Zakon velikih brojeva

Budetić, Mia

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:133697

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-06**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Mia Budetić

Zakon velikih brojeva

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Mia Budetić

Zakon velikih brojeva

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Slobodan Jelić

Osijek, 2017.

Sažetak: U ovome radu bavit ćemo se uvjetima uz koje nizovi slučajnih varijabli konvergiraju, brzini i vjerojatnosti konvergencije. Najprije ćemo ponoviti osnovne pojmove iz vjerojatnosti, kao što su nezavisnost slučajnih varijabli, matematičko očekivanje i varijanca te Čebiševljeva nejednakost. Definirat ćemo nekoliko tipova konvergencije slučajnih varijabli, uvesti pojam mjere i integracije po mjeri, te u usporedbi s time, iskazati i dokazati metodom rezanja, Čebiševljev, Bernulijev i Hinčin teorem slabih zakona velikih brojeva. Analizirat ćemo nizove nezavisnih slučajnih varijabli koje imaju „nula-jedan" svojstvo, Borelov i Kolmogorovljev teorem i uvesti pojmove repnih funkcija i repnih događaja. Zatim ćemo definirati empirijsku funkciju distribucije, proučavati konvergenciju redova slučajnih varijabli i dokazati Borelov, Kolmogorovljev, Chungov i Cantellijev jaki zakon velikih brojeva. Za kraj ćemo navesti osnovne teoreme potrebne za dokaz zakona ponovljenog logaritma.

Ključne riječi: Matematičko očekivanje, slučajna varijabla, mjera, vjerojatnost, niz, konvergencija, red, nejednakost, nezavisnost, konstanta

Abstract: In this paper we will talk about conditions in which sequence of random variables converge, convergence rate and convergence probability. At the beginning we will recall some of the basic terms of probability such as independence of random variables, mathematic expectation and variance and Cebîșev inequality. We will define few types of convergence of random variables, introduce the term of measure and measure integration and, comparing with them, we will state and prove Cebîșev, Bernoulli and Khinchin weak law theorem of large numbers by using cutting method. We will be analyzing sequence of independent random variables that have "zero – one" characteristic, Borel and Kolmogorov theorem and introduce term of tail functions and tail events. Furthermore, we will define empirical function of distribution, study convergence of series of random variables and prove Borel, Kolmogorov, Chung and Cantelli strong law of large numbers. In the end, we will bring up basic theorems needed to prove the law of repeated logarithm.

Key words: Mathematic expectation, random variable, measure, probability, sequence, convergence, series, inequality, independence, constant

Sadržaj

Uvod

Zakon velikih brojeva nam govori o tome da ako ponavljamo neki slučajan pokus velik broj puta, pod jednakim uvjetima i nezavisno, relativna frekvencija događaja će biti približno jednaka vjerojatnosti toga događaja. Prvi korak u razvoju zakona velikih brojeva napravio je Jacob Bernoulli objavivši 1715. godine Bernullijev slabi zakon velikih brojeva. Govoreći o zakonu velikih brojeva ne govorimo samo o jednom teoremu, već je tu sadržano mnoštvo teorema, preciznije, skupina teorema koja proučava niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i uvjete uz koje niz $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_n), n \in \mathbb{N}\right)$ $(a_n \in \mathbb{R})$ konvergira prema nekoj konstanti. Zakon velikih brojeva dijelimo na slabi i jaki zakon kojima ćemo se mi detaljnije baviti u ovome radu. Slabi zakoni su određeni konvergencijom niza po vjerojatnosti, a jaki zakoni gotovo sigurno ($g.s.$) (limes je gotovo sigurno konstanta). Radi boljeg razumijevanja teme, najprije se prisjetimo osnovnih definicija pojmova i teorema kojima ćemo se služiti.

1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1. *Pokus je ponovljen n puta. Ako se pritom događaj A dogodio n_A puta, broj n_A zovemo* ***frekvencija događaja*** *A. Broj $f_A(n) = \dfrac{n_A}{n}$ zovemo* ***relativna frekvencija događaja*** *A*

Definicija 1.2. *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) jest σ-**algebra skupova** na Ω ako je*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.3. *Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na skupu Ω. Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se* ***izmjeriv prostor****, a elemente familije $\mathcal{F}$ nazivamo* ***izmjerivim skupovima****.*

Definicija 1.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest* ***vjerojatnost*** *na Ω ako vrijedi*

1. $P(A) \geqslant 0,\ A \in \mathcal{F};\ P(\Omega = 1)$,
2. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ *i* $A_i \cup A_j = \emptyset$ *za* $i \neq j$.

Definicija 1.5. *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i P vjerojatnost na $\mathcal{F}$, zove se* ***vjerojatnosni prostor****.*

Najjednostavniji vjerojatnosni prostor dobijemo u slučaju da je osnovni skup Ω konačan ili prebrojiv skup. Taj ćemo slučaj zvati **diskretnim**.

Definicija 1.6. ***Niz od n ponovljenih nezavisnih pokusa*** *jest diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koji je jednak Kartezijevu produktu diskretnog vjerojatnosnog prostora $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$.*

Definicija 1.7. *Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Sa $\mathcal{B}$ označimo σ-algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ zovemo σ-**algebra Borelovih skupova** na $\mathbb{R}$, a elemente σ-algebre $\mathcal{B}$ zovemo* ***Borelovi skupovi****.*

Definicija 1.8. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest* ***slučajna varijabla*** *na Ω ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljni $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.*

Definicija 1.9. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kažemo da su $X_1, \ldots, X_n$* ***nezavisne*** *ako za proizvoljne $B_i \in \mathcal{B}$, $i=1,\ldots,n$, vrijedi*

$$P\{X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\} = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\}. \tag{1.1}$$

Definicija 1.10. *Ako red $\sum\limits_{\omega_k \in \Omega} X(\omega_k) P(\{\omega_k\})$ apsolutno konvergira, onda njegovu sumu zovemo* ***matematičko očekivanje*** *ili* ***očekivanje slučajne varijable*** *X i označavamo sa*

$$EX = \sum_{\omega_k \in \Omega} X(\omega_k) P(\{\omega_k\}). \tag{1.2}$$

Definicija 1.11. *Neka je X slučajna varijabla i neka EX postoji.* ***Varijanca*** *od X definira se sa*

$$VarX = E[(X - EX)^2] \tag{1.3}$$

ako očekivanje u (1.3) postoji.

Definicija 1.12. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju $(X_1, \ldots, X_n)$ koja svakom ishodu pokusa pridružuje uređenu n-torku realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$ zovemo* ***n-dimenzionalan slučajni vektor*** *ako vrijedi:*
$\{X_1 \leqslant x_1\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n \leqslant x_n\} \in \mathcal{F}$, *za svaki* $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.13. *Neka je (X, Y) diskretan ili neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor. Očekivanje $E(X^k Y^l), k, l \in \mathbb{N}_0$ slučajne varijable $X^k Y^l$ (ako postoji) nazivamo* ***ishodišni moment reda*** (k, l) *slučajnog vektora (X, Y) i pišemo $\mu_{kl} = E(X^k Y^l)$.*
Očekivanje $E((X - EX)^k (Y - EY)^l)$ (ako postoji) nazivamo ***centralni moment reda*** (k, l) *slučajnog vektora (X, Y) i pišemo $m_{kl} = E((X - EX)^k (Y - EY)^l)$.*
Centralni moment reda $(1, 1)$ nazivamo ***korelacijski moment*** *ili* ***kovarijanca*** *dvodimenzionalnog slučajnog vektora.*

Teorem 1.1 (Čebiševljeva nejednakost)**.** *Neka je X slučajna varijabla s konačnom varijancom. Tada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P\{|X - EX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{VarX}{\varepsilon^2}. \tag{1.4}$$

Definicija 1.14. *Funkcija $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest* ***Borelova funkcija*** *ako je $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$, tj. ako je $g^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.*

1.1 Konvergencija slučajnih varijabli

Definicija 1.15. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira gotovo sigurno*** *(g.s.) prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$P\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = 1. \tag{1.5}$$

To označujemo (g.s.) $\lim_n X_n = X$ ili $X_n \xrightarrow{g.s.} X$ $(n \to \infty)$. Takav limes je (g.s.) jedinstven.

