odnosno okolini, te se sužava i smanjuje oko minimuma.

Nelder-Meadova metoda brzo je stekla popularnost zbog dva razloga: svoje jednostavnosti i zahtijevanja vrlo malo podataka o funkciji koju želimo minimizirati. Moguće ju je primijeniti na funkciju za koju je dovoljno poznavati isključivo vrijednosti u svim točkama domene. U mnogim slučajevima se ova metoda pokazala vrlo efikasnom, posebno u optimizacijskim problemima manjih dimenzija. Tako se 1980-tih godina našla u poznatoj knjizi ***Numerical Recipes*** (vidi [10]) pod nazivom “*ameba algoritam*” i u programskom sustavu *Matlab* gdje se krije pod naredbom `fminsearch` za traženje točke lokalnog minimuma.

Nažalost, kod optimizacijskih problema u velikim dimenzijama metoda se ne pokazuje korisnom i zanimljivo je da općenito ne postoji dokaz konvergencije ove metode (više o tome u poglavlju **Konvergencija**). Zbog toga postoje mnoge modifikacije Nelder-Meadove metode koje imaju bolja svojstva konvergencije predložene poslije kasnih 1970-tih. Neke od njih se nalaze u [3], [5], [9]. Unatoč problemima s konvergencijom i davnoj godini nastavka, ova metoda je još uvijek među najpopularnijim i najkorištenijim metodama direktne bezuvjetne optimizacije.

### 3 Nelder-Meadova metoda

U ovome odjeljku ćemo opisati i objasniti korake Nelder-Meadove metode koja se sastoji od ponavljanja niza transformacija. Svaka iteracija Nelder-Meadove metode počinje od simpleksa. Pošto ćemo pretpostaviti da smo u  $n$ -dimenzionalnom prostoru, uzimamo simpleks definiran s  $n + 1$  vrhova,  $x_1, \dots, x_{n+1}$  iz  $\mathbb{R}^n$ . Bez smanjenja općenitosti vrhove označimo tako da vrijedi ovaj niz nejednakosti:

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_{n+1}$$

pri čemu je  $f_i = f(x_i)$  za  $i = 1, \dots, n + 1$ .

Pošto je naš cilj naći minimum funkcije  $f$ , vrh  $x_1$ , čija je funkcijska vrijednost najmanja, ćemo nazvati **najboljim vrhom**, dok ćemo  $x_{n+1}$ , točku u kojoj je funkcijska vrijednost najveća, prozvati **najlošijim**. Nakon toga ćemo izračunati težište svih vrhova osim onog najlošijeg:

$$\tilde{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Zatim slijede transformacije simpleksa kako bismo najlošiji vrh zamjenili s boljim vrhom. Imamo četiri moguće transformacije: *refleksiju*, *ekspanziju*, *kontrakciju* i *skraćivanje*. Svaka od njih opisana je s pripadajućim parametrom:  $\alpha$  za refleksiju,  $\beta$  za kontrakciju,  $\gamma$  za ekspanziju i  $\delta$  za skraćivanje. Po [8] ovi parametri trebaju zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \delta < 1,$$

te su njihove standardne vrijednosti

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{1}{2}.$$

Svaka iteracija ima dva moguća ishoda:

1. novi vrh dobiven korištenjem refleksije, kontrakcije i ekspanzije koji zamjenjuje najlošiji vrh u sljedećoj iteraciji
2.  $n$  novih vrhova dobivenih skraćivanjem koji s  $x_1$ , tj. najboljim vrhom, tvore simpleks za sljedeću iteraciju.

