Schur - konveksne funkcije

Dorić, Martina

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
smjer: Financijska matematika i statistika

Martina Dorić

Schur-konveksne funkcije

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
smjer: Financijska matematika i statistika

Martina Dorić

Schur-konveksne funkcije

Diplomski rad

Voditelj: izv.prof.dr.sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Pojmovi poput varijabilnosti, nejednakosti, raspršenosti i neujednačenosti javljaju se u raznim znanstvenim područjima, od fizike i kemije do informacijske znanosti i genetike. U matematici je to najjednostavnije opisano pojmom majorizacije. Majorizacija je moćan matematički alat jer omogućuje uočavanje postojećih veza između vektora koje se mogu iskoristiti. Pomoću majorizacije Schur-konveksne funkcije omogućuju jednostavan pristup generalizaciji postojećih i izvođenju novih nejednakosti u raznim područjima matematike, a nejednakosti imaju bitnu ulogu u gotovo svim granama matematike.

Začetci pojma majorizacije se javljaju u radovima Daltona[1] i Lorenza[2] koji su proučavali mjere nejednakosti u ekonomskom kontekstu nejednakosti bogatstva. Osim u smislu nejednakosti bogatstva i dohotka, nejednakost i mjere nejednakosti su od interesa za širok spektar područja izvan ekonomije. Stoga se razvila matematička teorija. Majorizaciju je prvi definirao matematičar Muirhead[3], no najplodniji izvor matematičkih rezultata su dali matematičari Hardy[4], Littlewood[5] i Polya[6]. Matematičar Schur[7] se bavio funkcijama koje čuvaju uređaj majorizacije i po njemu su Schur-konveksne funkcije dobile ime. Najveći doprinos ovoj teoriji je knjiga [6] Marshalla, Olkina i Arnolda po kojoj je napravljen veći dio ovog diplomskog rada.

Cilj ovog diplomskog rada je sistematizirati neke rezultate o Schur-konveksnim funkcijama koji omogućuju njihovu identifikaciju te ukazati na njihovu ulogu u izvođenju nejednakosti. Rad je podijeljen u tri dijela. U prvom dijelu se definira majorizacija, navedeni su motivacijski primjeri iz ekonomije i izvodi se matrična karakterizacija. U drugom se dijelu definiraju Schur-konveksne i Schur-konkavne funkcije, izvode se karakterizacije i navode primjeri. U trećem su dijelu navedeni primjeri iz dva područja matematike gdje se primjenjuju Schur-konveksne funkcije.

[1] Hugh Dalton (1887. 1962.) - engleski ekonomist
[2] Max Otto Lorenz (1876. - 1959.) - američki ekonomist
[3] Robert Franklin Muirhead (1860. 1941.) - škotski matematičar
[4] Godfrey Harold Hardy (1877. 1947.) - engleski matematičar
[5] John Edensor Littlewood (1885. 1977.) - engleski matematičar
[6] George Pólya (1887. 1985.) - mađarski matematičar
[7] Issai Schur (1875. - 1941.) - njemački matematičar

Poglavlje 1

Majorizacija

1.1 Oznake

Skupovi su označeni na sljedeći način:

$$\mathbb{R}_+ = [0, \infty),$$

$$\mathbb{R}_{++} = (0, \infty),$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}_+\},$$

$$\mathbb{R}^n_{++} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}_{++}\},$$

$$\mathcal{D} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \dots \geq x_n\}.$$

Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, zapisujemo u obliku uređene n-torke

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Koristimo oznake $x_{[i]}$ za i-tu najveću komponentu vektora x i $x_{(i)}$ za i-tu najmanju komponentu vektora x. Koristeći te oznake, komponente vektora x možemo poredati

- u padajućem poretku:
$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$$
- u rastućem poretku:
$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Za vektor $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x_{[1]} = x_{(n)}$ i $x_{[n]} = x_{(1)}$ i slično možemo zaključiti da je $x_{[i]} = x_{(n-i+1)}$ i $x_{(j)} = x_{[n-j+1]}$ za svaki $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ fiksni realni brojevi. Kažemo da je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$

- rastuća u odnosu na k-tu varijablu ili u k-tom argumentu ako
$x < y \implies f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n)$

- strogo rastuća u odnosu na k-tu varijablu ili u k-tom argumentu ako
  $x < y \implies f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) < f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)$
- padajuća u odnosu na k-tu varijablu ili u k-tom argumentu ako
  $x < y \implies f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \geq f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)$
- strogo padajuća u odnosu na k-tu varijablu ili u k-tom argumentu ako
  $x < y \implies f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) > f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)$

Ako je funkcija f rastuća u svakom argumentu, kažemo da je rastuća. Slično, ako je f padajuća u svakom argumentu, kažemo da je padajuća.

1.2 Pojam majorizacije

Definicija 1. Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiramo relaciju "$\prec$" na sljedeći način:

$$x \prec y \quad \text{ako} \quad \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \quad \text{za } k = 1, \ldots, n-1$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Kad $x \prec y$, kažemo da je x majoriziran s y ili da y majorizira x.

Sume iz Definicije 1 interpretiramo ovako: najveća komponenta od x manja je ili jednaka od najveće komponente od y; suma dvaju najvećih komponenti od x manja je ili jednaka od sume dvaju najvećih komponenti od y; ... ; suma $n-1$ najvećih komponenti od x manja je ili jednaka sumi $n-1$ najvećih komponenti od y; suma svih komponenti od x jednaka je sumi svih komponenti od y.

Uvjeti u Definiciji 1 mogu se zamijeniti ekvivalentnima zapisanim u terminima $x_{(i)}$ za $i = 1, \ldots, n$.

Propozicija 1. *Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

$$x \prec y \quad \textit{ako} \quad \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} \quad \textit{za } k = 1, \ldots, n-1$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}.$$

Dokaz. Sume svih elemenata vektora x i y su jednake jer vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}.$$

Za svaki $k \in \{1, \dots, n-1\}$ je i $n-k \in \{1, \dots, n-1\}$ pa koristeći nejednakost iz Definicije 1 vrijedi

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n-k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{n-k} y_{[i]} = \sum_{i=k+1}^{n} y_{(i)}$$

pa je

$$-\sum_{i=k+1}^{n} x_{(i)} \geq -\sum_{i=k+1}^{n} y_{(i)}.$$

Stoga možemo dodati sumu svih komponenti na obje strane nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} - \sum_{i=k+1}^{n} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} y_{(i)} - \sum_{i=k+1}^{n} y_{(i)}$$

što daje nejednakost

$$\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}.$$

■

Zato izraz $x \prec y$ možemo interpretirati i na sljedeći način: najmanja komponenta od x veća je ili jednaka od najmanje komponente od y; suma dvaju najmanjih komponenti od x veća je ili jednaka od sume dvaju najmanjih komponenti od y; ... ; suma $n-1$ najmanjih komponenti od x veća je ili jednaka sumi $n-1$ najmanjih komponenti od y; suma svih komponenti od x jednaka je sumi svih komponenti od y. Dakle, vektor x je majoriziran vektorom y ako su na neki način komponente vektora y raspršenije od komponenti vektora x uz uvjet da im je suma svih komponenti jednaka, odnosno komponente vektora x su koncentriranije.

Kad je u prvom uvjetu definicije stroga nejednakost, govorimo o strogoj majorizaciji, tj. ako je

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} < \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \quad \text{za } k = 1, \dots, n-1.$$

U sumama u definiciji majorizacije komponente vektora $(x_1, \dots, x_n)$ i $(y_1, \dots, y_n)$ poredane su po veličini pa njihov početni poredak u vektoru nije bitan. No, svejedno radi jednostavnosti promatramo te brojeve u zapisu vektora, a pogodno je i za izvođenje matričnog oblika. Vektore ne moramo promatrati na cijelom $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Kažemo da $x \prec y$ na $\mathcal{A}$ ako su $x, y \in \mathcal{A}$ i $x \prec y$.

Primjer 1. Jednostavni primjeri:

(1) $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \prec (\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0) \prec \dots \prec (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \prec (1, 0, \dots, 0)$.

(2) $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \prec (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \prec (1, 0, \dots, 0)$ za $\alpha_i \geq 0$ takve da $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

1.3 Majorizacija kao parcijalni uređaj

Za relaciju "$\leq$" na skupu S kažemo da je:

- refleksivna ako $x \leq x$, za svaki $x \in S$
- antisimetrična ako $x \leq y$ i $y \leq x \implies x = y$
- tranzitivna ako $x \leq y$ i $y \leq z \implies x \leq z$.

Definicija 3. Relacija parcijalnog uređaja je binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Relacija majorizacije je refleksivna na $\mathbb{R}^n$ jer za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x \prec x$. Štoviše, za sve vektore $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x \prec x\Pi$ za sve permutacijske matrice Π. Za majorizaciju također vrijedi:

$$x \prec y \text{ i } y \prec x \implies x = y\Pi.$$

To je slabije svojstvo od antisimetričnosti što znači da majorizacija nije antisimetrična relacija. No, majorizacija je tranzitivna relacija jer vrijedi

$$x \prec y \text{ i } y \prec z \implies x \prec z.$$

Dakle, majorizacija nije parcijalni uređaj na $\mathbb{R}^n$ jer umjesto svojstva antisimetričnosti vrijedi slabije svojstvo. Zato se definira

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n\}.$$

Na skupu $\mathcal{D}$ relacija majorizacije je parcijalni uređaj. Često u tvrdnjama ili dokazima tvrdnji pretpostavljamo da su komponente vektora upravo poredane u padajućem poretku. To možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti.

1.4 Mjere nejednakosti dohotka

Početkom 20. stoljeća mjerenje nejednakosti dohotka ili bogatstva javlja se kao predmet proučavanja ekonomista. Osim određivanja distribucije dohotka koje je oduvijek bilo proučavano u ekonomiji, tada se počinju uspoređivati distribucije dohotka u smislu koja je distribucija "ujednačenija" ili "jednakija" od druge. Dva su najznačajnija pristupa tom problemu Lorenzov iz 1905. godine i Daltonov iz 1920. godine. Oba su pristupa uvelike povezana s pojmom majorizacije.

