Problem zvan nula

Hlatki, Ana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Hlatki

Problem zvan nula

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Hlatki

Problem zvan nula

Diplomski rad

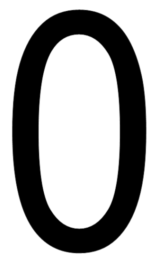
Mentor: izv. prof. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Iako su ljudi oduvijek razumjeli pojam nule, on je relativno nov i potpuno otkriven tek u 5. stoljeću prije Krista. Do tada su se matematičari borili i s izvedbom najjednostavnijih računskih operacija i s njihovim zapisom. Nakon konačnog otkrića i prihvaćenog simbola nule u svijetu bilo je za očekivati kako će svi računi biti pojednostavljeni i sve nedoumice vezane za nulu nestati. No, pokazalo se da ipak nije tako. Danas nula i kao pojam i kao simbol označava odsutnost nečega što je svima na prvu očito i jasno. Ipak, uviđeni su mnogi problemi kod učenika osnovnih, pa i srednjih škola. Oni nastaju kao posljedica pretpostavke da učenici već znaju sve specifičnosti broja nula. Tako najčešće griješe kada odluče podijeliti neki broj s nulom ili odrediti pripadnost nule nekom skupu brojeva. Kako bi se to ispravilo, ako ne i spriječilo, pred nastavnicima je velik izazov u osmišljanju metoda na koji način to objasniti i učiniti lako shvatljivim.



Slika 1: Zapis broja nula

Treba iskoristiti to što učenici u pravilu nisu ni svjesni da je nula možda broj koji će im kasnije biti problem. Sam polazak od mnogih zanimljivosti o nuli dobar je izbor za predstavljanje i uvođenje nule kao broja. Navedu li se samo neke od brojnih polemika još iz davnih vremena i navedu primjeri najčešćih grešaka u razmišljanjima o nuli istaknut će se posebnost i naglasiti važnost toga broja. Uporaba u svakodnevnom životu je također jedna od prednosti koja će pozivati na oprez u računu s nulom, što i je krajnji cilj.

U ovom će diplomskom radu biti predstavljeni neki od najčešće uočenih problema s brojem nula. Velik broj nastavnika i profesora podrazumijeva da učenici razumiju sve što koriste u rješavanju zadataka. Nakon što shvate da ipak nije tako i da su to moguće prepreke u usvajanju novog gradiva pokušavaju osmisliti metode kojima bi to objasnili u što kraćem vremenu.
U prvom poglavlju diplomskog rada bit će opisan razvoj nule kroz povijest i probleme s kojima su se matematičari, astronomi i trgovci susretali već tada. Na taj način bit će istaknuta i važnost nule u svakodnevnom životu.

U drugom poglavlju bit će predstavljeni poželjni oblici učenja i savjeti kako ih i kada primijeniti u nastavi. Bit će nabrojane neke matematičke operacije i funkcije u kojima nula predstavlja problem. Za iste je navedeno u kojoj dobi obrazovanja se nejasnoća javlja i na koji se način može iskorijeniti.

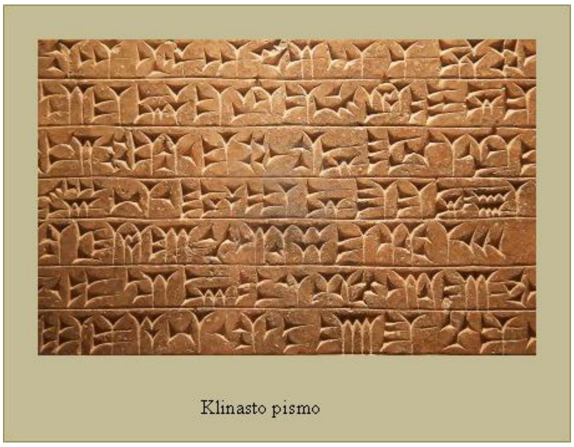
1 O razvoju nule

Oduvijek je bilo zamislivo da nešto ne postoji. Sinonimi za taj pojam bili su ništa, nula, ništica i bilo je lako objasniti što to znači. Međutim, potreba o uvođenju simbola za nulu u antičkom dobu nije postojala. Samim time i napredak matematike bio je ograničen. Egipćani, Babilonci, Grci, Rimljani koristili su simbole za nulu privremeno i po potrebi. Ni jedan se nije ustalio. I znanstvenici koji bi trebali na abakusu prikazati broj stotinu dva uzeli bi jednu kuglicu u redu sa stoticama, dvije u redu s jedinicama i ni jednu u redu s deseticama. Nisu pomišljali da bi trebali uvesti neki simbol koji bi govorio 'ništa u redu'.

Slika 2: Rimski abakus

Uđimo malo dublje u priču o razvoju broja nula. Teško je dati smislen i cjeloviti odgovor na pitanje tko je izmislio nulu. Na to i slična pitanja uvijek bi se dao površan odgovor tek toliko da umiri znatiželjne. Rijetko ćemo naići na objašnjenje temeljnog značenja broja nula koje bi uvelike pomoglo u razumijevanju potrebe za nulom. Bitno je naglasiti da postoje dvije, jednako važne upotrebe nule. Jedna je upotreba nule kao samog broja koji označava ništa, dok je druga ona za oznaku praznog mjesta u brojevnom sustavu čime pravi razliku između dva broja. Primjerice, razlika između brojeva 2106 i 216. Ako gledamo upotrebu nule koja označava ništa, razlika između ta dva broja ne postoji. Međutim, nula na mjestu desetica u prvom broju pravi itekako veliku razliku. U pozadini i jedne i druge, gore spomenute upotrebe, je ne tako lako objašnjena povijest broja nula. Lako bismo prihvatili da je netko samo izmislio i objasnio ideju nule i svi ostali koristili, ali nije bilo tako. U ranijoj povijesti brojevi su bili puno konkretniji pojmovi. Dogodio se veliki mentalni skok od onoga kada je broj pet označavao pet konja ili pet nečega pobrojenog i današnje apstraktne ideje broja pet. U antičkom dobu, kada bi se spominjalo koliko konja treba neki farmer kao odgovor se lako moglo čuti pet, ali ne i nula ili minus dvadeset i tri.

U Mezopotamiji, kolijevci jedne od najstarijih kultura, zapisivalo se klinastim pismom. Babilonci su simbole utiskivali rubom pisala u glinene pločice. Ti simboli imali su klinate oblike po čemu je pismo i dobilo naziv klinasto. Postoje mnoge očuvane pločice od 1700. godine prije Krista, pa se mogu čitati originalni tekstovi.

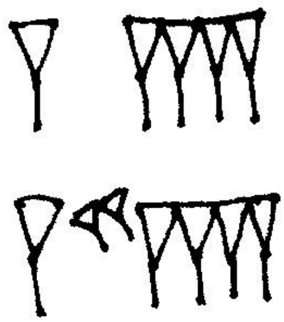


Slika 3: Klinasto pismo

Naravno, njihovo označavanje brojeva bilo je potpuno drugačije od današnjeg našeg. Baza brojevnog sustava bila je 60, a ne kao našeg 10. Kada bi prevodili njihove zapise ne bi postojala razlika između već spomenutih 2106 i 216 nego se iščitavala iz konteksta. Tek oko 400. godine prije Krista uvode simbol " kojim bi naglasili razliku između 216 i 21"6. Iako je njihov brojevni sustav postojao 1000 godina bez nule smatra se da su nulu koristili već između 6. i 3. stoljeća prije Krista. Oznaka za nulu nije bila jedinstvena, nego je postojalo više različitih znakova. Koristili su ih i kao znak za razdvajanje jer im je to bila prvotna ideja kako prikazati da je taj dio prazan. Tu oznaku bi koristili između dvije znamenke, dok ju na kraj broja nisu stavljali jer su smatrali da se iz konteksta može znati o kojem se broju radi. Moguće je s pločice iščitati broj 21"6, ali ne i 216". Iako se možda čini besmisleno zaključiti iz konteksta o kojem se broju radi i mi danas to radimo u govoru. Primjerice, ako bismo u Americi upitali nekoga za cijenu autobusne karte do susjednog mjesta i dobili odgovor tri i pedeset, znali bismo da se radi o 3 dolara i 50 centa. Ako bismo pak pitali za cijenu leta od Edinburgha do New Yorka i dobili isti odgovor, mogli bismo pomisliti da se radi o 3 stotine i 50 dolara.