### 3.1 Algoritam Nelder-Meadove metode u $\mathbb{R}^n$

1. Odredi  $n + 1$  točaka početnog simpleksa:  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$
2. Izračunaj vrijednost funkcije  $f$  za sve točke simpleksa.
3. Sortiraj točke simpleksa prema vrijednosti funkcije  $f$  u točkama na sljedeći način:  
 $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$

#### 4. Refleksija

- Izračunaj težište svih točaka osim najlošije:

$$\tilde{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Izračunaj točku refleksije i vrijednost funkcije  $f$  u njoj:

$$x_r = \tilde{x} + \alpha(\tilde{x} - x_{n+1})$$

- Ako točka refleksije nije bolja od najbolje točke simpleksa, a bolja je od druge najgore točke simpleksa, tj.:

$$f(x_1) \leq f(x_r) \leq f(x_n)$$

onda:

- nova točka simpleksa je točka refleksije  $x_r$  koja zamjenjuje najgoru točku  $x_{n+1}$
- idi na korak 1

#### 5. Ekspanzija

Ako je točka refleksije najbolja, odnosno  $f(x_r) < f(x_1)$ , onda:

- Izračunaj točku ekspanzije i vrijednost funkcije  $f$  u njoj:

$$x_e = \tilde{x} + \gamma(\tilde{x} - x_{n+1})$$

- Ako je točka ekspanzije bolja od točke refleksije,  $f(x_e) < f(x_r)$ , onda:

- nova točka simpleksa postaje točka ekspanzije  $x_e$
- idi na korak 1

inače

- nova točka simpleksa postaje točka refleksije  $x_r$
- idi na korak 1

#### 6. Kontrakcija

Vrijedi  $f(x_r) \geq f(x_n)$ . Izračunaj točku kontrakcije i vrijednost funkcije  $f$  u njoj:

$$x_c = x_{n+1} + \beta(\tilde{x} - x_{n+1})$$

Ako je točka kontrakcije bolja od najgore točke, tj.  $f(x_c) < f(x_{n+1})$ , onda:

- nova točka simpleksa postaje točka kontrakcije  $x_c$



- idi na korak 1

## 7. Skraćivanje

Vrijedi  $f(x_c) \geq f(x_{n+1})$ . Za sve točke osim najbolje,  $x_1$ , izračunaj nove:

$$x_i = x_1 + \delta(x_i - x_1) \text{ za } i = 2, \dots, n + 1.$$

Idi na korak 1.

## 3.2 Kriterij zaustavljanja

Iteracije algoritma Nelder-Meadove metode se ponavljaju sve dok se ne zadovolji neki kriterij zaustavljanja. Većina direktnih metoda kao kriterij zaustavljanja uzimaju jedan od sljedeća dva navedena:

- funkcijske vrijednosti u svim vrhovima simpleksa su blizu jedna drugoj
- vrhovi simpleksa su dovoljno blizu, odnosno simpleks se dovoljno smanjio.

Na primjer, u [10] je predloženo da se Nelder-Meadov algoritam zaustavi ukoliko vrhovi simpleksa u trenutnoj iteraciji zadovoljavaju sljedeće:

$$\max_{2 \leq i \leq n+1} \|x_i - x_1\| \leq \varepsilon \max(1, \|x_1\|),$$

dok je u originalnom radu Neldera i Meada [8] predložen kriterij zaustavljanja:

$$\sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}} < \varepsilon$$

gdje je  $y_i = f(x_i)$  za  $i = 1, \dots, n + 1$ , a  $\bar{y}$  aritmetička sredina svih  $y_i$ . Broj  $\varepsilon$  je unaprijed zadana tolerancija, posebno, u [8] je  $\varepsilon = 10^{-8}$ . No nijedan od ova dva kriterija zaustavljanja ne moraju proći kod Nelder-Meadove metode za neke funkcije o čemu ćemo više u poglavlju **Konvergencija**.

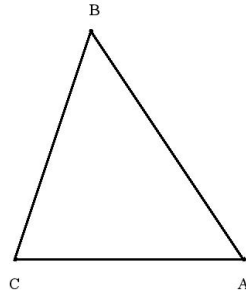
## 4 Jedna iteracija Nelder-Meadove metode u $\mathbb{R}^n$

U ovome odjeljku ćemo prikazati specijalni slučaj optimizacije u  $\mathbb{R}^2$ , odnosno primjenu Nelder-Meadove metode u ravnini gdje se ona svodi na niz elementarnih geometrijskih transformacija trokuta. Na taj ćemo način svaku od moguće četiri operacije potkrijepiti i slikom te će metoda biti jasnija.