1.4.1 Lorenzova krivulja

Pretpostavimo da imamo populaciju od n jedinki i neka x_i predstavlja imetak jedinke i za $i = 1, \ldots, n$. Poredamo li jedinke od najsiromašnije do najbogatije imamo $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$. Definiramo $S_0 = 0$ i $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ što možemo interpretirati kao ukupno bogatstvo k najsiromašnijih jedinki populacije. Grafički prikažemo točke $(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{S_n})$ za $k = 0, \ldots, n$ u koordinatnom sustavu. Da bi dobili Lorenzovu krivulju susjedne točke spojimo dužinama. U slučaju da je bogatstvo uniformno distribuirano, tj. $x_{(1)} = \ldots = x_{(n)}$, Lorenzova krivulja je dužina koja spaja $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Svaka distribucija bogatstva koja je nejednakije raspoređena daje krivulju koja je konveksna i nalazi se ispod te dužine i ima krajeve u $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

Pretpostavimo da imamo dvije populacije od n jedinki s pripadnim imetcima $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ i $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ koje imaju jednak ukupan imetak. Definiramo:

$$S_0^x = S_0^y = 0, \qquad S_k^x = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \quad \text{i} \quad S_k^y = \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} \quad \text{za } k = 1, \ldots, n.$$

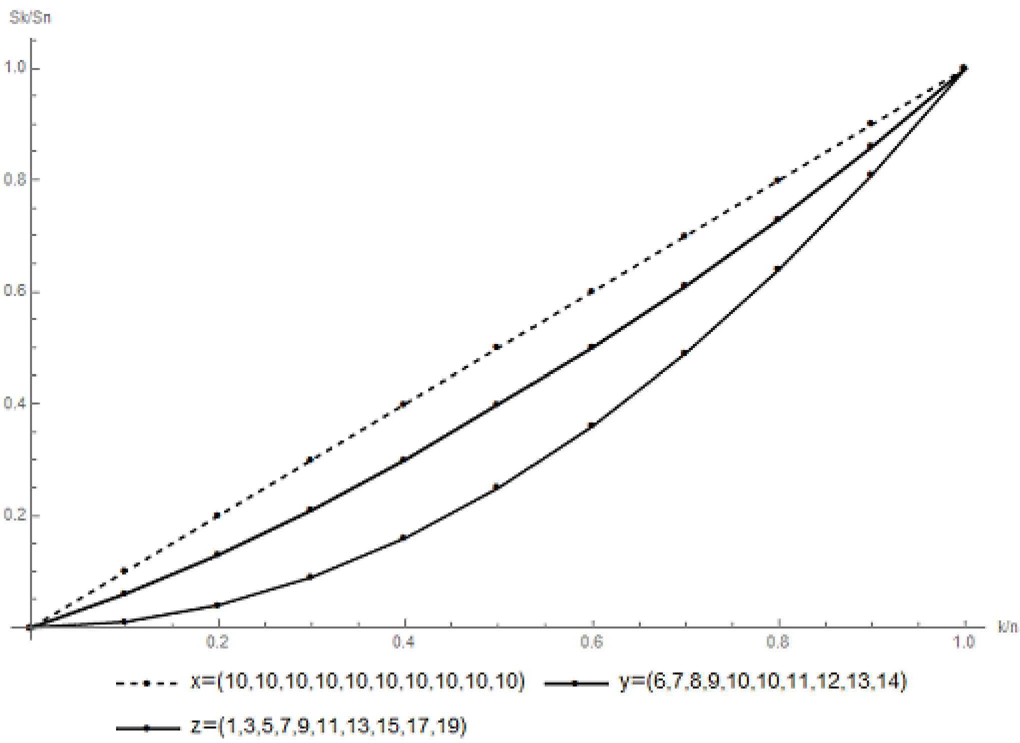
Budući da promatramo dvije populacije s istim ukupnim bogatstvom, vrijedi $S_n^x = S_n^y$, tj. vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}. \tag{1.1}$$

Prema Lorenzu, $(x_1, \ldots, x_n)$ predstavlja ujednačeniju distribuciju bogatstva od $(y_1 \ldots, y_n)$ ako se Lorenzova krivulja koju generira $(y_1 \ldots, y_n)$ nalazi ispod krivulje koju generira $(x_1, \ldots, x_n)$, a to znači da je $S_k^x \geq S_k^y$, $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$, odnosno vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}, \quad \text{za } k = 1, \ldots, n-1. \tag{1.2}$$

Iz izraza (1.1) i (1.2) zaključujemo da je $(x_1, \ldots, x_n)$ majoriziran s $(y_1 \ldots, y_n)$. Lorenzova krivulja omogućuje grafičku vizualizaciju pojma majorizacije kao što je na jednom primjeru prikazano na Slici 1.1.



Slika 1.1: Usporedba Lorenzove krivulje za tri vektora

1.4.2 Transferi

Princip transfera u kontekstu distribucije dohotka prvi je opisao Dalton 1920. godine. Promotrimo prvo jednostavan slučaj populacije s dvije jedinke i i j s pripadnim prihodima y_i

i y_j, gdje je $y_j > y_i$. Neka je δ iznos koji transferiramo od jedinke j do jedinke i. Ako je $\delta < y_j - y_i$ umanjuje se nejednakost između prihoda i to nazivamo Daltonov transfer. Ako je uz to $\delta < \frac{y_j - y_i}{2}$ tada se relativni poredak jedinki i i j ne mijenja. Takav transfer naziva se altruistični Daltonov transfer. Ako je pak $\delta > \frac{y_j - y_i}{2}$ relativan poredak jedinki i i j se mijenja, odnosno i postaje bogatija od j. U slučaju kad je $\delta = \frac{y_j - y_i}{2}$ jedinke i i j imaju jednake prihode jer je $y_j - \frac{y_j - y_i}{2} = y_i + \frac{y_j - y_i}{2}$ i tada je nejednakost između jedinki potpuno umanjena.
Ovaj slučaj možemo poopćiti. Za bilo koju populaciju od n jedinki s njihovim prihodima $y_1, \ldots, y_n$, bilo koji Daltonov transfer između dviju jedinki umanjuje nejednakost dohotka u populaciji, ili općenito niz takvih transfera. Slično, možemo usporediti dvije populacije jednake veličine s jednakim ukupnim bogatstvom. Prema Daltonovom načelu $(x_1, \ldots, x_n)$ predstavlja ujednačeniju distribuciju bogatstva od $(y_1, \ldots, y_n)$ ako se od $(y_1, \ldots, y_n)$ nizom Daltonovih transfera može doći do $(x_1, \ldots, x_n)$.
Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- x se može izvesti od y konačnim brojem transfera koji zadovoljavaju Daltonove uvjete
- suma k najvećih komponenti od x je manja ili jednaka od sume k najvećih komponenti od y za $k = 1, \ldots, n-1$, pri čemu vrijedi jednakost za $k = n$.

Ta tvrdnja povezuje Daltonove transfere s majorizacijom.

1.4.3 T-transformacije

Princip transfera koji je opisao Dalton može se matematički zapisati pomoću matrica.

Definicija 4. Matrica T oblika $T = \lambda I + (1-\lambda)Q$, gdje je I jedinična matrica, Q permutacijska matrica koja zamjenjuje neke dvije koordinate i $0 \leq \lambda \leq 1$, naziva se T-transformacija.

Uzmimo, na primjer, jednu populaciju od n jedinki i njihove prihode zapišimo u vektor $(x_1, \ldots, x_n)$. Daltonov transfer zamjenjuje vektor x vektorom xT, gdje su T i pripadni I i Q kvadratne matrice reda n. Neka se transfer odvija između j-te i k-te jedinke, odnosno komponente vektora, gdje je $j \leq k$. Tada je Q permutacijska matrica nastala od jedinične matrice zamjenom j-tog i k-tog retka i xT je sljedećeg oblika:

$$xT = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \lambda x_j + (1-\lambda)x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, \lambda x_k + (1-\lambda)x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

U slučaju altruističnih Daltonovih transfera $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$.

Lema 1. *Ako $x \prec y$, onda se x može izvesti iz y uzastopnom primjenom konačno mnogo T-transformacija.*

Ova lema će biti dokazana u sljedećem potpoglavlju.
U kontekstu gdje je poredak bitan, često se koriste transformacije uz određene restrikcije.

Definicija 5. Elementarna T-transformacija je matrica oblika $T^* = \lambda I + (1-\lambda)Q^*$, gdje je Q^* permutacijska matrica koja zamjenjuje dvije susjedne komponente i $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ako T^* primjenimo na vektoru $x = (x_1, \ldots, x_n)$ takav da je $x_1 \geq x_2 \geq, \ldots, \geq x_n$, onda se transfer odvija između susjednih komponenti, tj. u terminima prihoda, transfer novca ide od neke osobe do njoj po bogatstvu najbliže osobe. Ako želimo od x izvesti y primjenom elementarnih T-transformacija i pritom da poredak jedinki po bogatstvu ostane nepromjenjen nakon transfera, moguće je da će biti potrebno beskonačno prebrojivo mnogo elementarnih T-transformacija.

Primjer 2. Neka su $x = (3, 2, 1)$ i $y = (2, 2, 2)$. Lako je uočiti da $y \prec x$. To vrijedi jer po definiciji majorizacije:

$$y_{[1]} = 2 \leq 3 = x_{[1]},$$
$$y_{[1]} + y_{[2]} = 2 + 2 \leq 3 + 2 = x_{[1]} + x_{[2]} \text{ i}$$
$$y_{[1]} + y_{[2]} + y_{[3]} = 2 + 2 + 2 = 3 + 2 + 1 = x_{[1]} + x_{[2]} + x_{[3]}.$$

Kojom T-transformacijom možemo od x dobiti y? Tražimo matricu T oblika

$$T = \lambda I + (1 - \lambda)Q$$

tako da vrijedi $xT = y$. Matrica Q zamjenjuje prvi i treći element vektora pa je

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Parametar λ možemo dobiti na sljedeći način:

$$xT = \lambda x + (1 - \lambda)xQ = (3\lambda, 2\lambda, \lambda) + (1 - \lambda, 2 - 2\lambda, 3 - 3\lambda) = y$$

pa λ mora zadovoljavati ove jednadžbe

$$3\lambda + 1 - \lambda = 2$$
$$2\lambda + 2 - 2\lambda = 2$$
$$\lambda + 3 - 3\lambda = 2$$

odakle dobijemo $\lambda = 0.5$ pa je

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

1.5 Dvostruko stohastičke matrice

Schur u svom radu 1923. nije definirao majorizaciju u terminima parcijalnih suma kako je definirana u Definiciji 1, nego u matričnom obliku. Definicija 1 je praktična za provjeru je li neki vektor x majoriziran s nekim vektorom y, ali iz nje nije jednostavno uočiti smisao majorizacije. U ovom dijelu ćemo doći do ekvivalentne definicije majorizacije u matričnom obliku, no prvo su potrebne neke definicije i tvrdnje.

Za kvadratnu matricu P kažemo da je stohastička ako su joj svi elementi nenegativni i suma elemenata u svakom retku matrice je 1. Stohastičku matricu kojoj su sume elemenata i u svakom stupcu jednake 1 nazivamo dvostruko stohastičkom matricom.