Definicija 1.16. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira po vjerojatnosti*** *prema slučajnoj varijabli X ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0. \tag{1.6}$$

To označujemo $(P) \lim_n X_n = X$ ili $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$.

Definicija 1.17. *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je $X_n,\ X \in L_p(\Omega)$ $(n \in \mathbb{N})$. Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$* ***konvergira u srednjem reda p*** *prema X ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0. \tag{1.7}$$

To označujemo $(m^p) \lim_n X_n = X$ ili $X_n \xrightarrow{m^p} X$ $(n \to \infty)$.

Definicija 1.18. *Kažemo da niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *slučajnih varijabli* ***konvergira po distribuciji*** *prema slučajnoj varijabli* X *ako je*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad x \in C(F_X). \tag{1.8}$$

F_X *je funkcija distribucije od* X, *a* $C(F_x)$ *je skup svih točaka neprekidnosti od* F_X.

Napomena 1.1. *Kažemo da je (g.s.) konvergencija jača od konvergencije po vjerojatnosti, odnosno da je konvergencija po vjerojatnosti slabija od (g.s.) konvergencije.*

1.2 Osnovno o teoriji mjere

Teorija mjere razvila se zbog potreba računanja duljine, površine, volumena i ostalog, na složenijim podskupovima od $\mathbb{R}$, odnosno $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$. Mjera na skupu $\mathbb{R}$ je poznata kao **Borelova mjera**, a skupovi koje ona mjeri nazivaju se Borelovi skupovi.

Definicija 1.19. *Prošireni skup realnih brojeva, u oznaci* $\overline{\mathbb{R}}$, *je* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicija 1.20. *Neka je* $\mathcal{A}$ σ*-algebra na skupu* X. ***Mjera*** *na* $\mathcal{A}$ *je svako preslikavanje* $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $\mu(A) \geq 0$ *za svaki* $A \in \mathcal{A}$,
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. *za svaki niz* $(A_i, i \in \mathbb{N})$ *disjunktnih skupova iz* $\mathcal{A}$ *vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.9}$$

Broj $\mu(A)$ *zovemo* ***mjera skupa*** A, *a uređenu trojku* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ***prostor mjere***.

Definicija 1.21. *Neka je dan skup* X *i njegov partitivni skup* 2^X. ***Vanjska mjera*** *je funkcija* $\mu^*\colon 2^X \to [0, \infty]$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. *ako su* $A, B \subseteq X$ *takvi da je* $A \subseteq B$, *tada je* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
3. *za svaki niz* $(A_i, i \in \mathbb{N})$ *skupova iz* X *vrijedi*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i). \tag{1.10}$$

Definicija 1.22. *Neka je* $\mu^*\colon 2^X \to [0, \infty]$ *vanjska mjera na skupu* X. *Kažemo da je skup* $B \subseteq X$ μ^****-izmjeriv*** *ako je*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^C), \quad \text{za svaki } A \subseteq X. \tag{1.11}$$

Definicija 1.23. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *n-dimenzionalan slučajan vektor, odnosno* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}^n$. *Tada je* $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, *pri čemu su* $X_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ *slučajne varijable. Za* $B \in \mathcal{B}^n$ *stavimo*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\{X \in B\}. \tag{1.12}$$

Relacijom (1.12) *definirana je funkcija* $P_X\colon \mathcal{B}^n \to [0,1]$ *i* P_X *je vjerojatnost na* $\mathcal{B}^n$. *Zaista,* $P_X(\mathbb{R}^n) = P(\Omega) = 1$, *a ako je* $(B_j, j \in \mathbb{N})$ *proizvoljan niz međusobno disjunktnih skupova iz* $\mathcal{B}^n$, *tada je* $(X^{-1}(B_j), j \in \mathbb{N})$ *niz međusobno disjunktnih događaja (elemenata iz* $\mathcal{F}$*), pa vrijedi*

$$P_X = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = P\Big(X^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big)\Big) = P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} X^{-1}(B_j)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j)$$

P_X *zovemo* ***vjerojatnosna mjera inducirana slučajnim vektorom*** X *ili* ***zakon razdiobe slučajnog vektora*** X. *Prema tome, svakome* $n-$*dimenzionalnom slučajnom vektoru* X *na prirodan se način preko relacije* (1.12) *pridružuje vjerojatnosni prostor* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$ *koji zovemo* ***vjerojatnosni prostor induciran slučajnim vektorom*** X

Neka je S metrički prostor s metrikom d i neka je $\delta = \mathcal{B}_S$, tj. δ je $\sigma-$algebra Borelovih skupova u S. Ako je $\mathcal{U}_S$ familija svih otvorenih skupova u S, tada je $\delta = \sigma(\mathcal{U}_S)$.

Definicija 1.24. ***Vjerojatnosna mjera*** *ili* ***vjerojatnost*** *na* S *jest vjerojatnosna mjera definirana na* δ. *Za* $A \subset S$ *i* $x \in S$ *stavimo*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y); y \in A\}.$$

$d(x, A)$ *zovemo* ***udaljenost točke*** x ***od skupa*** A.

Definicija 1.25. *Neka su zadana dva izmjeriva prostora* $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ *i* $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ *kažemo da je* ***funkcija*** $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ***izmjeriva*** *u paru* σ*-algebri* $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{G}$ *ako za sve* $B \in \mathcal{G}$ *vrijedi da je* $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.26. *Neka je* $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor, tada sa* $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ *označimo skup svih izmjerivih funkcija* $f\colon \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definicija 1.27. *Neka je* $(X; \sum, \mu)$ *prostor mjere, a* $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ $\sum-$*izmjeriva funkcija.*

1. *Ako je barem jedan od brojeva* $\int f^+ d\mu$ *i* $\int f^- d\mu$ *konačan, onda se definira broj*

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

   i zovemo ga ***integral funkcije*** f ***s obzirom na mjeru*** μ. *Za funkciju* f *kažemo da je integrabilna ako je* $\int f d\mu$ *konačan.*

2. *Neka je* $E \in \sum$ *izmjeriv skup. Ako je definiran integral* $\int \mathcal{X}_E f d\mu$, *onda broj*

$$\int_E f d\mu := \int f \mathcal{X}_E d\mu$$

   zovemo ***integral funkcije*** f ***na skupu*** E ***s obzirom na mjeru*** μ.

Za funkciju f *kažemo da je* ***integrabilna na skupu*** E *ako je* $\int_E f d\mu < \infty$.

2 Slabi zakoni velikih brojeva

Teorem 2.1. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli čije su varijance konačne i neka je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var X_i = 0. \tag{2.1}$$

Tada je

$$(P) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) = 0. \tag{2.2}$$

Dokaz.

Stavimo $Y_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)(n \in \mathbb{N})$. Treba dokazati da je $(P) \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$.
Očigledno je EY_n = 0 za sve n, pa zbog nezavisnosti niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ dobivamo
$\displaystyle\int_\Omega Y_n^2 \, dP = Var\ Y_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\ X_i \to 0$ za n $\to \infty$.
Iz gore navedenog slijedi $Y_n \xrightarrow{m^2} 0$ (n $\to \infty$), a to zbog $X_n \xrightarrow{m^p}$ X $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{P}}$ X za $1 \leqslant$ p $< \infty$ povlači $Y_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ (n $\to \infty$).

$\square$

Korolar 2.1 ((Čebiševljev slabi zakon velikih brojeva), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka postoji* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ *takav da je* $Var\ X_n \leqslant \gamma$ *za sve n. Stavimo* $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada vrijedi*

$$(P) \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{n} = 0. \tag{2.3}$$

Korolar 2.2. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli koje imaju isto očekivanje* μ *i istu varijancu* $\sigma^2 < \infty$. *Tada vrijedi*

$$(P) \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu. \tag{2.4}$$

Korolar 2.3 ((Bernulijev slabi zakon velikih brojeva), vidi [1])**.** *Neka je* $Z_n \sim B(n,p)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada je*

$$(P) \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} = p. \tag{2.5}$$

Dokaz.

