Redovi realnih brojeva

Brkić, Iva

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Brkić

Redovi realnih brojeva

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Brkić

Redovi realnih brojeva

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2017.

Sažetak

Ovaj završni rad sadrži osnovna svojstva i rezultate koji se odnose na redove realnih brojeva. Najprije se upoznajemo sa samom definicijom niza realnih brojeva i njegovim svojstvima. To je osnova za definiranje reda realnih brojeva. Prisjetit ćemo se konvergencije (divergencije) niza. Zatim ćemo navesti neke važne kriterije konvergencije reda te primjerima ilustrirati njihovu primjenu.

Ključne riječi

Niz realnih brojeva, red realnih brojeva, konvergencija i divergencija reda realnih brojeva

Series of real numbers

Summary

This final paper deals with properties and results concerning series of real numbers. Firstly, we well define the sequence of real numbers and its properties, which is the foundamental step in defining and understanding series of real numbers. Furthermore, we will discuss convergence (divergence) of sequences. Finaly, we will list some of the most important criterions of the convergence of series of the real numbers and illustrate using of them.

Key words

Sequence of real numbers, series of real numbers, convergence and divergence of series of real numbers

Sadržaj

Uvod

Redovi i konvergencija redova jako su važni u određenim dijelovima matematike kao što je primjerice matematička analiza. Cilj ovog rada je detaljnije proučiti redove realnih brojeva i njihova svojstva. Već su se i stari Grci bavili i proučavali redove na način da su pokušavali odrediti površinu kruga, no kako nisu mogli doći do rješenja uveli su pojam konvergencije i pojam limesa. Novi početak razvoja tog dijela matematike bio je pojavom diferencijalnog računa. Za način računanja i sam smisao zaslužni su Cauchy, Gauss te Bolzano. No, najzaslužniji je Cauchy koji je precizirao već otprije poznati pojam konvergencije i dao smisao i nove koncepte derivaciji, integralima i redovima.

Ovaj rad bavi se proučavanjem redova realnih brojeva i njihovim svojstima kao što su primjerice konvergencija i uniformna konvergencija. U prvom poglavlju navest ćemo neke pomoćne definicije i tvrdnje kako bi što lakše uveli definiciju reda realnih brojeva. U drugom poglavlju bavit ćemo se osnovnim definicijama i rezultatima vezanim uz redove realnih brojeva. Najprije ćemo se susresti sa samom definicijom reda te primjerima ilustrirati osnovne operacije s redovima. Na samom kraju obradit ćemo pojam konvergencije reda. Osim toga, navest ćemo i primjerima potkrijepiti osnovne rezultate o kriterijima konvergencije reda realnih brojeva.

1 Nizovi realnih brojeva i svojstva

1.1 Definicija i svojstva nizova

Prije samog definiranja reda realnih brojeva potrebno je proučiti što je niz realnih brojeva i njegova najbitnija svojstva. Stoga počnimo sa sljedećom definicijom:

Definicija 1. *Niz realnih brojeva je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Obično ga pišemo kao (a_n), gdje je $a_n = a(n)$, za $n \in \mathbb{N}$. Član a_n, $n \in \mathbb{N}$ nazivamo opći ili n-ti član niza. Oznake koje se još koriste su (a_n), $n \in \mathbb{N}$ ili samo $(a_n)_n$.*

Predočimo to s nekoliko primjera.

Primjer 1. *Zadan je niz (a_n) s općim članom a_n. Pogledajmo kako bi raspisali prvih nekoliko članova niza (a_n):*

a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$;

b) $a_n = \frac{1}{n}$;

c) $a_n = (-1)^{n-1}$;

d) $a_n = 5n - 4$.

Rješenje:
Uvrštavanjem za $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $\ldots$, $n = n$, $\ldots$ dobivamo niz (a_n). Tada imamo:

a) $5, 10, 20, 40, 80, \ldots, 5 \cdot 2^{n-1}, \ldots$;

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

c) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$;

d) $1, 6, 11, 16, 21, \ldots, 5n - 4, \ldots$.

Prije same klasifikacije nizova pogledajmo kako sve funkcionira na primjeru fibonaccijevih[1] brojeva koji također tvore jedan niz.

Primjer 2 (Fibonaccijev niz, vidi [2, Primjer 2.]). *Shema razmnožavanja zečeva je slijedeća: par zec-zečica (starih barem 2 mjeseca) tijekom svakog sljedećeg mjeseca dobiju par mladih (zeca i zečicu). Ako smo počeli s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci?*

[1] Leonardo od Pise, poznat još kao Fibonacci, postavio je 1202. godine u svom radu "Liber abaci" tzv. "problem zečeva".

Rješenje:
S F_n označimo broj parova zečeva nakon n-tog mjeseca (odnosno nakon $n+1$ mjeseci). Raspišimo koliko će zečeva biti nakon 1.mjeseca, 2.mjeseca, 3.mjeseca, ..., n-tog mjeseca.
$F_1 = 1$ (Nakon prvog mjeseca će biti još uvijek jedan par zečeva, jer oni još nisu zreli za oplodnju).
$F_2 = 2$ (Nakon dva mjeseca imamo dva para).
$F_3 = 3$ (Nakon tri mjeseca imamo tri para - originalni par i njihovi potomci nakon drugog i trećeg mjeseca).
$F_4 = 5$ (Nakon četiri mjeseca imamo 5 parova).
Induktivno nastavimo dalje te pogledajmo koliko će parova biti nakon n mjeseci.
Prema pretpostavci je $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$. Da bismo dobili F_n treba broju parova F_{n-1} koji su živjeli prethodni mjesec dodati novorođene parove koji mogu doći samo od F_{n-2} parova živih prije dva mjeseca. Stoga za svaki $n \geqslant 2$ vrijedi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

gdje je F_n je opći član tzv. Fibonaccjevog niza (F_n).

Navedimo sada neka osnovna svojstva nizova.

Definicija 2. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je pozitivan ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 0$ takav da je $a_n \geqslant a$, za svaki $n \geqslant n_0$.*

Primjer 3. *Obrazložimo sljedeću tvrdnju: niz (a_n) s općim članom $a_n = \frac{1}{n+1}$ je pozitivan niz realnih brojeva.*
Rješenje:
Prema gore navedenoj definiciji (a_n) je pozitivan ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n > 0$, za svaki $n \geqslant n_0$. Za $n_0 = 6$ slijedi da je niz (a_n) pozitivan.