Pretpostavimo da je zadana funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Promatramo trokut  $\triangle ABC \subset \mathbb{R}^2$  s vrhovima  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  i  $C = (x_3, y_3)$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$f(A) \leq f(B) \leq f(C),$$

zbog čega ćemo vrh  $A$  nazivati najboljim vrh, vrh  $B$  drugim najlošijim, a  $C$  najlošijim.



Slika 1: Trokut  $\triangle ABC$

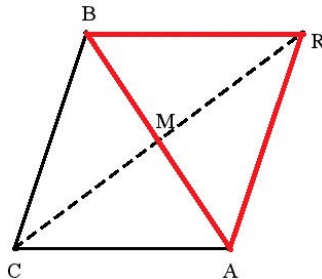
Sljedeći korak je računanje težišta svih vrhova osim najlošijeg. To je u ovom slučaju polovište vrhova  $A$  i  $B$  koje ćemo označiti s  $M$ .

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Sada najlošiji vrh  $C$  preslikamo centralno-simetrično u odnosu na točku  $M$  te dobivamo vrh

$$R = M + (M - C) = 2M - C = A + B - C.$$

Na taj smo način refleksijom preslikali trokut  $\triangle ABC$  u trokut  $\triangle ABR$ .



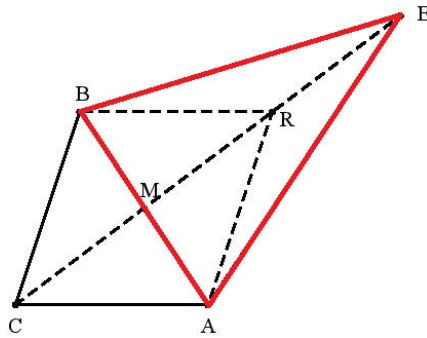
Slika 2: Refleksija trokuta

Zatim provjeravamo u kakvom su odnosu vrhovi  $C$  i  $R$ :

- Ako je  $f(R) < f(A)$ , tada smatramo da se krećemo u pravom smjeru te se pomaknemo u istom smjeru do točke

$$E = R + (R - M) = 2R - M = 2A + 2B - 2C - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = \frac{3}{2}A + \frac{3}{2}B - 2C.$$

Sada smo ekspanzijom trokut  $\triangle ABR$  preslikali u trokut  $\triangle ABE$ . Točku  $C$  zamijenit ćemo točkom  $E$  ako je  $f(E) < f(R)$ , odnosno točkom  $R$  ako je  $f(E) \geq f(R)$ . Na taj način smo dobili novi trokut s kojim krećemo u sljedeću iteraciju.



Slika 3: Ekspanzija trokuta

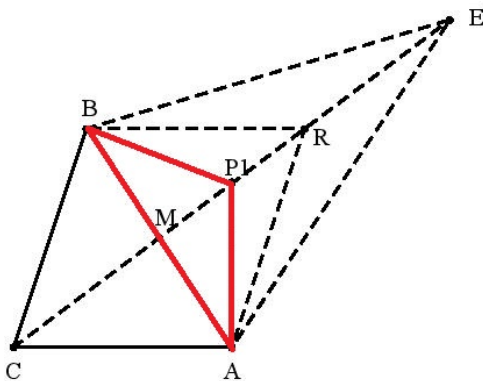
- Ako je  $f(R) \geq f(A)$ , točku  $R$  uspoređujemo s drugom najlošijom točkom  $B$ .
  - ▷ Ukoliko vrijedi da je  $f(R) < f(B)$ , točku  $C$  zamjenjujemo točkom  $R$  i time ova iteracija prestaje.
  - ▷ Ukoliko vrijedi da je  $f(R) \geq f(B)$ , provjeravamo odnos vrha  $R$  s najlošijim vrhom  $C$ .
    - Ako je  $f(R) < f(C)$ , točku  $C$  zamjenjujemo točkom  $R$  te definiramo novu točku

$$P = M + \frac{1}{2}(R - M) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}R = \frac{3}{4}A + \frac{3}{4}B - \frac{1}{2}C.$$