U gradu Kishu, koji je danas središte južnog Iraka, pronađena je pločica iz 700. godine prije Krista na kojoj nula nije bila označena prazninom nego s tri kukice. Na drugim pločicama iz toga vremena nula je označena sa samo jednom kukicom. Bez obzira na različitost oznake, svima je zajedničko to što su svjesni potrebe za simbolom za nulu. Razumijevanje koncepta broja nula pokazali su i time što bi na

Abaku na pojedinom mjestu ostavili prazninu ukoliko je bilo potrebno. Primjerice, za broj 2304 bi na mjestu desetica ostavili prazninu.



Slika 4: Babilon, zapis brojeva

Neovisno o Babilonu, u Americi se razvijala majanska civilizacija na području južnog Meksika, Gvatemale i Belizea. Glavni nedostatak i prepreka u razvoju znanosti bio je nedostatak alata i oruđa kojima bi zapisali dotadašnje spoznaje. Od 665. godine nula je uvedena u njihov brojevni sustav. Također, imali su i oznaku za nulu i uvrstili ju u vrlo složene kalendare, ali ju u računu nisu koristili.

Poznavajući razvoj matematike u Grčkoj za očekivati je kako je nula vrlo brzo prihvaćena i korištena uz mnoge druge spoznaje koje su preuzeli od Babilonaca. To nije bilo tako. Kako su se grčki matematičari pretežno bavili geometrijom, potreba za simbolom za nulu nije se javljala. Bilo je besmisleno promatrati likove ili tijela koja ne postoje, tj. za čiju bi se prezentaciju trebala koristiti nula. Također, nije bilo potrebno imenovati dužine koje koriste u geometriji. Nasuprot geometriji, razvijala se astronomija u kojoj se ipak javila upotreba nule. Smatra se da su matematičari koji su se bavili astronomijom prvi upotrijebili simbol 0. Postoji objašnjenje da je taj simbol *omikron*, prvo slovo riječi ništa.

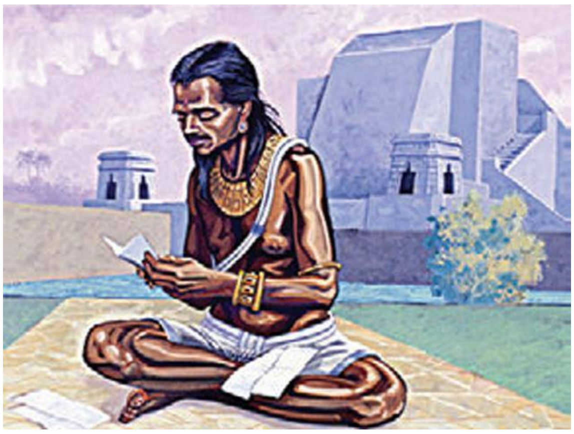
α	alfa	Α	ν	ni	Ν
β	beta	Β	ξ	ksi	Ξ
γ	gama	Γ	ο	omikron	Ο
δ	delta	Δ	π	pi	Π
ε	epsilon	Ε	ρ	ro	Ρ
ζ	zeta	Ζ	σ,ς	sigma	Σ
η	eta	Η	τ	tau	Τ
θ	teta	Θ	υ	ipsilon	Υ
ι	jota	Ι	φ	fi	Φ
κ	kapa	Κ	χ	hi	Χ
λ	lambda	Λ	ψ	psi	Ψ
μ	mi	Μ	ω	omega	Ω

Slika 5: Omikron, grčko slovo

Neugebauer to nije prihvatio kao objašnjenje jer se u njihovom brojevnom sustavu, baziranom na grčkom alfabetu, omikron već koristio kao prikaz broja 70. Jedno od mišljenja je i da simbol dolazi od riječi *obol* što je naziv za novčić koji ima vrlo malu, gotovo nikakvu vrijednost. Ako izuzmemo astronome, od matematičara je Ptolomej u svom *Almagestu* oko 130. godine pisao heksadecimalnim sustavom s praznim mjestom za nulu. Simbol za nulu koristio je između znamenaka i na kraju broja i tada se moglo slutiti da će nula postati ono što je danas. No, nije tako bilo. Koristili su ju značajni astronomi i svaki puta kada se činilo da postaje prihvaćena i u širem krugu, sve bi utihnulo i opet bi izašla iz upotrebe. Ta ideja o nuli nastavila se tek u indijskoj matematici.

Istočno se paralelno ravijao sustav koji je, preko Arapa, stigao u Europu, te je prihvaćen i danas. Nepravedno bi bilo reći da ništa ne duguju Grcima. Čak postoji i pisani zahtjev u kojemu indijski matematičar Mukherjee smatra da se otkriće nule treba pripisati baš Indijcima. Govorio je da su razumjeli matematički koncept nule i da je nula u Indiji u duhovnom obliku postojala još prije 17000 godina. U Indiji se brojeve zamišljalo kao apstraktne tvorevine, a ne samo kao refleksije fizičke i geometrijske stvarnosti. Prvi su spoznali i postojanje negativnih brojeva koji se nalaze s druge strane nule. Time su potvrdili važnost nule jer su ju smatrali centrom ili razdjelnicom pozitivnih i negativnih brojeva.
Postojali su dokazi koji ukazuju da nula u indijskoj matematici postoji od 200. godine, ali su odbačeni jer su krivotvorine. Prihvaćeno je otkriće iz 650. godine jer je u vremenu prije toga Aryabhata osmislio brojevni sustav. U njemu nula nije postojala, ali je postojala riječ *kha* koja je kasnije postala naziv za nulu. Također, postoje zapisi u kojima se za nulu koristila točka. Zanimljivo je to što su točku koristili i za označavanje nepoznanice x. Sve to bunilo je i matematičare i trgovce, pa su se odlučili koristiti zapis kakav imamo i danas. Prvi takav zapis nule datira iz 876. godine. Pronađen je natpis na kamenu koji se odnosio na grad Gwalior, smješten 400 km južno od Delhija. Na kamenu je zapisano kako je na površini od 187 sa 200 metara zasađena hosta, biljka koja će dnevno davati 50 vjenčića za uređenje lokalne crkve. Brojevi 270 i 50 zapisani su kao i danas, ali je nula malo podignuta gore i nešto manja u odnosu na ostale brojeve. Tek tada nulu poimaju kao broj. Do tada su brojevi bili pojmovi kojima bi iskazali koliko nečega imamo. Brojevi su postali nešto apstraktno i ta apstraktnost omogućila je da i nulu i negativne vrijednosti uvrstimo u brojeve bez obzira što njima nismo govorili o nekoj količini.

Novi problem nastao je oko toga kako će se ti brojevi odnositi u operacijama kao što su zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Odgovor na ta pitanja pokušalo je dati nekoliko matematičara. Brahmagupta je u 7. stoljeću pokušao dati pravila u aritmetici o nuli i negativnim brojevima.