Definicija 3. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je negativan ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $a < 0$ takav da je $a_n < a$, za svaki $n \geqslant n_0$.*

Primjer 4. *Niz (a_n) s općim članom $a_n = \frac{5-6}{n}$ je negativan niz realnih brojeva za $n_0 = 6$.*

Definicija 4. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je stacionaran ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je $a_n = a$, za svaki $n \geqslant n_0$.*

Primjer 5. *Niz (a_n) zadan je općim članom $a_n = 1 + \lfloor \frac{3}{n} \rfloor$. Napišimo nekoliko članova tog niza i zaključimo kakav je obzirom na klasifikaciju.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1+3=4, \\ a_2 &= 1+1.5=2, \\ a_3 &= 1+1=2, \\ a_4 &= 1+0=1, \\ a_5 &= 1, \\ a_6 &= 1. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Za $n_0 = 4$ *je niz* (a_n) *stacionaran niz.*

Definicija 5. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da je monotono rastući ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je* $a_n \leqslant a_{n+1}$*, za svaki* $n \geqslant n_0$*.*

Primjer 6. *Ispitajtajmo monotonost niza* (a_n) *koji je zadan s općim članom* $a_n = 2^n$*.*
Rješenje:
Raspišimo najprije prvih par članova niza $(a_n) = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, \ldots$
$a_n = 2^n$
$a_{n+1} = 2^{n+1}$.
Očigledno: $2^n \leqslant 2^{n+1} \Rightarrow a_n \leqslant a_{n+1} \Rightarrow$ *Niz* (a_n) *je monotono rastući.*

Definicija 6. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da je monotono padajući ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je* $a_n \geqslant a_{n+1}$*, za svaki* $n \geqslant n_0$*.*

Primjer 7. *Ispitajmo monotonost niza* (a_n) *koji je zadan s općim članom* $a_n = 2^{-n}$*.*
Rješenje:
Raspišimo najprije prvih par članova niza $(a_n) = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \ldots, \ldots$
$a_n = 2^{-n}$
$a_{n+1} = 2^{-(n+1)}$.
Očigledno iz: $2^{-n} \geqslant 2^{-(n+1)} \Rightarrow a_n \geqslant a_{n+1}$ *slijedi da je* (a_n) *je monotono padajući.*

Definicija 7. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da je strogo monotono rastući ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je* $a_n < a_{n+1}$*, za svaki* $n \geqslant n_0$*.*

Primjer 8. *Niz* (a_n) *s općim članom* $a_n = q^{n-1}$ *je strogo monotono rastući ukoliko je* $q > 1$*.*
Rješenje:
Imamo:

$$q > 1 \Rightarrow \ q^{n-1}q > q^{n-1} \Rightarrow \ q^n > q^{n-1} \Rightarrow \ a_{n+1} > a_n.$$

Definicija 8. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da je strogo monotono padajući ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je* $a_n > a_{n+1}$*, za svaki* $n \geqslant n_0$*.*

Primjer 9. *Niz* (a_n) *s općim članom* $a_n = q^{n-1}$ *je strogo monotono padajući ukoliko je* $0 < q < 1$.
Rješenje:
Imamo:

$$0 < q < 1 \Rightarrow \ q^n < q^{n-1} \Rightarrow \ a_{n+1} < a_n.$$

Napomena 1. *Niz* (a_n) *je (strogo) monotono rastući onda i samo onda ako je* $(-a_n)$ *(strogo) monotono padajući.*

Napomena 2. *Ako je niz monotono rastući ili monotono padajući kažemo da je monoton.*

Definicija 9. *Za niz* (a_n) *kažemo da je omeđen odozgo ako je skup* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *omeđen odozgo.*

Definicija 10. *Za niz* (a_n) *kažemo da je omeđen odozdo ako je skup* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *omeđen odozdo.*

Definicija 11. *Za niz* (a_n) *kažemo da je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo.*

Primjer 10. *Dokažimo da je niz* (a_n) *omeđen,ako je opći član zadan s* $a_n = \frac{2}{n} + \cos^2 \frac{1}{n+1}$.
Rješenje:
Znamo, gornjoj definiciji, da je niz omeđen ako je skup $a_n : n \in \mathbb{N}$ *omeđen, a skup je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo* $n \in \mathbb{N}$.

Očito vrijedi da je:

$$0 < a_n = \frac{2}{n} + \cos^2 \frac{1}{n+1},$$

iz čega očigledno slijedi da je niz s oćim članom a_n *omeđen odozdo. Znamo da je sigurno* $\frac{2}{n} \leqslant 2$, *odnosno da je* $\cos^2 \frac{1}{n+1} \leqslant 1$, *što nam daje tvrdnju da je naš niz zadan s općim članom*

$$a_n = \frac{2}{n} + \cos^2 \frac{1}{n+1} \leqslant 3,$$

odonosno omeđen je odozgo, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Prema definiciji, niz je omeđen ukoliko je omeđen odozdo i odozgo pa je tvrdnja dokazana!

1.2 Neki posebni nizovi

Već u srednjoj školi susreli smo se s pojmovima aritmetičkog i geometrijskog niza. To su vrlo korisni tipovi nizova, pa se prisjetimo njihovih definicija i svojstava.

Definicija 12. *Neka su $a_n, d \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva kojemu je opći član definiran formulom*

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

nazivamo aritmetički niz s diferencijom d.

Svaki niz realnih brojeva kojemu je razlika između člana i njegovog direktnog prethodnika jednaka za svaki par susjednih članova, tj. $a_{n+1} - a_n = d$, odnosno $a_{n+1} = a_n + d$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ nazivamo aritmetički niz. Broj d nazivamo deferencija aritmetičkog niza. Odnosno, prema definiciji je $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = d$, iz čega slijedi:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Svaki član niza (osim prvog) je aritmetička sredina njemu susjednih članova.

Neka je a_1 prvi član aritmetičkog niza s diferencijom d. Ispisivanjem prvih nekoliko članova dobit ćemo formulu za opći član niza (a_n).