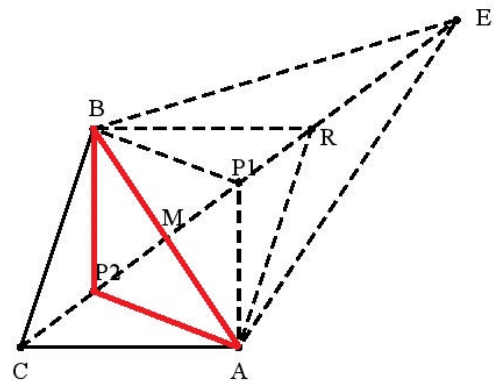
- Ako je  $f(R) \geq f(C)$ , definiramo novu točku

$$P = M - \frac{1}{2}(M - C) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}C = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C.$$

Odnosno kontrakcijom preslikamo trokut  $\triangle ABC$  u trokut  $\triangle ABP$ .



Slika 4: Kontrakcija trokuta

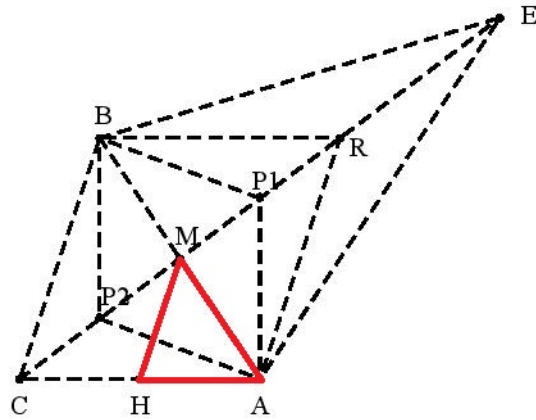


Slika 5: Kontrakcija trokuta

Konačno uspoređujemo točku  $P$  i točku  $C$ :

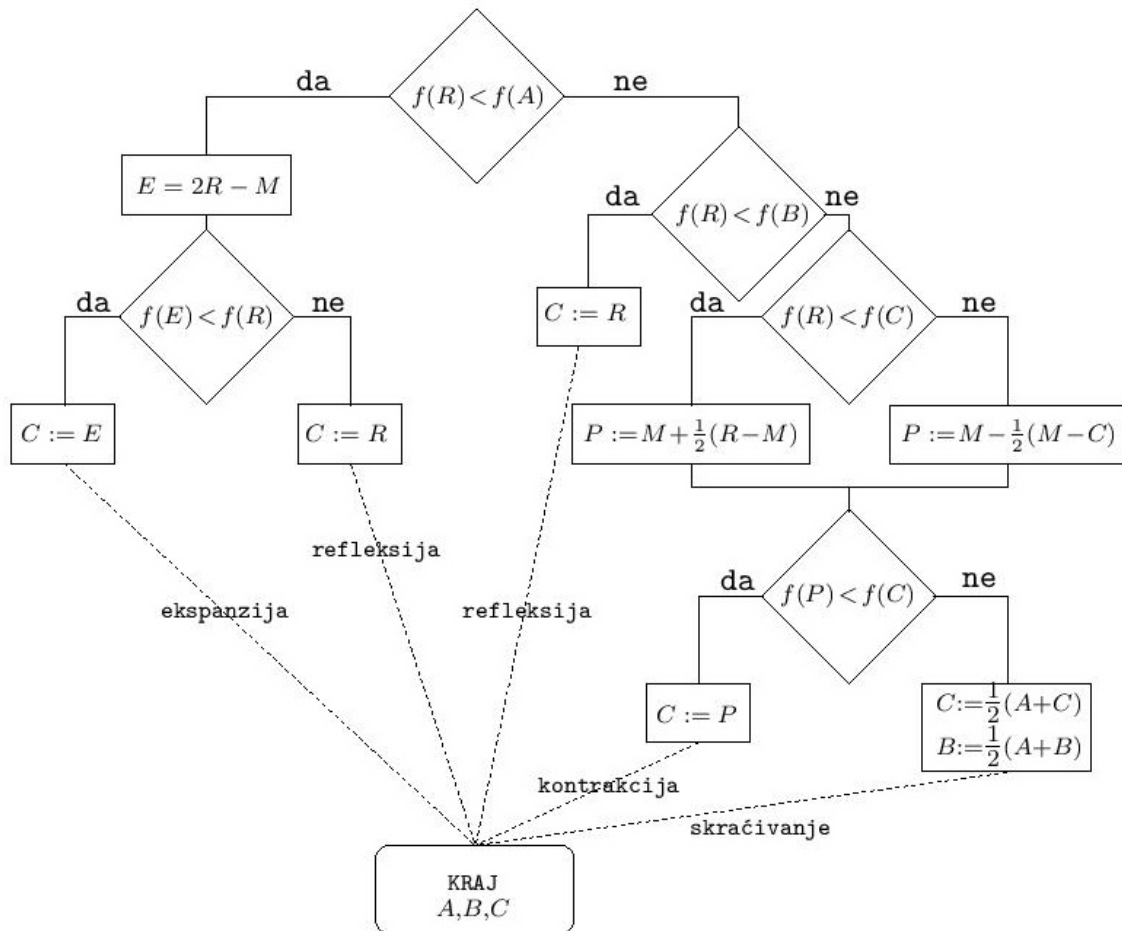
- Ako je  $f(P) < f(C)$ , točku  $C$  zamjenjujemo točkom  $P$  i time dobivamo trokut s kojim krećemo u sljedeću iteraciju.