Definicija 6. Kvadratna matrica $P = [p_{ij}]$ reda n je dvostruko stohastička ako

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{za} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad \text{za} \quad j = 1, \ldots, n$$

i

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Označimo s $e = (1, \ldots, 1)$ vektor jedinica. Tada uvjete iz definicije dvostruko stohastičke matrice možemo formulirati drukčije. Matrica P je dvostruko stohastička ako i samo ako $p_{ij} \geq 0$ za $i, j = 1, \ldots, n$, $eP = e$ i $Pe^T = e^T$. To često pojednostavljuje provjeru je li neka matrica dvostruko stohastička.

Primjer 3. Tri jednostavna primjera dvostruko stohastičkih matrica:

(1) Najjednostavniji primjer dvostruko stohastičkih matrica su permutacijske matrice. Lako je uočiti da je svaka permutacijska matrica dvostruko stohastička. Budući da je u svakom retku i stupcu točno jedan element matrice 1, a ostalo su 0, vrijedi da je zbroj komponenti po retcima i stupcima matrice jednak 1.

(2) Kvadratna matrica reda n kojoj su sve komponente jednake $\frac{1}{n}$ je dvostruko stohastička matrica.

(3) T-transformacije su dvostruko stohastičke matrice.

Skup svih dvostruko stohastičkih matrica reda n je konveksan skup[1]. Taj skup je konveksna ljuska[2] skupa permutacijskih matrica.

Teorem 1. *Ako su P_1 i P_2 dvostruko stohastičke matrice istog reda, tada je $P = P_1P_2$ dvostruko stohastička matrica.*

Dokaz. Budući da P_1 i P_2 imaju nenegativne elemente, P također ima nenegativne elemente. Također zbog toga što su P_1 i P_2 dvostruko stohastičke vrijedi: $eP = eP_1P_2 = eP_2 = e$ i $Pe^T = P_1P_2e^T = P_1e^T = e^T$. ∎

Sljedeći teorem karakterizira dvostruko stohastičke matrice pomoću majorizacije.

Teorem 2. *Matrica $P = [p_{ij}]$ reda n je dvostruko stohastička ako i samo ako $yP \prec y$ za svaki $y \in \mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $yP \prec y$ za sve $y \in \mathbb{R}^n$ i želimo pokazati da je $eP = e$, $Pe^T = e^T$ i $p_{ij} \geq 0$, $\forall i, j$. Ako za y iz pretpostavke uzmimo prvo $e = (1, \ldots, 1)$, vrijedi $eP \prec e$. Budući da su vektoru e sve komponente jednake, za svaki z takav da je $z \prec e$ vrijedi $z = e$, pa je stoga $eP = e$. Za y iz pretpostavke uzmimo zatim e_i pa je tada

$$e_iP \prec e_i \quad \text{i} \quad e_iP = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}) \prec e_i.$$

Tada su nužno sume svih elemenata od e_iP i e_i jednake, tj. $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ i to za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ što povlači $Pe^T = e^T$. Osim toga slijedi i da je svaki p_{ij} nenegativan jer su svi elementi od e_i nenegativni za svaki i. Dakle, P je dvostruko stohastička matrica.
Pretpostavimo da je P dvostruko stohastička matrica. Neka je $x = yP$ i neka su bez smanjenja općenitosti $x, y \in \mathcal{D}$, tj. $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ i $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Želimo pokazati da je tad $x \prec y$. Tada je

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{k} p_{ij}.$$

[1]Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan skup ako za sve $x, y \in S$ i sve $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.
[2]Konveksna ljuska skupa S je najmanji konveksan skup koji sadrži skup S.

Označimo s $t_i = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}$. Vrijedi

$$0 \le t_i \le 1 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = k.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} y_j &= \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{k} y_i + y_k(k - \sum_{i=1}^{n} t_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_k)(t_i - 1) + \sum_{i=k+1}^{n} t_i(y_i - y_k) \le 0.\end{aligned}$$

Vrijedi i

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = yPe^T = ye^T = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

iz čega slijedi da $x \prec y$. ■

Lema 1 je potrebna za karakterizaciju majorizacije pomoću dvostruko stohastičkih matrica.

Dokaz Leme 1. Ako je x nastao permutiranjem komponenti od y, tvrdnja vrijedi jer je permutacijska matrica Q koja zamjenjuje dvije komponente vektora T-transformacija, a svaka permutacijska matrica je produkt takvih matrica. Pretpostavimo nadalje da se x ne može dobiti permutiranjem komponenti od y i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \quad \text{i} \quad y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_n.$$

Neka je j najveći indeks takav da je $x_j < y_j$ i neka je k najmanji indeks veći od j takav da $x_k > y_k$. Takvi j i k postoje jer za najveći i za koji je $x_i \ne y_i$ mora vrijediti $x_i > y_i$. Za tako odabrane j i k vrijedi

$$y_j > x_j \ge x_k > y_k.$$

Neka su

$$\delta = \min\{y_j - x_j, x_k - y_k\}, \quad 1 - \lambda = \frac{\delta}{y_j - y_k} \quad \text{i}$$

$$y^* = (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j - \delta, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, y_k + \delta, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

Iz odabira j i k te definicije λ slijedi da je $0 < \lambda < 1$ i vrijedi

$$y^* = \lambda y + (1-\lambda)(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_k, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, y_j, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

Stoga je $y^* = yT$ za $T = \lambda I + (1-\lambda)Q$, gdje Q zamjenjuje j-tu i k-tu komponentu. Iz toga slijedi da je $y^* \prec y$. Osim toga je $x \prec y^*$ jer vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \sum_{i=1}^{m} y_i \ge \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad m = 1, \ldots, j-1,$$

$$y_j^* \ge x_j,\ y_i^* = y_i \quad i = j+1, \ldots, k-1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \sum_{i=1}^{m} y_i \ge \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad m = k+1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Za bilo koja dva vektora u i v neka je $d(u, v)$ broj nenul razlika $u_i - v_i$. Budući da je $y_j^* = x_j$ ako $\delta = y_j - x_j$ i $y_k^* = x_k$ ako $\delta = x_k - y_k$, slijedi da je $d(x, y^*) \leq d(x, y) - 1$. Stoga se x može izvesti od y primjenom konačno mnogo T-transformacija. ■

Lema 1 je vrlo značajna jer pokazuje da je često dovoljno razmotriti slučaj $n = 2$ pri dokazivanju teorema vezanih uz majorizaciju. Osim toga, dovodi do sljedećeg teorema.

Teorem 3. *Nužan i dovoljan uvjet da $x \prec y$ je da postoji dvostruko stohastička matrica P takva da je $x = yP$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je za neku dvostruko stohastičku matricu $x = Py$. Tada je prema Teoremu 2 x majoriziran s y. Pretpostavimo da je x majoroziran s y. Budući da su T-transformacije dvostruko stohastičke matrice, produkt T-transformacija je po Teoremu 1 dvostruko stohastička matrica. Stoga, po Lemi 1 postoji dvostruko stohastička matrica tako da je $x = yP$. ■

Teorem 4. *Skup $\{x : x \prec y\}$ je konveksna ljuska skupa vektora nastalih permutiranjem komponenti od y.*

Ako je $x \prec y$, tada nužno postoji dvostruko stohastička matrica tako da je $x = yP$. Iako se x može dobiti iz y uzastopnom primjenom T-transformacija, ne može se svaka matrica P za koju je $x = yP$ zapisati kao produkt (konačni ili beskonačni) T-transformacija. Dakle, takva matrica P nije jedinstvena.

Veza majorizacije i dvostruko stohastičkih matrica je posljedica činjenice da usrednjivanje dva po dva elementa rezultira istim ishodom kao zamjena y_j sredinom oblika

$$x_j = y_1 p_{1j} + \ldots + y_n p_{nj},\ j = 1, \ldots, n \text{ gdje } p_{ij} \geq 0 \text{ za sve } i, j.$$

$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ je posljedica toga što je x_j sredina od $y_1, \ldots, y_n$, a $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ odražava činjenicu da se sav početni y_i ili zadržava na mjestu i ili transferira na ostale elemente. Zato su ako je $x \prec y$ komponente vektora x ujednačenije od komponenti vektora y, odnosno manje raspršene.

U sljedećem teoremu su navedene karakterizacije majorizacije koje proizlaze iz do sada navedenih tvrdnji.

Teorem 5. *Ako su $x, y \in \mathbb{R}^n$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

(1) $x \prec y$

(2) $x = yP$ *za neku dvostruko stohastičku matricu* P

(3) $x = yP$ *gdje je* P *produkt najviše* $n - 1$ T*-transformacija*

(4) x *se može izvesti od* y *uzastopnom primjenom konačno mnogo* T*-transformacija, tj. za* $1 \leq i < j \leq n$ *i neki* $\alpha \in [0, 1]$ *matrica* T *za koje je*

$$T(z) = zT = (z_1, \ldots, z_{i-1}, \alpha z_i + (1 - \alpha) z_j, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, (1 - \alpha) z_i + \alpha z_j, z_{j+1}, \ldots, z_n).$$

(5) x *je u konveksnoj ljusci* $n!$ *permutacija od* y.

Poglavlje 2

Schur-konveksne funkcije

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Prvo sistematično proučavanje funkcija koje čuvaju uređaj[1] majorizacije radio je Schur u [10] 1923. godine pa su po njemu dobile ime. Schur je funkcije koje čuvaju uređaj majorizacije nazvao konveksnima. Danas se pod izrazom konveksna funkcija često misli konveksna u smislu Jensena, pa funkcije koje je Schur nazvao konveksnima zovemo Schur-konveksnim funkcijama.

Schur je karakterizirao diferencijabilne funkcije koje čuvaju uređaj majorizacije, i to na skupu $\mathbb{R}_n^{++}$, no tu restrikciju je Ostrowski 1952. godine pokazao nepotrebnom. Mnoge nejednakosti proizlaze iz majorizacije i mogu se jednostavno izvesti određivanjem odgovarajuće Schur-konveksne funkcije. Takve su se nejednakosti u povijesti često dokazivale direktnom metodom jer nije bila poznata veza s majorizacijom. Klasični primjer je nejednakost Hadamardove determinante koju je Schur dokazao 1923. godine.

Cilj ovog poglavlja je identificirati i karakterizirati funkcije koje čuvaju uređaj majorizacije i tada se mogu izvesti nejednakosti oblika $\phi(x) \leq \phi(y)$ korištenjem bilo koje takve funkcije ϕ za sve vektore x i y takve da je $x \prec y$.

Definicija 7. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ kažemo da je Schur-konveksna na $\mathcal{A}$ ako

$$x \prec y \text{ na } \mathcal{A} \implies \phi(x) \leq \phi(y).$$

Ako je dodatno $\phi(x) < \phi(y)$ kad $x \prec y$ pri čemu x nije permutacija od y, tada kažemo da je ϕ strogo Schur-konveksna na $\mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, kažemo da je ϕ Schur-konveksna ili strogo Schur-konveksna.