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + 0 \cdot d, \\
a_2 &= a_1 + d, \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Primjer 11. *Zadan je aritmetički niz 2,8,14,22,.... Trebamo odrediti a_{1000}.*

Rješenje:

Imamo: a_1=2, $d = a_2 - a_1$=$8-2$=6. Opći član je a_n=2+$(n-1)$6, pa iz toga slijedi

$$a_{1000} = 2 + (1000-1)6 = 996.$$

Teorem 1 (vidi [2]). *Suma prvih n članova s_n aritmetičkog niza dana je s:*

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{3}$$

Dokaz. Zaista, iskoristimo li formulu za zbroj prvih (n-1) prirodnih brojeva

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d] = \sum_{k=1}^{n} a_1 + \sum_{k=1}^{n}(k-1)d \\
&= na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\
&= \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).
\end{aligned}$$

□

Definicija 13. *Neka su $a_1, q \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva (a_n) kojemu je opći član definiran formulom*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

nazivamo geometrijski niz s kvocijentom q.

Svaki niz kod kojeg je kvocijent između člana i člana koji mu direktno prethodi jednak za svaki par susjednih članova, tj. za koji vrijedi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = q$$

nazivamo geometrijski niz. Broj q nazivamo kvocijent geometrijskog niza.

Svaki član (osim prvog) je geometrijska sredina njemu susjednih članova.

Raspišemo li prvih nekoliko članova niza (a_n) dobivamo:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \cdot q^0, \\
a_2 &= a_1 \cdot q^1, \\
a_3 &= a_2 \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2, \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot +q^n. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Odnosno, geometrijski niz je na jedinstven način određen svojim prvim članom a_1 i kvocijentom q.

Primjer 12. *Odredimo opći član geometrijskog niza $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, \ldots$.*

Rješenje:
Prvi član zadanog geometrijskog niza je $a_1 = 3$, a kvocijent je $q = \frac{1}{4}$ ($q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}$). Prema prethodnoj formuli je $a_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Teorem 2 (vidi [2]). *Suma s_n prvih n članova geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q iznosi:*

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n a_1, & q = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Dokaz. Ako od jednakosti $s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + +a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$ oduzmemo jednakost $q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$ imamo $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$, odakle za $q \neq 1$ dobivamo traženu formulu. Očigledno, za $q = 1$ je $s_n = n a_1$. □

Primjer 13. *Tri broja čine konačan geometrijski niz, komu je zbroj* 130. *Ako se srednjem članu doda* 20, *dobivamo konačan aritmetički niz. Kako glasi taj niz?*

Rješenje:
Neka je $a_1, a_1 q, a_1 q^2$ traženi niz. Niz $a_1, a_1 q + 20, a_1 q^2$ je aritmetički. Budući da je $a_1 q + 20 - a_1 = a_1 q^2 - a_1 q - 20$ $(= d)$ i $130 = a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = a_1(1 + q + q^2)$, dobivamo sustav:

$$a_1(q^2 - 2q + 1) = 20$$
$$a_1(1 + q + q^2) = 130.$$

Izlučimo li iz druge jednadžbe a_1 i uvrstimo u prvu, nakon sređivanja dobivamo jednadžbu

$$3q^2 - 10q + 3 = 0,$$

čija rješenja su $q_1 = 3$ i $q_2 = \frac{1}{3}$. Iz druge jednadžbe za a_1 imamo dva rješenja: $a_1 = \frac{130}{1+q_1+q_1^2} = 10$, $a_1 = \frac{130}{1+q_2+q_2^2} = 90$. Za traženi geometrijski niz dobivamo dva rješenja: a) $10, 30, 90$, b) $90, 30, 10$.

Definicija 14. *Niz kome je svaki član (osim prvog) harmonijska sredina dvaju neposredno susjednih članova nazivamo harmonijski niz.*

1.3 Osnovna svojstva nizova

Definicija 15. *Kažemo da je realan broj a gomilište ili točka gomilanja niza realnih brojeva (a_n) ako svaka ϵ okolina broja a sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n).*

Primjer 14. *Pogledajmo imaju li nizovi (a_n) i (b_n) zadani s općim članovima gomilište:*

a) $a_n = \frac{1}{n}$;

b) $b_n = (-1)^n$.

Rješenje:

a) Uvrštavajući redom brojeve 1,2,3,...,n,..., shvatit ćemo da su članovi sve bliže i bliže 0. Iz čega slijedi da je 0 gomilište, odnosno a=0 iako 0 "ne živi" u nizu. Gomilište ne mora biti dio niza.

b) *Ovaj niz ima dva gomilišta -1 i 1 i oni pripadaju nizu* (b_n), *odnosno* $a = 1, -1$. *Uvrstimo li parne brojeve umjesto* n *svi članovi će biti jednaki 1, a kada uvrstimo neprarne brojeve svi članovi će biti jednaki -1.*

Navedimo sada osnovni teorem o prethodnom svojstvu, čiji dokaz možete vidjeti u [2].

Teorem 3 (Bolzano – Weierstrass, vidi [2])**.** *Svaki omeđen niz realnih brojeva ima barem jedno gomilište.*

Dokaz se može vidjeti u [2].

Definicija 16. *Kažemo da je niz* (a_n) *konvergentan ako postoji realan broj* a *takav da za svaki realan broj* $\epsilon > 0$ *postoji prirodan broj* n_0 *takav da vrijedi:*

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad \forall\ n > n_0. \tag{6}$$

Broj a *zovemo limes ili granična vrijednost niza* (a_n) *i pišemo:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{7}$$

Dakle, u svakoj ϵ-okolini nalazi se ∞ mnogo članova niza (a_n) osim eventualno konačno mnogo njih. Znači simetrična okolina $\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$ sadrži sve članove niza (a_n), osim eventualno prvih n_0 članova toga niza.

Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.

Primjer 15. *Pokažimo uz pomoć definicije da vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Rješenje:
Trebamo pokazati da $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da :*

$$\forall\ n > n_0 \Rightarrow\ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \Leftrightarrow\ \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow\ n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Neka je $\epsilon > 0$. *Definirajmo* $n_0 = \lfloor \frac{1}{\epsilon} + 1 \rfloor$.
Tada je:

$$n_0 > \frac{1}{\epsilon}, \quad \forall\ n > n_0$$

pa je:

$$n \geqslant\ n_0 > \frac{1}{\epsilon}.$$

Primjerice, ako je $\epsilon = \frac{1}{2}$, *imali bi* $n_0 = \lfloor \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 \rfloor = 3$.

Dokažimo sada sljedeće rezultate.

Teorem 4 (vidi [2])**.**

a) Svaki konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedan limes.

b) Konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedno gomilište. To je ujedno i njegov limes.