Stavimo $Y_n = \dfrac{Z_n}{n} (n \in \mathbb{N})$.
Tada je $EY_n = p, Var\ Y_n = \displaystyle\int_\Omega (Y_n - p)^2 dP = \frac{1}{n^2} Var\ Z_n = \frac{p(1-p)}{n}$.
Odavdje slijedi $Y_n \xrightarrow{m^2}$ p (n$\to\infty$), što zbog $X_n \xrightarrow{m^p}$ X $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{P}}$ X za ($1 \leqslant$ p $< \infty$) povlači $Y_n \xrightarrow{\text{P}}$ p (n $\to \infty$).

$\square$

Napomena 2.1. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih Bernulijevih slučajnih varijabli s parametrom* p. *Lagano je dokazati da za svaki* n *vrijedi* $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$. *Tvrdnja korolara 2.3 odmah slijedi iz korolara 2.2 primijenjenog na ovaj niz.*

Teorem 2.2. *Neka je* $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ *proizvoljan niz slučajnih varijabli. Tada* $Y_n \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$ *ako i samo ako za neki* $r > 0$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{|Y_n|^r}{1+|Y_n|^r}\right) = 0. \tag{2.6}$$

Dokaz.

U dokazu ovoga teorema ćemo koristiti činjenicu da za slučajnu varijablu X i nenegativnu Borelovu funkciju g takvu da je $E[g(X)] < \infty$ i $(g.s.)\ \sup(g(X)) < \infty$, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P\{|X| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{Eg(X) - g(\varepsilon)}{(g.s.)\sup(g(X))}. \tag{2.7}$$

Ako u (2.7) uzmemo $g(X) = \dfrac{|x|^r}{1+|x|^r}$, dobivamo P$\{\ |Y_n| \geqslant \varepsilon\ \} \geqslant E\left(\dfrac{|Y_n|^r}{1+|Y_n|^r}\right) - \dfrac{\varepsilon^r}{1+\varepsilon^r}$.

S druge strane vrijedi $E[g(Y_n)] \geqslant \displaystyle\int_{\{|Y_n| \geqslant \varepsilon\}} g(Y_n)dP \geqslant g(\varepsilon)P\{|Y_n| \geqslant \varepsilon\}$.

Prema tome, za proizvoljni $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$E\left(\frac{|Y_n|^r}{1+|Y_n|^r}\right) - \frac{\varepsilon^r}{1+\varepsilon^r} \leqslant P\{|Y_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1+\varepsilon^r}{\varepsilon^r} E\left(\frac{|Y_n|^r}{1+|Y_n|^r}\right). \tag{2.8}$$

Tvrdnja teorema slijedi iz (2.8).

□

Korolar 2.4. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *proizvoljan niz slučajnih varijabli i* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada*

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty) \tag{2.9}$$

ako i samo ako

$$E\left[\frac{(S_n - ES_n)^2}{n^2 + (S_n - ES_n)^2}\right] \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.10}$$

Teorem 2.3. *Ako je* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borelova funkcija, tada za proizvoljni* $B \in \mathcal{B}$ *vrijedi*

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)\ dP = \int_B g\ dP_x = (L-S)\int_B g(X)\ dF_x(x), \tag{2.11}$$

u smislu da ako jedan od integrala postoji, onda postoji i drugi i vrijednosti su im jednake.

Teorem 2.4. *Neka je* X *nenegativna slučajna varijabla na* Ω. *Tada je funkcija* φ *definirana na* $\mathcal{F}$ *sa* $\varphi(A) = \int_A X\ dP$, *mjera na* $\mathcal{F}$.

Teorem 2.5 ((Hinčin), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli* [1] *sa zajedničkim konačnim očekivanjem* μ*. Tada je*

$$(P) \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu. \tag{2.12}$$

Dokaz.

U dokazu ćemo se koristiti metodom rezanja[2].
Neka je $\delta > 0$ i n $\in \mathbb{N}$, n-fiksan. Za $1 \leqslant$ k $\leqslant$ n stavimo

$$X_k^*(\omega) = \begin{cases} X_k(\omega)\,, \text{ za } |X_k(\omega)| < \text{n}\delta \\ 0 \qquad\;\, , \text{ inače} \end{cases}$$

odnosno $X_k^* = X_k K_{\{|X_k|<n\delta\}}$. Odmah je vidljivo da su $X_1^*, \ldots, X_n^*$ također nezavisne i jednako distribuirane. Neka je X slučajna varijabla koja ima istu distribuciju kao svaka X_n. Tada je EX $= \mu$. Stavimo E|X| $= \beta < \infty$ i $E_n = \{\omega \in \Omega;\ |X(\omega)| < n\delta\}$, n $\in \mathbb{N}$.
Tada za $1 \leqslant$ k $\leqslant$ n vrijedi

$$\mu_n^* = EX_k^n = \int\limits_{\Omega} X_k^*\, dP = \int\limits_{|X_k|<n\delta} X_k\, dP = (po\ teoremu\ 2.3) = \int\limits_{E_n} X\, dP = E(XK_{E_n}).$$

Dalje imamo

$$VarX_k^n = E(X_k^{*2}) - (EX_k^*)^2 \leqslant E(X_k^{*2}) = (po\,teoremu\,2.3) = \int\limits_{E_n} X^2\, dP \leqslant n\delta \int\limits_{E_n} |X|\, dP \leqslant \delta\beta.$$

Stavimo $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} X_k^*$. Tada je

$$ES_n^* = n\mu_n^*, \quad VarS_n^* \leqslant n^2\delta\beta,$$

odnosno

$$E\left(\frac{S_n^*}{n}\right) = \mu_n^*, \quad Var\left(\frac{S_n^*}{n}\right) \leqslant \delta\beta.$$

Iz Čebiševljeve nejednakosti 3.6 primijenjene na $\left(\frac{S_n^*}{n}\right)$ slijedi

$$P\left\{ \left| \frac{S_n^*}{n} - \mu_n^* \right| \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2}, \quad za \quad \varepsilon > 0. \tag{2.13}$$

Budući da događaji E_n rastu prema događaju čija je vjerojatnost 1, iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da $\mu_n^* \to \mu$ za n $\to \infty$ (X$K_{E_n} \to X$ (g.s.) za n $\to \infty$). Za dani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je $|\mu_n^* - \mu| < \varepsilon,\ za\ n \geqslant n_0$. Odavdje i iz (2.13) slijedi da za n $\geqslant n_0$ vrijedi

$$P\left\{ \left| \frac{S_n^*}{n} - \mu \right| \geqslant 2\varepsilon \right\} \leqslant \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2}. \tag{2.14}$$

[1] Dvije slučajne varijable X i Y su jednako distribuirane ako je $P_x = P_y$, odnosno ako je $F_x = F_y$. Ako su jednako distribuirane, tada za svaku Borelovu funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je integrabilna u odnosu na P_x vrijedi $E[g(X)] = E[g(Y)]$.

[2] O tome više kod konvergencije redova slučajnih varijabli.

Za $1 \leqslant k \leqslant$ n stavimo $Y_k = X_k - X_k^*$. Tada zbog jednake distribuiranosti imamo

$$P\{Y_k \neq 0\} = P\{|X_k| \geqslant n\delta\} = P\{|X| \geqslant n\delta\} \leqslant \frac{1}{n\delta} \int\limits_{E_n^c} |X| \; dP,$$

pa dobijemo

$$P\Big\{ \sum_{k=1}^{n} Y_k \neq 0 \Big\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} P\{Y_k \neq 0\} \leqslant \delta\} \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{E_n^c} |X| \; dP.$$

Prema tome, vrijedi

$$P\Big\{ \frac{S_n - S_n^*}{n} \neq 0 \Big\} \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{E_n^c} |X| \; dP. \tag{2.15}$$

Iz (2.14) i (2.15) dobivamo

$$P\bigg\{ \bigg| \frac{S_n}{n} - \mu \bigg| \geqslant 2\varepsilon \bigg\} \leqslant \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\delta} \int\limits_{E_n^c} |X| \; dP \quad n \geqslant n_0. \tag{2.16}$$

Budući da E_n^c padaju prema događaju čija je vjerojatnost 0, imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n^c} |X| \; dP = 0$ po teoremu 2.4. Prema tome, za dani $\delta > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\int\limits_{E_n^c} |X| \; dP < \delta^2, \quad za \; n \geqslant n_1.$$

Stavimo sada $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Tada za n $\geqslant n_2$ vrijedi

$$P\bigg\{ \bigg| \frac{S_n}{n} - \mu \bigg| \geqslant 2\varepsilon \bigg\} \leqslant \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2} + \delta. \tag{2.17}$$

Tvrdnja teorema slijedi zbog proizvoljnosti δ i ε.

