Parametarski zadane neprekidne distribucije

Šućur, Kristijan

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Kristijan Šućur

Parametarski zadane neprekidne distribucije

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Kristijan Šućur

Parametarski zadane neprekidne distribucije

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak
Komentor: doc. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2017.

Sažetak

Ovaj završni rad govori o parametarski zadanim neprekidnim slučajnim varijablama. U radu su definirane neke od najznačajnijih parametarski zadanih neprekidnih slučajnih varijabli te su za svaku od njih izračunate funkcija distribucije i pripadne numeričke karakteristike. Također je svaka vrsta potkrijepljena primjerima za lakše razumijevanje.

Ključne riječi: parametarski zadane neprekidne slučajne varijable, uniformna slučajna varijabla, eksponencijalna slučajna varijabla, dvostrana eksponencijalna (Laplaceova) slučajna varijabla, Gama (Γ) slučajna varijabla, normalna slučajna varijabla, χ^2 slučajna varijabla

Abstract

This bachelor's thesis is about parametric continuous random variables. In this thesis, some of the most important parametric continuous random variables are defined and for each of them distribution function and its corresponding numerical characteristics are calculated. Also, for every type we consider some examples, for easier understanding.

Key words: parametric continuous random variables, uniform random variable, exponential random variable, double exponential (Laplace) random variable, Gamma (Γ) random variable, normal random variable, χ^2 random variable

Sadržaj

1 Uvod **1**
1.1 Osnovni pojmovi i definicije 1

2 Slučajna varijabla **2**
2.1 Neprekidna slučajna varijabla 3
2.1.1 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable 4
2.1.2 Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable 5

3 Parametarski zadane neprekidne slučajne varijable **6**
3.1 Uniformna slučajna varijabla 7
3.1.1 Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable 7
3.1.2 Numeričke karakteristike uniformne slučajne varijable 8
3.1.3 Primjeri uniformne slučajne varijable 9
3.2 Eksponencijalna slučajna varijabla 10
3.2.1 Funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable 11
3.2.2 Numeričke karakteristike eksponencijalne slučajne varijable . . . 12
3.2.3 Primjeri eksponencijalne slučajne varijable 13
3.3 Dvostrana eksponencijalna (Laplaceova) slučajna varijabla 14
3.3.1 Funkcija distribucije dvostrane eksponencijalne slučajne varijable 14
3.3.2 Numeričke karakteristike dvostrane eksponencijalne slučajne varijable 16
3.3.3 Primjeri dvostrane eksponencijalne slučajne varijable 16
3.4 Gama (Γ) slučajna varijabla 17
3.4.1 Funkcija distribucije Gama slučajne varijable 18
3.4.2 Numeričke karakteristike Gama slučajne varijable 18
3.4.3 Primjeri Gama slučajne varijable 19
3.5 Normalna slučajna varijabla 19
3.5.1 Funkcija distribucije normalne slučajne varijable 20
3.5.2 Numeričke karakteristike normalne slučajne varijable 21
3.5.3 Primjeri normalne slučajne varijable 24
3.6 χ^2 slučajna varijabla 24
3.6.1 Funkcija distribucije, očekivanje i varijanca χ^2 slučajne varijable 25
3.6.2 Primjeri χ^2 slučajne varijable 26

1 Uvod

Kolika je vjerojatnost da će trajanje leta od jednog mjesta do drugog biti u određenom vremenskom intervalu? Kolika je vjerojatnost da ćete čekati u redu ispred telefonske govornice više od nekog određenog vremena? Kolika je vjerojatnost da se automobilske gume nakon određenog broja prijeđenih kilometara neće istrošiti? Kolika je vjerojatnost da će student zakasniti na predavanje? Ovo su samo neka od mnogih pitanja iz stvarnog života na koja ćemo pokušati dati odgovor koristeći teoriju vjerojatnosti.

Cilj ovog završnog rada je upoznavanje s parametarskim neprekidnim slučajnim varijablama. Za početak ćemo se upoznati s neprekidnim slučajnim varijablama te navesti njihove osnovne karakteristike. Detaljnim proučavanjem raznih parametarski zadanih neprekidnih slučajnih varijabli dat ćemo odgovore na pitanja s početka poglavlja, ali i na brojna druga pitanja iz stvarnog života.

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Kako bi što bolje shvatili pojam slučajne varijable za početak ćemo ponoviti osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti. Upoznat ćemo se s pojmom σ-algebre, definirati vjerojatnost te vidjeti što je to vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.1 *Važni pojmovi vezani uz slučajan pokus:*

- *elementarni događaj - to je svaki mogući ishod jednog izvođenja slučajnog pokusa (oznaka ω)*
- *skup elementarnih događaja - skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa (oznaka Ω)*
- *slučajan događaj - svaki podskup skupa elementarnih događaja.*

Definicija 1.2 (σ-algebra) *Neka je $\Omega \neq \emptyset$. Familija skupova $\mathcal{F}$ koja sadrži podskupove skupa Ω naziva se σ-algebra (na Ω) ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- *ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je i $A^c \in \mathcal{F}$*
- *ako je dana familija skupova $(A_i, i \in \mathrm{I})$, $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{N}$ iz $\mathcal{F}$ onda je i njihova unija također element iz $\mathcal{F}$, tj. $\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} A_i \in \mathcal{F}$.*

Definicija 1.3 (Vjerojatnost) *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra na njemu. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeća svojstva, koja nazivamo i aksiomima vjerojatnosti:*

- $P(A) \geq 0$, *za svaki* $A \in \mathcal{F}$ *(nenegativnost)*
- $P(\Omega) = 1$ *(normiranost)*
- *ako je dana familija međusobno disjunktnih skupova* $(A_i, i \in \mathrm{I})$ *iz* $\mathcal{F}$ *onda je* $P(\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} A_i) = \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} P(A_i)$ *(σ-aditivnost).*

Definicija 1.4 *Uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *skupa* $\Omega \neq \emptyset$, *σ-algebre* $\mathcal{F}$ *na njemu i vjerojatnosti* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *naziva se vjerojatnosni prostor.*

2 Slučajna varijabla

U ovom poglavlju upoznat ćemo se sa slučajnom varijablom. Definirat ćemo ju i steći osnovu za daljnje razumijevanje ovog rada. Najprije, navedimo njezinu definiciju.