Definicija 8. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ kažemo da je Schur-konkavna na $\mathcal{A}$ ako

$$x \prec y \text{ na } \mathcal{A} \implies \phi(x) \geq \phi(y).$$

Slično, kažemo da je ϕ strogo Schur-konkavna na $\mathcal{A}$ ako $\phi(x) > \phi(y)$ kad $x \prec y$ i x nije permutacija od y. Ako je $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, kažemo da je ϕ Schur-konkavna ili strogo Schur-konkavna. Funkcija ϕ je Schur-konkavna na $\mathcal{A}$ ako je $-\phi$ Schur-konveksna na $\mathcal{A}$.
Ako iskoristimo karakterizaciju majorizacije pomoću dvostruko stohastičkih matrica, možemo Schur-konveksne funkcije definirati i na drugi način.

[1] Više o funkcijama koje čuvaju uređaj u [7].

Definicija 9. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ kažemo da je Schur-konveksna na $\mathcal{A}$ ako $\phi(xP) \leq \phi(x)$ za sve $x \in \mathcal{A}$ i sve dvostruko stohastičke matrice P.

Definicije 7 i 9 su očito ekvivalentne po Teoremu 3.

2.1.1 Simetričnost

Definicija 10. Kažemo da je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ simetričan skup ako za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi da je $x\Pi \in \mathcal{A}$ za sve permutacijske matrice Π.

Definicija 11. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Za $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ kažemo da je simetrična na $\mathcal{A}$ ako je $\phi(x) = \phi(x\Pi)$ za svaki $x \in \mathcal{A}$ i sve permutacijske matrice Π.

Schur-konveksne funkcije su invarijantne u odnosu na permutacije argumenata. To je sadržaj sljedećeg teorema.

Teorem 6. *Ako je $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, gdje je $\mathcal{A}$ simetričan podskup od $\mathbb{R}^n$, Schur-konveksna funkcija, onda je ϕ simetrična funkcija.*

Dokaz. Neka je Π neka permutacijska matrica. Budući da je $\mathcal{A}$ simetričan skup, za svaki $x \in \mathcal{A}$ je $x\Pi \in \mathcal{A}$. Označimo s Π^{-1} inverznu matricu matrice Π. Tada su Π i Π^{-1} dvostruko stohastičke matrice pa ako je ϕ Schur-konveksna za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi:

$$\phi(x\Pi) \leq \phi(x) = \phi(x\Pi\Pi^{-1}) \leq \phi(x\Pi)$$

pa je stoga $\phi(x\Pi) = \phi(x)$, odnosno ϕ je simetrična funkcija. ■

Definirali smo u prvom poglavlju skup $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n\}$. Uređaj majorizacije $\prec$ na $\mathbb{R}^n$ ima svostvo da je $x \prec x\Pi \prec x$ za sve permutacijske matrice Π. Iz tog svojstva proizlazi da ako je ϕ Schur-konveksna ili Schur-konkavna na simetričnom skupu $\mathcal{A}$, tada je ϕ simetrična na $\mathcal{A}$. Dakle, ako je ϕ simetrična na simetričnom skupu $\mathcal{A}$ i Schur-konveksna na $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}$, onda je ϕ Schur konveksna na $\mathcal{A}$. Drugim riječima, na simetričnm skupu $\mathcal{A}$ za Schur-konveksnost funkcije nije bitan poredak komponenti vektora pa ćemo zato često promatrati vektore u skupu $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$, odnosno vektore čije su komponente poredane po veličini. Štoviše, bez smanjenja općenitosti moći ćemo pretpostaviti da su komponente vektora poredane po veličini jer ako je ϕ definirana na $\mathcal{D}$ i Schur-konveksna je, tada se ϕ može jednostavno proširiti na $\mathbb{R}^n$ na način da se očuva njena Schur-konveksnost.

2.2 Karakterizacije Schur-konveksnih funkcija

Želimo doći do tvrdnji koje karakteriziraju Schur-konveksne funkcije definirane na $\mathcal{D}$. Za svaki $z \in \mathcal{D}$ za $k = 1, \ldots, n$ definiramo

$$\tilde{z}_k = \sum_{i=1}^{k} z_i \ .$$

Iz definicije majorizacije slijedi da je $x \prec y$ ako i samo ako je $\tilde{x}_k \leq \tilde{y}_k$ za svaki $k = 1, \ldots, n-1$ i $\tilde{x}_n = \tilde{y}_n$. Za uređaj po komponentama "$\leq$" očito je da vrijedi $u \leq v \implies \psi(u) \leq \psi(v)$ ako i samo ako je ψ rastuća u svakom argumentu. Iz toga slijedi da $x \prec y$ na $\mathcal{D}$ povlači $\phi(x) \leq \phi(y)$ ako i samo ako

$$\phi(z_1, \ldots, z_n) = \phi(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 - \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n - \tilde{z}_{n-1})$$

rastuća u odnosu na $\tilde{z}_k$, za $k = 1, \ldots, n-1$, gdje je $z \in \mathcal{D}$. To vodi do sljedeće leme.

Lema 2. *Neka je ϕ neprekidna realna funkcija definirana na $\mathcal{D}$. Tada*

$$x \prec y \text{ na } \mathcal{D} \implies \phi(x) \leq \phi(y)$$

ako i samo ako je za svaki $z \in \mathcal{D}$ i $k = 1, \ldots, n-1$

$$\phi(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n)$$

rastuća u odnosu na ϵ gdje je

$$0 \leq \epsilon \leq \min\{z_{k-1} - z_k, z_{k+1} - z_{k+2}\}, \text{ za } k = 1, \ldots, n-2,$$

i

$$0 \leq \epsilon \leq z_{n-2} - z_{n-1}, \text{ za } k = n-1.$$

Parameter ϵ predstavlja transfer između $(k+1)$-ve i k-te varijable. Budući da je $\mathcal{D}$ domena funkcije ϕ , postavljeni su uvjeti na ϵ koji osiguravaju da se poredak varijabli ne mijenja. Dakle, ako je $z \in \mathcal{D}$, onda je uz navedene uvjete na ϵ i $(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n) \in \mathcal{D}$. Budući da se transferi u lemi odvijaju između susjednih varijabli, te transfere možemo interpretirati kao djelovanje elementarnih T-transformacija.

Slično vrijedi i za strogu nejednakost. Za neprekidnu funkciju ϕ vrijedi: $\phi(x) < \phi(y)$ za sve $x \prec y$ na $\mathcal{D}$, pri čemu je $x \neq y$ ako i samo ako je $\phi(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n)$ strogo rastuća u odnosu na ϵ uz navedene uvjete na ϵ iz Leme 2.

Propozicija 2. *Neka je $\mathcal{A}$ skup sa svojstvom $y \in \mathcal{A}$ i $x \prec y \implies x \in \mathcal{A}$. Neprekidna funkcija ϕ definirana na $\mathcal{A}$ je Schur-konveksna na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je ϕ simetrična i $\phi(x_1, s - x_1, x_3, \ldots, x_n)$ je rastuća u odnosu na $x_1 \geq \frac{s}{2}$ za fiksne $s, x_3, \ldots, x_n$.*

Uvjeti u Lemi 2 se mogu iskazati u terminima derivacija kad je ϕ diferencijabilna funkcija. Pretpostavimo, dakle, da je ϕ diferencijabilna funkcija i označimo parcijalnu derivaciju funkcije ϕ po k-toj varijabli s:

$$\phi_{(k)}(z) = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_k}.$$

Ako je ϕ dva puta diferencijabilna funkcija, definiramo:

$$\phi_{(i,j)}(z) = \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z_i \partial z_j}.$$

Gradijent funkcije ϕ koji označavamo s $\nabla \phi$ je vektor čiji su elementi parcijalne derivacije funkcije, tj.

$$\nabla \phi(z) = (\phi_{(1)}(z), \ldots, \phi_{(n)}(z)).$$

Teorem 7. *Neka je $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ neprekidna na $\mathcal{D}$ i neprekidno diferencijabilna na interioru od $\mathcal{D}$. Tada vrijedi:*

$$x \prec y \text{ na } \mathcal{D} \implies \phi(x) \leq \phi(y)$$

ako i samo ako $\nabla \phi(z) \in \mathcal{D}$, za svaki $z \in$ Int$(\mathcal{D})$.

Dokaz. Budući da je ϕ neprekidna na rubu od $\mathcal{D}$, možemo promatrati interior od $\mathcal{D}$ i primijeniti Lemu 2 na sve z iz interiora od $\mathcal{D}$. Stoga je

$$\phi(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n)$$

rastuća u odnosu na ϵ gdje je

$$0 \leq \epsilon \leq \min\{z_{k-1} - z_k, z_{k+1} - z_{k+2}\}, \text{ za } k = 1, \ldots, n-2$$

i

$$0 \leq \epsilon \leq z_{n-2} - z_{n-1}, \text{ za } k = n-1.$$

Budući da je ϕ diferencijabilna, to je ekvivalentno uvjetu:

$$\frac{d}{d\epsilon}\phi(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n) \geq 0,$$

tj.

$$\begin{aligned}\phi_{(k)}(z_1, \ldots, z_{k-1}, &z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n) \\ &- \phi_{(k+1)}(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n) \geq 0,\end{aligned}$$

gdje je $(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon, z_{k+2}, \ldots, z_n)$ iz interiora od $\mathcal{D}$ pa iz toga i Leme 2 proizlazi tvrdnja. ■

Ovaj teorem karakterizira Schur-konveksne funkcije pomoću parcijalnih derivacija. Funkcija ϕ definirana u teoremu je Schur-konveksna ako i samo ako je

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial z_1} \geq \frac{\partial\phi(z)}{\partial z_2} \geq \ldots \geq \frac{\partial\phi(z)}{\partial z_n}.$$

Sljedeći teorem karakterizira strogo Schur-konveksne funkcije pomoću parcijalnih derivacija.

Teorem 8. *Neka je $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na interioru od $\mathcal{D}$. Pretpostavimo da je ϕ Schur-konveksna na $\mathcal{D}$. Ako*

$$\phi_{(k)}(z) = \phi_{(k+1)}(z) \quad \Longrightarrow \quad \phi_{(k,k)}(z) - \phi_{(k,k+1)}(z) - \phi_{(k+1,k)}(z) + \phi_{(k+1,k+1)}(z) > 0,$$

tada

$$x \prec y \text{ na } \mathcal{D} \text{ i } x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) < \phi(y).$$

Dokaz. Neka je f realna funkcija definirana na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i neka je dva puta derivabilna na (a, b). Ako je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$ i $f''(x) > 0$ za sve x takve da je $f'(x) = 0$, tada je f strogo rastuća na $[a, b]$. Primjenom toga na funkciju od ϵ definiranu u Lemi 2 slijedi tvrdnja. ■

Teorem 9. *Neka je $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $\phi : \mathcal{I}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna. Nužni i dovoljni uvjeti za Schur-konveksnost funkcije ϕ na $\mathcal{I}^n$ su*

(1) ϕ je simetrična na $\mathcal{I}^n$

(2) $\phi_{(1)}(z) \geq \phi_{(2)}(z) \geq \ldots \geq \phi_{(n)}(z)$, za sve $z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{I}^n$.