$\square$

3 Zakoni nula-jedan

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, ovdje će nas zanimati kolika je vjerojatnost da $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira. Znamo da funkcija vjerojatnosti prima vrijednosti iz segmenta $[0, 1]$, pa je prirodno pretpostaviti da vjerojatnost događaja na kojem taj red konvergira može biti također bilo koji realan broj iz $[0, 1]$. Zapravo, ta vjerojatnost može biti samo 0 ili 1. Ovdje ćemo govoriti o događajima vezanim za niz nezavisnih slučajnih varijabli koji imaju to nula-jedan svojstvo.

Definicija 3.1. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli i neka je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ $(n \in \mathbb{N})$ $\sigma-$ algebra inducirana sa $X_n, X_{n+1}, \dots$. Za svaki n vrijedi $\mathcal{F}_n = \sigma\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} \sigma(X_k)\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k^{-1}(\mathcal{B})\Big)$, dakle na $\mathcal{F}_n$ možemo gledati kao na $\sigma-$algebru koja sadrži događaje vezane za $X_n, X_{n+1}, \dots$. $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ je padajući niz $\sigma-$ algebri. Stavimo*

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

*$\mathcal{F}_\infty$ zovemo **repna $\sigma-$algebra** niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$, a elemente od $\mathcal{F}_\infty$ zovemo **repni događaji**. Funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$(ili $\overline{\mathbb{R}}$) koja je izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_\infty$, zovemo **repna funkcija** u odnosu na niz (X_n).*

Napomena 3.1. *Repni događaj ne zavisi od vrijednosti slučajnih varijabli $X_1, \dots, X_n$ za proizvoljni konačni n, već je određen samo "ponašanjem beskonačno dalekih članova niza $X_1, X_2, \dots$". Prema tome, pojavljivanje ili nepojavljivanje repnog događaja ne ovisi o promjeni vrijednosti od konačno mnogo X_i-ova. Slično, vrijednost repne funkcije ne ovisi o promjeni vrijednosti samo konačno mnogo X_i-ova.*

Teorem 3.1 ((Borelov zakon nula-jedan), vidi [1])**.** *Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je*

$$P(\overline{\lim_n}\, A_n) = \begin{cases} 0\,, \text{ ako je } \sum_{n=1}^{n} P(A_n) < \infty \\ 1\,, \text{ ako je } \sum_{n=1}^{n} P(A_n) = \infty. \end{cases}$$

Definicija 3.2. *Neka je $T \neq \emptyset$ i neka je za svaki $t \in T$, $\delta_t \subset \mathcal{F}$ i $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je familija $\{\delta_t;\ t \in T\}$ **nezavisna** ako za svaki konačan neprazan podskup $U \subset T$ vrijedi*

$$P\Big(\bigcap_{t \in U} A_t\Big) = \prod_{t \in U} P(A_t).$$

Teorem 3.2. *Neka je $\{\mathcal{C}_t;\ t \in T\}$ nezavisna familija $\sigma-$ algebri i neka je $\{T_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ particija od T. Za svaki $\gamma \in \Gamma$ neka je $\mathcal{F}_\gamma = \sigma\Big(\bigcup_{t \in T_\gamma} \mathcal{C}_t\Big)$. Tada je familija $\{\mathcal{F}_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ nezavisna.*

Teorem 3.3 ((Kolmogorovljev zakon nula-jedan), vidi [1])**.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Tada je vjerojatnost svakog repnog događaja 0 ili 1, a svaka repna funkcija je (g.s.) konstantna.*

Dokaz.

Nezavisnost niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ znači da je familija $\sigma - algebri$ $\{\sigma(X_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ nezavisna. Odavdje, prema teoremu 3.2, slijedi da su za svaki n $\sigma - algebre$ $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ i $\mathcal{F}_{n+1} = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ nezavisne. Budući da je $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_{n+1}$ zaključujemo da su $\mathcal{F}_\infty$ i $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ nezavisne za svaki n. Tada je familija $\{\mathcal{F}_\infty, \sigma(X_1), \sigma(X_2), \ldots\}$ nezavisna, pa ponovnom primjenom teorema 3.2 dobijemo da su $\mathcal{F}_\infty$ i $\sigma(X_1, X_2, \ldots) = \mathcal{F}_1$ nezavisne. Iz $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_1$ zaključujemo da je $\mathcal{F}_\infty$ nezavisna sama sa sobom. To znači da za proizvoljan $A \in \mathcal{F}_\infty$ imamo $P(A \cap A) = P(A) = [P(A)]^2$, a iz tog slijedi $P(A) = 0$ ili 1. Neka je sada f repna funkcija (u odnosu na niz (X_n) odnosno $\sigma - algebru$ $\mathcal{F}_\infty$). Tada je za svaki $y \in \mathbb{R}$ događaj $\{f \leq y\}$ repni događaj, dakle ima vjerojatnost 0 ili 1. Neka je F funkcija distribucije od f. Zbog monotonog rasta od F imamo:

$$F(y) = 0 \ za\ neki\ y = y_1 \Rightarrow F(y) = 0 \quad za\ sve\ y < y_1,$$

$$F(y) = 1 \ za\ neki\ y = y_2 \Rightarrow F(y) = 1 \quad za\ sve\ y > y_2.$$

Odavdje slijedi da postoji konstanta c takva da je $F(y) = 0$ za $y < c$ i $F(y) = 1$ za $y \geq c$. Tada je $f = c$ $(g.s.)$ pa je $c = \sup\{y \in \mathbb{R};\ P\{f \leq y\} = 0\}$.

□

Korolar 3.1. *Ako je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, tada vrijedi*

1. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira $(g.s.)$ prema konačnom limesu ili divergira $(g.s.)$*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira $(g.s.)$ prema konačnom limesu ili divergira $(g.s.)$*
3. $\left(a_n \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N}\right)$ *konvergira $(g.s.)$ prema konačnom limesu ili divergira $(g.s.)$ za proizvoljan niz $(a_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ koji konvergira prema 0.*
   Osim toga, ako niz u 1. *ili* 3. *konvergira $(g.s.)$, tada je limes $(g.s.)$ konstanta.*

Teorem 3.4.

1. *Ako je $p = \frac{1}{2}$, tada je*
$$P(\overline{\lim_n}\{S_n = 0\}) = 1.$$
2. *Ako je $p \neq \frac{1}{2}$, tada je*
$$P(\overline{\lim_n}\{S_n = 0\}) = 0.$$

3.1 Konvergencija redova slučajnih varijabli

Teorem 3.5 ((Kolmogorovljeve nejednakosti), vidi [1]).

1. *Neka su* $X_1, \dots, X_n$ *nezavisne slučajne varijable s konačnim varijancama. Tada za proizvoljni* $\varepsilon > 0$ *vrijedi*

$$P\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j - ES_j| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var\ S_n}{\varepsilon^2}.$$

2. *Ako osim toga postoji* $c \in \mathbb{R}$ *takav da je* $P\{|X_i| \leq c\} = 1$ *za* $i = 1, \dots, n$, *tada za svaki* $\varepsilon > 0$ *vrijedi*

$$P\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j - ES_j| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{(\varepsilon + 2c)^2}{Var\ S_n}.$$

Teorem 3.6. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli čije su varijance konačne. Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} Var\ X_n < \infty$, *tada red* $\sum_{n=1}^{\infty}[X_n - EX_n]$ *konvergira (g.s.).*

Propozicija 3.1. *Ako su* $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *tada je* $P(\overline{\lim_n}\ A_n) = 0$.

Propozicija 3.2. *Neka su* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *i* $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ *nizovi slučajnih varijabli takvi da vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq Y_n\} < \infty$. *Tada* X_n *konvergira (g.s.) ako i samo ako* Y_n *konvergira (g.s.), i to prema istom limesu, a slična tvrdnja vrijedi i za nizove* $\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathbb{N}\Big)$ *i* $\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k, n \in \mathbb{N}\Big)$. *Također, red* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira (g.s.) ako i samo ako* $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ *konvergira (g.s.).*

Dokaz.