Definicija 2.1 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *σ-algebra na* $\mathbb{R}$ *generirana svim otvorenim podskupovima od* $\mathbb{R}$, *a nazivamo ju Borelova σ-algebra. Svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *takva da je skup* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ *događaj iz* $\mathcal{F}$, *za svaki* $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, *tj.* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, *tj.* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, *za svaki* $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *je slučajna varijabla.*

Definicija 2.2 *Skup svih vrijednosti koje može poprimiti slučajna varijabla* X *naziva se slika slučajne varijable i označava se s* $\mathcal{R}(X)$.

Postoje dvije vrste slučajnih varijabli: diskretne i neprekidne.

Diskretna slučajna varijabla je slučajna varijabla kojoj je slika diskretan skup. Sljedeće dvije definicije će nam pobliže opisati diskretnu slučajnu varijablu.

Definicija 2.3 *Slučajna varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je diskretna ako postoji diskretan skup* $D \subset \mathbb{R}$ *tako da je* $P(X \in D) = 1$, *tj. ako joj je slika diskretan skup.*

Definicija 2.4 *Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *je svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla i to diskretna.*

Kako diskretne slučajne varijable nisu predmet ovoga rada, o njima čitatelj može saznati više u [2, str. 55]. U sljedećem poglavlju ćemo se detaljnije upoznati s neprekidnom slučajnom varijablom.

2.1 Neprekidna slučajna varijabla

Ako slika slučajne varijable nije diskretan skup, nego je npr. neki interval realnih brojeva, cijeli $\mathbb{R}$ i tome slično u tom slučaju govorimo o neprekidnim slučajnim varijablama koje su tema ovog rada.

Definicija 2.5 *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} = \{X \leqslant x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f, takva da je:*

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \textit{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju X zovemo neprekidna slučajna varijabla na Ω, a funkciju f tada zovemo funkcija gustoće slučajne varijable X.

Bitna svojstva funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable (vidi [2, str. 61]):
1) nenegativnost: $f(x) \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$,
2) normiranost:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

3) vjerojatnost da slučajna varijabla X, čija je funkcija gustoće f, primi vrijednost iz intervala $\langle a, b]$ može se izračunati korištenjem funkcije gustoće na sljedeći način:

$$P\{X \in \langle a, b]\} = P\{a < X \leqslant b\} = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Dokaz:
2) Očito je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(x)\mathrm{d}x.$$

Uz pomoć neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na monotono rastuću familiju događaja imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} P\{X \in \langle -\infty, n]\} = P\{\Omega\} = 1.$$

3) Tvrdnja slijedi iz svojstava vjerojatnosti i integrala:

$$P\{X \in \langle a, b]\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X \leqslant a\} = \int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

2.1.1 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Definicija 2.6 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na njemu. Funkciju $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja svakom realnom broju $x \in \mathbb{R}$ pridružuje vjerojatnost da je slučajna varijabla X manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju definiranu s*

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$$

nazivamo funkcija distribucije slučajne varijable X.

Teorem 2.1 (Svojstva funkcije distribucije) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na njemu i $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ njena funkcija distribucije. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1) funkcija distribucije F_X je monotono rastuća, tj. za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $x_1 \leqslant x_2$ vrijedi $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$,
2)

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0,$$

3)

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1,$$

4) funkcija distribucije F_X je neprekidna zdesna za svaki $x \in \mathbb{R}$, tj.

$$\lim_{n \to \infty} F_X(x + h_n) = F_X(x),$$

gdje je $(h_n, n \in \mathbb{N})$ monotono padajući niz pozitivnih realnih brojeva tako da je $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$.

Dokaz:

1) Ako je $x_1 \leqslant x_2$, tada je $\{X \leqslant x_1\} \subseteq \{X \leqslant x_2\}$. Primjenom svojstva monotonosti vjerojatnosti na prethodnu inkluziju dobivamo $P\{X \leqslant x_1\} \leqslant P\{X \leqslant x_2\}$, tj. $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$.

2) Neka je $(a_n, n \in \mathbb{N})$ monotono padajući niz realnih brojeva koji divergira u $-\infty$ i neka je $A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a_n\} = \{X \leqslant a_n\}, n \in \mathbb{N}$.
Sada je

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to \infty} F_X(a_n) = \lim_{n \to \infty} P\{X \leqslant a_n\} = \lim_{n \to \infty} P\{A_n\} = P\{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

3) Neka je $(b_n, n \in \mathbb{N})$ monotono rastući niz koji divergira u $+\infty$ i definirajmo pomoćne skupove $B_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b_n\} = \{X \leqslant b_n\}, n \in \mathbb{N}$.
Koristeći prethodne oznake zaključujemo da je

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(b_n) = \lim_{n\to\infty} P\{X \leqslant b_n\} = \lim_{n\to\infty} P\{B_n\} = P\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\} = P\{\Omega\} = 1.$$

4) Vrijedi

$$\begin{aligned} F_X(x+h_n) - F_X(x) &= P\{X \leqslant x+h_n\} - P\{X \leqslant x\} \\ &= P\{X \in \langle -\infty, x+h_n]\} - P\{X \in \langle -\infty, x]\} \\ &= P\{X \in \langle -\infty, x+h_n] \setminus \langle -\infty, x]\} \\ &= P\{X \in \langle x, x+h_n]\} \\ &= P_X\{\langle x, x+h_n]\}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\lim_{n\to\infty} (F_X(x+h_n) - F_X(x)) = \lim_{n\to\infty} P_X\{\langle x, x+h_n]\} = P_X\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x+h_n]\} = P_X\{\emptyset\} = 0.$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x+h_n) - \lim_{n\to\infty} F_X(x) = 0,$$

iz čega dobivamo traženu tvrdnju.

Napomena 2.1 *Iz definicije 2.5 i definicije 2.6 jasno je da ukoliko je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, vrijednost pripadne funkcije distribucije za proizvoljan realan broj $x_0 \in \mathbb{R}$ određujemo s*

$$F(x_0) = P\{X \leqslant x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} f(t)\mathrm{d}t, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Također, možemo uočiti da je funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable neprekidna funkcija u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$ (vidi [2, str. 67]).

2.1.2 Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable

Sva vjerojatnosna svojstva slučajne varijable dana su njenom funkcijom distribucije, odnosno tablicom distribucije kod diskretne slučajne varijable i funkcijom gustoće kod neprekidne slučajne varijable. Zbog moguće kompliciranosti tih funkcija javlja se potreba za uvođenjem nekih karakterističnih brojeva koji nam daju dodatne informacije o slučajnoj varijabli i zvat ćemo ih numeričke karakteristike slučajnih varijabli.

Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable definiramo pomoću pripadne funkcije gustoće $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ čija svojstva smo već naveli u Poglavlju 2.1. Jedna od najvažnijih numeričkih karakteristika slučajne varijable je njezino očekivanje čiju definiciju navodimo u nastavku.

Definicija 2.7 *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je konačan integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

zovemo matematičko očekivanje (ili samo očekivanje) neprekidne slučajne varijable X.

Definicija 2.8 *Ako postoji $E(X - EX)^2$ onda taj pozitivan realan broj nazivamo varijanca slučajne varijable X i označavamo s $VarX$ ili σ^2.*

Napomena 2.2 *Varijanca je očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njenog očekivanja.*
Standardna devijacija je korijen iz varijance, tj. $\sigma = \sqrt{VarX} > 0$.

Teorem 2.2 *Neka je X slučajna varijabla, na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koja ima varijancu. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1) $VarX = EX^2 - (EX)^2$,
2) $Var(aX + b) = a^2 VarX$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Vidi [2, str. 93].

Napomena 2.3 *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Tada vrijedi:*

1) ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana funkcija, onda je $Eg(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$

2) $VarX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) \mathrm{d}x$

3) $EX^r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) \mathrm{d}x$ je r-ti moment slučajne varijable X.

3 Parametarski zadane neprekidne slučajne varijable

Kao što znamo, neprekidne slučajne varijable određene su svojom funkcijom gustoće. Također, postoje neke slučajne varijable koje su zadane određenim parametrima, odnosno njihove funkcije gustoće i distribucije te sve numeričke karakteristike izražene su pomoću tih parametara. Takve slučajne varijable nazivamo parametarskim slučajnim varijablama i one su tema ovoga rada. U nastavku ovog poglavlja opisat ćemo razne vrste parametarskih neprekidnih slučajnih varijabli.

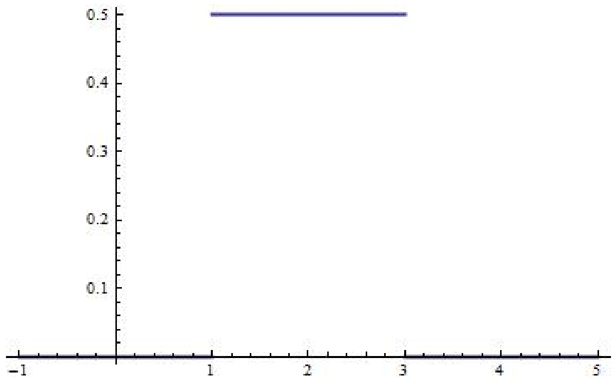
3.1 Uniformna slučajna varijabla

Uniformna neprekidna slučajna varijabla se koristi za pokuse za koje je poznato da mogu primiti vrijednost iz ograničenog intervala $\langle a, b\rangle$. Vjerojatnost realizacije intervala $\langle a_1, a_2\rangle$ ovisit će samo o njegovoj duljini sve dok je sadržan u $\langle a, b\rangle$ sa svojstvom da su jednako dugi intervali jednako vjerojatni.

Definicija 3.1 *Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, ako joj je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in \langle a, b\rangle \\ 0 & , x \notin \langle a, b\rangle \end{cases} .$$

Ako slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle a, b\rangle$, koristimo oznaku $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.



Slika 1: Funkcija gustoće uniformne slučajne varijable na segmentu $[1, 3]$

Za svaku neprekidnu slučajnu varijablu X vrijedi $P\{X = x_0\} = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, pa ne trebamo praviti razliku između uniformne distribucije na $\langle a, b\rangle$ i uniformne distribucije na $[a, b]$, odnosno na nekom od intervala $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$.

3.1.1 Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable

Nakon što smo vidjeli kako izgleda funkcija gustoće uniformne slučajne varijable odredit ćemo pripadnu funkciju distribucije koja će nam uvelike pomoći u rješavanju zadataka.

U izvodu funkcije distribucije uniformne slučajne varijable razlikujemo nekoliko slučajeva:
1) ako je $x \in \langle -\infty, a]$, onda je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2) Za $x \in \langle a, b\rangle$ dobivamo

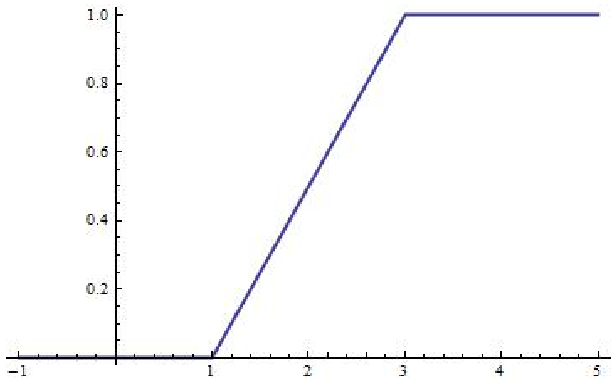
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a}.$$

3) Naposljetku, za $x \in [b, +\infty\rangle$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t + \int_{b}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Sada dolazimo do funkcije distribucije uniformne slučajne varijable:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, a] \\ \frac{x-a}{b-a} & , x \in \langle a, b\rangle \\ 1 & , x \in [b, +\infty\rangle \end{cases}.$$



Slika 2: Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable na segmentu $[1, 3]$

3.1.2 Numeričke karakteristike uniformne slučajne varijable

Odredimo očekivanje uniformne slučajne varijable:

$$\begin{aligned} EX =& \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b \\ =& \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Za izračunavanje varijance uniformne slučajne varijable potreban nam je drugi moment:

$$
\begin{aligned}
EX^2 =& \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b \\
=& \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.
\end{aligned}
$$

Sada dolazimo do varijance uniformne slučajne varijable:

$$
\begin{aligned}
VarX =& EX^2 - (EX)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\
=& \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}
$$

3.1.3 Primjeri uniformne slučajne varijable

Primjer 3.1 *Policiji je dojavljeno da svake noći između 2 i 3 sata kroz crveno svjetlo na semaforu projuri jedan te isti auto. Vjerojatnost prolaska auta jednaka je u jednako dugim intervalima. Kolika je vjerojatnost da će auto proći kroz crveno između 2 sata i 2 sata i 15 minuta?*

