Catalanovi brojevi

Mijić, Mario

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij financijske i aktuarske matematike

Mario Mijić

Catalanovi brojevi

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij financijske i aktuarske matematike

Mario Mijić

Catalanovi brojevi

Diplomski rad

Voditelj: izv.prof. dr. sc. I. Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Najprije definirajmo pojmove koji su nam potrebni.

Definicija 1 *Funkciju* $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *zovemo niz realnih brojeva. Vrijednost funkcije u točki* n *zovemo opći član niza, a označavamo ga s* c_n*. Sam niz označavamo s* (c_n)*.*

Definicija 2 *Neka je* (c_n) *niz realnih brojeva. Definirajmo novi niz realnih brojeva* (s_n) *na sljedeći način:*

$$s_1 = c_1$$

$$s_2 = c_1 + c_2$$

$$\dots$$

$$s_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

Niz (s_n) *zovemo niz parcijalnih suma pridružen nizu* (c_n)*.*

Definicija 3 *Uređen par* $((c_n), (s_n))$ *niza realnih brojeva* (c_n) *i odgovarajućih niza parcijalnih suma* (s_n) *zovemo red realnih brojeva. Pri tome* c_n *zovemo opči član reda.*

Nizovi i redovi koji sadrže kombinatorne strukture imaju u današnje vrijeme mnoštvo primjena u računalnoj znanosti. Jedan od takvih nizova naziva se niz Catalanovih brojeva. To je niz prirodnih brojeva koji se javljaju pri prebrojavanju zapanjujuće mnogo kombinatornih objekata i u matematici se često susreće. Upravo sljedeća tablica prikazuje prvih nekoliko članova Catalanovih brojeva koji se nalaze u stupcu C_n za $n \in \mathbb{N}$.

n	C_n	n	C_n	n	C_n	n	C_n
1	1	7	429	13	742,900	19	1,767,263,190
2	2	8	1,430	14	2,674,440	20	6,564,120,420
3	5	9	4,862	15	9,694,845	21	24,466,267,020
4	14	10	16,796	16	35,357,670	22	91,482,563,640
5	42	11	58,786	17	129,644,790	23	343,059,613,650
6	132	12	208,012	18	477,638,700	24	1,289,904,147,324

Tablica 1.

Naziv su dobili po matematičaru Eugene Charles Catalan[1], iako ih nije on prvi otkrio. Prvi koji su naišli na ove brojeve bili su Leonhard Euler[2] i Johann Andreas von Segner[3] gotovo čitavo stoljeće prije Catalana. Proučavajući problem triangulacije konveksnog n-terokuta, Segner je postavio rekurzivnu relaciju, a zatim Euler prvi uspješno riješio i 1760. godine došao do općeg izraza za broj triangulacija n-terokuta. Ali, u čast Catalanu, zbog svojih doprinosa koji je izveo i dokazao mnoga svojstva i identitete ovih brojeva, oni se danas zovu po njegovim imenom. Postoji i drugi matematičari koji su, neovisno od navedenih, došli do istih rezultata, ali su bili u to vrijeme nepoznati te im se radovi tek poslije dugo vremena postali poznati.

Catalanovi brojevi, osim što se pojavljuju kao niz u mnogim područjima kombinatornih objekata, kao što su particije poligona na trokute, šetnja po cjelobrojnoj mreži, Dyckovi putevi, problem binarnih stabala, također se pojavljuju na drugim mjestima, a u nastavku rada ćemo analizirati neka od najpoznatijih primjera gdje se oni pojavljuju.

Također ćemo pomoću relacijskih odnosa i generiranjem funkcija pokazati da bez obzira na veličinu objekata, tj. zadanih primjera, dobiveni niz činit će Catalonovi brojevi.