Prema propoziciji 3.1 iz $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq Y_n\} < \varepsilon$ slijedi $P(\overline{\lim_n}\{X_n \neq Y_n\}) = 0$ što povlači $P(\overline{\lim_n}\{X_n = Y_n\}) = 1$. Prema tome, za gotovo sve $\omega \in \Omega$ postoji $n_0 = n_0(\omega)$ takav da je $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$ *za sve* $n \geqslant n_0$. Odavdje direktno slijedi tvrdnja propozicije.

□

Korolar 3.2. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nenegativnih slučajnih varijabli. Tada je*

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n$$

.

Propozicija 3.3. *Očekivanje slučajne varijable* X *postoji (tj. konačno je) ako i samo ako je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| \geqslant n\} < \infty.$$

Dokaz.

EX je konačno ako i samo ako je E(|X|) $< \infty$. Zbog korolara 3.2 imamo

$$E(|X|) = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |X| K_{\{n-1 \leqslant |X| < n\}} \Big) dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{n-1 \leqslant |X| < n\}} |X| \, dP.$$

Odavdje slijedi

$$E(|X|) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{n-1 \leqslant |X| < n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n[P\{|X| \geqslant n-1\} - P\{|X| \geqslant n\}] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| \geqslant n\},$$

$$E(|X|) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P\{n-1 \leqslant |X| < n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| \geqslant n\}.$$

Tvrdnja propozicije slijedi iz navedenih nejednakosti.

□

Teorem 3.7. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli i pretpostavimo da za neki* $c \geq 0$ *vrijedi* $P\{|X_n| \leq c\} = 1$ *za sve* n*. Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira (g.s.), tada redovi* $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} Var\ X_n$ *konvergiraju.*

U dokazivanju teorema tipa zakona velikih brojeva često se koristimo **metodom rezanja** i **metodom simetrizacije** koje pripadaju Kolmogorovu. Neka je X slučajna varijabla i $c > 0$. Tada možemo X **rezati** u c i dobiti novu slučajnu varijablu $X_c = XK_{\{|X|<c\}}$, tj.

$$X_c(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{ako je } |X(\omega)| < c \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad \omega \in \Omega.$$

Teorem 3.8 ((Teorem o dva reda), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih (g.s.) uniformno ograničenih slučajnih varijabli. Red* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira (g.s.) ako i samo ako redovi* $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} Var\ X_n$ *konvergiraju.*

Teorem 3.9 ((Kolmogorovljev teorem o tri reda), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli. Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira (g.s.), tada redovi*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq c\}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n K_{\{|X_n|<c\}}]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n K_{\{|X_n|<c\}}]$

konvergira za svaki $c > 0$*. Obratno, ako postoji* $c > 0$ *takav da redovi* 1., 2., *i* 3. *konvergiraju, tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira (g.s.).*

Dokaz.

Pretpostavimo prvo da postoji $c > 0$ takav da redovi $1., 2.,$ *i* 3. konvergiraju i neka je $X_n^* = (X_n)_c = X_n K_{\{|X_n|<c\}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Iz teorema 3.8 slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^*$ konvergira $(g.s.)$. Zbog $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq X_n^*\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq c\} < \infty$ i propozicije 3.2 zaključujemo da $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira $(g.s.)$.

Obratno, pretpostavimo da $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira $(g.s.)$, dakle niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira $(g.s.)$ prema nuli. Tada slijedi da je $P(\overline{\lim_n}\{|X_n| \geq c\}) = 0$ za svaki $c > 0$, pa iz teorema 3.1 slijedi $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq c\} < \infty$. Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^*$ konvergira $(g.s.)$ i vrijedi $|X_n^*| \leq c$ za sve n, konvergencija redova 2. *i* 3. slijedi iz teorema 3.7.

$\square$

Korolar 3.3. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je* $EX_n = 0$ *za sve* n. *Ako je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{X_n^2}{1 + |X_n|}\right] < \infty$$

tada red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *konvergira* $(g.s.)$.

4 Jaki zakoni velikih brojeva

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Iz korolara 3.1 slijedi da niz $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \in \mathbb{N}\right)$ konvergira $(g.s.)$ ili divergira $(g.s.)$. Stavimo $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Promatrat ćemo uz koje uvjete niz $\left(\frac{S_n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right)$ ili niz $\left(\frac{S_n - a_n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right)$ gdje je $(a_n, n \in \mathbb{N})$ niz u $\mathbb{R}$ konvergira $(g.s.)$.

Lema 4.1. *Neka je $A = [a_{nj}]$ $(n, j \in \mathbb{N})$ beskonačna realna matrica. Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$ za svaki fiksan j i da postoji $c \in \mathbb{R}$, $c \geqslant 0$ takav da je $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \geqslant c$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je $(x_n, n \in \mathbb{N})$ ograničen niz u $\mathbb{R}$, definirajmo*

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j, n \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi

1. *Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.*
2. *Ako je $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$ i ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ $(x \in \mathbb{R})$, tada je $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.*

Dokaz.

1. Vrijedi

$$|y_n| \leqslant \sum_{j=1}^{k_0} |a_{nj}||x_j| + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_{nj}||x_j| \tag{4.1}$$

Za dani $\varepsilon > 0$ izaberimo k_0 *tako da je* $|x_j| \leqslant \frac{\varepsilon}{c}$ *za* $j > k_0$. Tada je drugi član desne strane u (4.1) manji ili jednak od ε. Prvi član desne strane u (4.1) teži prema nuli za n$\to \infty$ i to za svaki fiksan k_0. Prema tome, $y_n \to 0$ za n$\to\infty$.

2. Zbog 1. svojstva imamo

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(x_j - x) + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}\Big) x \to x \quad \textit{za } n \to \infty.$$

□

Lema 4.2 ((Teoplitz), vidi [1])**.** *Neka je $(a_n, n \in \mathbb{N})$ niz nenegativnih realnih brojeva i neka je $b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j (n \in \mathbb{N})$; pretpostavimo da je $b_n > 0$ za sve n i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ako je $(x_n, n \in \mathbb{N})$ niz realnih brojeva koji konvergira prema $x \in \mathbb{R}$, tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = x. \tag{4.2}$$

Dokaz.

Formirajmo beskonačnu matricu A čiji je n-ti redak jednak

$$\left(\frac{a_1}{b_n}, \frac{a_2}{b_n}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, 0, 0, \dots\right),$$

dakle $a_{nj} = \dfrac{a_j}{b_n}$ *za* $j \leqslant n$ *i* $a_{nj} = 0$ *za* $j > n$. Tvrdnja slijedi iz leme 4.1.

□

Lema 4.3 ((Kronecker), vidi [1])**.** *Neka je* $(b_n, n \in \mathbb{N})$ *rastući niz pozitivnih realnih brojeva, neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ *i neka je* $(x_n, n \in \mathbb{N})$ *niz u* $\mathbb{R}$ *takav da je* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$ $(x \in \mathbb{R})$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0. \tag{4.3}$$

Dokaz.

Stavimo $s_0 = 0$, $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ $(n \in \mathbb{N})$. Tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \sum_{j=1}^{n} b_j (s_j - s_{j-1}) = b_n s_n - b_0 s_0 - \sum_{j=1}^{n} s_{j-1}(b_j - b_{j-1})$$

(Uzmimo $b_0 = 0$). Tada slijedi

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = s_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j s_{j-1},$$

gdje je $a_j = b_j$ - $b_{j-1} \leqslant 0$. Zbog $s_n \to$ x za n $\to \infty$ i leme 4.2 dobivamo

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \to 0 \quad za\ n \to \infty.$$

□

Teorem 4.1 ((Kolmogorovljev dovoljan uvjet za jaki zakon velikih brojeva), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli čije su varijance konačne i neka je* $(b_n, n \in \mathbb{N})$ *rastući niz pozitivnih realnih brojeva takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Ako je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\ X_n}{b_n^2} < \infty, \tag{4.4}$$

tada je

$$(g.s.) \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{b_n} = 0 \tag{4.5}$$

$(S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *za sve* $n)$.

Dokaz.