Dokaz. Neka je (a_n) konvergentan niz realnih brojeva, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i b $(b \neq a)$ proizvoljan realan broj. Odaberimo disjunktne ϵ okoline brojeva a i b, gdje je u ϵ okolini broja a nalaze se svi članovi niza (a_n) osim možda konačno mnogo njih pa ti članovi ne mogu biti u ϵ okolini broja b. Prema tome, b ne može biti niti granična vrijednost niti gomilište toga niza. □

Primjer 16. *Sama ograničenost nije dovoljna za konvergenciju niza. Niz definiran s* $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *tj. niz* $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ *je očigledno ograničen. Broj -1 nije limes jer za* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *izvan intervala* $[-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}]$ *se nalazi beskonačno mnogo članova niza. To znači da se unutar intervala ne nalaze gotovo svi članovi niza (iako ih je beskonačno). Iz istih razloga 1 nije limes.*

Definicija 17. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da divergira k* $+\infty$ *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *ako za svaki broj* $M > 0$ *postoji prirodan broj* n_0, *takav da* $a_n > M$, $\forall\ n > n_0$. *Niz realnih brojeva* (a_n) *divergira k* $-\infty$ *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *ako za svaki broj* $m < 0$ *postoji prirodan broj* n_0, *takav da* $a_n < m$, $\forall\ n > n_0$.

Primjer 17. *Izračunaj sljedeće limese:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

Rješenje:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2} = -\infty$;

b) Podjelimo li brojnik i nazivnik s n^3 dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^6}}}{\sqrt{4+\frac{3}{n^6}}-\frac{1}{n^2}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Teorem 5 (vidi [2])**.** *Svaki konvergentan niz realnih brojeva je omeđen.*

Dokaz. Neka niz (a_n) konvergira broju a. Tada se u proizvoljnoj ϵ -okolini njegova limesa a nalaze skoro svi članovi niza, a izvan te okoline ima ih najviše konačno mnogo. Zbog toga možemo odabrati brojeve $m, M \in \mathbb{R}$, $(\ m < M)$ takve da su svi članovi niza sadržani u segmentu $[m, M]$. □

Teorem 6 (vidi [2]). *Svaki omeđen i monoton niz realnih brojeva je konvergentan.*

Primjer 18. *Pokažimo da je niz (e_n) zadan s općim članom $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$ konvergentan.*

Rješenje:
Prema prethodnom teoremu moramo pokazati da je niz (e_n) omeđen i monoton.
Prvo pokažimo monotonost:

$$\begin{aligned} e_1 &= \Big(1+\frac{1}{1}\Big)^1 = 2, \\ e_2 &= \Big(1+\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{9}{4} = 2.25. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Možemo pisati :

$$\begin{aligned} e_n &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{n}\Big)^k = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{n^k}\Big)^k \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\Big(1-\frac{3}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Analogno nam slijedi:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{k+1} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}\Big(\frac{1}{n^k}\Big)^{k+1} \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{3}{n+1}\Big)\ldots\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big). \end{aligned}$$

Iz toga direktno slijedi da je $e_n < e_{n+1}$ pa je niz strogo monotono rastući!

Sada pokažimo omeđenost:
$e_n \geqslant 2$ pa je (e_n) je omeđen odozgo s 2.
Pokažimo još omeđenost odozdo:
$e_n = 2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})(1-\frac{3}{n+1})\ldots(1-\frac{k-1}{n+1}) < 2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant 2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$.
$e_n \leqslant 2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2(1-(\frac{1}{2})^n) \leqslant 3$ pa je niz (e_n) omeđen!
Kako smo pokazali da je niz (e_n) monoton i omeđen prema prethodnom teoremu slijedi da je niz (e_n) konvergentan!

Napomena 3. *Obrat prethodnog teorema ne vrijedi jer postoje nizovi koji nisu monotoni, a imaju limes.*

Primjer 19. *Pokažimo da je niz* (a_n) *zadan s općim članom* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *konvergentan.*
Rješenje:
Znamo da ovaj niz nije monoton, no lako se pokaže da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Iz prethodnih primjera vidimo da računanje limesa po definiciji nije lagan posao, stoga trebamo dokazati i ilustrirati pravila za računanje limesa.

Teorem 7 (vidi [2])**.** *Neka su nizovi realnih brojeva (an) i (bn) konvergentni i neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Tada vrijedi:*

1. *niz* $(a_n \pm b_n)$ *je konvergentan i vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a_n \pm b_n$.
   (tj. limes zbroja (razlike) jednak je zbroju (razlici) limesa)).

2. *niz* $(a_n \cdot b_n)$ *je konvergentan i vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
   (tj. limes produkta jednak je produktu limesa).

3. *niz* $|(a_n)|$ *je konvergentan i vrijedi:/* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = |a|$.
   (tj. limes niza apsolutnih vrijednosti jednak je apsolutnoj vrijednosti limesa).

4. *ako je* $b_n \neq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b \neq 0$, *niz* $(\frac{1}{b_n})$. *je konvergentan i vrijedi:*
   $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{b_n}) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
   (tj. limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa).

5. *ako je* $b_n \neq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b \neq 0$, *niz* $(\frac{a_n}{b_n})$ *je konvergentan i vrijedi:*
   $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

6. *ako je* $a_n > 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha > 0$ *za bilo koji realan broj,onda je niz* (a_n^α) *konvergentan i vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^\alpha = a^\alpha$.

Primjer 20. *Odredimo:*

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{7n-10}{2n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7n-10}{\lim\limits_{n\to\infty} 2n+1} = \frac{7}{2}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{6+\tfrac{7}{n}} = \sqrt[6]{\lim_{n\to\infty} 6+\tfrac{7}{n}} = \sqrt[6]{6}.$$

Teorem 8 (vidi [2])**.** *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz možemo vidjeti u [2].

Često niz kome treba ispitati konvergenciju možemo "stisnuti" između dva konvergentna niza. Ako pri tome ta dva niza konvergiraju istoj graničnoj vrijednosti, onda i polazni niz konvergira toj vrijednosti, kao što nam govori sljedeći teorem:

Teorem 9 (vidi [2])**.** *Neka su* (a_n), (b_n), (c_n) *nizovi realnih brojeva i neka postoji prirodan broj* n_1 *takav da je*

$$a_n \geqslant b_n \geqslant c_n, \ \forall n \geqslant n_1. \tag{8}$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *onda i niz* (b_n) *konvergira prema* a, *tj.* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Dokaz možemo vidjeti u [2].