Slika 6: Brahmagupta, poznati indijski matematičar

On je pozitivne brojeve nazivao bogatstvom, a negativne dugom. Utvrdio je postojanje nule tako što je ukazao na potrebu za brojem kojim bi prikazali rezultat pri oduzimanju nekoga broja od sebe samoga. Dao je sljedeće pravilo za zbrajanje u kojemu spominje i nulu: *Zbroj nule i negativnog broja je negativan broj, zbroj nule i pozitivnog broja je pozitivan, zbroj nule i nule je nula.* Oduzimanje je malo teže: *Negativan broj oduzet od nule je pozitivan, pozitivan broj oduzet od nule je negativan, nula oduzeta od pozitivnog broja je pozitivan, nula oduzeta od nule je nula.* Tada je rekao da je svaki broj pomnožen s nulom nula, ali je pogriješio kod dijeljenja: *Pozitivan ili negativan broj podijeljen s nulom je razlomak koji u nazivniku ima nulu. Nula podijeljena s negativnim ili pozitivnim brojem je opet nula ili razlomak koji u brojniku ima nulu. Nula podijeljena s nulom je nula.* Govorio je malo o tvrdnji da je n kroz nula i dalje nula jer ni sam nije mogao to pokazati. Bez obzira na krivi zaključak o dijeljenju dao je veliki doprinos definiranjem ostalih spomenutih pravila.

Skoro 200 godina poslije, Mahavira je objavio *Ganita Sara Samgraha* kao dopunu Brahmaguptinom djelu gdje je točno rekao da broj ostaje isti ako mu se oduzme nula i da je broj pomnožen s nulom nula. I on je pogriješio pokušavajući ispraviti Brahmaguptine tvrdnje o dijeljenju. Tvrdio je da broj ostaje isti kad ga se podijeli s nulom.

Slika 7: Bhaskara

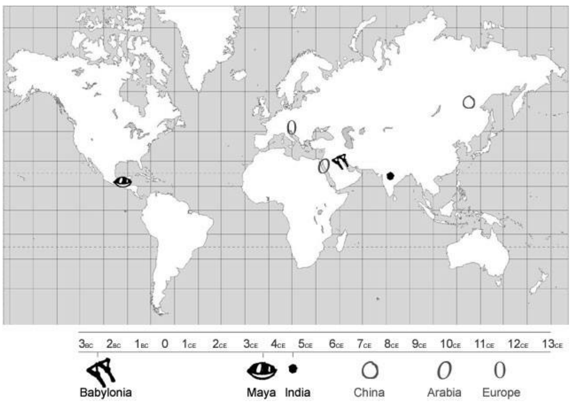
Nakon njega, točnije 500 godina nakon Brahmagupte pisao je i Bhaskara koji se i sam borio s objašnjenjem dijeljenja s nulom. Rekao je da je rezultat dijeljenja s nulom razlomak koji u nazivniku ima nulu. Taj se razlomak naziva beskonačnost. Što god radili u tom rezultatu nema promjena, kao što ni u beskrajnom i vječnom Bogu nema promjena kada neka vrsta odumire ili nova dolazi. Na taj način pokušao je opisati da je $\frac{n}{0} = \infty$. Na prvu se to činilo točno. No, tada bi značilo da nula u množenju s beskonačnosti daje baš taj broj koji smo pokušali podijeliti, a to nije uvijek isti broj. Indijski matematičari nisu htjeli prihvatiti da se s nulom ne može dijeliti. Osim problema oko dijeljenja s nulom, Bhaskara je točno rekao da je nula na kvadrat nula i da je korijen iz nule nula.

Slika 8: Al-Khwarizmi

Napredak indijskih prenesen je i islamskim i arapskim matematičarima na Zapad. Al-khwarizmi je napisao *Al'Khwarizmi on the Hindu Art of Reckoning* gdje opisuje indijski brojevni sustav brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 0. Osim njega, Ibn Ezra u 12. stoljeću piše tri rasprave u kojima pokušava prinijeti indijske simbole i ideje o razlomcima na učene ljude u Europi. U svojim radovima Ezra koristi nulu koju naziva galgal (naziv za kotač). Malo kasnije u 12. stoljeću al-Samawal je napisao: *Ako oduzmemo pozitivan broj od nule dobijemo isti, samo negativan broj. Ako oduzmemo negativan broj od nule dobijemo isti, samo pozitvan broj.*

Osim Zapada, indijske ideje širile su se i prema Istoku. Kineski matematičar Ch'in Chiu-Shao napisao je *Matematičku raspravu u devet svezaka*, 1247. godine, u kojoj koristi simbol 0 za nulu. Nešto kasnije, 1303. godine, Zhu Shijie napisao je *Dragocjeno ogledalo četiri elementa* gdje ponovno koristi 0 kao simbol za nulu.

Najvažnija poveznica između arapskih i europskih matematičara bio je talijanski matematičar Fibonacci. Njegovi tutori Arapi prenijeli su mu indijske matematičke spoznaje. U Liber Abacci opisao je Europljanima indijske brojeve od 1 do 9 gdje je uključio i simbol za nulu, no uporaba toga nije zaživjela. Otpor koji mu je pružen pokazao je i sam time što je odvojio brojeve od 1 do 9 i simbol, a ne broj, nulu. Iako je takvo uvođenje brojeva bilo od velike važnosti, vidljivo je bilo da za nulu nije pokazivao toliki interes. U međuvremenu je Cardan riješio kubnu jednadžbu, ali bez nule. Tek od 1600. nula ulazi u širu upotrebu, ali i dalje uz otpor.



Slika 9: Svijet, razvoj nule

2 Problem s nulom

Često se postavlja pitanje je li nula pozitivan ili negativan broj. Također, je li paran ili neparan broj. Osim toga, pitanje je na koji to način nula olakšava računske operacije, tj. kako se s nulom vrši zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Probleme zadaje i pojava nule u potenciranju. S istim nedoumicama susreću se učenici već u osnovnoj školi.

Broj nula se, prema Nastavnom planu i programu, uvodi u nastavu matematike u prvom razredu osnovne škole, odmah nakon uvođenja prvih pet prirodnih brojeva. Tada učenici znaju zbrajati i oduzimati, te usporediti te brojeve, pa to mogu primijeniti i na nulu. Sve ima smisla pri definiciji zbrajanja nekog broja s nulom ili oduzimanja nule od nekog broja. Tada ih se još uči da se veći broj ne može oduzeti od manjeg. Prvi problemi javljaju se već u drugom razredu kada se uvode operacije množenja i dijeljenja. I kasnije, u višim razredima, nesigurnost i dalje postoji. Kako bi se to spriječilo pred nastavnicima je velik izazov u pronalaženju metoda kojima će što bolje poučiti učenike.

2.1 Učenje kroz igru

Igra je jedna od osnovnih potreba svakoga djeteta. Pitamo se ima li igra pozitivne posljedice na djetetov emocionalni, intelektualni, socijalni razvoj? Može li joj svrha biti poučavanje djeteta?

Igra kod djeteta razvija maštu, kreativnost, sposobnost rješavanje problema i socijalne vještine. Igrajući se ono se razvija, istražuje, otkriva, uči komunicirati, kreće se i počinje razumijevati svijet oko sebe. Od velike je važnosti dobar odabir predmeta koji će dijete koristiti za igru. U najranijoj dobi ta igračka, a kasnije sama igra određuje način na koji će dijete stjecati znanja i vještine. Pitamo se kada je igra edukacijska? U kojem trenutku ona postaje ozbiljna?

Slika 10: Predmeti iz Montessori škole

Igra je zadovoljstvo kada je ona izbor, a ne obaveza igrača. Tada je dobro prihvaćena i nema za posljedicu razdražljivost i ljutnju. Cilj je organizatora igre postići da igra bude rado prihvaćena čak i kada je nametnuta djetetu u svrhu razvoja. U takvim igrama potreban je angažman svakog sudionika. Tim sudjelovanjem postižu se trajniji utisci i dugoročnije pamćenje.