[1]Eugene Charles Catalan (30.5.1812. - 14.2.1894.) - francusko-belgijski matematičar
[2]Leonhard Euler (15.4.1703. - 18.9.1783.) - švicarski matematičar, fizičar i astronom
[3]Johann Andreas von Segner (9.10.1704. - 5.10.1777.) - njemački znanstvenik, fizičar, matematičar i liječnik

Poglavlje 2

Primjeri s Catalanovim brojevima

2.1 Putevi i Catalanovi brojevi

Pretpostavljamo da imamo izbore u kojim sudjeluju dvije stranke A i B. Promatramo ukupan broj glasova na izborima i neka je to $m = a + b$, gdje je a broj glasova koju je dobila stranka A, a b broj glasova koju je dobila stranka B. Glasovi se broje zasebno u nekom slučajnom rasporedu tako da a broji rast za A, a b za B. Broj mogućih različitih ishoda glasovanja za stranku A s a glasova je broj $C(m, a)$ koji predstavlja sve moguće a-kombinacije od m elemenata. Analogno vrijedi i za stranku B s b glasova.

Definicija 4 *Neka je S skup od n elemenata, a $r \in \mathbb{N}_0$. Tada je r-kombinacija skupa S r-člani podskup od S. Broj svih r-kombinacija skupa od n elemenata označavamo s $\binom{n}{r}$ ili $C(n, r)$.*

Znači a-kombinacija skupa $\{1, 2, ..., m\}$ je a-člani podskup od $\{1, 2, ..., m\}$. Ako bi promatrali da su svi takvi podskupovi jednako mogući pitamo se koja je vjerojatnost da A vodi tijekom cijelog prebrojavanja glasova?

Definiramo skup $(x_1, x_2, ..., x_m)$ koji prati rezultate glasovanja za stranku A, tako da $x_i = 1$ ako je i-ti glas bio za stranku A. U suprotnom neka je $x_i = -1$. Tada je nakon prebrojenih i-glasovanja i-ta parcijalna suma $s_i = x_1 + x_2 + ... + x_i$, gdje $s_0 = 0$ i to predstavlja vodstvo stranke A nad B. Ako označimo s $P(a, b)$ sve moguće nizove $(x_1, x_2, ..., x_m)$ s parcijalnim suma $s_i > 0$ za $i = 1, 2, ..., m$, tada je vjerojatnost da A vodi cijelo vrijeme $\frac{P(a,b)}{C(m,a)}$.

Catalanovi brojevi pojavljuju se u slučaju kada je $a = b$ i to ćemo upravo pretpostaviti. Radi bolje preglednosti označimo a i b s n, tako da $2n = m$. Tražimo vjerojatnost da A nikad neće zaostati za B. Postoji $C(2n, n)$ mogućih nizova sa n 1 i n -1 kombinacija. Ali, tražimo samo one za koje vrijedi $s_i \geq 0$ za $i = 1, 2, ..., 2n - 1$.

Definicija 5 *Graf $G = (V, E)$ je uređen par čvorova V i bridova E koji opisuju odnos između objekata.*

Definicija 6 *Neka je $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ i neka je $G = (V, E)$ graf. Put duljine n od vrha u do vrha v je niz vrhova $(v_0, v_1, ..., v_n)$ tako da $v_0 = u$, $v_n = v$ i $(v_i, v_{i-1}) \in E$ za $i = 1, ..., n$.*

Sada možemo niz $(x_1, ..., x_{2n})$ prikazati kao put duljine $2n$ i krajnom vrijednosti 0, oznaka $(2n, 0)$. Gledamo sad segmente između $(i-1, s_{i-1})$ i (i, s_i) za $i = 1, 2, ..., 2n$.

Primjer 1. Uzmimo za $n = 5$. Promatramo koordinatni sustav i naš put koji polazi iz ishodišta (0,0) prema odredištu točka $(10, 0)$. Vrijednost 1 je predstavljena kao " + ", a vrijednost -1 kao " $-$ ". Prikažimo nekoliko nizova i parcijalnih suma koje zadani put može poprimiti.

	Niz	Parcijalna suma niza
(i)	(-,-,+,+,+,+,-,-,-,+)	(0,-1,-2,-1,0,1,2,1,0,-1,0)
(ii)	(+,+,-,+,-,-,+,+,-,-)	(0,1,2,1,2,1,0,1,2,1,0)
(iii)	(+,+,-,+,+,-,+,-,-,-)	(0,1,2,1,2,3,2,3,2,1,0)

Tablica 2.