Prema pretpostavci teorema imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var\left[\frac{X_n - EX_n}{b_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{VarX_n}{b_n^2} < \infty,$$

pa iz teorema 3.6 slijedi da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - EX_n}{b_n}$ *konvergira* $(g.s.)$. Tada iz leme 4.3 dobivamo

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j \left[\frac{X_j - EX_j}{b_j}\right] \to 0 \ (g.s.), \ \ za \ n \to \infty.$$

□

Napomena 4.1. *U primjenama teorema 4.1 najčešće je* $b_n = n$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$*.*

Teorem 4.2 ((Borelov jaki zakon velikih brojeva), vidi [1])**.** *Neka je* $Z_n \sim B(n,p)$ $(n \in \mathbb{N})$*. Tada je*

$$(g.s.) \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} = p. \tag{4.6}$$

Dokaz.

Iz napomene 2.1 slijedi da za svaki n $\in \mathbb{N}$ vrijedi $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$, pri čemu je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih Bernulijevih slučajnih varijabli, tj.

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\ X_n}{n^2} = p(1-p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

pa iz teorema 4.1 slijedi $(g.s.) \lim\limits_{n} \dfrac{Z_n - np}{n} = 0,$ *a tada* $(g.s.) \lim\limits_{n} \dfrac{Z_n}{n} = p.$

□

Teorem 4.3 ((Kolmogorov), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz* $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j, n \in \mathbb{N}\right)$ *konvergira* $(g.s.)$ *ako i samo ako* EX_1 *postoji i u tom slučaju je*

$$(g.s.) \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = EX_1. \tag{4.7}$$

Dokaz.

Pretpostavimo da $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j, n \in \mathbb{N}\right)$ konvergira $(g.s.)$. Tada iz

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} X_j \right)$$

slijedi $\frac{X_n}{n} \to\ 0\ (g.s.)$ za $n \to \infty$. Prema tome je

$$P\left(\overline{\lim_n}\left\{\ \left|\frac{X_n}{n}\right| \geqslant 1\right\}\right) = 0,$$

a to je ekvivalentno sa $P\left(\overline{\lim_n}\left\{\ \left|\frac{X_n}{n}\right| \geqslant n\right\}\right) = 0$. Budući da su događaji $\left\{\ \left|\frac{X_n}{n}\right| \geqslant n\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ nezavisni, iz teorema 3.1 slijedi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geqslant n\} < \infty$. No, zbog jednake distribuiranosti je $\mathrm{P}\{|X_n| \geqslant \mathrm{n}\} = \mathrm{P}\{|X_1| \geqslant \mathrm{n}\}$ za sve n, pa zaključujemo da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \geqslant n\} < \infty$. Iz propozicije 3.3 slijedi da postoji $\mathrm{E}X_1$ (tj. konačno je).

Obratno, pretpostavimo da EX_1 postoji. Koristit ćemo se metodom rezanja. Stavimo $X_n^* = X_n K_{\{|X_n|<n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tada imamo $P\{X_n \neq X_n^*\} = P\{|X_n| \geqslant n\} = P\{|X_1| \geqslant n\}$, pa iz propozicije 3.3 slijedi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq X_n^*\} < \infty$. Prema propoziciji 3.2 obrat će biti dokazan ako dokažemo

$$(g.s.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^* = EX_1. \tag{4.8}$$

Iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi $EX_j^* = E[X_1 K_{\{|X_1|<j\}}] \to EX_1$ *za* $j \to \infty$, pa je za dokazivanje obrata dovoljno dokazati

$$(g.s.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j^* - EX_j^*) = 0,\ \textit{po lemi}\ 4.1. \tag{4.9}$$

Budući da je $VarX_j^* \leqslant E[(X_j^*)^2]$ za sve j, iz teorema 4.1 slijedi da je za dokazivanje relacije (4.9) dovoljno dokazati da vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E[(X_j^*)^2] < \infty$. Iz definicije X_n^* i korolara 3.2 slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E[(X_n^*)^2] = \int\limits_{\Omega} \left[X_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_{\{|X_1|<n\}}\right] dP.$$

Za $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\int\limits_{\Omega} \left[X_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_{\{|X_1|<n\}}\right] K_{\{m-1 \leqslant |X_1| < m\}} dP = \int\limits_{\Omega} \left[X_1^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_{\{m-1 \leqslant |X_1| < m\}}\right] dP \leqslant$$

$$\leqslant \left(zbog \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{m^2} + \int\limits_m^{\infty} \frac{1}{x^2} dx\right) \leqslant m^2 \left(\frac{1}{m^2} + \int\limits_m^{\infty} \frac{1}{x^2} dx\right) P\{m-1 \leqslant |X_1| < m\} \leqslant$$

$$\leqslant 2m\ P\{m-1 \leqslant |X_1| < m\}.$$

Iz ove nejednakosti sumiranjem po m dobijemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E[(X_n^*)^2] \leqslant 2 \sum_{m=1}^{\infty} m\ P\{m-1 \leqslant |X_1| < m\} < \infty$$

Po dokazu propozicije 3.3 slijedi tvrdnja teorema.

□

Teorem 4.4 ((K.L.Chung), vidi [1]). *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $EX_n = 0$ za sve n. Neka su dalje $\varphi_n \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(n \in \mathbb{N})$ takve da su za sve n*

$$\frac{\varphi_n(t)}{t} \;\; i \;\; \frac{t^2}{\varphi_n(t)}$$

neopadajuće funkcije i neka je $(c_n, n \in \mathbb{N})$ niz u $\mathbb{R}$ $(c_n \neq 0$ za sve $n)$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\varphi_n(|X_n|)]}{\varphi_n(|c_n|)} < \infty, \tag{4.10}$$

tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{c_n} \quad konvergira \ (g.s). \tag{4.11}$$

Dokaz.

Primjenimo metodu rezanja, tj. za $(n \in \mathbb{N})$ stavimo

$$Y_n = X_n K_{\{|x_n|<|c_n|\}}.$$

Koristeći se teoremom 2.3 dobiti ćemo (jer su φ_n očigledno neopadajuće, dakle i Borelove funkcije)

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{Y_n^2}{c_n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{|x|<|c_n|} \frac{x^2}{c_n^2} dF_{X_n}(x) \leqslant \left(na\ skupu\ \{x;\ |x| < |c_n|\}\ je\ \frac{x^2}{c_n^2} \leqslant \frac{\varphi_n(|x|)}{\varphi_n(|c_n|)} \right)$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{|x|<|c_n|} \frac{\varphi_n(|x|)}{\varphi_n(|c_n|)} dF_{X_n}(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\varphi_n(|X_n|)]}{\varphi_n(|c_n|)} < \infty.$$

Zbog $\mathrm{E}X_n = 0$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|EY_n|}{|c_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|} \left| \int\limits_{|x|>|c_n|} x\ dF_{X_n} \right| \leqslant \left(na\ skupu\ \{x;\ |x| \geqslant |c_n|\}\ je\ \frac{\varphi_n(|x|)}{|x|} \geqslant \frac{\varphi_n(|c_n|)}{|c_n|} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{|x|\geqslant|c_n|} \frac{\varphi_n(|x|)}{\varphi_n(|c_n|)} dF_{X_n}(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\varphi_n(|X_n|)]}{\varphi_n(|c_n|)} < \infty.$$

Dalje je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ \left| \frac{X_n}{c_n} \right| \geq 1 \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq Y_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{|x|\geqslant|c_n|} dF_{X_n}(x) \leq$$

$$\leq (na\ skupu\ \{x; |x| \geq |c_n|\}\ je\ \varphi_n(|x|) \geq \varphi_n(|c_n|)) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{|x|\geqslant|c_n|} \frac{\varphi_n(|x|)}{\varphi_n(|c_n|)} dF_{X_n}(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\varphi_n(|X_n|)]}{\varphi(|c_n|)} < \infty.$$

Iz teorema 3.9 slijedi da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{c_n}$ konvergira (g.s.).

□

Napomena 4.2. *Ako u teoremu 4.4 umjesto* X_n *uzmemo* $X_n - EX_n$, $\varphi_n(t) = t^2$ *i* $c_n = n$ *za sve n, tada dobijemo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\varphi_n(X_n - EX_n)]}{\varphi_n(c_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\ X_n}{n^2},$$

tada je (4.10) *generalizacija od* (4.4).