Poznati ruski psiholog Vigotsky naglašava da djeca mogu unaprijediti svoja razumijevanja matematičkih ideja ako ih istražuju i otkrivaju kroz igru. Smatra da tada igra nije dangubljenje i neodgovorno okupiranje djeteta. Tvrdi da ako je vođena u dobrom smjeru može biti odlična priprema za kasniju efikasnost i usvajanje kompetencija kod djece. Djeca koja nemaju mogućnosti i pristup konstruktivnim igrama su kasnije zakinuta i ograničena u maštanju i njihovo stečene iskustvo znatno je osiromašeno. Objašnjavajući takav pristup igri daje veliku pohvalu zamislima Marie Montessori. U takvoj školi igračke su zapravo edukacijski materijal, odnosno sredstvo čijom uporabom djeca dolaze do brojnih zaključaka i znanja, a učionice su prostorije unutar kojih dijete može ostvariti igru u svrhu učenja. Neki segmenti iz Montessori škola mogu se primijeniti u nastavi drugih škola ovisno o vremenu koje nastavnicima stoji na raspolaganju za određenu nastavnu temu.

U pripremi nastave nastavnica pravi plan onoga što želi postići s učenicima. U tome želi što bolje povezati sadržaj nastavne jedinice i metode kojima će doći do cilja. Razlikujemo planiranje jedinice i planiranje svake pojedine teme. U planu nastavne jedinice nabrojana su posebna područja koja će pridonijeti razvoju određenih vještina, navika, informacija i stavova, dok je planiranje nastavne teme detaljniji i opširniji plan konkretnog sata. U takvom planiranju nastavnici pokušavaju navesti učenike da povezuju novi s već naučenim sadržajem. Primjerice, plan za poučavanje brojeva od 0 do 9 može izgledati ovako:

Odjeljenje: Prvi razred
Tema: Brojevi od 0 do 9
Nastavne jedinice:
Nastavna jedinica 1: Pisanje brojeva 1 i 2
Nastavna jedinica 2: Pisanje brojeva 3 i 4
Nastavna jedinica 3: Pisanje brojeva 5 i 6
Nastavna jedinica 4: Pisanje brojeva 7 i 8
Nastavna jedinica 5: Pisanje brojeva 9 i 0

Plan nastavne teme je samo mali ogranak u planiranju cijele nastavne jedinice. U njemu se razrade sve stavke iz nastavne jedinice u konkretne aktivnosti karakteristične za određeni stupanj znanja. Ako pogledamo nastavnu temu *Pisanje brojeva* 0 *i* 9 , podrazumijeva se prethodno stečeno znanje pisanja svih brojeva od 1 do 8. Važno je nadograđivati i povezivati jedno s drugim. Osim toga, ako su aktivnosti kojima se dolazi do željenih ciljeva u tom danu takve da uspiju zainteresirati učenike, oni će lakše prihvatiti temu i sami imati potrebu otkrivati novo. Postoji puno načina na koje se to može postići, a ne zahtijevaju dodatne materijale i pripreme. Neki od njih su:

Navođenje postavljanjem pitanja. Kako bi izbjegla uobičajeno pisanje naslova na ploču i suhoparno objašnjavanje onoga što je tema sata, nastavnica može postaviti pitanje "Što smo radili prošli puta?" Neka je to bilo dijeljenje brojeva i neka sada pokušava dijeliti i s nulom. Nakon što je dobila odgovor zamoli nekoga da joj postupak ponovi na danom primjeru. Nastavlja s pitanjima poput "Što mislite što bi se dogodilo da na isti način podijelimo broj s nulom? Možemo li nešto podijeliti na nula dijelova? Na koliko najmanje dijelova nešto možemo podijeliti?". Na taj način dolazi do zaključka koji nije morala sama izreći kao pravilo, nego su učenici na svakodnevnim primjerima uvidjeli pravilnost. Tada ostatak sata lako može iskoristiti za vježbanje dijeljenja brojeva i među zadacima ostaviti i onaj u kojemu treba podijeliti broj s nulom. Očekuje se primjena zaključka do kojega su došli postavljanjem pitanja. Ako učenici odgovore da se s nulom ne dijeli, taj dio gradiva smatra se usvojenim.

Slika 11: Aktivnost u svrhu učenja

Pričanje kratke pričice. Pričice mogu biti osmišljene kao anegdote na kraju kojih je pouka vezana za temu koja se obrađuje. Ako sadržaj sata i nije zanimljiv učenicima ili je primjećeno da ga nerado usvajaju može ga se upotpuniti lako pamtljivom pričicom koja će u trenutku kada se trebaju sjetiti tog dijela gradiva možda dominirati nad gradivom, ali ipak usmjeriti na ono zbog čega je ispričana. Priča može biti formulirana i kao razgovor osobe A i osobe B. Nakon razgovora nastavnica zahtijeva od učenika da odluče tko je u razgovoru bio u pravu. Na taj način učenici su aktivni slušatelji koji nakon poslušane priče ulaze u raspravu, iznose stavove i opravdavaju ih argumentima. Nastavnica je tu moderator koji će na kraju rasprave reći tko je bio u pravu i ako je primjetila da je neki od argumenata ostao nejasan, objasniti ga.

Korištenje predmeta skrivenog u kutiji. Početak sata može biti otkrivanje nevidljivog predmeta u kutiji. Nastavnica zamoli nekoga od učenika da bez gledanja u kutiju opisuje predmet koji dodiruje. Na taj način dolaze do svojstava toga predmeta koja mogu zapisivati na ploču. Kako opipom učenici većinom opisuju izgled, zaobljenost, tvrdoću, lomljivost i ostale karakteristike predmeta koje za brojeve i nisu bitna, aktivnost se može prilagoditi u svrhu otkrivanja bitnih svojstava. Primjerice, u kutiji se može naći broj nula izrađen od kartona. Kada učenik koji sudjeluje u otkrivanju predmeta obznani da je u kutiji broj nula nastavnica pitanjima dolazi do svojstava koja ih zanimaju, a nisu ih mogli otkriti dodirom. Ako su na ploču zapisali i opise poput okruglo, lomljivo i ostala koja za temu nisu bitna mogu ih samo prekrižiti i nastaviti s onima koja su im potrebna.

Uvođenje neobičnog objekta. Pri uvođenju apstraktnih pojmova treba misliti o tome da aktivnost koja se odabire ne smije biti prezahtjevna i kompleksna. To učenicima odvlači pažnju i postaju usmjereni na slijed i njihove uloge u aktivnosti.

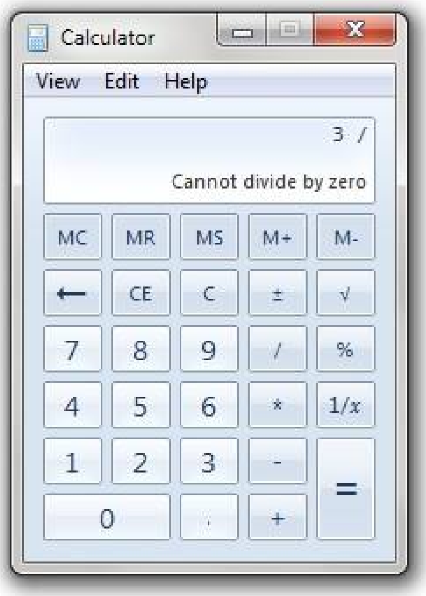
Slika 12: Pojam broja kroz igru

Primjerice, kod uvođenja pojma broja primjerena je metoda u kojoj nastavnica govori naziv pojedinog broja, a učenici pokazuju odgovarajući broj prstiju. Mogu koristiti i neku pjesmicu ili brojalicu te pri izvođenju iste za svaki spomenuti broj podići karticu na kojoj piše oznaka toga broja. Tako povezuju brojeve od 1 do 9 s njihovim nazivom i zapisom.
Kada je to usvojeno slijedi koncept broja nula. U učionici se nalaze kutije popunjene različitim brojem predmeta i jedna prazna. Učenici ih obilaze i zapisuju u bilježnice koliko u kojoj ima predmeta. Zastaju kod prazne kutije jer nailaze na