- Ako je  $f(P) \geq f(C)$ , krećemo u postupak skraćivanja trokuta: definiramo  $H = \frac{1}{2}(A + C)$  te točku  $B$  zamijenimo točkom  $M$ , a točku  $C$  točkom  $H$ . Time smo definirali nove dvije točke koje s najboljim vrhom  $A$  čine trokut s kojim krećemo u sljedeću iteraciju.



Slika 6: Skraćivanje trokuta

Na sljedećoj slici je prikazan dijagram toka jedne iteracije Nelder-Meadove metode u  $\mathbb{R}^2$  koju je izradio Branimir Šajinović.



Slika 7: Dijagram toka jedne iteracije Nelder-Meadove metode u  $\mathbb{R}^2$

## 5 Konvergencija

Kao što smo vidjeli, Nelder-Meadova metoda uistinu nije teška za razumjeti i primijeniti, pogotovo na funkcijama u nižim dimenzijama. No čini se da je najveći problem kod ove metode njezina analiza i teorijska pozadina. U [2] konvergenijski rezultati za direktne metode oslanjaju se na sljedeća dva svojstva:

- a) Kutovi promatranog simpleksa poprimaju vrijednosti između 0 i  $\pi$  kroz iteracije, odnosno simpleks ostaje uniformno nepromijenjen.
- b) U svakoj iteraciji je potreban neki određeni pad funkcijskih vrijednosti.

Kako nijedno od ova dva svojstva Nelder-Meadova metoda ne zadovoljava, nemamo puno informacija o njezinim konvergenijskim svojstvima. Zanimljivo je kako dvadeset godina nakon što je objavljena Nelder-Meadova metoda tj. [8], nije bilo nikakve analize teorijskih svojstava ove metode. Tek 1985. Woods u [12] navodi negativne rezultate prilikom korištenja Nelder-Meadove metode kod optimizacije nekonveksne funkcije u dvije dimenzije pri čemu u svakoj iteraciji dolazi do skraćivanja trokuta te svi vrhovi konvergiraju točki koja nije minimum. McKinnon je 1998.godine u [7] naveo familiju strogo konveksnih neprekidnih funkcija u  $\mathbb{R}^2$  i klasu početnih trokuta čiji vrhovi tijekom transformacija ne konvergiraju minimumu. Te iste godine je i Lagarias u [6] spomenuo nekoliko rezultata u vezi konvergencije za strogo konveksne funkcije s omeđenom domenom u jednoj i dvije dimenzije.