Primjer 21. *Pokažimo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.
Rješenje:
Budući da je $2^{n-1} \leqslant n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *za* $n \leqslant 1$ *imamo* $2^{n-2} \leqslant (n-1)!$. *Iz toga slijedi:*

$$0 \leqslant \frac{3^n}{n!} = \frac{9}{n}\frac{3^{n-2}}{(n-1)!} \leqslant \frac{9}{n},$$

$$0 \leqslant \frac{2^n}{n!} \leqslant 9n.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, *primjenom prethodne tvrdnje dobivamo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

Teorem 10 (vidi [2])**.** *Neka su* (a_n), (b_n) *dva niza realnih broja i neka postoji prirodan broj* n_1 *takav da je* $a_n \geqslant b_n, \forall n \geqslant n_1$. *Ako je* (b_n) *konvergentan niz i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *onda vrijedi:*

a) Niz (a_n) *je omeđen odozgo.*

b) Ako je (a_n) *konvergentan niz, onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant b$.

Dokaz možemo vidjeti u [2].

2 Redovi realnih brojeva

2.1 Motivacija

Kao motivaciju za uvođenje pojma reda promotrit ćemo dva problema: problem zapisivanja periodičnog decimalnog broja u obliku razlomka i problem sume beskonačno realnih brojeva.

Problem zapisivanja periodničnog broja u obliku razlomka jedan je od konkretnijih problema.

Primjer 22. *Neka je n periodičan decimalan broj, odnosno*

$$m = 0.12121212121212\ldots.$$

Kraće ga zapisujemo kao

$$m = 0.12.$$

Zanima nas je li moguće taj broj zapisati u obliku razlomaka i kako? Primjetimo,

$$m = \frac{12}{10^2} + \cdots + \frac{12}{10^{(2n)}}.$$

Uočimo da tada pribrojnici $a_1 = \frac{12}{10^2}$,$\cdots$, $a_n = \frac{12}{10^{(2n)}}$, $n \in \mathbb{N}$ čine geometrijski niz s prvim članom

$$a_1 = \frac{12}{10^2}$$

i kvocjentom

$$q = \frac{1}{10^2}.$$

Znamo da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, što nam govori da i naših pribrojnika ima beskonačno mnogo. Zanima nas kako ih sve zbrojiti, tj. kako odrediti sumu beskonačno mnogo članova?
Označimo s $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ sumu prvih n pribrojnika. Kako bi dobili što bolju aproksimaciju broja m, broj n nam treba biti veći. Kao što znamo:

.

$$\lim_{n\to\infty} \sum s_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ukoliko podijelimo broj 4 s brojem 33 upravo dobivamo naš zadani broj m. Odnosno,

$$m = \frac{4}{33} = 0.1212121212\ldots.$$

Primjer 23. *Kako zbrojiti beskonačnu sumu:*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots?$$

Ako to napravimo na sljedeći način:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

mogli bi zaključiti da je suma jednaka nuli. Ali, ako to napravimo drugačije:

$$1-(1-1)-(1-1)-\dots$$

mogli bi zaključiti da je suma jednaka 1.

Vidimo da nije jednako zbrajati konačno i beskonačno realnih brojeva. Potrebno je dobro definirati sumu beskonačno realnih brojeva.

2.2 Pojam reda i svojstva reda realnih brojeva

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Pomoću tog niza definirat ćemo novi niz:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + \cdots + a_n. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Iz prethodnog vidimo da nam je n-ti član niza (s_n) definiramo kao zbroj prvih n članova niza (a_n).

Primjer 24. *Neka je dan niz (a_n) s općim članom:*

a) $a_n = n$ *;*

b) $a_n = \frac{1}{n}$.

Raspišimo prvih par članova niza (s_n).

Rješenje

a) Imamo: $s_1 = 1$, $s_2 = 1+2$, $s_3 = 1+2+3$, $\dots$, $s_n = 1+2+3+4+\cdots+n$.

b) Slijedi, $s_1 = 1$, $s_2 = 1+\frac{1}{2}$, $s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\dots$, $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

Navedimo sada preciznu definiciju reda realnih brojeva:

Definicija 18. *Uređeni par $((a_n),(s_n))$ nazivamo red realnih brojeva,gdje je a_n opći član niza, a s_n je njegova n-ta parcijalna suma. Obično red realnih brojeva označavamo s:*

$$\sum a_n.$$

Navedimo sada jedan primjer iz svakodnevnog života kako bi lakše ilustrirali što je to red realnih brojeva.

Primjer 25. *Plivač sudjeluje u maratonu od 42 km. Da bi završio utrku, najprije mora preplivati polovicu bazena, točnije 21 km. Nakon što završi prvu polovicu utrke ponovo mora preplivati još polovicu puta do kraja, ili još 10,5 km. Nastavljajući ovim pravilom, uvijek će prelaziti polovicu puta. Hoće li plivač ikada završiti utrku?*

Rješenje Kako bi došli do rješenja trebamo zbrojiti sve dijelove koje prelazi plivač svaki puta kada prepliva polovicu preostalog puta: $21 + 10,5 + 5,25 + \dots$.
Tu sumu možemo zapisati i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 21(\frac{1}{2})^{n-1}$.
Da bi pronašli sumu beskonačnog reda, trebamo pogledati parcijalne sume:

$$\begin{aligned} s_1 &= 21 \\ s_2 &= 21 + 10.5 = 31.5, \\ s_3 &= 21 + 10.5 + 5.25 = 36.75, \\ s_4 &= 21 + 10.5 + 5.25 + 2.625 = 39.375, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + \dots + a_n. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kako je to primjer geometrijskog reda, $s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. Dakle, za veće n, bit će:

$$\begin{aligned} s_7 &= 21\frac{1-0,5^7}{1-0.5} = 41.67, \\ s_8 &= 21\frac{1-0,5^8}{1-0.5} = 41.84, \\ s_{10} &= 21\frac{1-0,5^10}{1-0.5} = 41.96. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nastavimo li induktivno dalje, slijedi da kada n teži u beskonačnost, vrijednost s_n teži u 42. Govoreći o sumama, događa se sljedeće: kako se n povećava tako se n-ti član niza smanjuje, odnosno n-ti član manje doprinosi vrijednosti s_n.