Drugi uvjet možemo preformulirati pa vrijedi da je funkcija ϕ je Schur-konveksna na $\mathcal{I}^n$ ako i samo ako je simetrična na $\mathcal{I}^n$ i za sve $i \neq j$ vrijedi

$$(z_i - z_j)[\phi_{(i)}(z) - \phi_{(j)}(z)] \geq 0, \quad \text{za sve } z \in \mathcal{I}^n.$$

Gornji uvjet se naziva Schurov uvjet. Umjesto u padajućem poretku u slučaju Schur-konkavnosti funkcije ϕ u Teoremu 9 parcijalne derivacije su u rastućem poretku. Za Schur-konkavne funkcije je znak nejednakosti u Schurovom uvjetu obratan. Uvjet simetričnosti omogućava da se Schurov uvjet ekvivalentno zapiše na sljedeći način

$$(z_1 - z_2)[\phi_{(1)}(z) - \phi_{(2)}(z)] \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{I}^n.$$

To je pojednostavljeni Schurov uvjet i češće se koristi za provjeru Schur-konveksnosti funkcije. No, prethodni teorem nije dovoljno generalan za primjenu jer često domena funkcije ϕ nije Kartezijev produkt.

Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ skup sa sljedećim svojstvima:

(1) $\mathcal{A}$ je simetričan skup

(2) $\mathcal{A}$ je konveksan skup i ima neprazan interior.

Ako je ϕ neprekidno diferencijabilna na interioru od $\mathcal{A}$ i neprekidna na $\mathcal{A}$, onda se $\mathcal{I}^n$ u Teoremu 9 može zamijeniti s $\mathcal{A}$. Prethodni teorem je vrlo koristan u ispitivanju Schur-konveksnosti funkcije. No, uglavnom je moguće naći jednostavniji način za specijalne slučajeve. Sljedeća tvrdnja je posljedica Teorema 9.

Teorem 10. *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna i ako su zadovoljeni uvjeti* (1) *i* (2) *Teorema 9 te ako $\phi_{(k)}(z) = \phi_{(k+1)}(z)$ implicira $\phi_{(k,k)}(z) - \phi_{(k,k+1)}(z) - \phi_{(k+1,k)}(z) + \phi_{(k+1,k+1)}(z) > 0$, onda je ϕ strogo Schur-konveksna na $\mathbb{R}^n$.*

Za dokazivanje da je funkcija ϕ Schur-konveksna bez smanjenja općenitosti može se uzeti $n = 2$. To je posljedica leme koja kaže da ako je $x \prec y$, onda se x može izvesti od y primjenom konačno mnogo T-transformacija. Da bismo dokazali da je $\phi(x) \leq \phi(y)$ kad $x \prec y$, dovoljno je dokazati slučaj da se x od y razlikuje u dvije komponente i pri tome fiksirajući sve osim dva argumenta funkcije ϕ. Budući da je ϕ nužno simetrična, dovoljno je dokazati da je $\phi(z_1, z_2, z_k)$ Schur-konveksna u z_1 i z_2 za fiksni $z_k \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Jedna je od primjena funkcija koje čuvaju uređaj dokazivanje nejednakosti. Često su od posebnog interesa uvjeti za jednakost ili strogu nejednakost. U većini tvrdnji navedeni su dovoljni uvjeti za strogu nejednakost, no ti uvjeti uglavnom nisu nužni. No, većina funkcija ϕ od praktičnog interesa zadovoljava dovoljne uvjete.

2.2.1 Proširenja Schur-konveksnih funkcija s $\mathcal{D}$ na $\mathbb{R}^n$

Simetričnost Schur-konveksnih funkcija proizlazi iz činjenice da $x \prec x\Pi \prec x$ za sve permutacijske matrice Π. Skup $\mathbb{R}^n$ je simetričan skup pa je nužno da je svaka Schur-konveksna funkcija simetrična. To svojstvo omogućava da se svaka Schur-konveksna funkcija ϕ koja je definirana na $\mathcal{D}$ može jednostavno proširiti na $\mathbb{R}^n$ tako da se očuva njena Schur-konveksnost. To je opisano sljedećom tvrdnjom.

Propozicija 3. *Neka je $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Schur-konveksna funkcija na $\mathcal{D}$. Ako*

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x_\downarrow), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je $x_\downarrow = (x_{[1]}, \ldots, x_{[n]})$ vektor s komponentama vektora x u padajućem poretku, onda je $\tilde{\phi}$ Schur-konveksna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Štoviše, $\tilde{\phi}$ je jedinstveno Schur-konveksno proširenje funkcije ϕ na $\mathbb{R}^n$.

Proširenje sa Schur-konveksne funkcije ϕ na $\mathbb{R}^n$ nije uvijek očito, ali postoji. Sljedeća tvrdnja je primjer tvrdnje za funkciju definiranu na $\mathcal{D}$ koja se može jednostavno proširiti na $\mathbb{R}^n$.

Propozicija 4. *Neka je $\phi(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$ za $x \in \mathcal{D}$, gdje su funkcije $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilne za $i = 1, \ldots, n$. Tada je ϕ Schur-konveksna na $\mathcal{D}$ ako i samo ako*

$$g_i'(a) \geq g_{i+1}'(b) \quad \text{za sve } a \geq b, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Dokaz. Budući da je $\phi_{(i)}(x_i) = g_i'(x_i)$ tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 7. ■

Prema prethodnoj propoziciji $\phi(x) \leq \phi(y)$ kad $x \prec y$ na $\mathcal{D}$ uz navedene uvjete na ϕ. No, nije nužno da je $x \in \mathcal{D}$, tvrdnja vrijedi i sve $x \in \mathbb{R}^n$. Dovoljno je pokazati da

$$z \in \mathcal{D} \implies \phi(z\Pi) \leq \phi(z)$$

za sve permutacijske matrice Π, odnosno da

$$u_i \geq u_{i+1} \implies \phi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_n) \leq \phi(u)$$

što je ekvivalentno

$$g_i(u_i) - g_{i+1}(u_i) \geq g_i(u_{i+1}) - g_{i+1}(u_{i+1}), \quad \text{za } u_i \geq u_{i+1},$$

što slijedi iz uvjeta u propoziciji da $g_i'(a) \geq g_{i+1}'(a)$ za sve $a \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Kompozicije sa Schur-konveksnim funkcijama

Promotrimo prvo kompozicije sljedećeg oblika

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = h(\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x)),$$

gdje je $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, a $\phi_1, \ldots, \phi_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

	h na $\mathbb{R}^k$	svaki ϕ_i na $\mathcal{A}$	$h(\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x))$ na $\mathcal{A}$
(i)	rastuća	Schur-konveksna	Schur-konveksna
(ii)	padajuća	Schur-konveksna	Schur-konkavna
(iii)	rastuća	Schur-konkavna	Schur-konkavna
(iv)	padajuća	Schur-konkavna	Schur-konveksna
(v)	rastuća	rastuća i Schur-konveksna	rastuća i Schur-konveksna
(vi)	padajuća	rastuća i Schur-konveksna	padajuća i Schur-konkavna
(vii)	rastuća	padajuća i Schur-konkavna	padajuća i Schur-konkavna
(viii)	padajuća	padajuća i Schur-konkavna	rastuća i Schur-konveksna
(ix)	rastuća	padajuća i Schur-konveksna	padajuća i Schur-konveksna
(x)	padajuća	rastuća i Schur-konkavna	padajuća i Schur-konveksna
(xi)	rastuća	rastuća i Schur-konkavna	rastuća i Schur-konkavna
(xii)	padajuća	padajuća i Schur-konveksna	rastuća i Schur-konkavna

Tablica 2.1: Kompozicije funkcija oblika $\psi(x) = h(\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x))$

Neka je svaka ϕ_i simetrična funkcija od $x_1, \ldots, x_n$ definirana na $\mathcal{A}$. U Tablici 2.1 su sistematizirani rezultati koje interpretiramo ovako: ako h i svaki ϕ_i zadovoljavaju navedene uvjete, onda ψ zadovoljava za nju navedeno u posljednjem stupcu. Pod izrazom "rastuća" misli se rastuća u svakom argumentu.

Dokaz. Sve tvrdnje u Tablici 2.1 se mogu direktno dokazati i imaju slične dokaze, stoga je naveden dokaz samo prve tvrdnje.

(i) Ako $x \prec y$ na $\mathcal{D}$, onda vrijedi $\phi_i(x) \leq \phi_i(y)$ za svaki $i = 1, \dots, k$ jer je svaka ϕ_i Schur-konveksna. Budući da je h rastuća u svakom argumentu slijedi

$$h(\phi_1(x), \dots, \phi_k(x)) \leq h(\phi_1(y), \dots, \phi_k(y)).$$

■

Propozicija 5. *Ako su ϕ_i Schur-konveksne za $i = 1, \dots, k$ i $\phi_i(x) \geq 0$ za sve i i x, onda je*

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^{k} \phi_i(x)$$

Schur-konveksna.
Ako su ϕ_i Schur-konkavne za $i = 1, \dots, k$ i $\phi_i(x) \geq 0$ za sve i i x, onda je

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^{k} \phi_i(x)$$

Schur-konkavna.

Dokaz. Te tvrdnje proizlaze iz (i) i (iii) iz Tablice 2.1 jer je $h(u) = \prod_{i=1}^{k} u_i$ rastuća na $\mathbb{R}_+^k$. ■

Definicija 12. Kažemo da je $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, gdje je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$, konveksna funkcija ako je $\mathcal{A}$ konveksan skup i ako vrijedi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

za sve $x, y \in \mathcal{A}$ i za svako $\lambda \in [0,1]$. Za tako definiranu funkciju f kažemo da je strogo konveksna ako

$$f(\lambda x + (1-\lambda y)) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

za sve $x, y \in \mathcal{A}$ takve da je $x \neq y$ i za svako $\lambda \in (0,1)$.

Promotrimo sada kompozicije oblika

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \phi(g(x_1), \dots, g(x_n)),$$

gdje je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pa je onda $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. U Tablici 2.2 su navedene kompozicije s konveksnim ili konkavnim funkcijama koje rezultiraju Schur-konveksnim funkcijama.