Vidimo da parcijalne sume niza (i) imaju i pozitivnih i negativnih vrijednosti, dok su u (ii) i (iii) samo nenegativne vrijednosti kakve su nam potrebni u našem primjeru s glasanjem. Put od $(0, 0)$ do $(2n, 0)$ je nenegativan ako je svaki $s_i \geq 0$ i pozitivan, ako svaki $s_i > 0$ za $i = 1, 2, ..., 2n - 1$. Upravo nenegativni put podudara se s našim primjerom, gdje obje stranke dobiju n glasova, a stranka A nikad ne zaostaje za strankom B. Pokazat ćemo da su putevi do $(2n, 0)$ Catalanovi brojevi. U tu svrhu definirat ćemo Catalanove brojeve.

Definicija 7 *Catalanov broj c_n, za $n \geq 0$, dan je izrazom*

$$c_n = \frac{1}{n+1} C(2n, n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Pogledajmo rezultate za prvih 10 brojeva.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

Tablica 3.

Vidimo da se gornji rezultati poklapaju sa rezultatima iz Tablice 1.

Primjer 2. Nađimo sve nenegativne puteve za $(6, 0)$ i odredimo broj takvih puteva.

Koristeći definiciju vidi se odmah da ih ima 5 za $2n = 6$. Postoji $\binom{4}{2} = 6$ kombinacija niza duljine 6 koji počinju s 1 i zavrsavaju sa -1. Da bismo provjerili nenegativnost tih nizova provjeravat ćemo njihove parcijalne sume te dobivamo sljedeću tablicu.

Niz	Parcijalna suma niza
(+,-,+,-,+,-)	(0,1,0,1,0,1,0)
(+,-,+,+,-,-)	(0,1,0,1,2,1,0)
(+,+,-,-,+,-)	(0,1,2,1,0,1,0)
(+,+,-,+,-,-)	(0,1,2,1,2,1,0)
(+,+,+,-,-,-)	(0,1,2,3,2,1,0)

Tablica 4.

Pokažimo sad da su brojevi nenegativnih i pozitivnih puteva Catalanovi brojevi.

Teorem 1 *Broj puteva od ishodišta do* $(2n, 0)$ *koji su*
1) pozitivni je Catalanov broj c_{n-1}*,*
2) nenegativni je Catalanov broj c_n*.*

Dokaz: Prvo konstruiramo bijektivnu korespodenciju između pozitivnih puteva duljine $2n$ i nenegativnih duljine $2n-2$. Neka je $(s_0, s_1, ..., s_{2n})$ parcijalna suma pozitivog puta P. Tada je $s_0 = s_{2n} = 0$ i $s_i \geq 1$ za $i = 1, 2, ..., 2n-1$, te neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_{2n})$ niz koraka takvih da vrijedi $x_i = s_i - s_{i-1} \in \{1, -1\}$. Kako je $s_0 = 0$ i $s_1 \geq 1$ dobivamo da je $s_1 = 1$. Stoga P prolazi točkom $(1, 1)$. Analogno i za $s_{2n-1} \geq 1$ i $s_{2n} = 0$, vrijedi $s_{2n-1} = 1$. Prema tome prolazi točkom $(2n-1, 1)$. Ako izostavimo prvi i zadnji izraz niza dobivamo niz x' koji ima $n-1$ vrijednosti jednakih 1 i $n-1$ vrijednosti jednakih -1. Dobijemo parcijalne sume za x'

$$s'_i = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_i$$

$$= x_2 + x_3 + \cdots + x_{i+1}$$

$$= s_{i+1} - 1 \geq 0$$

za $0 \leq i \leq 2n-2$. Slijedi da se pozitivni put P iz ishodišta do $(2n, 0)$ podudara s nenegativnim putem P' iz ishodišta do $(2n-2, 0)$.

Znamo da prva i posljednja vrijednost od P moraju biti 1 i -1, operacijom izostavljanja tih vrijednosti mogu se poništiti dodavanjem 1 prije i -1 poslije P'. čime dobivamo invertibilan postupak. Stoga, ako je a_n broj pozitivnih puteva, a b_n nenegativnih od ishodišta do $(2n, 0)$, tada $a_n = b_n$. Tada 2) slijedi iz 1) kada utvrdimo da je $a_n = c_{n-1}$ i tako bi dobili $b_n = a_{n+1} = c_n$. Pozitivni put P iz ishodišta do $(2n, 0)$ je jedinstveno određen svojim segmentom u P' iz $(1, 1)$ do $(2n-1, 1)$ koji se nalazi u cijelosti iznad x-osi kad bi ga promatrali u koordinatnom sustavu. Ali, broj takvih puteva P' je razlika između $C(2n-2, n-1)$, ukupnim brojem puteva od $(1, 1)$ do $(2n-1, 1)$ i puteva Q od $(1, 1)$ do $(2n-1, 1)$ koji dodiruju x-os. Iz tog možemo utvrditi broj puteva P' brojanjem puteva Q.