Rješenje: U našem primjeru funkcija distribucije zadana je s

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 2] \\ x-2 & , x \in \langle 2, 3\rangle \\ 1 & , x \in [3, \infty\rangle \end{cases}.
$$

Da bi mogli riješiti zadatak trebamo najprije odrediti koliko je 2 sata i 15 minuta izraženo u satima. Kao što znamo, jedan sat ima 60 minuta pa dolazimo do zaključka da je 15 minuta jednako 0.25 sata odakle slijedi da je 2 sata i 15 minuta jednako 2.25 sata. Izračunajmo sada traženu vjerojatnost.

$$
P\{X \in \langle 2, 2.25]\} = P\{X \in \langle -\infty, 2.25] \setminus \langle -\infty, 2]\} = P\{X \leqslant 2.25\} - P\{X \leqslant 2\}
$$

$$
= F_X(2.25) - F_X(2) = 2.25 - 2 = 0.25.
$$

Primjer 3.2 *Vrijeme trajanja leta između Zagreba i Berlina je slučajna varijabla X koja je distribuirana prema uniformnoj distribuciji. Let obično traje između 90 i 100 minuta. Kolika je vjerojatnost da let traje između 92 i 97 minuta?*

Rješenje: U ovom primjeru funkcija distribucije zadana je s

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 90] \\ \\ \frac{x-90}{10} & , x \in \langle 90, 100 \rangle \\ \\ 1 & , x \in [100, \infty\rangle \end{cases} .$$

Odredimo traženu vjerojatnost da je vrijeme trajanja leta između 92 i 97 minuta:

$$P\{92 < X < 97\} = P\{X \leqslant 97\} - P\{X \leqslant 92\} = F_X(97) - F_X(92) = \frac{7}{10} - \frac{2}{10} = 0.5.$$

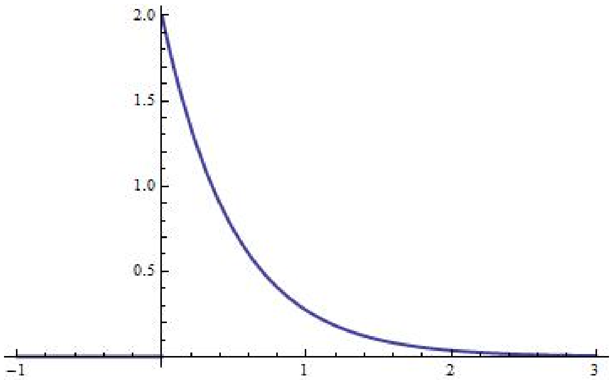
Vjerojatnost da je vrijeme trajanja leta između 92 i 97 minuta je 0.5.

3.2 Eksponencijalna slučajna varijabla

Ovaj tip distribucije često se javlja kod slučajnih varijabli koje modeliraju vremena čekanja do pojave nekog događaja ako se karakteristike ne mijenjaju tijekom vremena, npr. vrijeme do kvara (tj. vrijeme trajanja) jedne žarulje, vrijeme do pojave neke nesreće, itd.

Definicija 3.2 *Neprekidna slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ako joj je funkcija gustoće zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geqslant 0 \\ \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases} .$$



Slika 3: Funkcija gustoće eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 2$

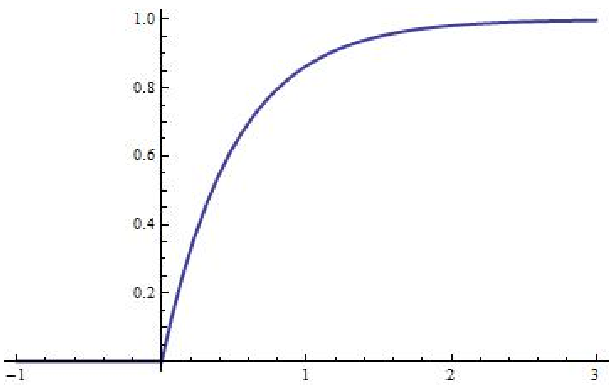
3.2.1 Funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable

Ako je $x < 0$, tada je $F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = 0$, jer slučajna varijabla ne može primiti negativne vrijednosti. Ako je $x \geqslant 0$, tada je

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Dakle, funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable dana je s

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geqslant 0 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}.$$



Slika 4: Funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 2$

3.2.2 Numeričke karakteristike eksponencijalne slučajne varijable

Odredimo očekivanje eksponencijalne slučajne varijable.

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\lambda x \Rightarrow x = \frac{t}{\lambda} \\ \\ \mathrm{d}t = \lambda \mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u=t & \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & v=-e^{-t} \end{array} \right| = \frac{1}{\lambda}\Big(-te^{-t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\Big)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\Big(\lim_{a\to\infty} \Big(-te^{-t}\Big|_0^a - e^{-t}\Big|_0^a\Big)\Big) = \frac{1}{\lambda}\Big(-\lim_{a\to\infty} ae^{-a} - \lim_{a\to\infty} e^{-a} + 1\Big).$$

Primjenom L'Hospitalovog pravila računamo sljedeći limes

$$\lim_{a\to\infty} ae^{-a} = \lim_{a\to\infty}\frac{a}{e^a} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{e^a} = 0.$$

Iz prethodnog računa dobivamo

$$EX = \frac{1}{\lambda}(0+1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Za izračunavanje varijance eksponencijalne slučajne varijable potreban nam je EX^2:

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u=x^2 & \mathrm{d}v = e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x & v=\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \end{array} \right|$$

$$=\lambda\Big(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x\Big) = -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{a\to\infty}(-a^2e^{-\lambda a}+0) + \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ponovnom primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{e^{\lambda a}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{a\to\infty}\frac{2a}{\lambda e^{\lambda a}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{a\to\infty}\frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda a}} = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$EX^2 = \frac{2}{\lambda^2},$$

pa dolazimo do varijance eksponencijalne slučajne varijable:

$$VarX{=}EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.2.3 Primjeri eksponencijalne slučajne varijable

Primjer 3.3 *Pretpostavimo da je duljina telefonskog poziva u minutama eksponencijalno distribuirana s parametrom* $\lambda = \frac{1}{10}$. *Ako je netko prije Vas došao u telefonsku govornicu, izračunajte vjerojatnost da ćete čekati ispred više od 10 minuta.*