Neka je $X_1, \dots, X_n$ slučajan uzorak (duljine n) iz funkcije distribucije F, onda su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable sa zajedničkom distribucijom F. Slučajan uzorak odgovara nizu od n nezavisnih mjerenja (promatranja) slučajne varijable X koja ima funkciju distribucije F.

Definicija 4.1. *Neka je* $X_1, \dots, X_n$ *slučajan uzorak duljine n iz funkcije distribucije F. Definiramo funkciju* F_n *na* $\mathbb{R}$ *sa*

$$\hat{F}_n(x) = \frac{broj\ X_i - ova\ koji\ su \leq x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

$\hat{F}_n$ *zovemo* ***empirijska funkcija distribucije*** *od F bazirana na uzorku* $X_1, \dots, X_n$. $\hat{F}_n(x)$ *je slučajna varijabla i vrijedi*

$$K_{\{x_k \leqslant n\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - F(x) & F(x) \end{pmatrix}$$

i budući da su $X_1, \dots, X_n$, *nezavisne, imamo*

$$n\hat{F}_n(x) \sim B(n, F(x)),\ x \in \mathbb{R}.$$

Iz Borelova jakog zakona velikih brojeva slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$(g.s.) \lim_{n\to\infty} \hat{F}_n(x) = F(x).$$

Postavlja se pitanje da li je konvergencija u (11) uniformna po x (g.s.). Potvrdan odgovor na to pitanje daje sljedeći, tzv. ***fundamentalni teorem statistike****.*

Teorem 4.5 ((Glivenko-Cantelli), vidi [1])**.** *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkom funkcijom distribucije F i neka je* $\hat{F}_n$ *empirijska funkcija distribucije bazirana na uzorku* $X_1, \dots, X_n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada vrijedi*

$$P\{\lim_{n\to\infty} [\sup_{x\in R} |\hat{F}_n(x) - F(x)|] = 0\} = 1. \tag{4.13}$$

Dokaz.

Neka je $\mathbb{Q}$ skup svih racionalnih brojeva. Budući da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$, imamo

$$\sup_{r\in\mathbb{Q}} |\hat{F}_n(r) - F(r)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|,$$

pa zbog prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}$ zaključujemo da je $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ slučajna varijabla. Neka je k $\in \mathbb{N}$, k ≥ 2; tada za $i = 1, 2, \dots, k-1$, stavimo

$$x_{k,i} = \min\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{i}{k} \leq F(x)\right\},$$

$$x_{k,0} = -\infty, \quad x_{k,k} = +\infty.$$

U daljnjem trebamo promatrati samo one intervale $[x_{k,i},\ x_{k,i+1}\rangle$ koji su neprazni. Ako je sada $x \in [x_{k,i},\ x_{k,i+1}\rangle$ tada vrijedi

$$\hat{F}_n(x) - F(x) \leq \hat{F}_n(x_{k,\,i+1} - 0) - F(x_{k,i}) =$$

$$= [\hat{F}_n(x_{k,\,i+1} - 0) - F(x_{k,\,i+1} - 0)] + [F(x_{k,i+1} - 0) - F(x_{k,i})] \leq$$

$$\leq \hat{F}_n(x_{k,\,i+1} - 0) - F(x_{k,\,i+1} - 0) + \frac{1}{k}.$$

Za $x \in [x_{x,i}, x_{k,i+1}\rangle$ također imamo

$$\hat{F}_n(x) - F(x) \geq \hat{F}_n(x_{k,\,i}) - F(x_{k,i+1} - 0) =$$

$$= [\hat{F}_n(x_{k,\,i}) - F(x_{k,\,i})] + [F(x_{k,i+1} - 0) - F(x_{k,i})] \geq$$

$$\geq \hat{F}_n(x_{k,\,i}) - F(x_{k,\,i}) - \frac{1}{k}.$$

Primijetimo da ove upravo dokazane dvije nejednakosti vrijede za svaki $\omega \in \Omega$. Iz gornjih nejednakosti slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|\hat{F}_n(x) - F(x)| \leq \max_{1 \leq i,j \leq k-1} \{|\hat{F}_n(x_{k,i}) - F(x_{k,i})|\}, |\hat{F}_n(x_{k,j} - 0) - F(x_{k,j} - 0)| + \frac{1}{k}. \tag{4.14}$$

Nejednakost u (4.14) vrijedi ako na objema stranama uzmemo supremum po svim x. Ako sada uzmemo $\limsup\limits_{n\to\infty}$ na obje strane, tada zbog $\hat{F}_n(x) \to F(x)$ $(g.s.)$ *za* $n \to \infty$ i $\hat{F}_n(x - 0) \to F(x - 0)$ $(g.s.)$ *za* $n \to \infty$(x proizvoljan). Druga tvrdnja slijedi primjenom teorema 4.1 na niz nezavisnih slučajnih varijabli $(K_{\{x_n<x\}}, n \in \mathbb{N})$ dobijemo

$$\limsup_{n\to\infty} [\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|] \leq \frac{1}{k}\ (g.s.). \tag{4.15}$$

Tvrdnja teorema (4.13) slijedi zbog proizvoljnosti i prebrojivosti od k.

□

Teorem 4.6. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem* m *i konačnim četvrtim momentom. Neka je* $A = [a_{nj}]$ $(n, j \in \mathbb{N})$ *beskonačna realna matrica takva da je* $a_{nj} = 0$ *za* $j > n$ *i da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1 \tag{4.16}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} {a_{nj}}^4 + \sum_{j,k=1;\ j\neq k}^{n} {a_{nj}}^2 {a_{nk}}^2 \right) < \infty, \tag{4.17}$$

tada imamo

$$(g.s.) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{nj} X_j = m. \tag{4.18}$$

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli čije su apsolutne vrijednosti (g.s.) uniformno ograničene i neka je $EX_n = m$ za sve n. Ako je $A = [a_{nj}]$ $(a_{nj} \in \mathbb{R},\ n, j \in \mathbb{N})$ takva matrica da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \leq M \ (n \in \mathbb{N}) \tag{4.19}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} {a_{nj}}^4 + \sum_{j,k=1;\ j\neq k}^{\infty} {a_{nj}}^2 {a_{nk}}^2 \right) < \infty, \tag{4.20}$$

tada imamo

$$(g.s.) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} X_j = m. \tag{4.21}$$

Teorem 4.7. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} Var\ X_n < \infty$. Ako je $A = [a_{nj}]$ $(a_{nj} \in \mathbb{R},\ n, j \in \mathbb{N})$ takva matrica da je*

$$\lim_{n\to\infty} = 0 \ za \ sve \ j, \tag{4.22}$$

i

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj} - a_{n,j+1}| \leq M, \ za \ sve \ n, \tag{4.23}$$

tada vrijedi

$$(g.s.) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(X_j - EX_j) = 0. \tag{4.24}$$

5 Zakon ponovljenog logaritma

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $(n \in \mathbb{N})$. Ispitivat ćemo brzinu konvergencije niza $(S_n, n \in \mathbb{N})$. Uočimo da je $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ ln\ ln\ n}}$ repna funkcija, pa iz Kolmogorovljevog zakona nula-jedan slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ ln\ ln\ n}} = c\ (g.s.) \quad \textit{gdje je c konstanta.}$$

Tvrdnja zakona ponovljenog logaritma je da je $c = 1$, navesti ćemo osnovne teoreme potrebne za dokaz.

Napomena 5.1. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koje su (g.s.) ograničene. Pretpostavimo da je $EX_k = 0$ za svaki k i stavimo*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad i \quad s_n^2 = Var\ S_n = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)\ (n \in \mathbb{N}).$$

U daljnjim razmatranjima koristiti ćemo sljedeću elementarnu nejednakost

$$e^{t(1-t)} \leq 1 + t \leq e^t, \quad za\ t \geq 0. \tag{5.1}$$

Desna nejednakost u (5.1) slijedi iz razvoja e^t u red potencija. Lijeva nejednakost je očigledna za $t \geq 1$, a za $0 \leq t < 1$ ona slijedi iz

$$ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \geq t - \frac{t^2}{2} \geq t - t^2.$$

Teorem 5.1 ((Kolmogorov), vidi [1])**.** *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable i pretpostavimo da je $EX_k = 0$ i $\left|\frac{X_k}{s_n}\right| \leq c$ (g.s.) za $k = 1, \ldots, n$, gdje je $c > 0$ konstanta (pretpostavljamo da je $s_n > 0$). Neka je $\varepsilon > 0$.*

1. *Ako je $\varepsilon c \leq 1$, tada vrijedi*

$$P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\} < exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon c}{2}\right)\right]. \tag{5.2}$$

2. *Ako je $\varepsilon c > 1$, tada vrijedi*

$$P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\} < exp\left[-\frac{\varepsilon}{4c}\right]. \tag{5.3}$$

Dokaz.