nešto nepoznato. Tu nastavnica uvodi naziv nula i objašnjava da je to odgovarajući broj za praznu kutiju. Kutije može iskoristiti kako bi uvela svojstva zbrajanja i oduzimanja nule. Pitanjima poput "Što se dogodi s brojem predmeta ako kutiji 3 dodamo kutiju 0? Što se dogodi s brojem predmeta ako kutiji 0 dodamo kutiju 6? Što se dogodi s brojem predmeta ako kutiji 5 oduzmemo broj predmeta kutije 0?"
Nakon toga lakše razumiju zapise
$a + 0 = a$
$0 + a = a$
$a - 0 = a$
$0 - a = -a$
koje zapišu u bilježnicu. Nakon uvedenog pojma i oznake, zapisanih svojstava vezanih za zbrajanje i oduzimanje s nulom može uslijediti igra pomoću koje će već naučenim brojevima dodati i nulu. Svi sjednu u krug oko nastavnice. Ona kaže neki broj, a učenici trebaju pljesnuti toliko puta. Cilj je, osim da plješću ispravno, da kada izgovori nula nitko ne pljesne. Jedna od aktivnosti kojom će se ostvariti odmak od toga da brojeve povezuju samo s prstima i oznakama može biti sljedeća. Svaki učenik dobije isprintane krugove u kojima su sličice različitih geometrijskih likova. Jedan krug je przan. Zadatak je poredati krugove od onog koji sadrži najmanji broj likova do onog s najvećim. U toj aktivnosti broje likove, zapažaju odnose među brojevima, prazan krug povezuju s nulom. Ako su aktivnosti uspješno izvedene smatra se da su brojevi od 0 do 9 usvojeni.

2.2 Dijeljenje s nulom

Od same definiranosti teme u Nastavnom planu i programu uočene su nejasnoće. Pod temom 'Brojevi 1 i 0 u dijeljenju' kao obrazovna postignuća navedeno je da učenik treba razumjeti da 0 podijeljena brojem različitim od 0 daje 0 i da se 0 ne dijeli. Sva četiri puta, koliko je puta nula spomenuta, napisana je simbolom. Već to stvara problem obzirom da je svaki puta u drugom padežu i trebala bi se čitati drugačije.
Ukoliko pretpostavimo da se učenici s time ne susreću direktno, nego im nastavnici ispričaju u odgovarajućim padežima, sve bi im trebalo biti jasno. Unatoč tome, uočeno je kako redovno broj podijele s nulom i kao rezultat ponude nulu. Na to nastavnici odgovore da se s nulom ne dijeli i to nekolicina učenika zapamti kao nešto što trebaju prihvatiti bez objašnjenja. Potrebno je prezentirati objašnjenje koje će biti logično i lako shvatljivo. To se može učiniti na neki od sljedećih načina.

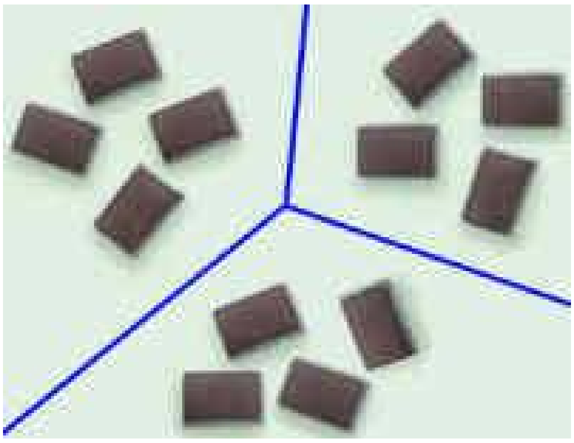


Slika 13: S nulom se ne dijeli

Primjer 1. Možemo krenuti od množenja brojeva 5 i 4 koje prikažemo kao zbrajanje. Broj 5 dodajemo sam sebi 4 puta. Kako smo množenje objasnili pomoću zbrajanja, analogno prikažemo dijeljenje pomoću oduzimanja. Broj 20 dijelimo brojem 4. To bi značilo da od broja 20 oduzimamo 4 sve dok ne dođemo do nule. Rješenje je broj koliko smo puta oduzeli 4. Poželimo li broj 20 podijeliti s nulom, morali bismo brojati koliko puta moramo oduzeti nulu od broja 20 da dođemo do nule. Neki bi učenici zaključili da to mogu raditi beskonačno mnogo puta, te da je rješenje beskonačno. Nakon takvog zaključka nastavnici bi mogli dati novi primjer dijeljenja novog broja s nulom. Ako bi to bio broj 5, došlo bi se do novog zaključka da je rezultat opet beskonačno. Nakon samo dva primjera mogli bismo izjednačiti dva razlomka $\frac{20}{0}$ i $\frac{5}{0}$ jer su za oba dobili jednako rješenje. Iz takve jednakosti moralo bi vrijediti da je i 20 jednako 5, što, tada već dobro znaju, nije.
Kako bi to zapamtili mogu pokušati podijeliti iste brojeve pomoću kalkulatora. Na ekranu će pisati ERROR. To im se može objasniti kao da je kalkulator isto pokušao brojati koliko je puta oduzimao nulu od broja 20, ali nije došao do rješenja jer ono ne postoji. Nedoumica im se može vratiti krajem srednje škole kada nauče limese. U obradi toga gradiva koristili su to da kada se u izraz $\frac{broj}{x}$ umjesto x uvrsti nula rješenje je beskonačnost. Mnogi od njih zaboravljaju da je ispred toga izraza pisala oznaka za limes. Kako bi limese odvojili od standardne operacije dijeljenja može im se objasniti da kada računamo limes u kojemu x teži u nulu samo se približavamo nuli s lijeve ili desne strane, ali ju ne dodirujemo. Dakle, mi uopće ne računamo s nulom. Ako prikažemo u koordinatnom sustavu približavanje nuli s desne strane,

vrijednosti izraza $\frac{1}{x}$ sve više rastu prema pozitivnoj beskonačnosti jer broj 1 dijelimo sa sve manjim brojevima, ali ne i s nulom.

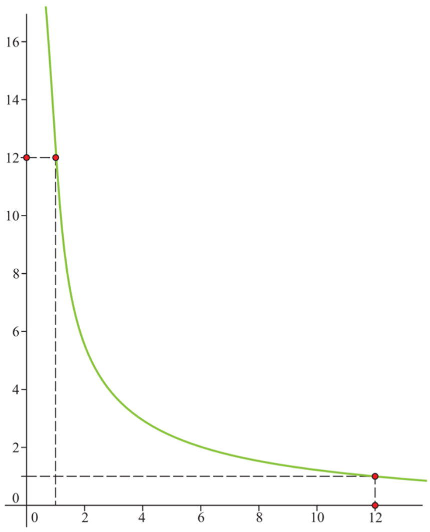
Primjer 2. Imamo 12 čokoladica koje želimo podijeliti trima osobama. Kako ćemo podijeliti čokoladice?



Slika 14: Dijeljenje 12 čokoladica na 3 osobe

Nakon što su učenici usvojili ovaj primjer i shvatili dijeljenje na primjeru iz svakodnevnog života, može im se postaviti sljedeće pitanje. Što će se dogoditi odlučimo li čokoladice podijeliti na nula osoba? Želi se učenike navesti na zaključak da pitanje nema smisla. Krajnji cilj bio bi zaključak da se s nulom ne može dijeliti.

Kako ne bi ostalo nejasno zašto pitanje nema smisla, mogli bi učenicima prezentirati sto matematičari kažu o dijeljenju nulom. Ukoliko nisu upoznati s povijesnim razvojem broja nule mogu im istaknuti indijskog matematičara Bhaskaru koji je još u 12. stoljeću govorio da se s nulom ne može dijeliti. Smatrao je da je tako samo u aritmetici. Bio je uvjeren da ako neki opći broj a podijelimo s nulom rješenje postoji i simbol za njega je beskonačnost. To bi u ovom trenutku uvelike olakšalo dijeljenje čokoladica na nula osoba. Broj 12 dijelili bi uzastopno tako da se svakim novim dijeljenjem djelitelj smanjuje. Rješenja bi u svakom koraku rasla, a mogli bi ih predočiti i koordinatnim sustavom s točkama $(n, 12 : n)$.