Pretpostavimo da Q prvi put dodiruje x-os u točki $(k, 0)$. Kako Q počinje u $(1, 1)$ vrijedi da je $k \geq 2$. Ako uzmemo segment Q_1 od Q iz $(1, 1)$ do $(k, 0)$ oko x-osi, dobivamo put Q'_1 od $(1, -1)$ do$(k, 0)$. I dodavanjem Q'_1 segmentu Q_2 od Q, koji počinje od

$(k, 0)$ do $(2n-1, 1)$, dobivamo put $Q^* = Q_1'Q_2$ od $(1, -1)$ do $(2n-1, 1)$. Svaki takav put Q^* mora sjeći x-os kako bi dobili cijeli put Q preko Q^*. Bijektivna korespodencija između Q i Q^* daje nam jednak broj puteva od Q koji dodiruju x-os s brojem puteva Q^*. Svaki put u Q^* mora imati dva koraka više koja povećaju vrijednost naspram onih koji smanjuju, kako bi imali n koraka povećavanja i $n-2$ koraka smanjivanja. Slijedi da broj takvih puteva Q^* iznosi $C(2n-2, n-2)$ i jednak je broju puteva Q.

Sada se može izračunati broj pozitivnih puteva P, a_n. Jednak je broju pozitivnih puteva P' što je razlika između $C(n-2, n-1)$ od $(1,1)$ do $(2n-1, 1)$ i $C(2n-2, n-2)$ iz Q, od $(1,1)$ do $(2n-1, 1)$ koji dodiruju x-os. Dobivamo

$$
\begin{aligned}
a_n = C(2n-2, n-1) - C(2n-2, n-2) &= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-1)!}\frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\
&= \frac{1}{n}C(2n-2, n-1) \\
&= c_{n-1}.
\end{aligned}
$$

■

2.2 Triangulacija konveksnog n-terokuta

Ovaj problem doveo je do otkrića Catalanovih brojeva. Definirajmo najprije neke osnovne pojmove koje su nam potrebne.

Definicija 8 *Za $K \subseteq M$, gdje M Euklidska ravnina, kažemo da je konveksan ako vrijedi za bilo koje točke $A, B \in K \Rightarrow \overline{AB} \subseteq K$.*

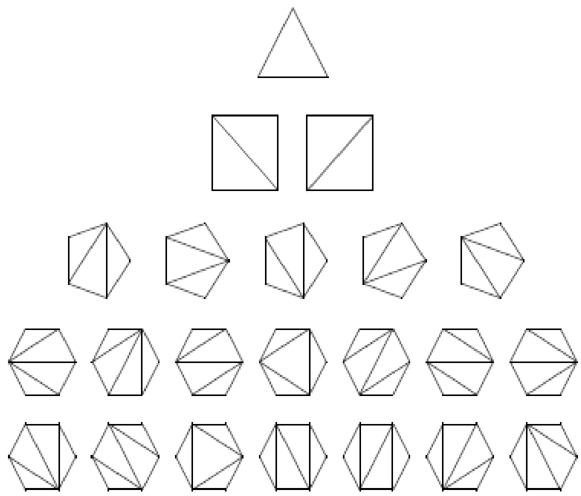
Definicija 9 *Poligon je zatvoreno geometrijsko tijelo koji se sastoji od točaka $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$ povezan dužinama $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$. Kažemo da je poligon jednostavan ako se bilo koje dvije dužine koje nisu susjedne, tj. da krajna točka jedne dužine ne čini početnu točku druge dužine, međusobno ne sijeku. Dužine poligona zovu se i strane poligona.*

Definicija 10 *Trijangulacija je proces razdvajanja poligona u trokute dodavanjem dijagonala koje se međusobno ne sijeku.*

Promatramo neki konveksan poligon. Nas zanima broj načina na koje je moguće zadani jednostavani poligon triangulirati da dobijemo maksimalan broj trokutova. Poligon označimo s $T_n, n \in \mathbb{N}$. U tu svrhu koristimo sljedeći teorem.