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla kojom se modelira duljina telefonskog poziva u minutama, tj. $X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{10})$. Nas zanima vjerojatnost da će osoba čekati ispred telefonske govornice više od 10 minuta, odnosno $P\{X > 10\}$. Uz pomoć funkcije distribucije dobivamo traženu vjerojatnost:

$$P\{X > 10\} = 1 - F_X(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10}) = e^{-1} = 0.368.$$

Primjer 3.4 *Vremenski razmak između vozila koja prelaze preko pješačkog prijelaza slučajna je varijabla koja ima eksponencijalnu distribuciju. Prometno opterećenje ulice iznosi u prosjeku 600 vozila po satu. Izračunajte vjerojatnost da vremenski razmak između vozila koja prelaze preko pješačkog prijelaza bude između 5 i 10 sekundi.*

Rješenje: Eksponencijalna je distribucija određena parametrom

$$\lambda = \frac{1}{EX}.$$

Budući se očekuje 600 vozila po satu, to je, u sekundama, očekivani vremenski razmak između dva vozila koja prelaze preko pješačkog prijelaza

$$EX = \frac{3600}{600} = 6s.$$

Vjerojatnost da se vremenski razmak između vozila koja prelaze pješački prijelaz nalazi u intervalu $\langle 5, 10\rangle$ je

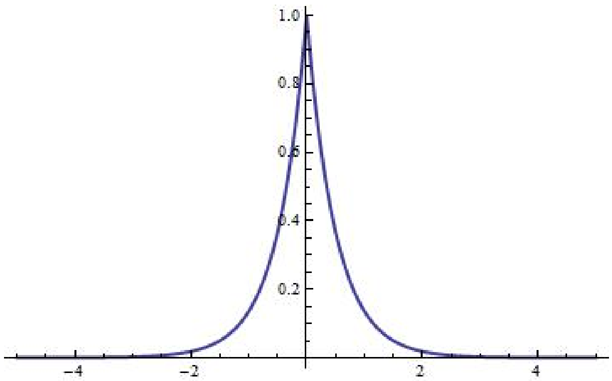
$$P\{5 < X < 10\} = 1 - e^{-\frac{10}{6}} - (1 - e^{-\frac{5}{6}}) = -e^{-\frac{10}{6}} + e^{-\frac{5}{6}} = 0.246.$$

3.3 Dvostrana eksponencijalna (Laplaceova) slučajna varijabla

Dvostrana eksponencijalna (Laplaceova) slučajna varijabla je generalizacija eksponencijalne slučajne varijable. Za razliku od eksponencijalne, dvostrana eksponencijalna slučajna varijabla prima vrijednosti iz cijelog $\mathbb{R}$.

Definicija 3.3 *Neprekidna slučajna varijabla X ima dvostranu eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim \mathcal{DE}(\lambda)$, ako je njena funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Slika 5: Funkcija gustoće dvostrane eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 0.5$

3.3.1 Funkcija distribucije dvostrane eksponencijalne slučajne varijable

Odredimo sada funkciju distribucije za ovu slučajnu varijablu.
1) Za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ dobivamo da je

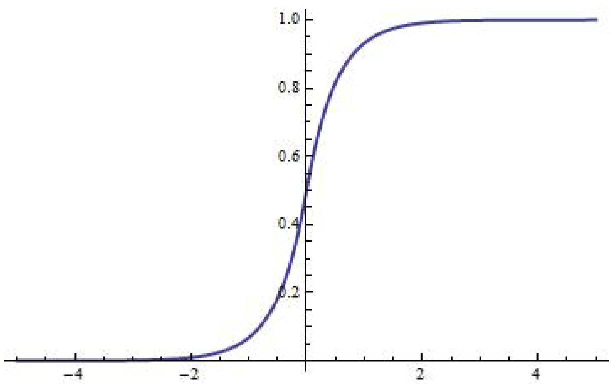
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} e^{\lambda t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda}{2}\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\Big|_a^x = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(e^{\lambda x} - e^{\lambda a}) = \frac{1}{2}e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

2) Ako je $x \in [0, \infty\rangle$ funkcija distribucije je dana s

$$
\begin{aligned}
F_X(x) =& \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t}\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{x} e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\
=& \frac{\lambda}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{\lambda t}\mathrm{d}t - \frac{\lambda}{2}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_{0}^{x} = \frac{\lambda}{2}\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\Big|_{a}^{0} - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} + \frac{1}{2} \\
=& \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(1 - e^{\lambda a}) - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}.
\end{aligned}
$$

Iz prethodnog računa dobivamo

$$
F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & , x \in [0, \infty\rangle \end{cases}.
$$



Slika 6: Funkcija distribucije dvostrane eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 0.5$

3.3.2 Numeričke karakteristike dvostrane eksponencijalne slučajne varijable

Očekivanje dvostrane eksponencijalne slučajne varijable iznosi 0, što ćemo u nastavku i pokazati.

$$
\begin{aligned}
EX=&\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{2}\Big(\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x\Big)\\
=&\frac{\lambda}{2}\Big(\lim_{a\to-\infty} x\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big|_a^0 - \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\mathrm{d}x - \lim_{a\to\infty} x\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^a + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\mathrm{d}x\Big)\\
=&\frac{1}{2}\Big(-\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big|_a^0 - \lim_{a\to\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^a\Big) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Kao što znamo, za izračun varijance treba nam EX^2 pa ga i odredimo.

$$
EX^2=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{\infty} x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2},
$$

gdje smo prethodni integral već izračunali u Poglavlju 3.2.2.
Varijanca dvostrane eksponencijalne slučajne varijable iznosi:

$$
VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - 0 = \frac{2}{\lambda^2}.
$$

3.3.3 Primjeri dvostrane eksponencijalne slučajne varijable

Primjer 3.5 *Neka je X dvostrana eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda = 0.6$. Izračunaj vjerojatnost da X prima vrijednosti iz segmenta* $[-1, 2]$.