Slika 15: Skup točaka $(n, 12 : n)$

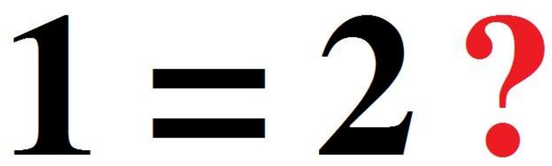
Iz grafa koji bi dobili mogli bi zaključiti da ako bi se još više približili nuli, vrijednost bi bila vrlo visoko. Odnosno, ako bi podijelili s nulom, graf bi bio ”u beskonačnosti”. Tada bi nastavnici trebali podsjetiti da su beskonačnost spominjali kada su govorili da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo ili da na pravcu ima beskonačno mnogo točaka, ali da beskonačno nije broj u istom smislu kao i ostali brojevi. Stoga, beskonačno nije rješenje dijeljenja nekog broja nulom. Odnosno, ne možemo dijeliti nulom.

Primjer 3. Pitamo se koliko je 12 podijeljeno s 0. Znamo da odgovor kada ga pomnožimo s djeliteljem treba dati 12. Osim toga, znamo da koji god broj pomnožili s 0 nikad nećemo dobiti 12. Zaključak bi opet bio da se nulom ne dijeli.

Poželjno je znatiželjnim učenicima objasniti i primjer dijeljenja nule s nulom. To je primjer u kojemu bi, ako bi proveli postupak množenja unatrag kao provjeru, dokazali da se kao rješenje može prihvatiti nula. Kako bi ih razuvjerili nastavnici im mogu pokazati da se istom provjerom može pokazati da je nula podijeljena s nulom onda i bilo koji drugi broj jer on u množenju unatrag opet daje nulu. Za osnovnoškolski uzrast dovoljno je reći da je nula podijeljena s nulom neodređeni oblik.

Kako bi to zapamtili može im se predložiti izrada zanimljivih konceptualnih mapa, prezentacija, postera i plakata koji će im biti dostupni i vidljivi u prostorijama u kojima uče. Također, mogu u paru objasniti jedni drugima na primjeru jer tek kada sami prepričaju i objasne situaciju iz svakodnevnog života, bit će im jasno. Za nešto starije uzraste može se koristiti objašnjenje prikazano u sljedećem primjeru.

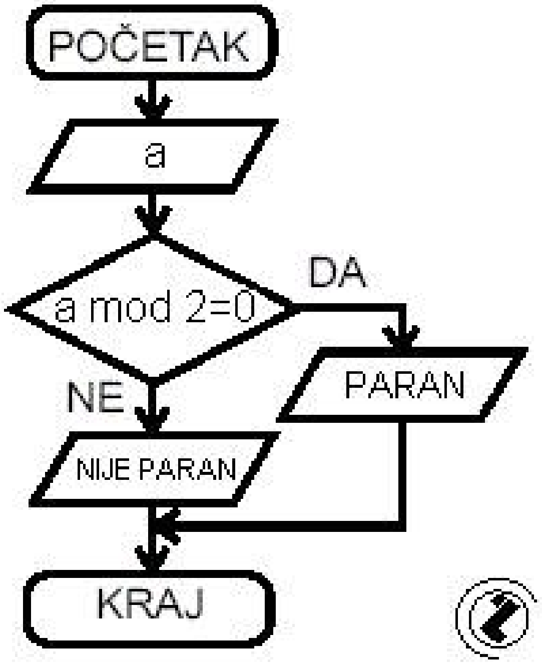
Primjer 4. Znamo da je $a \cdot a - a \cdot a = a^2 - a^2$. Ako s lijeve strane jednakosti izlučimo a, u zagradi će ostati $(a - a)$. Desnu stranu jednakosti možemo raspisati formulom za razliku kvadrata i dobiti dvije zagrade $(a - a)(a + a)$. Podijelimo li jednakost sa zagradom $(a-a)$, dobivamo s lijeve strane a, a s desne $2 \cdot a$. Podijelimo li sada jednakost s a, slijedi da je $1 = 2$ što nije istina. Odnosno, s $(a - a)$, tj. s nulom, ne možemo dijeliti.



Slika 16: Kontradikcija pri pokušaju dijeljenja s nulom

2.3 Parnost nule

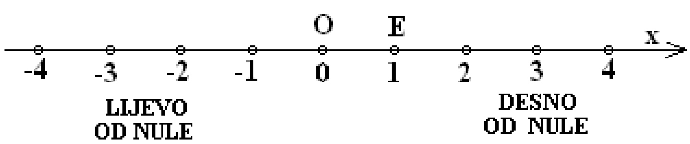
U petom razredu učenici se susretnu s pojmom parnosti. Razumljivo je iz definicije koji su brojevi parni, a koji neparni, te ih lako razvrstaju. Ukoliko ih se pita je li nula paran ili neparan broj mnogi zastanu. Kako bi pripremili učenike nastavnici mogu zahtijevati da znaju primijeniti definicije za parnost u provjeri za bilo koji drugi broj. Primjerice, definicija s kojom se susretnu u petom razredu proziva prirodni broj parnim ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8. Kada znaju primijeniti definiciju na broj 16 i zaključiti da je paran jer mu je posljednja znamenka 6, lakše će postupak ponoviti za nulu. Posljednja, i jedina, joj je znamenka 0, a ona pripada skupu iz definicije, te slijedi zaključak da je nula paran broj.
Olakšati im mogu i ako im objasne karakterizaciju koja kaže da je broj paran ako je djeljiv s dva. Može ih se navesti da podijele nulu s dva. Ako bi im to bila prepreka, pitanje se može preoblikovati da pronađu broj koji pomnožen s dva daje nulu. Tada bi uvidjeli da je to baš nula i shvatili da je definicija zadovoljena, tj. da je nula paran broj.



Slika 17: Algoritam za provjeru parnosti broja

2.4 Pozitivnost i negativnost nule

Još jedno od zanimljivih svojstava nule je njena i pozitivnost i negativnost ili ni pozitivnost ni negativnost. Nakon uvedenog skupa cijelih brojeva prirodno je pitanje učenika pripada li nula pozitivnim ili negativnim brojevima. Puno će puta čuti priču o pozitivnoj nuli primjerice na bankovnim računima ili na vremenskim prognozama. To su samo neki od primjera gdje se nulu smatra pozitivnim brojem. Suprotno tome, kako bi shvatili ni pozitivnost ni negativnost mogli bi crtati brojevni pravac. Takav prikaz brojeva bi im trajnije ostao u pamćenju nakon što bi nulu smjestili točno u sredinu, kao razdjelnicu pozitivnih i negativnih brojeva.