Čak i na pitanje *'postoji li ijedna funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kojoj Nelder-Meadova metoda može naći lokalni minimum'* ne može se dati siguran odgovor. Najljepši predstavnik svih konveksnih kvadratnih funkcija u  $\mathbb{R}^2$  bi bila funkcija  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , no i za nju je analiza Nelder-Meada još uvijek otvoren problem. Za manje glatke i neneprekidne funkcije jedino što znamo je da bi Nelder-Meadova metoda u traženju minimuma mogla dovesti do neuspjeha.

Zbog nedostatka dokaza o konvergenciji, nastale su mnoge modifikacije originalne Nelder-Meadove metode u svrhu poboljšanja konvergenijskih svojstava (vidi [3], [9]), no unatoč tome mnogi ljudi ipak posežu za Nelder-Meadovom metodom. Zašto? Vjerojatno odgovor leži u tome što metoda često uspješno daje približno rješenje ili locira područje minimuma bez velikih ocjena funkcije u iteracijama i bez poznavanja njezinih diferencijabilnih svojstava.

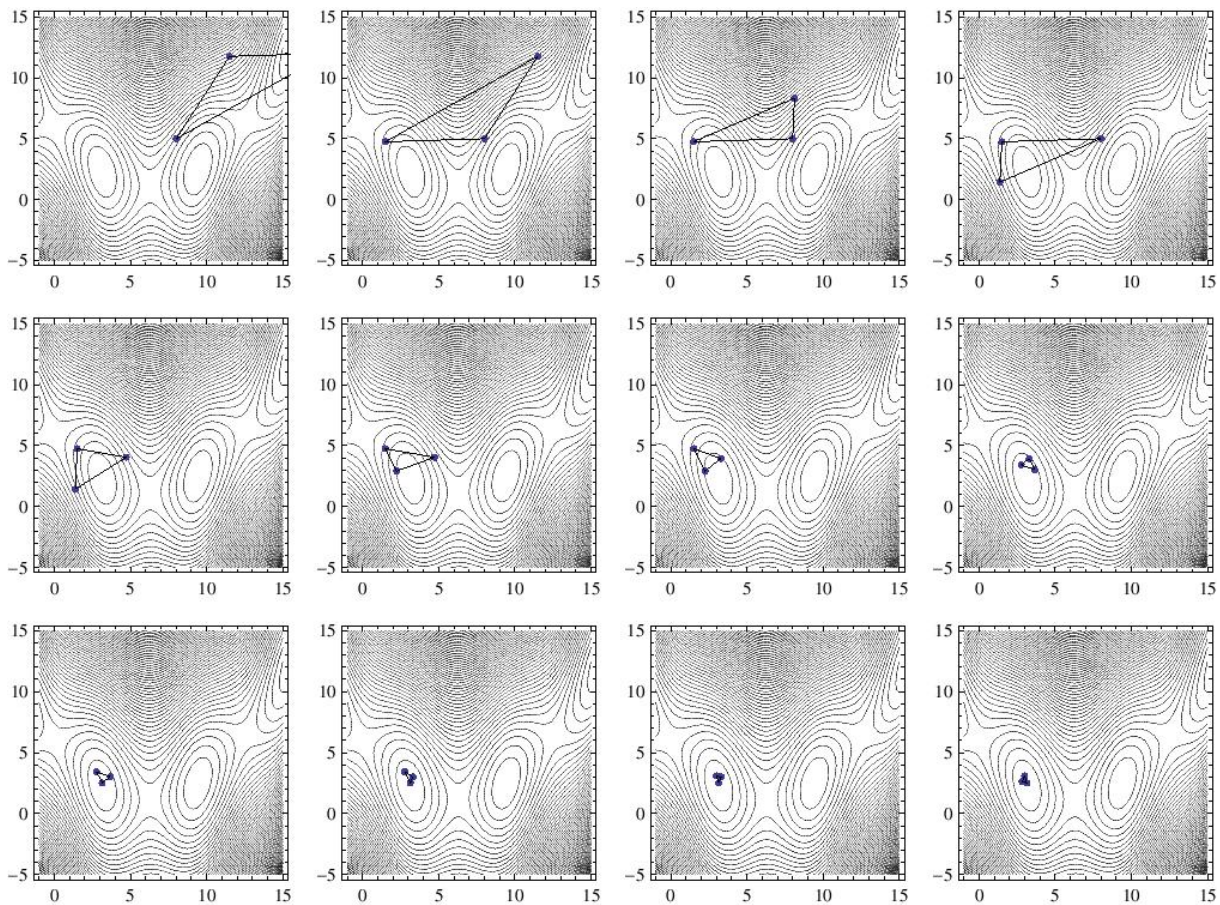