Rješenje: Tražena vjerojatnost iznosi

$$
\begin{aligned}
P\{-1 \leqslant X \leqslant 2\}=&P\{X \leqslant 2\} - P\{X \leqslant -1\} = F_X(2) - F_X(-1)\\
=&1 - \frac{1}{2}e^{-0.6\cdot 2} - \frac{1}{2}e^{-0.6} = 1 - 0.1506 - 0.2744 = 0.575.
\end{aligned}
$$

Primjer 3.6 *Neka je X dvostrana eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda = 2$. Izračunaj vjerojatnost da je $X \leqslant 0.5$.*

Rješenje: Za $\lambda = 2$ tražimo $P\{X \leqslant 0.5\}$. Ta je vjerojatnost jednaka

$$
P\{X \leqslant 0.5\} = F_X(0.5) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 0.5} = 1 - 0.1839 = 0.8161.
$$

3.4 Gama (Γ) slučajna varijabla

Gama distribucija je generalizacija eksponencijalne distribucije. Naime, pretpostavimo da promatramo slučajan pokus koji se sastoji od ponavljanja nekog događaja u vremenu sa zadanim konstantnim intenzitetom λ. Slučajna varijabla koja daje vrijeme potrebno da se događaj dogodi određeni broj puta (označimo ga s α) ima Gama distribuciju s parametrima α i λ. Uzmimo primjer eksponencijalne distribucije (primjer 3.3), gdje je $\lambda = \frac{1}{10}$. Slučajan pokus u kome promatramo da će se neki događaj dogoditi α puta modeliramo pomoću Gama distribucije, odnosno imamo $X \sim \Gamma(\alpha, \frac{1}{10})$.
Primjeri događaja koji mogu biti modelirani Gama distribucijom su: količina padaline akumulirane u spremniku, opterećenje na web poslužiteljima, protok predmeta kroz proizvodnju.
U svrhu definiranja funkcije gustoće slučajne varijable koja ima Gama distribuciju, u nastavku najprije navodimo definiciju Gama funkcije.

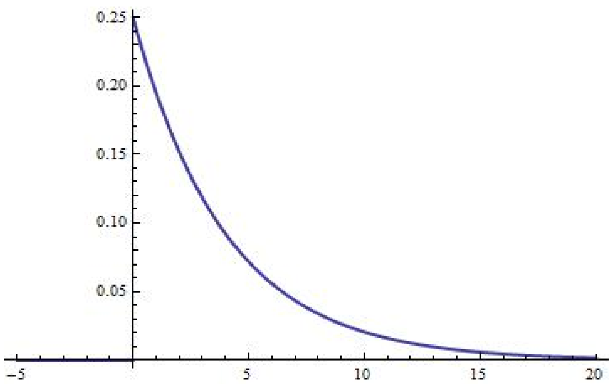
Definicija 3.4 *Gama funkcija je funkcija* $\Gamma : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Definicija 3.5 *Slučajna varijabla* X *ima Gama distribuciju s parametrima* $\alpha > 0$ *i* $\beta > 0$ *ako joj je funkcija gustoće*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , inače \end{cases}.$$

Ako slučajna varijabla X *ima Gama distribuciju s parametrima* α *i* β*, koristimo oznaku* $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.



Slika 7: Funkcija gustoće Gama slučajne varijable $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ za $\alpha = 1, \beta = 4$

3.4.1 Funkcija distribucije Gama slučajne varijable

Funkciju distribucije ove slučajne varijable možemo zapisati u terminima nepotpune Gama funkcije te stoga u nastavku navodimo njenu definiciju.

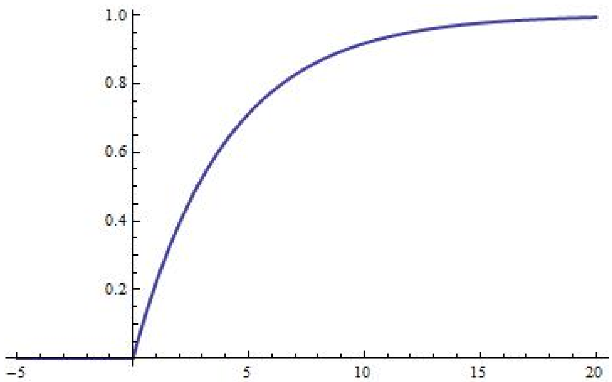
Definicija 3.6 *Nepotpuna Gama funkcija je funkcija definirana s*

$$\gamma(p,r) = \int_0^r x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \quad x > 0.$$

Odredimo funkciju distribucije Gama slučajne varijable:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = \frac{t}{\beta}; t = \beta s \\ \\ \mathrm{d}t = \beta \mathrm{d}s \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x}{\beta}} s^{\alpha-1}e^{-s}\mathrm{d}s = \frac{\gamma(\alpha, \frac{x}{\beta})}{\Gamma(\alpha)}.$$



Slika 8: Funkcija distribucije Gama slučajne varijable $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ za $\alpha = 1, \beta = 4$

3.4.2 Numeričke karakteristike Gama slučajne varijable

U ovom poglavlju odredit ćemo očekivanje i varijancu Gama slučajne varijable.
Dobivamo da je

$$EX = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x}{\beta} \\ \\ x = \beta t \\ \\ \mathrm{d}x = \beta \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1),$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili definiciju Gama funkcije, tj.

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha + 1).$$

Uz pomoć jednog od osnovnih svojstava Gama funkcije, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, zaključujemo da je

$$EX = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\beta.$$

Primjenom iste supstitucije kao i kod računanja očekivanja dobivamo

$$EX^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} \mathrm{d}x = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha + 1)\alpha\Gamma(\alpha) = \beta^2\alpha(\alpha + 1).$$

Sada je varijanca Gama slučajne varijable:

$$VarX = \beta^2\alpha(\alpha + 1) - \alpha^2\beta^2 = \beta^2\alpha.$$

3.4.3 Primjeri Gama slučajne varijable

Primjer 3.7 *Neka je X Gama slučajna varijabla s parametrima $\alpha = 3$ i $\beta = 4$. Izračunaj vjerojatnost da X prima vrijednosti iz $\langle -\infty, 4]$.*

Rješenje: Za zadane parametre $\alpha = 3$ i $\beta = 4$ tražena vjerojatnost iznosi

$$P\{X \leqslant 4\} = F_X(4) = \frac{\gamma(3, 1)}{\Gamma(3)} = \frac{0.1606}{2} = 0.0803.$$

Primjer 3.8 *Neka je X Gama slučajna varijabla s parametrima $\alpha = 4$ i $\beta = 2$. Izračunaj vjerojatnost da X prima vrijednosti iz $[10, +\infty\rangle$.*

Rješenje: U ovom primjeru imamo $\alpha = 4$ i $\beta = 2$ te tražena vjerojatnost iznosi

$$P\{X \geqslant 10\} = 1 - P\{X \leqslant 10\} = 1 - F_X(10) = 1 - \frac{\gamma(4, 5)}{\Gamma(4)} = 1 - \frac{4.4098}{6} = 0.265.$$