Slika 18: Nula kao razdjelnica pozitivnih i negativnih brojeva

2.5 Faktorijel broja nula

Faktorijel je funkcija koju učenici rado prihvate jer zapamte da samo trebaju pomnožiti sve prirodne pozitivne brojeve manje ili jednake broju čiji faktorijel računaju. Taj postupak lako im je ponavljati sve dok ne dođu do broja nula. U obradi toga gradiva stoji definicija $0! = 1$. Nakon nekog vremena, ako ne koriste faktorijele, zaborave na to i zaključuju da je to zapravo nula. Ako i oko toga povedemo s učenicima raspravu postići ćemo da to zapamte i znaju si logično objasniti. Možemo im objasniti da se faktorijeli pretežno koriste u kombinatorici. Kada želimo odrediti na koliko načina možemo izvući dvije od pet kuglica posegnut ćemo za formulom $\frac{n!}{(n-k)!}$. Za n bismo uvrstili broj 5, a za k broj 2 i dobili rješenje. Ako bismo htjeli saznati na koliko načina možemo izvući pet od pet kuglica koristili bismo istu formulu. Nakon uvrštavanja bismo dobili $\frac{5!}{0!}$. Ukoliko smo mišljenja da je $0! = 0$ u nazivniku bi nam se pojavila nula. Kako smo već naučili da s nulom ne dijelimo vidimo da nešto ne odgovara. Već kod samog pitanja na koliko načina možemo izvući kuglice očekujemo konačan broj, pa nas dobivena nula u nazivniku upućuje da nešto radimo krivo. Nastavnica tu može objasniti da su matematičari iz istog razloga definirali $0! = 1$ i da od sada to zapamte.
Drugi način za one koji i dalje ne pamte da s nulom ne mogu dijeliti i ne bi primjetili problem s nulom u nazivniku postoji zapis koji mogu lakše zapamtiti. Pokažimo im uočenu pravilnost zapisa.
$5! = \frac{6!}{6}$
$4! = \frac{5!}{5}$
$3! = \frac{4!}{4}$
$2! = \frac{3!}{3}$
$1! = \frac{2!}{2}$
Ako nastavimo analogno slijedi da je $0! = \frac{1!}{1}$, što je u konačnici 1. Tvrdnja je točna i samo jednom viđena ostaje u pamćenju duže.

2.6 Kvadratni broj

U osmom razredu obrađuje se gradivo cjeline Kvadriranje, korjenovanje i potenciranje. Nakon nekoliko primjera učenici kvadriranje poimaju kao postupak u kojemu broj pomnože sam sa sobom. Tako kvadrirajući broj dva množe $2 \cdot 2$ i kao rezultat dobiju kvadrat broja dva - broj četiri. Pri tome izgovaraju da je to "dva na kvadrat" i zapisuju 2^2.
U nekim udžbenicima postoje kratke napomene sa strane ili pri dnu stranice što je to kvadratni broj. Često su to ilustracije gdje brojevi govore u oblačićima. Primjerice broj devet govori da je on kvadratni broj, a broj pet objašnjava da on nije jer ne postoji broj koji pomnožen sam sa sobom daje pet. Takve dodatke učenici ne percipiraju kao dio gradiva. Samo ih pogledaju, ali zanemare jer o tome nastavnica nije

govorila. Ukoliko je nastavnica uputila učenike da pročitaju dodatak o kvadratnim brojevima kao provjeru shvaćanja ilustracije može tražiti da joj nabroje još neke kvadratne brojeve. Oni će kao odgovor reći brojeve 4, 16, 25,... Za svaki odgovor nastavnica može tražiti objašnjenje. Ono bi, u skladu s ilustracijom iz udžbenika, trebalo glasiti "Postoji broj koji pomnožen sam sa sobom daje 4, 16, 25,..." Tada nastavnica zaključuje da su učenici dobro zaključili o kvadratnim brojevima iz onoga što im je prikazano u udžbeniku, ali ih navodi na zaključak o nuli. Zanima ju je li i nula kvadratni broj. Učenici zastaju i razmišljaju, te donose zaključak da nula je kvadratni broj. Kao i za prethodno navedene brojeve navode da postoji broj nula koji pomnožen sam sa sobom daje nulu koju trenutno promatraju. Nastavnica prihvati odgovor i zamoli ih da sada kvadratne brojeve zamišljaju kao kvadrate čija je duljina stranice broj koji pomnožen sam sa sobom daje onaj koji promatraju. Kvadratni broj četiri trebaju zamišljati kao kvadrat duljine stranice dva. Nakon što tako predstave i brojeve 16 i 25 koje su već spominjali, ponovno ih pita je li nula kvadratni broj. Učenik odgovara "Nula je kvadratni broj, ali su u tome kvadratu stranice duljine nula." Drugi učenik dodaje "To onda nije kvadrat. To nije ništa." Takav trenutak nastavnica smatra trenutkom u kojemu su učenici sami spoznali ono što je ona mogla samo reći i očekivati da znaju i razumiju. Zadovoljna što ih je potakla na razmišljanje navodi ih da sada zaključe još da ilustraciju iz udžbenika primijenjuju samo na prirodne brojeve. Zajedno se prisjete da nula takav nije, pa, prema tome, nije ni kvadratni broj.

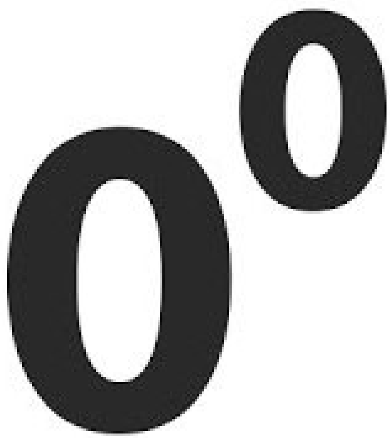
2.7 Nula u potenciranju

S potenciranjem se učenici susretnu u osmom razredu. Ako potenciju rasčlane na bazu i eksponent potenciranje si mogu predočiti kao množenje baze same sobom onoliko puta koliko je upisano u eksponentu. Tada shvaćaju da iza potencije 2^4 stoji raspis $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. S ostalim pravilima potenciranja kao što su potenciranje potencije, pravilo za negativni eksponent ili racionalni broj u eksponentu susretnu se nešto kasnije, te ih detaljno obrade u prvom razredu srednje škole. Pitamo se kako se nula ponaša u potenciranju.

Nula kao baza. U osmom razredu učenici već znaju da svaki broj pomnožen s nulom daje nulu, pa tako i sama nula. Bez obzira koliko puta množimo nulu s nulom rezultat se ne mijenja i iznosi nula. Ako je nula baza neke potencije kojoj je eksponent bilo koji pozitivan broj rezultat potenciranja je nula. Učenici si to mogu raspisati kao $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0$ onoliko puta koliko je zapisano u eksponentu. Već nakon prve napisane nule shvaćaju da nema potrebe raspisivati jer prva nula što god množila rezultat će biti nula.

Nula kao eksponent. Ako se nula pojavi u eksponentu, a baza je neki broj različit od nule učenici često razmišljaju je li to 0 ili 1. Kako bi to znali i bez formula i podsjetnika nastavnica im može raspisati 2^0 na sljedeći način.

Znamo da je $\dfrac{2}{2} = 1$.
To možemo zapisati i kao $\frac{2^1}{2^1} = 1$.
Iz pravila za dijeljenje potencija slijedi $2^{1-1} = 1$. Odnosno, $2^0 = 1$.
Takav raspis možemo primijeniti na bilo koji nenul broj u bazi. Slijedit će da je $x^0 = 1$ za svaki x različit od nule.
Nula u bazi i eksponentu. Nakon što su učenici dobro usvojili slučajeve kada se nula nalazi samo u bazi ili samo u eksponentu možemo očekivati da će primijeniti sličnu logiku i na potenciju 0^0. Pokušaju li objasniti pomoću prvog slučaja kada je nula u eksponentu neće reći ništa netočno. Isto vrijedi i za drugi slučaj. Tu dolazimo do pitanja jesmo li dobro objasnili prva dva slučaja. Ono što je u njima bitno za naglasiti jest da kada se nula nalazi u eksponentu baza mora biti broj različit od nule, a kada je nula baza eksponent mora biti pozitivan broj. Ukoliko nije tako i imamo oblik 0^0 treba znati da je to nedefinirani oblik. Učenici si to mogu napisati kao napomenu i naznačiti si kao jedno od dogovorenih pravila.