Ova situacija predstavlja verziju problema koji je prije tisuće godina prvi put postavio Zenon iz Eleje. [2]

Definicija 19. *Za red $\sum a_n$ kažemo da je red s nenegativnim članovima ako je $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Primjer 26. *Red $\sum \frac{1}{n^2}$ je red s nenegativnim članovima jer je $a_n \geqslant 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

[2]Zenon iz Eleje je bio grčki filozof predsokratovac, smislio 4 sofizma koji su dio knjige Principi matematike.

Definicija 20. *Za red* $\sum a_n$ *kažemo da je red s nenegativnim članovima ako je* $a_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Primjer 27. *Red* $\sum \frac{-1}{n^2}$ *je red s negativnim članovima.*

Definicija 21. *Red* $\sum a_n$ *nazivamo alternirani red ako je za svaki* $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geqslant 0$ *i* $a_{2n} \leqslant 0$ *ili* $a_{2n-1} \leqslant 0$, $a_{2n} \geqslant 0$.

Primjer 28. *Red* $\sum(-1)^n$ *je alternirani red.*

Više svojstava i primjera za redove realnih brojeva možemo vidjeti u [4].

2.3 Konvergencija reda realnih brojeva

Računanje sume nekog reda često je jako složen matematički problem, koji se u većini slučajeva uz ove do sada navedene pojmove ne može riješiti. No, ako na neki način zaključimo da li red konvergira ili ne, aproksimacijama možemo odrediti sumu reda. Zbog toga navodimo nekoliko osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije, odnosno divergencije reda.

Definicija 22. *Za red* $((a_n),(s_n))$ *kažemo da je konvergentan (divergentan) ako je njegov niz parcijalnih suma* (s_n) *konvergentan (divergentan). Ako postoji limes* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ *(s konačan ili beskonačan), kažemo da je s suma reda* $((a_n),(s_n))$ *i pišemo:*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Zbog jednostavnosti izražavanja upotrebljava se ista oznaka: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ili* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots$.

Navedimo sada nužan i dovoljan uvijet konvergencije reda.

Teorem 11 (Nužan uvijet konvergencije reda, vidi [2])**.** *Ako red* $\sum a_n$ *konvergira, onda niz* $(a_n)_n$ *konvergira k nuli, tj.vrijedi*

$$\sum a_n \text{ konvergira} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{9}$$

Dokaz. Ako red konvergira k broju s, onda vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0.$$

Obrat ne vrijedi! □

Ukoliko to ne vrijedi, odmah zaključujemo da je red divergentan! Primjer koji potvrđuje ovu tvrdnju je harmonijski red. Dakle, nužan uvjet nije i dovoljan uvjet da bi red konvergirao.

Primjer 29. *Treba ispitati konvergenciju reda* $\sum \frac{n}{n+1}$.
Rješenje:
Opći član reda je $a_n = \frac{n}{n+1}$.
Imamo: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = 1$.
Iz dobivenog je vidljivo da nije ispunjen nužan uvijet konvergencije, tj. opći član reda konvergira prema 1, a ne prema nuli. To znači da je red divergentan!

Primjer 30. $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ *je harmonijski red. Znamo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *, a to nam govori da harmonijski red ne zadovoljava nužan uvijet konvergencije.*

Teorem 12 (Nužan i dovoljan uvijet konvergencije reda, vidi [2])**.** *Red* $\sum a_n$ *nenegativnih brojeva konvergira onda i samo onda ako je niz* $(s_k)_k$ *parcijalnih suma omeđen (omeđen odozgo).*

Dokaz. Niz $(s_k)_k$ je monotono rastući. Konvergira samo ako je omeđen. □

Teorem 13 (vidi [2])**.** *Red s nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako je njegov niz parcijalnih suma omeđen.*

Dokaz. Ako je red konvergentan, onda je po definiciji njegov niz parcijalnih suma konvergentan. Svaki konvergentan niz je omđen niz. Ako je niz parcijalnih suma omeđen, tada je zbog monotonosti i konvergentan. □

Općenito ako imamo dva reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ i ukoliko je red $\sum(a_n + b_n)$ ili red $\sum(a_n - b_n)$ konvergentan to ne povlači konvergenciju redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

Primjer 31. *Red* $0 + 0 + 0 + 0 + .. = \sum 0$ *je konvergentan, ali redovi* $\sum 1$ *i* $\sum(-1)$ *su divergentni.*

Definicija 23. *Za red* $\sum a_n$ *kažemo da je apsolutno konvergentan ako je red* $\sum |a_n|$ *konvergentan. Red* $\sum a_n$ *uvjetno konvergentan ako konvergira, ali red* $\sum |a_n|$ *divergira.*

2.4 Poredbeni ili usporedni kriterij

Kažemo da je red (b_n) majoranta reda $\sum a_n$, ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n \leqslant b_n$ za svaki $n \geqslant n_0$. U isto vrijeme kažemo da je red $\sum a_n$ minoranta reda $\sum a_n$.

Teorem 14 (Poredbeni ili usporedni kriterij, vidi [2])**.** *Neka su* $\sum a_n$ $\sum b_n$ *bilo koja dva reda s nenegativnimm članovima i neka postoje realan broj* $c > 0$ *i prirodan broj* n_0 *takvi da je*

$$a_n \geqslant c \cdot b_n, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Tada vrijedi:

a) Ako red $\sum b_n$ *konvergira, onda konvergira i red* $\sum a_n$, *b) Ako red $\sum a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum b_n$.*

Dokaz. Označimo parcijalne sume redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ sa s_n i σ_n. Nizovi (s_n) i (σ_n) su monotono rastući. Za proizvoljni $n \geqslant n_0$ dobivamo:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k.$$

a) Neka je red $\sum b_n$ konvergentan. To znači da je niz (σ_n) konvergentan, a onda i omeđen. Iz prethodne nejednakosti tada slijedi omeđenost niza (s_n). Kako je, dakle, niz (s_n) monotono rastući i moeđen, red $\sum a_n$ je konvergentan.

b) Neka je red $\sum a_n$ divergentan. To znači da je niz (s_n) odozgo neomeđen, pa je prema gornjoj nejednakosti i niz (σ_n) odozgo neomeđen. Dakle, red $\sum b_n$ je divergentan.