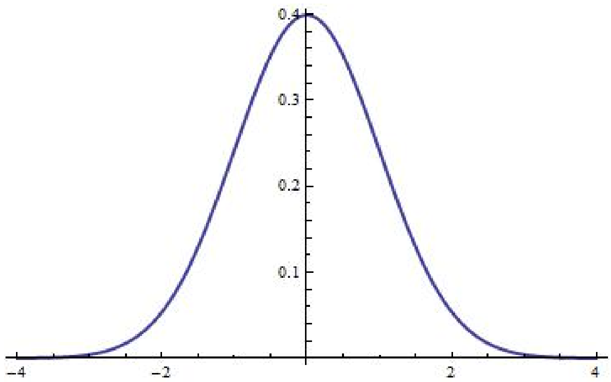
3.5 Normalna slučajna varijabla

Ova slučajna varijabla se najviše koristi u statističkoj teoriji i primjeni. Teorija je pokazala da ona vrlo dobro opisuje pokuse čiji su ishodi posljedica sume mnogo međusobno nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Također, tu distribuciju imaju mnoge slučajne varijable koje opisuju situacije iz stvarnog života kao što su rezultati mjerenja (npr. visina, bodovi na pismenom ispitu, masa), greške pri mjerenju, a često se javlja i u prirodnim znanostima te rezultatima psiholoških testova i fizikalnih pojava.

Definicija 3.7 *Za neprekidnu slučajnu varijablu kažemo da ima Gaussovu ili normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je njezina funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje su μ i σ realni brojevi i $\sigma > 0$. Ako slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2, koristimo oznaku $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



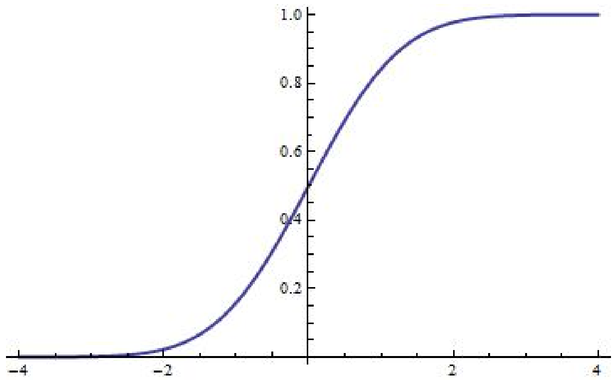
Slika 9: Funkcija gustoće normalne slučajne varijable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
koju još nazivamo standardna normalna slučajna varijabla

3.5.1 Funkcija distribucije normalne slučajne varijable

Funkcija distribucije normalne slučajne varijable dana je s

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ovaj integral ne možemo izračunati pomoću elementarnih funkcija pa vjerojatnosti možemo računalno izračunati ili pogledati u tablicama za normalnu distribuciju (vidi Tablicu 1 (str. 22) preuzetu iz [8]).



Slika 10: Funkcija distribucije normalne slučajne varijable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

3.5.2 Numeričke karakteristike normalne slučajne varijable

Izvedimo sada očekivanje normalne slučajne varijable:

$$EX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ x = \mu + \sigma t \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma t) e^{\frac{-t^2}{2}} \sigma \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Neka je $g(t) = te^{\frac{-t^2}{2}}$. Funkcija g je neparna, odnosno $g(-t) = -g(t)$, pa je $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 0$, iz čega slijedi

$$EX = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Pri rješavanju ovog integrala pomoći će nam Gama funkcija:

$$\int_{0}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \frac{t^2}{2} \\ \mathrm{d}u = t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_{0}^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2u}} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{\frac{-1}{2}} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dobiveno rješenje uvrstimo u očekivanje, pri čemu uz poznatu činjenicu da je $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dobivamo:

$$EX = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \mu.$$

Izračunajmo sada drugi moment normalne slučajne varijable. Koristeći istu supstituciju kao i kod računanja očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma t)^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{2}\mu\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}\mu^2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{2}\mu\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Kod očekivanja normalne slučajne varijable smo pokazali da je $\int_{-\infty}^{\infty} t e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = 0$ i $\int_0^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Preostaje nam izračunati integral $\int_0^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$, koji također računamo pomoću Gama funkcije:

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \frac{t^2}{2} \\ \\ \mathrm{d}u = t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{d}u = \sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Dobiveno rješenje uvrstimo u EX^2, pri čemu je $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ i dobijemo

$$EX^2 = \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \mu^2 + \sigma^2.$$

Sada dolazimo do varijance normalne slučajne varijable:

$$VarX = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Ako sa $\Phi(x)$ označimo sljedeći integral

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t,$$

koji očito predstavlja funkciju distribucije standardne normalne slučajne varijable onda iz sljedeće tablice možemo čitati vrijednosti funkcije Φ na sljedeći način: npr. ako tražimo vrijednost za $\Phi(1.55)$, tj. $P\{X \leqslant 1.55\}$, onda iz pripadne tablice s lijeve strane nađemo broj 1.5 te onda pogledamo stupac s brojem 5 jer nam je 5 druga decimala te očitamo da je $\Phi(1.55) = 0.9394$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Tablica 1: Tablica vrijednosti funkcije distribucije standardne normalne slučajne varijable

3.5.3 Primjeri normalne slučajne varijable

Primjer 3.9 *Vijek trajanja neke automobilske gume je normalno distribuiran s očekivanjem 34 000 km i standardnom devijacijom od 4000 km. Izračunajte vjerojatnost da guma traje više od 40 000 pređenih kilometara.*

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla kojom se modelira vijek trajanja gume, tj. $X \sim \mathcal{N}(34000, 4000^2)$. Dakle $\mu = 34000, \sigma = 4000$.
Sada je $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ te je

$$P\{X > 40000\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{40000-\mu}{\sigma}\right\} = P\{Z > 1.5\}$$

$$=1 - P\{Z \leqslant 1.5\} = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

Pri rješavanju zadatka koristili smo Tablicu 1 u kojoj možemo naći da je $\Phi(1.5) = 0.9332$. Vjerojatnost da guma traje više od 40 000 km je 0.0668.