Neka je X proizvoljna slučajna varijabla takva da je $EX = 0$ i $|X| \leq c$ $(g.s.)$ i stavimo $\sigma^2 = VarX = E(X^2)$. Neka je $\sigma^2 > 0$. Imamo $E(|X|^m) \leq c^m$ za sve m, a za $r \geq 2$ vrijedi

$$|E(X^r)| \leq c^{r-2}E(X^2) = c^{r-2}\sigma^2.$$

Korištenjem teorema o dominiranoj konvergenciji za $0 < tc \leq 1$ dobijemo

$$E[e^{tX}] = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^r E(X^r)}{r!} \leq 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^r c^{r-2}\sigma^2}{r!} = 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{3} + \frac{t^2c^2}{3\cdot 4} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left[1 + \frac{tc}{3}\left(1 + \frac{tc}{4} + \frac{t^2c^2}{4\cdot 5} + \dots\right)\right] < 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left[1 + \frac{tc}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j}\right] < 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right).$$

Odavdje zbog nejednakosti u (5.1) slijedi

$$E[e^{tX}] < exp\left[\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\right] \quad za\ 0 < tc \leq 1. \tag{5.4}$$

Budući da je $E(X^r) \geq -c^{r-2}\sigma^2$ za $r \geq 2$, imamo

$$E[e^{tX}] \geq 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{3} - \frac{t^2c^2}{3\cdot 4} - \dots\right).$$

Odavdje, slično kao gore za $0 < tc \leq 1$, dobijemo

$$E[e^{tX}] > 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right),$$

što zajedno s lijevom nejednakosti u (5.1) daje

$$E[e^{tX}] > exp\left[\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\right)\right]. \tag{5.5}$$

Zbog $0 < \sigma^2 \leq c^2$ vrijedi

$$\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\left[1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\right] > 1 - \frac{tc}{2} - \frac{t^2\sigma^2}{2} \geq 1 - tc,$$

pa iz (5.5) slijedi

$$E[e^{tX}] > exp\left[\frac{t^2\sigma^2}{2}(1 - tc)\right], \quad za\ 0 < tc \leq 1. \tag{5.6}$$

Zbog nezavisnosti od $X_1, \dots, X_n$ imamo

$$E\left[exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[exp\left(\frac{tX_k}{s_n}\right)\right].$$

Odavdje i iz (5.4) za $X = \dfrac{X_k}{s_n}$, za $0 < tc \leq 1$ dobijemo

$$E\left[exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)\right] < exp\left[\frac{t^2}{2s_n^2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\sum_{k=1}^{n} VarX_k\right] = exp\left[\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\right].$$

Kombinirajući to sa sličnom relacijom izvedenom iz (5.6) dobivamo

$$exp\left[\frac{t^2}{2}(1 - tc)\right] < E\left[exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)\right] < exp\left[\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\right] \quad za\ 0 < tc \leq 1. \tag{5.7}$$

Lagano je dokazati da vrijedi

$$E\left[exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)\right] \geq \int\limits_{\{\frac{S_n}{s_n}>\varepsilon\}} exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)dP \geq e^{t\varepsilon}P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\}, \tag{5.8}$$

a odavdje i iz dane nejednakosti u (5.7), uz $t = \varepsilon$, ako je $\varepsilon c \leq 1$ slijedi

$$P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\} \leq e^{t\varepsilon}E\left[exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)\right] < exp\left[-\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 c}{4}\right] = exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon c}{2}\right)\right],$$

dakle vrijedi (5.2). Ako je $\varepsilon c > 1$ tada iz (5.8) i desne nejednakosti u (5.7), uz $t = \frac{1}{c}(tc \leq 1)$, dobijemo

$$P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\} \leq e^{t\varepsilon}E\left[exp\left(\frac{tS_n}{s_n}\right)\right] < exp\left[-\frac{\varepsilon}{c} + \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{4c^2}\right].$$

Budući da je

$$-\frac{\varepsilon}{c} + \frac{3}{4c^2} < -\frac{\varepsilon}{c} + \frac{3\varepsilon}{4c} = -\frac{\varepsilon}{4c},$$

zaključujemo

$$P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\} < exp\left[-\frac{\varepsilon}{4c}\right],$$

dakle vrijedi (5.3)

□

Napomena 5.2. *Primijetimo da u dokazu teorema 5.1 nije trebala lijeva nejednakost u* (5.7)*, no ona će nam trebati u dokazu sljedećeg teorema.*

Teorem 5.2 ((Kolmogorov), vidi [1])**.** *Neka su ispunjeni uvjeti teorema 5.1 i neka je $\gamma > 0$ proizvoljan. Ako je $c = c(\gamma)$ dovoljno malo i ako je $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ dovoljno velik, tada vrijedi*

$$P\left\{\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right\} < exp\left[-\frac{\varepsilon^2(1+\gamma)}{2}\right]. \tag{5.9}$$

Dokaz.

Dokaz teorema pogledajte u [1].

□

Teorem 5.3 ((Levyjeve nejednakosti), vidi [1])**.** *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable i neka je $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Tada za proizvoljni $\varepsilon > 0$ i proizvoljan medijan $\mu_{s_k - s_n}$ od $S_k - S_n$ vrijedi*

$$P\{\max_{1\leq k\leq n}(S_k - \mu_{s_k - s_n}) \geq \varepsilon\} \leq 2P\{S_n \geq \varepsilon\} \tag{5.10}$$

i

$$P\{\max_{1\leq k\leq n}|S_k - \mu_{s_k - s_n}| \geq \varepsilon\} \leq 2P\{|S_n| \geq \varepsilon\}. \tag{5.11}$$

Korolar 5.1. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s konačnim drugim momentima. Ako je $EX_k = 0$ za $k = 1, \ldots, n$, tada za proizvoljni $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P\{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon\} \leq 2P\{S_n \geq \varepsilon - [2VarS_n]^{\frac{1}{2}}\}. \tag{5.12}$$

Lema 5.1. *Neka je $(b_n, n \in \mathbb{N})$ neopadajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da $b_n \to \infty$ i $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$ za $n \to \infty$. Za svaki $c > 1$ postoji rastući (od nekog člana) niz prirodnih brojeva $(n_k, k \in \mathbb{N})$ takav da je $b_{n_k} \sim c^k$ $\left(tj.\ \frac{b_{n_k}}{c^k} \to 1 \text{ za } k \to \infty\right)$.*

Lema 5.2. *Neka je $0 < b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ i neka je $b_n \to \infty$ za $n \to \infty$. Ako je $\frac{b_n}{b_{n-1}} \sim c \geq 1$, tada $\frac{ln\ b_n}{ln\ b_{n-1}} \to 1$ za $n \to \infty$.*

Teorem 5.4 ((Zakon ponovljenog logaritma, Kolmogorov), vidi [1])**.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $EX_n = 0$ i $E(X_n^2) < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za svaki n neka je $c_n > 0$ takav da vrijedi $P\{|X_n| \leq c_n\} = 1$ i stavimo*

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad s_n = \sqrt{Var\ S_n}, \quad t_n = \sqrt{2ln\ ln\ s_n^2}.$$

Ako je $\lim_{n\to\infty} s_n^2 = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n t_n}{s_n} = 0$, tada vrijedi

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 ln\ ln\ s_n^2}} = 1\right\} = 1. \tag{5.13}$$

Literatura

[1] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[3] Ž. Pauše, Vjerojatnost, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[4] D. Jukić, Mjera i integral, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[5] G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker, Probability and Random processes, Oxford University Press, 2001.

[6] R. Durrett, Probability: Theory and Examples, Fourth Edition, Cambridge University Press, 2010.

[7] L.E. Bain, M. Engelhardt, Introduction to Probability and Mathematical Statistics, BROOKS/COLE Cengage Learning, 2008.