Dokaz. (i) Dovoljno je dokazati za slučaj $n = 2$. Ako $x \prec y$, onda su komponente od x sljedećeg oblika: $x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$ i $x_2 = (1-\alpha) y_1 + \alpha y_2$ za neki $\alpha \in [0,1]$. Budući da je g konveksna i ϕ rastuća slijedi

$$\begin{aligned}
\phi\big(g(x_1), g(x_2)\big) &= \phi\Big(g\big(\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2\big), g\big((1-\alpha) y_1 + \alpha y_2\big)\Big) \\
&\leq \phi\big(\alpha g(y_1) + (1-\alpha) g(y_2), (1-\alpha) g(y_1) + \alpha g(y_2)\big) \\
&= \phi\Big(\alpha\big(g(y_1), g(y_2)\big) + (1-\alpha)\big(g(y_2), g(y_1)\big)\Big).
\end{aligned}$$

	ϕ	g	ψ
(i)	rastuća i Schur-konveksna	konveksna	Schur-konveksna
(ii)	padajuća i Schur-konveksna	konkavna	Schur-konveksna
(iii)	rastuća i Schur-konveksna	rastuća i konveksna	rastuća i Schur-konveksna
(iv)	padajuća i Schur-konveksna	padajuća i konkavna	rastuća i Schur-konveksna
(v)	rastuća i Schur-konveksna	padajuća i konveksna	padajuća i Schur-konveksna
(vi)	padajuća i Schur-konveksna	rastuća i konkavna	padajuća i Schur-konveksna

Tablica 2.2: Kompozicije funkcija oblika $\psi(x) = \phi(g(x_1), \ldots, g(x_n))$

Budući da je

$$\Big(\alpha\big(g(y_1), g(y_2)\big) + (1-\alpha)\big(g(y_2), g(y_1)\big)\Big) \prec \big(g(y_1), g(y_2)\big)$$

i zato što je ϕ Schur-konveksna

$$\phi\Big(\alpha\big(g(y_1), g(y_2)\big) + (1-\alpha)\big(g(y_2), g(y_1)\big)\Big) \leq \phi\big(g(y_1), g(y_2)\big).$$

Stoga slijedi

$$x \prec y \implies \phi\big(g(x_1), g(x_2)\big) \leq \phi\big(g(y_1), g(y_2)\big).$$

Dokaz tvrdnje *(ii)* je sličan, a tvrdnje *(iii)* i *(v)* slijede iz *(i)* i tvrdnje *(iv)* i *(vi)* slijede iz *(ii)*. ■

2.3 Neke klase Schur-konveksnih funkcija

Kao što je već spomenuto, tvrdnje u prošlom dijelu su vrlo korisne za identifikaciju Schur-konveksnih funkcija, no za funkcije koje pripadaju nekim specijalnim klasama postoje jednostavniji načini. Te specijalne klase i veze s Schur-konveksnim funkcijama navedene su u nastavku.

2.3.1 Konveksne funkcije

Propozicija 6. *Neka je $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ interval i neka je $g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada je*

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Schur-konveksna funkcija na $\mathcal{I}^n$. Stoga $x \prec y$ na $\mathcal{I}^n$ implicira $\phi(x) \leq \phi(y)$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati za slučaj $n = 2$. Ako $x \prec y$, onda su komponente od x sljedećeg oblika:

$$x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$$
$$x_2 = (1-\alpha) y_1 + \alpha y_2$$

za neki $\alpha \in [0, 1]$. Budući da je g konveksna, vrijedi

$$\begin{aligned} g(x_1) + g(x_2) &= g(\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2) + g((1-\alpha) y_1 + \alpha y_2) \\ &\leq (\alpha g(y_1) + (1-\alpha) g(y_2)) + ((1-\alpha) g(y_1) + \alpha g(y_2)) \\ &= g(y_1) + g(y_2). \end{aligned}$$

■

Ako je g konkavna funkcija, onda je ϕ Schur-konkavna. Ako je g strogo konveksna, onda je ϕ strogo Schur-konveksna te ako je g strogo konkavna, onda je ϕ strogo Schur-konkavna. To se može dokazati na sličan način.

Propozicija 7. *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Ako je ϕ simetrična i konveksna, onda je ϕ Schur-konveksna. Stoga vrijedi*

$$x \prec y \implies \phi(x) \leq \phi(y).$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati za $n = 2$. Ako je $x \prec y$, onda su komponente od x sljedećeg oblika

$$x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$$
$$x_2 = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2$$

za neki $\alpha \in [0,1]$. Tada je

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2) =& \phi(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2) = \phi(\alpha(y_1, y_2) + (1-\alpha)(y_2, y_1)) \leq \\ \leq& \alpha\phi(y_1, y_2) + (1-\alpha)\phi(y_2, y_1) = \phi(y_1, y_2)\end{aligned}$$

pri čemu nejednakost proizlazi iz konveksnosti funkcije ϕ, a zadnja jednakost vrijedi zbog simetričnosti funkcije ϕ. ■

Iz ove propozicije slijedi ako je ϕ simetrična i konveksna u svakom paru argumenata, uz ostale argumente fiksne, onda je ϕ Schur-konveksna. Veza između strogo konveksnih i strogo Schur-konveksnih funkcija dana je u sljedećoj tvrdnji.

Propozicija 8. *Ako je ϕ simetrična i strogo konveksna na skupovima oblika*

$$\{z : \sum_{i=1}^{n} z_i = c\},$$

onda je ϕ strogo Schur-konveksna.

Dokaz. Ako je ϕ strogo konveksna, $\alpha \in (0,1)$ i $y_1 \neq y_2$, onda vrijedi stroga nejednakost u dokazu Propozicije 7. ■

Primjeri konveksnih Schur-konveksnih funkcija su dani u [9].

2.3.2 Kvazikonveksne funkcije

Definicija 13. Kažemo da je $f : A \to \mathbb{R}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, kvazikonveksna funkcija na A ako je A konveksan skup i ako vrijedi: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, za sve $x, y \in A$ i za svako $\lambda \in [0,1]$.

Teorem 11. *Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, je kvazikonveksna na A ako i samo ako za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ nivo skupovi $L_\lambda = \{x : f(x) \leq \lambda\}$ su konveksni.*

Propozicija 9. *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Ako je ϕ simetrična i kvazikonveksna, onda je ϕ Schur-konveksna.*

Dokaz. Označimo s $\langle K_y \rangle$ konveksnu ljusku skupa $K_y = \{yP : P \text{ permutacijska matrica}\}$. Tada je $\langle K_y \rangle = \{x : x \prec y\}$. Skup $L_{\phi(y)} = \{z : \phi(z) \leq \phi(y)\}$ je konveksan. Osim toga $K_y \subset L_{\phi(y)}$ jer je ϕ simetrična. Zato slijedi $\langle K_y \rangle \subset L_{\phi(y)}$, tj. $x \prec y \implies \phi(x) \leq \phi(y)$. ■

2.4 Simetrizacija konveksnih funkcija

Sve su Schur-konveksne funkcije simetrične. Dakle, simetričnost je nužan uvjet da bi funkcija bila Schur-konveksna. Prema Propoziciji 7 ako je funkcija simetrična i konveksna, onda je i Schur-konveksna. No, ako je funkcija konveksna, ali nije simetrična, možemo ju simetrizirati i pritom zadržati njenu konveksnost, tj. od nesimetrične konveksne funkcije možemo dobiti konveksnu simetričnu funkciju, a time i Schur-konveksnu funkciju. Postoji više načina kako simetrizirati konveksnu funkciju. U sljedećim tvrdnjama je navedeno nekoliko načina i primjera.

Jedan način kako od konveksne funkcije dobiti Schur-konveksnu funkciju je sumiranjem po svim permutacijama argumenata da bi se dobila simetričnost. Označimo prvo s $S_n = \{\pi_1, \ldots, \pi_{n!}\}$ grupu svih permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ i neka je i-ta permutacija vektora x

$$\pi_i(x) = (x_{\pi_i(1)}, \ldots, x_{\pi_i(n)}).$$

Teorem 12. *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna i $h : \mathbb{R}^{n!} \to \mathbb{R}$ simetrična, rastuća i konveksna, onda je*

$$\psi(x) = h(\phi(\pi_1(x)), \ldots, \phi(\pi_{n!}(x)))$$

simetrična i konveksna funkcija.

Dokaz. Simetričnost je očita. Za dokaz konveksnosti funkcije ψ označimo $\phi_i(x) = \phi(\pi_i(x))$ za $i = 1, \ldots, n!$. Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ i sve $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha x + (1-\alpha)y) &= h(\phi_1(\alpha x + (1-\alpha)y), \ldots, \phi_{n!}(\alpha x + (1-\alpha)y)) \\
&\leq h(\alpha\phi_1(x) + (1-\alpha)\phi_1(y), \ldots, \alpha\phi_{n!}(x) + (1-\alpha)\phi_k(y)) \\
&= h(\alpha(\phi_1(x), \ldots, \phi_{n!}(x)) + (1-\alpha)(\phi_1(y), \ldots, \phi_{n!}(y))) \\
&\leq \alpha h(\phi_1(x), \ldots, \phi_{n!}(x)) + (1-\alpha)h(\phi_1(y), \ldots, \phi_{n!}(y)) \\
&= \alpha\psi(x) + (1-\alpha)\psi(y)
\end{aligned}$$

■

Propozicija 10. *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna, $h : \mathbb{R}^{n!} \to \mathbb{R}$ simetrična, rastuća i konveksna i $t_1, \ldots, t_n$ realni brojevi , onda je*

$$\psi(x) = h(\phi(t_1 x_{\pi_1(1)}, \ldots, t_n x_{\pi_1(n)}), \ldots, \phi(t_1 x_{\pi_{n!}(1)}, \ldots, t_n x_{\pi_{n!}(n)}))$$

simetrična i konveksna funkcija. Ako je uz to ψ rastuća i $t_1 \ldots, t_n$ nenegativni, onda je i ψ rastuća.

Dokaz. Ako je ϕ konveksna, onda je $\tilde{\phi}(x) = \phi(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n)$ konveksna. Primjenom Teorema 12 na funkciju $\tilde{\phi}$ tvrdnja je dokazana. ■

Označimo s:

$$\sum_{k,\pi} \phi(t_1 x_{\pi(1)}, \ldots, t_n x_{\pi(n)})$$

sumu k najvećih vrijednosti $\phi(t_1 x_{\pi(1)}, \ldots, t_n x_{\pi(n)})$ po svim permutacijama $\pi \in S_n$.