Primjer 3.10 *Pretpostavimo da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati. Ako je student krenuo od kuće u 11:40, izračunajte vjerojatnost da on zakasni na predavanje.*

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla kojom se modelira vrijeme putovanja studenta od kuće do fakulteta, tj. $X \sim \mathcal{N}(40, 7^2)$.
Nas zanima kolika je vjerojatnost da student zakasni na predavanje, a student će zakasniti ako mu treba više od 35 minuta od kuće do fakulteta pa onda tražimo $P\{X > 35\}$:

$$P\{X > 35\}=P\left\{\frac{X-40}{7} > \frac{35-40}{7}\right\} = P\left\{\frac{X-40}{7} > -0.7143\right\}$$

$$=1 - P\{Z \leqslant -0.7143\} = 1 - \Phi(-0.7143) = \Phi(0.7143) = 0.7611.$$

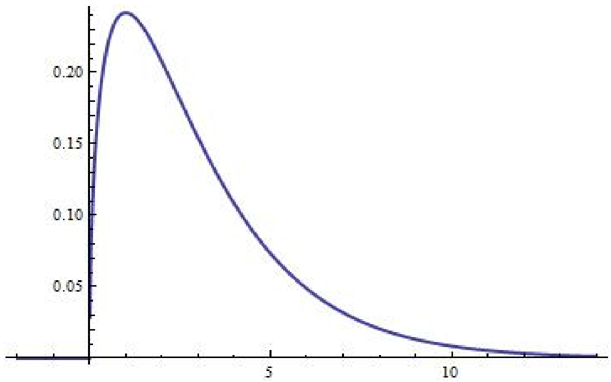
U rješenju smo koristili, uz Tablicu 1, svojstvo da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ i tako dobili vjerojatnost 0.7611 da je student zakasnio na predavanje.

3.6 χ^2 slučajna varijabla

U teoriji vjerojatnosti i statistici, χ^2 distribucija s k stupnjeva slobode je distribucija zbroja kvadrata k nezavisnih standardnih normalnih slučajnih varijabli (vidi [5]). χ^2 slučajna varijabla poseban je slučaj Gama slučajne varijable, odnosno $\chi^2(k) \sim \Gamma(\frac{k}{2}, 2)$. Važnost χ^2 slučajne varijable proizlazi iz činjenice da se njena distribucija često koristi u testiranju statističkih hipoteza, tj. pojavljuje se kao distribucija određenih test-statistika. Na primjer, bacamo simetričan novčić 100 puta. Očekujemo da će glava i pismo pasti točno 50 puta svaka, to nam je hipoteza, no u stvarnom slučaju to nije tako pa nam χ^2 distribucija pomaže u procjeni odstupanja odnosno varijance te hipoteze.

Definicija 3.8 *Slučajna varijabla X ima χ^2 distribuciju s $n \in \mathbb{N}$ stupnjeva slobode ako je $X \sim \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$. Dakle,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x > 0 \\ \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases}.$$

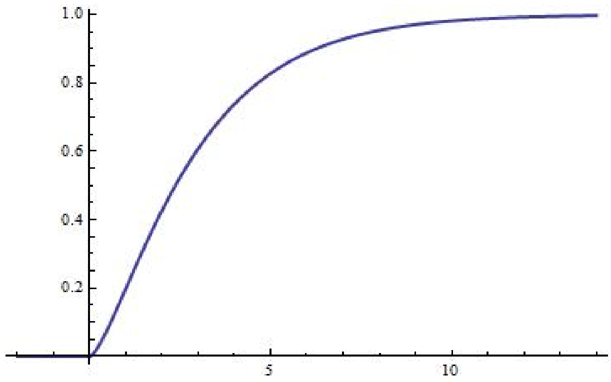


Slika 11: Funkcija gustoće $X \sim \chi^2(3)$ slučajne varijable

3.6.1 Funkcija distribucije, očekivanje i varijanca χ^2 slučajne varijable

Kao što znamo, χ^2 slučajna varijabla je specijalni slučaj Gama slučajne varijable pa u ovom poglavlju nećemo raditi detaljne izvode funkcije distribucije, očekivanja i varijance, jer je sve napravljeno u poglavljima 3.4.1 i 3.4.2. Iz navedenih poglavlja i veze između χ^2 i Gama slučajne varijable odmah dobivamo da je funkcija distribucije χ^2 slučajne varijable dana s

$$F_X(x) = \frac{\gamma(\frac{n}{2}, \frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$



Slika 12: Funkcija distribucije $X \sim \chi^2(3)$ slučajne varijable

a očekivanje i drugi moment χ^2 slučajne varijable iznose

$$EX = n,$$

$$EX^2 = (n+2)n.$$

Jednostavnim računom dobivamo da je varijanca

$$VarX = 2n.$$

3.6.2 Primjeri χ^2 slučajne varijable

Primjer 3.11 *Neka je $X \sim \chi^2(3)$ slučajna varijabla. Izračunaj vjerojatnost da X prima vrijednosti iz $\langle -\infty, 5]$.*

Rješenje: Tražena vjerojatnost iznosi

$$P\{X \leqslant 5\} = F_X(5) = \frac{\gamma(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{0.734}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 0.8282.$$

Primjer 3.12 *Neka je $X \sim \chi^2(1)$ slučajna varijabla. Izračunaj vjerojatnost da X prima vrijednosti iz $[0.2, +\infty\rangle$.*

Rješenje: Za $n = 1$ tražimo $P\{X \geqslant 0.2\}$. Ta vjerojatnost jednaka je

$$P\{X \geqslant 0.2\} = 1 - P\{X \leqslant 0.2\} = 1 - F_X(0.2) = 1 - \frac{\gamma(\frac{1}{2}, 0.1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1 - \frac{0.612}{\sqrt{\pi}} = 0.6547.$$

Literatura

[1] G. P. Beaumont, *Probability and random variables*, Horwood publishing limited, Chichester, England, 2005.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika*, Element, Zagreb, 2007.

[4] N. Elezović, *Zbirka zadataka iz teorije vjerojatnosti*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1987.

[5] *Revolvy*,
URL: `https://www.revolvy.com/topic/Chi-squared%20distribution&uid=1575`

[6] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, treće izdanje, 2002.

[7] J. J. Shynk, *Probability, random variables, and random processes*, John Wiley and sons, Inc., New Yersey, USA, 2013.

[8] dr. sc. Ivana Slamić, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci
URL: `http://www.math.uniri.hr/~islamic/normalna.pdf`