□

Primjer 32. *Ispitajmo konvergenciju redova:*

a) $\sum \frac{1}{2n-1}$;

b) $\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Rješenje:

a) Ako usporedimo polazni red s redom $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira imali bi:

$$\lim \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Zaključujemo prema usporednom kriteriju da polazni red divergira.

b) Ako usporedimo polazni red s redom $\sum \frac{1}{2^n}$ koji konvergira imali bi:

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}, \ \forall n \geqslant 1.$$

Zaključujemo da polazni red konvergira prema usporednom kriteriju.

Teorem 15 (Poredbeni kriterij u formi limesa, vidi [2]).
Neka je $\sum a_n$ *red s nenegativnim članovima,* $\sum b_n$ *red s pozitivnim članovima i neka postoji* $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=c \geqslant 0.$

a) Za $c > 0$ *red* $\sum a_n$ *konvergira onda i samo onda ako red* $\sum b_n$ *konvergira,*

b) Ako je $c = 0$ *i ako red* $\sum b_n$ *konvergira, onda i red* $\sum a_n$ *konvergira,*

c) Ako je $c = 0$ *i ako red* $\sum a_n$ *divergira, onda i red* $\sum b_n$ *divergira.*

Dokaz. Imamo $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=$ c, pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n > n_0$, odakle je $-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \epsilon$ za svaki $n > n_0$. Preuređivanjem imamo $(c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n$. U slučaju $c > 0$ možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\epsilon < c$. Tvrdnje slijede iz poredbenog kriterija. □

Primjer 33. *Pokažimo da red* $\sum \frac{(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{-1}{2})^n}{2^n}$ *konvergira.*
Rješenje:
Primjenom poredbenog kriterija u formi limesa, usporedimo li polazni red s konvergentnim geometrijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *dobivamo*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{-1}{2})^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n[1+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n] = e\cdot 1 = \ e > 0,$$

odakle zaključujemo da polazni red konvergira.

2.5 D'Alembertov kriterij

Jedan od najpoznatijih kriterija za ispitivanje konvergencija redova s pozitivnim članovima je D'Alembertov[3] kriterij. Imamo sljedeći teorem:

Teorem 16 (D'Alembertov kriterij, vidi [2]). *Neka je* $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima.*

a) Ako postoje prirodan broj n_0 *i realan broj* $q < 1$ *takvi da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q, \quad \forall\ n > n_0, \tag{10}$$

onda je red $\sum a_n$ *konvergentan.*

b) Ako postoji prirodan broj n_0 *takav da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \quad \forall\ n > n_0, \tag{11}$$

onda je red $\sum a_n$ *divergentan.*

[3]Jean le Rond d'Alembert, francuski filozof, znanstvenik, fizičar i matematičar.

Dokaz.

a) Iz nejednakosti $\frac{a_{n+1}}{an} \leqslant q(\ n > n_0)$ slijedi $a_{n0+1} \leqslant qa_{n0},\ a_{n0+2} \leqslant qa_{n0+1} \leqslant q^2 a_{no},...$ Odnosno, vrijedi da je $a_{no+k} \leqslant q^k a_{n0}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ Za n-tu parcijalnu sumu vrijedi:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^{n-n_o} a_{n0} + k \geqslant \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^{n-n_o} a_{n0} q^k \geqslant \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \frac{a_0}{1-q}. \tag{12}$$

Iz ove nejednakosti vidmo da je niz omeđen. Prema tome slijedi da je konvergentan.

b) Za prirodan broj n_0 ukoliko postoji takav da je $\frac{a_{n+1}}{an} \geqslant 1$, odnosno $0 < a_n \leqslant a_{n+1}$, tj. vidimo da je tada $0 < a_{n0} \leqslant a_{n0+1} \leqslant a_{a0+2} \leqslant a_{n0+3} \leqslant ... \leqslant a_{n0+k} \leqslant ...$ iz čega slijedi da nije ispunjen nužan uvijet konvergencije, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

Primjer 34. *Zadan je red* $\sum \dfrac{n}{e^n}$. *Primjenom D'Alembertovog kriterija provjerimo kada red konvergira.*

Rješenje: $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} \right| = \dfrac{1}{e} < 1$. *Red konvergira jer je* $\frac{1}{e} < 1$.

Primjer 35. *Zadan je red* $\sum \frac{e^n}{n}$. *Primjenom D'Alembertovog kriterija provjerimo kada red konvergira.*

Rješenje: $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{\frac{e_{n+1}}{n+1}}{\frac{e^n}{n}} \right| = e > 1$. *Red divergira jer je* $e > 1$.

Teorem 17 (D' Alembertov kriterij u formi limesa, vidi [2])**.** *Neka je* $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *tada je red* $\sum a_n$ *konvergentan za* $L < 1$ *i divergentan za* $L > 1$.

Dokaz. Ako je $L < 1$, za $\epsilon = \dfrac{1-L}{2}$ postojat će $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon$ iz čega slijedi da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \epsilon + L = \ 1 - \epsilon < 1.$$

U ovom slučaju broj $\epsilon + L$ je broj q u D' Alembertov om kriteriju.
Za $L > 1$, postojat će $\epsilon = \ 1 - L > 0$ i u tom slučaju postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon$. Iz čega vidimo da je

$$1 = \ L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{an} > 0$$

pa prema D' Alembertovom kriteriju red će divergirat. □

Primjer 36. *Ispitajmo konvergenciju redova:*

a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

b) $\sum \dfrac{(n!)}{2^n + 1}$.

Rješenje:

a) *Imamo:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{\frac{(n+1)^2}{n}}{\frac{(2n+2)(2n+1)}{n}} \longrightarrow \frac{1}{4} \text{ za } n \to \infty.$$

Očigledno je $\frac{1}{4} < 1$ *pa prema D'Alembertovom kriteriju slijedi da polazni red konvergira.*

b) *Imamo:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)+1}}}{\frac{n!}{2^n+1}} = (n+1)\frac{2^n}{2^{n+1}+1} = (n+1)\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \longrightarrow +\infty \text{ za } n \to \infty.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju slijedi da polazni red divergira.

2.6 Cauchyjev kriterij

Ako je neki član reda jednak nuli nije primjereno koristiti D'Alembertov kriterij za ispitivanje konvergencije. Stoga na redove s nenegativnim članovima možemo primjeniti Cauchyjev kriterij[4].