Propozicija 11. *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna i $t_1, \ldots, t_n$ realni brojevi , onda je*

$$\psi_k(x) = \sum_{k,\pi} \phi(t_1 x_{\pi(1)}, \ldots, t_n x_{\pi(n)}), \quad k = 1, \ldots, n!,$$

simetrična i konveksna funkcija.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Propozicije 10 odabirom funkcije h. ■

Teorem 13. *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ simetrična i konveksna, $h : \mathbb{R}^{n!} \to \mathbb{R}$ simetrična, rastuća i konveksna i ako su $t_1, \ldots, t_n$ realni brojevi, onda je*

$$\phi(x) = h(\phi(t_{\pi_1(1)} x_1, \ldots, t_{\pi_1(n)} x_n), \ldots, \phi(t_{\pi_{n!}(1)} x_1, \ldots, t_{\pi_{n!}(n)} x_n))$$

simetrična i konveksna funkcija.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Propozicije 10 jer za svaku permutaciju $\pi \in S_n$ vrijedi:

$$\phi(t_1 x_{\pi(1)}, \ldots, t_n x_{\pi(n)}) = \phi(t_{\pi^{-1}(1)} x_1, \ldots, t_{\pi^{-1}(n)} x_n).$$

■

Propozicija 12. *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ simetrična i konveksna i $t_1, \ldots, t_n$ realni brojevi , onda je*

$$\psi_k(x) = \sum_{k,\pi} \phi(t_{\pi(1)} x_1, \ldots, t_{\pi(n)} x_n)$$

simetrična i konveksna funkcija za $k = 1, \ldots, n!$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Teorema 13 i Propozicije 11 ■

Sljedeća tvrdnja je poznata kao Muirheadov teorem.

Propozicija 13. *Ako je $y_i > 0$ za $i = 1, \ldots, n$ i $a \prec b$, onda vrijedi*

$$\sum_{\pi} y_{\pi(1)}^{a_1} y_{\pi(2)}^{a_2} \cdots y_{\pi(n)}^{a_n} \leq \sum_{\pi} y_{\pi(1)}^{b_1} y_{\pi(2)}^{b_2} \cdots y_{\pi(n)}^{b_n}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Propozicije 12 odabirom $k = n!$, $\phi(z) = \exp(\sum z_i)$, $t_i = \log y_i$. ■

Teorem 14. *Neka je $\mathcal{A}$ simetričan i konveksan podskup od $\mathbb{R}^l$ i neka je ϕ Schur-konveksna funkcija definirana na $\mathcal{A}$ sa svojstvom da je za sve fiksne $x_2, \ldots, x_n$*

$$\phi(z, x_2, \ldots, x_l)$$

konveksna u z na $\{z : (z, x_2, \ldots, x_l) \in \mathcal{A}\}$. Tada je za svaki $n > l$ funkcija

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi} \phi(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(l)})$$

Schur-konveksna na

$$\mathcal{B} = \{(x_1, \ldots, x_n) : (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(l)}) \in \mathcal{A} \text{ za sve permutacije } \pi\}.$$

Dokaz. Označimo s $\sum_{\pi(i,j)}$ sumaciju po svim permutcijama π takvim da je $\pi(i) = 1$ i $\pi(j) = 2$. Budući da je ϕ simetrična

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, \dots, x_n) = &\sum_{\substack{i,j \le l \\ i \neq j}} \sum_{\pi(i,j)} \phi(x_1, x_2, x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i+1)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(l)}) \\
&+ \sum_{i \le l < j} \sum_{\pi(i,j)} \phi(x_1, x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i+1)}, \dots, x_{\pi(l)}) \\
&+ \sum_{j \le l < i} \sum_{\pi(i,j)} \phi(x_2, x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(l)}) \\
&+ \sum_{\substack{l < i,j \\ i \neq j}} \sum_{\pi(i,j)} \phi(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(l)})
\end{aligned}$$

Označimo s $\phi_{(k)}(z) = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_k}$. Stoga je

$$\begin{aligned}
&(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2})(x_2 - x_1) = \\
&\quad = \sum_{\substack{i,j \le l \\ i \neq j}} \sum_{\pi(i,j)} (\phi_{(1)} - \phi_{(2)})(x_1, x_2, x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i+1)}, \dots, \\
&\qquad\qquad x_{\pi(j-1)}, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(l)})(x_1 - x_2) + \\
&\quad + \sum_{i \le l < j} \sum_{\pi(i,j)} (\phi_{(1)}(x_1, x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(i-1)}, x_{\pi(i+1)}, \dots, x_{\pi(l)}) - \\
&\qquad\qquad - \phi_{(1)}(x_2, x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(l)}))(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Vrijedi $(\phi_{(1)} - \phi_{(2)})(x_1 - x_2) \ge 0$ jer je ϕ Schur-konveksna i
$(\phi_{(1)}(x_1, z) - \phi_{(2)}(x_2, z))(x_1 - x_2) \ge 0$ jer je ϕ konveksna u prvom argumentu. ■

Konveksnost funkcije ϕ po prvom argumentu zbog simetričnosti znači da je ϕ konveksna po svakom argumentu uz ostale fiksne. Za $\mathcal{A}$ u Teoremu 14 se često uzima $\mathcal{I}^l$ za neki interval $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ i tada je $\mathcal{B} = \mathcal{I}^n$.

2.5 Primjeri

Definicija 14. Za funkciju $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je simetrična mjerna funkcija ako

(1) $\phi(u) > 0$ za $u \neq 0$,

(2) $\phi(\gamma u) = |\gamma| \phi(u)$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$,

(3) $\phi(u + v) \le \phi(u) + \phi(v)$,

(4) $\phi(u_1, \dots, u_n) = \phi(\epsilon_1 u_{i_1}, \dots, \epsilon_n u_{i_n})$ pri čemu su svi $\epsilon_i = \pm 1$ i $(i_1, \dots, i_n)$ je permutacija od $(1, \dots, n)$.

Ako je ϕ simetrična mjerna funkcija, onda je ϕ simetrična i konveksna. Stoga je ϕ Schur-konveksna. Sljedeće funkcije su specijalni slučajevi simetričnih mjernih funkcija:

$$\phi_1(x) = \max |x_i|,$$

$$\phi_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \right)^{1/r}, \quad r \geq 1,$$

$$\phi_3(x) = \max_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} (|x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_k}|).$$

Funkcije ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 su Schur-konveksne funkcije, a uz ograničenje na $\mathbb{R}^n_+$ su i rastuće. Uz ograničenje domene na $\mathbb{R}^n_{++}$ ϕ_2 je strogo Schur-konveksna za $r > 1$. Schur-konveksnost simetričnih mjernih funkcija se primjenjuje u numeričkoj analizi.

Definicija 15. S S_k označavamo k-tu elementarnu simetričnu funkciju koju za $k = 0, \ldots, n$ definiramo s

$$S_0(x) = 1, \quad S_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad S_2(x) = \sum_{i<j} x_i x_j,$$

$$S_3(x) = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k, \quad ..., \quad S_n(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Funkcija S_k je rastuća i Schur-konkavna na $\mathbb{R}^n_+$. Za $k > 1$ S_k je strogo Schur-konkavna na $\mathbb{R}^n_{++}$, a S_2 je Schur-konkavna na cijelom $\mathbb{R}^n$.

Definicija 16. Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ zadanu formulom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

zovemo gama funkcija, a funkciju $\Psi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ definiranu izrazom

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x))$$

zovemo digama funkcija.

Funkcija

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\log \Gamma(x) - \log \Gamma(y)}{x - y}, & \text{za } x \neq y \\ \Psi(x), & \text{za } x = y \end{cases}$$

strogo je Schur-konveksna na $\mathbb{R}^2_{++}$. Više o gama funkcijama može se naći u [8], a dokaz Schur-konvesnosti funkcije F naveden u je [5].

Više primjera Schur-konveksnih funkcija dano je u [5] i [6].

Poglavlje 3

Primjene Schur-konveksnih funkcija

Schur-konveksne funkcije se najviše primjenjuju u izvođenju i dokazivanju nejednakosti. Primjene se mogu pronaći u raznim područjima matematike. U [1] je opisana uloga majorizacije u matričnoj teoriji te su navedene mnoge nejednakosti, u [4] su navedene Schur-konveksne funkcije koje se koriste u teoriji grafova, a mnogi drugi primjeri iz raznih područja dani su u [2]. Za većinu stohastičkih primjena pojam majorizacije se generalizira na neki stohastički uređaj, kao na primjer Lorenzov uređaj o čemu piše Arnold u [3]. U nastavku je navedeno nekoliko primjena u geometriji i matričnoj teoriji o kojima se više može naći u [6].

3.1 Geometrija trokuta

Majorizacija omogućava jednostavan pritup izvođenju mnogih geometrijskih nejednakosti. Iako je parametara u trokutu malo, mogu se izvesti mnoge nejednakosti koje se odnose na trokut. Suma kuteva u trokutu je fiksna, stoga je majorizaciju lako uočiti. Nejednakosti vezane uz kuteve trokuta mogu se dobiti direktnom primjenom majorizacije koristeći Schur-konveksne funckije. Osim trigonometrijskih nejednakosti koje se odnose na sinuse, kosinuse i tangense kuteva u trokutu, mogu se izvesti nejednakosti vezane uz stranice, poluopseg, visine, radijus opisane kružnice i druge parametre.

Neka su α_1, α_2 i α_3 kutevi trokuta. Tada je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ i vrijede sljedeće majorizacije

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{za sve trokute,} \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{za šiljastokutne trokute,} \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{za tupokutne trokute.} \tag{3.3}$$

U tim majorizacijama su sadržane karakteristike kuteva u trokutu, kao na primjer da najveći kut u svakom trokutu mora biti veći ili jednak $\frac{\pi}{3}$, u šiljastokutnom trokutu je manji od $\frac{\pi}{2}$, a u tupokutnom trokutu je veći od $\frac{\pi}{2}$.
Ako je $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Schur-konveksna funkcija, onda vrijede

$$\phi\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \leq \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq \phi(\pi, 0, 0) \quad \text{za sve trokute,} \tag{3.4}$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \leq \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq \phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{za šiljastokutne trokute,} \tag{3.5}$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\leq\phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\leq\phi\left(\pi,0,0\right)\quad \text{za tupokutne trokute.} \tag{3.6}$$

Ako je $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ Schur-konkavna funkcija, onda vrijede obratne nejednakosti. Neke nejednakosti su stroge jer se ne dopušta degenerirani trokut. Većina funkcija ϕ su oblika $\sum_{i=1}^{3} g(x_i)$, gdje je g konveksna ili konkavna funkcija. Schur-konveksnost ili Schur-konkavnost takve funkcije ϕ proizlazi iz Propozicije 6.