## 6 Numerički primjer

U ovome odjeljku ćemo navesti jedan česti primjer koji ilustrira mogućnosti i neke nedostatke Nelder-Meadove metode.

**Primjer 1** Promatramo tzv. Braninovu funkciju  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f(x_1, x_2) = \left( x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x_1 + 10$$

Ova funkcija postiže globalni minimum  $f_{min} \approx 0.398$  u beskonačno mnogo točaka na  $\mathbb{R}^2$ . Na skupu  $[-5, 10] \times [0, 15]$  su to točke  $x_1^* = (\pi, 2.275)$ ,  $x_2^* = (-\pi, 12.275)$ ,  $x_3^* = (3\pi, 2.475)$ .



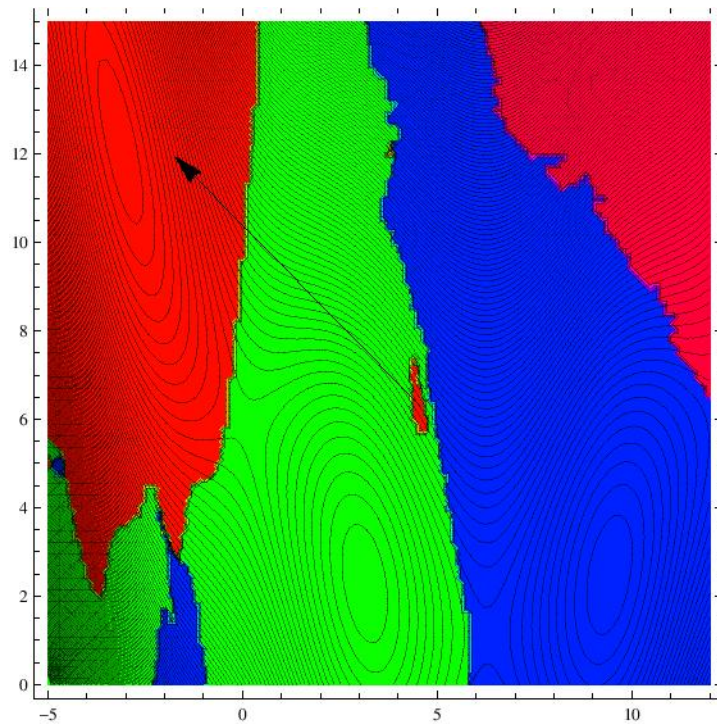
Slika 8: Iterativni proces Nelder-Meadove metode za Braninovu funkciju

Na Slici 8 prikazan je cijeli iterativni proces Nelder-Meadove metode kroz 12 iteracija koji je konvergirao točki  $x_1^* = (\pi, 2.275)$ .

Zbog toga što smo za vrhove početnog trokuta uzeli točke  $A = (8, 15)$ ,  $B = (10, 12)$ ,  $C = (10, 15)$ , proces je konvergirao točki  $x_1^*$ , a ne  $x_2^*$  ili  $x_3^*$ . Stoga, kojoj će točki minimuma proces konvergirati, ovisi o izboru početne aproksimacije.