Slika 19: Nula na nulu

2.8 Nula i skupovi brojeva

Sa skupom prirodnih brojeva učenici se susretnu u petom razredu. Nakon same definicije i nabrajanja brojeva koji pripadaju skupu prirodnih brojeva više pažnje posveti se rješavanju zadataka iz redoslijeda računskih operacija. Skup prirodnih brojeva prošire brojem nula i tada se to naziva skup prirodnih brojeva s nulom. U šestom razredu uvode skupove cijelih i racionalnih brojeva za koje već znaju da sadrže nulu jer ih promatraju kao nadskupove skupa prirodnih brojeva s nulom. U osmom razredu uče o skupu realnih brojeva koji također sadrži nulu.

I poslije ovako sustavnog uvođenja skupova brojeva kada im se postavi pitanje pripada li nula skupu prirodnih brojeva javljaju se nedoumice. Postoje mnogi prikazi skupova brojeva pomoću crteža u kojima je unutar skupa cijelih brojeva ucrtan skup prirodnih brojeva s nulom i unutar skupa prirodnih brojeva s nulom ucrtan skup prirodnih brojeva. Postoje i zapisi matematičkim simbolima za podskup, odnosno nadskup, ali učenici su i dalje nesigurni.

Skup prirodnih brojeva s nulom nije posebno zanmljiv jer se od svog podskupa, skupa prirodnih brojeva, razlikuje samo za jedan element više. Bez obzira na to, trebalo bi mu pridodati više pažnje čime bi se istaknuo razlog njegova postojanja, a to je upravo nepostojanje nule u skupu prirodnih brojeva. Nakon toga još se jednom može zaključiti da nula nije prirodan broj.

3 Pomoć pri učenju

Osim korisnih dokaza i zadataka, poželjno je već u osnovnoj školi koristiti kreativne načine učenja. Mnogi metodičari smatraju da je najproduktivnije učenje ono u kojemu učenik sam prezentira naučeno. Tako je često zadatak učenicima izraditi mentalne mape ili slikokaze koji će ostati u učionici kao podsjetnici. Postoji i pjesmica o nuli čije stihove prenosimo u cjelosti. (Matematika i škola 6(2000), 216-217)

Ja sam jedna mala Nula
svake laži ja sam čula:
Da ja ništa baš ne vrijedim,
samo da na pravcu sjedim.
Zato slušaj što ću reći:
Moj je značaj puno veći!
Iako baš nisam snažna,
u računu ja sam važna!
Jedinica ima jedna,
misli da je jako vrijedna.
Ako njoj me slijeva staviš,
vel'ku mudrost ne napraviš.
Ali kad joj zdesna stanem,
vel'ku snagu ja joj dadnem.
Zajedno nam vrijednost znači:
-deset puta sad smo jači!
Zbrojiš li me broju Jedan,
ja se vrlo lako predam.
U toj igri bez pardona,
pobjednik je uvijek ona.
Oduzimanje - to je isto
glupa igra skroz na čisto.
Oduzmeš li me od Jedan,
rezultat je isto vrijedan.
Množenjem se, blago meni,
cijeli rezultat promijeni.
Jedinica sada gubi,
pa da varam, svima trubi.
Probale su Dvica, Trica,
al' su prošle tužna lica.
Jer kad množiš brojem Nula,
rezultat je opet: NULA!
Kad sa Jedan dijeliš mene,
rezultat se ne okrene.

Nula podijeljeno s osam
Nulu daje, a ja to sam!
Ali sada savjet slušaj:
NIKADA ni ne pokušaj
s Nulom neki broj podijelit'
jer se nećeš baš veselit.
Evo, to je sa mnom tako,
vidiš da je sve to lako.
Ako imaš to u glavi,
matematičar ti si pravi!

Pjesmica je lako pamtljiva i sadrži korisne tvrdnje koje zbog zanimljive rime lako uđu u uho. Za osnovnoškolski uzrast sadrži dovoljno potrebnih znanja o nuli, dok za srednjoškolski i više uzraste može biti tek prva strofa pjesmice koju bi sami mogli upotpuniti. Mogla bi sadržavati tvrdnje o pripadnosti nule nekom skupu brojeva, o nuli kao potenciji, o specifičnosti faktorijela nule, o vrijednosti logaritma u nuli i ostala. Kada bi uz pjesmicu imali i prikladan video koji bi prikazao i objašnjenja, *problem s nulom* bi se uvelike smanjio.

Zaključak

Premda su problemi s brojem nula na koje učenici nailaze u svojem školovanju za mnoge među njima lako savladiva prepreka, ipak postoji velika skupina onih kojima taj misterij ostane nejasan do kraja njihova školovanja. Često se to događa zbog toga što nastavnici neke stvari podrazumijevaju te se postavljaju na način da je svim učenicima to samo po sebi razumljivo.
Ovaj je rad nastojao dati jedan drugačiji pogled na te probleme. Pogled kojim bismo stvar učinili jednostavnijom i zanimljivijom te samim time lakšom za savladati. Za najčešće probleme predstavljena su prikladna moguća rješenja koja mogu biti i jako dobar poticaj nastavnicima za osmišljavanjem nekih novih, inovativnijih i kreativnijih metoda.

Sažetak

Nula je jedan od najznačajnijih brojeva. Od samih početaka i definiranja vrijednosti, oznake, pa i upotrebe privukla je pozornost brojnih matematičara. Otkada je uvedena i prihvaćena kao broj postavljaju se mnoga pitanja o njoj. Najčešća su pitanja o parnosti nule, o tome je li pozitivan ili negativan broj, koje su računske operacije izvedive s nulom, kojem skupu brojeva pripada i slično. Mnogim učenicima osnovnih, pa i srednjih škola nula zadaje problem. Samim time javlja se sve veća potreba za boljom metodičkom pripremom njihovih nastavnika od kojih se očekuju nove ideje i metode kojima će odgovoriti na navedena pitanja. U radu su navedeni neki od problema s kojima se učenici susreću i njihova potencijalna rješenja.

Ključne riječi: povijest, nula u matematici, problemi i metode

Summary

Zero is one of the most significant numbers. From the very beginning and defining values, labels and the use it draw attention of many mathematicians. Since it was introduced and accepted as a number many questions have been asked. One of the most common questions are those about parity of zero, whether it is positive or a negative number, which arithmetic operations are feasible to zero, which set of numbers does it belong and similar. For a great number of students in elementary school, but also in high school, zero represents a problem. Due to it, there is a greater need for a better methodical readiness of their teachers from who are expected new ideas and methods that will answer to these questions. In the article are listed some of the problem and their potential solutions.

Key words: history, zero in math, problems and methods

Literatura

[1] S. Arafeh, B. Smerdon, S. Snow, *Learning from teachable moments*, Seattle, WA, 2001.

[2] D. Glasnović Gracin, *Problem dijeljenja nulom*, Matematika i škola, **49**(2009), 152–156.

[3] R. Kalpan, *The nothing that is: A Natural History of Zero*, Oxford University Press, Oxford, 2016.

[4] B. Peni, *Kako funkcionira nula*, 2015.
`https://geek.hr/znanost/clanak/kako-funkcionira-nula/`

[5] A. Vidović, *Saga o nuli: Kako je ništa postalo sve*, 2016.
`http://frenzyspark.com/2012/01/29/saga-o-nuli-kako-je-nista-postalo-sve/`

Životopis

Rođena sam u Osijeku, 2. prosinca 1992. godine. Odrastala sam u Josipovcu s roditeljima i bratom. Pohađala sam Osnovnu školu Josipovac u Josipovcu.
Nakon završene osnovne škole, upisala sam Opću gimnaziju u Osijeku. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja javila mi se želja za podučavanjem koja je u srednjoj školi samo jačala kroz sudjelovanja u brojnim natjecanjima. Informirala sam se o deficitarnim zanimanjima te 2011. godine upisala Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.
Tijekom studiranja sam radila mnoge studentske poslove. Volontirala sam u dobrotvornoj udruzi Dokkica, gdje sam davala poduke iz matematike djeci s poteškoćama u učenju.