Propozicija 14. *Vrijede sljedeće nejednakosti*

(1) $2<\sin(\frac{\alpha_1}{2})+\sin(\frac{\alpha_2}{2})+\sin(\frac{\alpha_3}{2})\leq\frac{3}{2}$ *za šiljastokutne trokute,*

(2) $0<\sqrt{\sin\alpha_1}+\sqrt{\sin\alpha_2}+\sqrt{\sin\alpha_3}\leq 1+2^{\frac{3}{4}}$ *za tupokutne trokute,*

(3) $1<\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3\leq\frac{3}{2}$ *za šiljastokutne trokute,*

(4) $0<\cos(\frac{\alpha_1}{2})\cos(\frac{\alpha_2}{2})\cos(\frac{\alpha_3}{2})\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *za sve trokute,*

(5) $3^{\frac{m+2}{2}}\leq\tan^m\alpha_1+\tan^m\alpha_2+\tan^m\alpha_3$ *za šiljastokutne trokute,*

(6) $0<\tan(\frac{\alpha_1}{2})\tan(\frac{\alpha_2}{2})\tan(\frac{\alpha_3}{2})\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$ *za šiljastokutne trokute.*

Dokaz. Tvrdnje (1) i (2) slijede iz (3.5) i (3.6) zbog stroge konkavnosti funkcija $\sin(x)$ i $\sqrt{\sin x}$ na $(0,\pi)$. Tvrdnja (3) vrijedi zbog stroge konkavnosti funkcije $\cos(x)$ na $(0,\frac{\pi}{2})$, a tvrdnja (4) jer je $\log\cos(kx)$ strogo konkavna na $(0,\frac{\pi}{2k})$. Funkcija $(\tan(x))^m$ za $m\geq 1$ je strogo konveksna na $(0,\frac{\pi}{2})$, a funkcija $\log\tan(kx)$ je strogo konkavna na $(0,\frac{\pi}{4k})$ za $k>0$ pa koristeći (3.5) slijede (5) i (6). ■

Neka su a_1, a_2 i a_3 duljine stranica trokuta. Tada je poluopseg $s=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)$ i prosječna duljina stranice $\bar{a}=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)=\frac{2}{3}s$ i vrijede sljedeće majorizacije

$$(\bar{a},\bar{a},\bar{a})\prec(a_1,a_2,a_3)\prec(s,s,0)\quad\text{za sve trokute,}\tag{3.7}$$

$$(\bar{a},\bar{a},\bar{a})\prec(a_1,a_2,a_3)\prec\left(s,\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\quad\text{za jednakokračne trokute,}\tag{3.8}$$

$$\frac{s}{1+\sqrt{2}}\left(2,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\prec(a_1,a_2,a_3)\prec(s,s,0)\quad\text{za tupokutne trokute.}\tag{3.9}$$

Te majorizacije proizlaze iz svojstava trokuta.
Ako je $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ Schur-konveksna funkcija, onda vrijede

$$\phi\left(\bar{a},\bar{a},\bar{a}\right)\leq\phi\left(a_1,a_2,a_3\right)\leq\phi\left(s,s,0\right)\quad\text{za sve trokute,}\tag{3.10}$$

$$\phi\left(\bar{a},\bar{a},\bar{a}\right)\leq\phi\left(a_1,a_2,a_3\right)\leq\phi\left(s,\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\quad\text{za jednakokračne trokute,}\tag{3.11}$$

$$\phi\left(\frac{2s}{1+\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}s}{1+\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}s}{1+\sqrt{2}}\right)\leq\phi\left(a_1,a_2,a_3\right)\leq\phi\left(s,s,0\right)\quad\text{za tupokutne trokute.}\tag{3.12}$$

Ako je ϕ Schur-konkavna funkcija, onda vrijede obratne nejednakosti. Šiljastokutni trokuti nisu izdvojeni jer za njih vrijedi (3.7) i nejednakosti oblika (3.10), a za pravokutne trokute vrijedi (3.9) i nejednakosti oblika (3.12). Primjer nejednakosti je u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 15. *Za jednakokračne trokute vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{3}\leq\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{(a_1+a_2+a_3)^2}<\frac{3}{8}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz (3.11) jer je $\phi(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{(a_1+a_2+a_3)^2}$ Schur-konveksna funkcija. ■

Slične tvrdnje koristeći istu funkciju ϕ mogu se dobiti za druga dva slučaja. Definiramo $s_i = 2(s - a_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Tada je

$$(a_1, a_2, a_3) = (s_1, s_2, s_3) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Tada je prema Teoremu 3

$$(a_1, a_2, a_3) \prec (s_1, s_2, s_3). \tag{3.13}$$

Propozicija 16. *Za sve trokute vrijedi nejednakost*

$$s_1 s_2 s_3 \leq a_1 a_2 a_3$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz (3.13) primjenom elementarne simetrične funkcije $S_3(x_1, x_2, x_3)$ koja je Schur-konkavna. ■

3.2 Matrična teorija

Prvi primjer majorizacije u matričnoj teoriji pojavio se kao usporedba dijagonalnih elemenata i svojstvenih vrijednosti. Schurovo proučavanje majorizacije motivirano je otkrićem da svojstvene vrijednosti pozitivno semidefinitne hermitske matrice majoriziraju dijagonalne elemente. Schur je tako dokazao nejednakost Hadamardove determinante, generalizirao ju i izveo mnoge druge nejednakosti. U matričnoj teoriji majorizacije uglavnom uključuju svojstvene vrijednosti i singularne vrijednosti.

Matrica H s kompleksnim elementima je hermitska ako je jednaka sebi adjungiranoj matrici, odnosno ako je $H = (\bar{H})^T$. Hermitske matrice imaju sve realne svojstvene vrijednosti.

Vektor svojstvenih vrijednosti matrice A reda n označavamo s

$$\lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)).$$

Ako su svojstvene vrijednosti realne, poredane su u padajućem poretku

$$\lambda_1(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A).$$

Teorem 15. *Ako je H hermitska matrica reda s dijagonalnim elementima $h_1, \ldots, h_n$ i svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, onda*

$$h \prec \lambda.$$

Nekoliko dokaza te tvrdnje navedeno je u [6]. Budući da je $(h_1, \ldots, h_n) \prec (\lambda_1(H), \ldots, \lambda_n(H))$, pri čemu bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je $h_1 \geq \ldots \geq h_n$, za sve Schur-konveksne funkcije ϕ na $\mathcal{D}$ vrijedi

$$\phi(h_1, \ldots, h_n) \leq \phi(\lambda_1(H), \ldots, \lambda_n(H)) \tag{3.14}$$

Za Schur-konkavnu funkciju vrijedi, dakako, obratna nejednakost.

Teorem 16. *Za svaku pozitivno semidefinitnu Hermitsku matricu $H = (h_{ij})$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1(H), \ldots, \lambda_n(H)$ vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(H) = \det H \leq \prod_{i=1}^{n} h_{ii}.$$

Dokaz. Tvrdnja se može dobiti iz (3.14) primjenom elementarne simetrične funkcije S_n koja je Schur-konkavna ili primjenom Propozicije 6 za funkciju $g(x) = -\log(x)$ koja je konveksna. ∎

Literatura

[1] T. Ando, Majorizations and Inequalities in Matrix Theory, Linear Algebra Applications, 199(1994), 17-67.

[2] B. C. Arnold, Majorization: Here, There and Everywhere, Statistical Science, 22(2007), 407-413.

[3] B.C. Arnold, Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] G. M. Constantine, Schur Convex Functions on the Spectra of Graphs, Discrete Mathematics, 45(1983), 181-188.

[5] N. Elezović i J. Pečarić, A Note on Schur-convex Functions, Rocky Mountain Journal Mathematics, 30(2000), 853-856.

[6] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York, 1979.

[7] A. W. Marshall, D. W. Walkup i R. J.B. Wets, Order-Preserving Functions; Applications to Majorization and Order Statistics, Pacific Journal of Mathematics, 23(1967), 569-584.

[8] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, Gama i beta funkcije, Osječki matematički list, 15(2015), 93-111.

[9] I. Roventa, Schur Convexity of a Class of Symmetric Functions, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, 37(2010), 12-18.

[10] I. Schur, Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie, Sitzber. Berl. Math. Ges., 22(1923), 9-20.

Sažetak

Cilj ovog rada je sistematizirati neke rezultate o Schur-konveksnim funkcijama koji omogućuju njihovu identifikaciju te ukazati na njihovu ulogu u izvođenju nejednakosti. Prvo se definira majorizacija i navedena su dva motivacijska ekonomska primjera. To su Lorenzova krivulja koja omogućuje grafičku vizualizaciju pojma majorizacije i Daltonovi transferi koji služe kao motivacija definicije T-transformacija. Umnožak T-transformacija je dvostruko-stohastička matrica, a dvostruko stohastičkim matricama se može karakterizirati majorizacija. Schur-konveksne funkcije su funkcije koje čuvaju uređaj majorizacije. Simetričnost koja je važno svojstvo Schur-konveksnih funkcija proizlazi iz činjenice da je svaki vektor majoriziran sa svakom svojom permutacijom. Navedene su tvrdnje koje omogućavaju karakterizaciju i identifikaciju Schur-konveksnih funkcija, od kojih su najznačajnije karakterizacije diferencijabilnih Schur-konveksnih funkcija. Navedene su veze Schur-konveksnih funkcija s nekim klasama funkcija poput konveksnih i kvazikonveksnih funkcija te neki primjeri. Schur-konveksne funkcije se primjenjuju u mnogim područjima matematike, od kojih je navedeno nekoliko primjera iz geometrije trokuta i matrične teorije.

Ključne riječi: majorizacija, Lorenzova krivulja, Daltonov transfer, T-transformacija, dvostruko-stohastička matrica, Schur-konveksna funkcija, Schur-konkavna funkcija, konveksna funkcija, kvazikonveksna funkcija

Summary

The purpose of this paper is to systematize some results on Schur convex functions that enable their identification and to point out their role in deriving inequalities. Firstly majorization is defined and two economics examples are given as motivation. Those are Lorenz curve that allows graphical visualisation of majorization and Dalton transfers that are used as motivation for definition of T-transforms. Products of T-transforms are doubly stohastic matrices and doubly stohastic matrices are used to characterize majorization. Schur-convex functions are functions that preserve the ordering of majorization. Symmetry is an important property of Schur-convex functions that arises from the fact that every vector is majorized by its permutations. Results are given that allow characterizations and identification of Schur-convex functions, where most relevant are characterizations of diferentiable Schur-convex functions. Schur-convex functions are linked to convex and quasi-convex functions and examples are given. Schur-convex functions have many mathematical applications, such as in geometry of triangles and matrix theory.

Keywords: majorization, Lorenz curve, Dalton transfer, T-transform, doubly stohastic matrix, Schur-convex function, Schur-concave function, convex function, quasi-convex function

Životopis

Rođena sam 27. svibnja 1993. godine u Osijeku. Osnovnu školu Vladimir Nazor završila sam u Čepinu. Godine 2007. upisala sam Isusovačku klasičnu gimnaziju s pravom javnosti u Osijeku. Maturirala sam 2011. godine te potaknuta dobrim rezultatima na natjecanjima iz matematike u dotadašnjem školovanju upisala sam preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Nakon završenog preddiplomskog studija 2014. godine upisala sam diplomski studij Financijska matematika i statistika na istom fakultetu. Tijekom druge godine diplomskog studija obavila sam stručnu praksu u tvrtki Farmeron d.o.o. gdje sam se bavila analizom i modeliranjem konzumacije mliječnih proizvoda u SAD-u.