Napravimo jedan numerički eksperiment u kome ćemo odrediti skup onih početnih aproksimacija koje vode k istoj točki globalnog minimuma. Radi jednostavnosti, umjesto tri vrha početnog trokuta, zadat ćemo jednu točku  $A$  dok ćemo ostale dvije odrediti tako

da su  $B = A + (1, 0)$ , te  $C = A + (0, 1)$ . Na Slici 9 su istom bojom prikazana područja početnih aproksimacija na skupu  $[-5, 10] \times [0, 15]$  koja konvergiraju k istoj točki globalnog minimuma. Uočimo četiri takva područja (a),(b),(c) i (d). U područjima (a),(b),(c) nalaze se sve one početne aproksimacije koje konvergiraju redom točkama  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$ . Području (d) pripadaju one početne aproksimacije koje konvergiraju točki  $x_4^* = (5\pi, 12.875)$ . U svrhu izrade Slike 9 definirana je funkcija  $\psi : [-5, 10] \times [0, 15] \rightarrow \mathbb{R}$  koja svakoj početnoj aproksimaciji  $A = (x, y)$  na skupu  $[-5, 10] \times [0, 15]$  pridružuje apscisu točke kojoj je Nelder-Meadova metoda konvergirala. Slika 9 je rezultat *Mathematica* naredbe: `ContourPlot[Psi[x,y] , x, -5, 12, y,0, 15, ColorFunction -> Hue]`.



Slika 9: Područja početnih aproksimacija

Kao što smo vidjeli, Nelder-Meadovom metodom smo vrlo brzo doveli trokut u područje minimuma, tj. za mali broj iteraciji trokut je konvergirao točki minimuma, no koristeći određenu početnu aproksimaciju gubimo podatke o ostalim točkama minimuma, ako one postoje.



## Literatura

- [1] M. ALIĆ, G. NOGO, *Optimizacija: Uvod u teoriju nužnih i dovoljnih uvjeta ekstrema*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004
- [2] C.AUDET, J.E.DENNIS JR., *Analysis of Generalized Pattern Searches*, SIAM J. Optim., **13**, (2003), 889–903
- [3] A.BÜRMEIN, J.PUHAN, T.TUMA, *Grid Restrained Nelder-Mead Algorithm*, Comput. Optim. Appl., **34**, (2006), 359–375
- [4] D. F. GRIFFITHS, G. A. WATSON, *Numerical Analysis 1995*, A. W. Longman Inc. United States of America, (1996), 191–205
- [5] J. C. LAGARIUS, B. POONEN, M. H. WRIGHT, *Convergence of the restricted Nelder-Mead algorithm in two dimensions*, (2011) <http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/nm.pdf>
- [6] J. C. LAGARIAS, J. A. REEDS, M. H. WRIGHT, M.H., P. WRIGHT, *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex algorithm in low dimensions*, SIAM J. Optim. **9**, (1998), 112–147
- [7] K.I.M.MCKINNON, *Convergence of the Nelder-Mead Simplex Method to a Nonstationary Point*, SIAM J. Optim., **9**,(1998), 148–158
- [8] J. A. NELDER, R. MEAD, *A simplex method for function minimization*, Comput. J. **7**, (1965), 308–313
- [9] C.J.PRICE, I.D.COOPE, D.BYATT, *A Convergent Variant of the Nelder-Mead Algorithm*, J. Optim. Theory Appl. **113**, (2002), 5–19
- [10] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERING, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1988)
- [11] W.SPENDLEY, G.R.HEXT, F.R.HIMSWORTH, *Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation*, Technometrics, Vol. 4, (1962), 441–461
- [12] D.J.WOODS, J.E.DENNIS JR. , *Optimization on Microcomputers: The Nelder-Mead Simplex Algorithm*, Technical Report, Delaware, (1985)
- [13] <http://www.scholarpedia.org/article/MATLAB>
- [14] <http://sim.riteh.hr/folders/8/Nelder-Mead%20metoda.pdf>