Teorem 18 (Cauchyjev kriterij, vidi [2])**.**

Neka je $\sum a_n$ *red s nenegativnim članovima.*

a) *Ako postoje prirodan broj* n_0 *i realan broj* $q < 1$ *takav da je* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, $\forall\ n > n_0$, *onda je red* $\sum a_n$ *konvergentan.*

b) *Ako je* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$ *za beskonačno mnogo indeksa n,onda je red* $\sum a_n$ *divergentan. ,onda je* $a_n \geqslant 1$ *.*

Dokaz. a) Iz $\sqrt[n]{a_n} \leqslant$ q imamo $a_n \leqslant q^n$, $\forall\ n > n_0$. Prema usporednom kriteriju red $\sum a_n$ konvergira jer smo mu pronašli jednu konvergentnu majorantu.

b) Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ za beskonačno mnogo indeksa n, onda je $a_n \geqslant 1$ za beskonačno mnogo indeksa pa opći član a_n ne konvergira k nuli.

□

Primjer 37. *Ispitajmo pomoću Cauchyjevog kriterija konvergenciju reda* $\sum a_n = \sum n \cdot (\frac{3}{4})^n$.
Rješenje:
Imamo opći član a_n *zadan s* $a_n = n \cdot (\frac{3}{4})^n$, *pa je q jednako :*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot (\frac{3}{4})^n} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4},$$

jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *Kako je* $a = \frac{3}{4} < 1$ *red konvergira.*

[4]Augustin Louis Cauchy, francuski matematičar. Bio je profesor matematike i astronomije u Parizu.

Teorem 19 (Cauchyjev kriterij u formi limesa, vidi [2]). *Neka je* $\sum a_n$ *red s nenegativnim članovima. Ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, *tada je red* $\sum a_n$ *konvergwntan za* $L < 1$ *i divergentan za* $L > 1$.

Dokaz. Ako je $L < 1$, za $\epsilon = \frac{1-L}{2}$ postojat će $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\epsilon < \sqrt[n]{a_n} - L < \epsilon$ iz čega slijedi da je $\sqrt[n]{a_n} < \epsilon + L = 1 - \epsilon < 1$. Broj $\epsilon + L$ je broj q u D' Alembertov om kriteriju. Za $L > 1$, postojat će $\epsilon = 1 - L > 0$ i u tom slučaju postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\epsilon < \sqrt[n]{a_n} - L < \epsilon$. Vidimo da je $1 = L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n}$ pa prema D' Alembertovom kriteriju red divergirat. □

Napomena 4. *Ako D'Alembertov kriterij daje odluku, onda odluku daje i Cauchyjev kriterij. Drugim riječima, Cauchyjev kriterij je "jači".*

Primjer 38. *Ispitajmo konvergenciju reda*

$$\sum \frac{(-1)^n + 4}{3^{n+1}}.$$

Rješenje:
Označimo s a_n *opći član niza:* $a_n = \frac{(-1)^n+4}{3^{n+1}}$. *Zamjenimo li da iz*

$$1 \leqslant \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 4}{3^{n+1}}} \leqslant \sqrt[n]{n}$$

slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 4}{3^{n+1}}} = 1.$$

Iz toga dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 4}{3^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 4}{3}} = \frac{1}{2} < 1. \tag{13}$$

Prema Cauchyjevom kriteriju u formi limesa ovaj red je konvergentan.

2.7 Leibnizov kriterij

Ukoliko imamo alternirajući red, ne možemo koristiti navedene kriterije pa uvodimo Leibnizov kriterij[5].

Teorem 20 (Leibnizov kriterij, vidi [2]). *Neka je* $\sum a_n$ *alternirani red. Ako niz realnih brojeva* $(|a_n|)$ *pada i konvergira k nuli,onda red* $\sum a_n$ *konverira nekom realnom broju a za koji vrijedi ocijena:*

i) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geqslant 0$ *i* $a_{2n} \leqslant 0$,*onda je* $a_2 \leqslant a \leqslant a_1$,

ii) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \leqslant 0$ *i* $a_{2n} \geqslant 0$,*onda je* $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$.

[5]Gottfried Wilhelm Leibniz, njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat.

Dokaz. Neka je $\sum a_n$ takav da $a_{2n-1} \geqslant 0$ i $a_{2n} \leqslant 0$ alternirani red i $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ njegova n-ta parcijalna suma. Za parcijalnu sumu s_{2n} parnog indeksa dobivamo
$s_{2n}=s_{2n-2}+ (a_{2n-1} + a_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$, a za parcijalnu sumu s_{2n+1} neparnog indeksa je
$s_{2n+1} = s_{2n-1}+ (a_{2n} + a_{2n+1}) \leqslant s_{2n-1}$. Niz (s_{2n}) monotono raste, a niz (s_{2n-1}) monotono pada. Nadalje, iz $s_2 \leqslant s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \leqslant s_{2n-1} \leqslant s_1$ dolazimo do zaključka da su (s_{2n}) i (s_{2n-1}) omeđeni nizovi i prema tome konvergiraju. Kako je $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, iz čega slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = a$. Prema tome je red konvergentan.
Iz $s_2 \leqslant s_{2n} \leqslant a_1$ prijelazom na limes za sumu a reda dobivamo $a_2 \leqslant a \leqslant a_1$. Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $a_{2n-1} \leqslant 0$ i $a_{2n} \geqslant 0$, onda primjenom maloprije dokazane tvrdnje na red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = -a_n$, dobivamo da je on red konvergentan, pa je konvergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i pri tome je $b_2 \leqslant b \leqslant b_1$, gdje je $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -a$.
Pomnožimo li nejednakost s brojem -1 dobivamo $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$. □

Primjer 39. *Ispitajmo konvergenciju reda*

$$\sum \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}.$$

Rješenje:
Opći član polaznog reda je: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$.
Označimo s: $f(x) = \dfrac{1}{x - \ln(x)}$.
Tada je:

$$f'(x) = -\frac{x-1}{x(x-\ln(x))^2} < 0, \ \textit{za} \ x > 1. \tag{14}$$

Zaključujemo da je f strogo padajuća za $x > 1$, *pa je* $a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1}$ *za svaki* $n \geqslant 1$. *Vrijedi:*

$$\lim a_n = \lim \frac{1}{n - \ln(n)} = \lim \frac{1}{\ln(\frac{e^n}{n})} = 0.$$

Sada prema Leibnizovom kriteriju red konvergira.

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[2] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski *Matematika*, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[3] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[4] G. S. Baranenkov, B. P. Demidovič, V. A. Jefimanko, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke neuke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.