Teorem 2 *Jednostavan poligon sa n strana, gdje $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$, može se trijangulirati u $n-2$ trokuta sa $n-3$ dijagonala.*

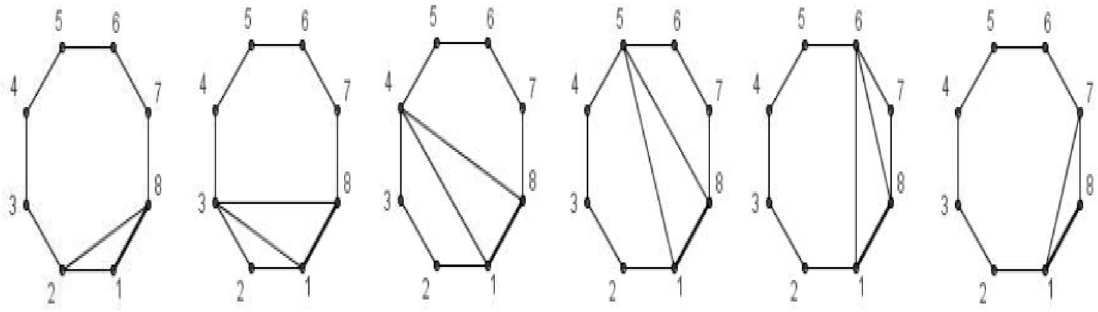
Promotrimo u nastavku konveksne n-terokute.



Slika 1.

Slika 1. upravo prikazuje sve moguće triangulacija za $n = 3, 4, 5, 6$. Odnosno, kad bi smo problemu prišli induktivno onda počinjemo s trokutom, a s obzirom da je on već trianguliran postoji samo jedan način triangulacije pa je stoga $T_3 = 1$. Za četverokut možemo povući jednu dijagonalu što je moguće na dva načina $T_4 = 2$. Za peterokut postoji 5 načina $T_5 = 5$ i za šesterokut $T_6 = 14$. Pokušajmo naći opće rješenje T_n.

Promatramo stranice n-terokuta u slici 2. Primjetimo da je svaka stranica n-terokuta dio jednog i samo jednog trokuta triangulacije. Radi prebrojavanja svih načina triangulacije, fiksiramo jednu od stranica te brojimo triangulacije u kojima sudjeluje svaki od trokuta konstruiranih nad tom stranicom.



Slika 2.

Uzmemo sad neku točku $k, k \in \mathbb{N}$ i za koju vrijedi $0 < k < n$ kao vrh trokuta. S jedne strane ostaje nam $(n-k+1)$-terokut, koji se može triangulirati na T_{n-k+1} načina, a s druge strane k-terokut koji se može trijangulirati na T_k načina. Upravo to se vidi na prethodnoj slici, gdje promatramo razne slučajeve na osmerokutu. Podrazumijeva se da je $T_2 = 1$. Koristit ćemo kombinatorni princip produkta za dobivena dva mnogokuta. To smijemo napraviti jer su izbori triangulacije izdvojenih mnogokuta medusobno neovisni, pa je za odabranu točku k taj broj $T_k T_{n-k+1}$. Kako točku k možemo izabrati na više načina, preostaje nam sumirati sve različite mogućnoosti prema vrijednosti k. Za T_n, $n \in \mathbb{N}$ dobijemo:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1}.$$

n	T_n	n	T_n	n	T_n
1	1	4	14	7	429
2	2	5	42	8	1430
3	5	6	132	9	4862

Tablica 5.

Iz tablice 5. možemo vidjeti da uistinu gornja suma čini Catalanove brojeve. Uz pomak indeksa za 2 dobijemo naš konačan izraz za n-terokut

$$T_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} T_k T_{n-k+3}.$$

2.3 Problem raspodjele zagrada

Pretpostavimo da imamo n parova zagrada, pri čemu svaki par zagrada ima oblik (). Želimo svih n parova zagrada grupirati na način da svaka otvorena zagrada mora imati pripadajuću zatvorenu zagradu.To znaći da brojeći s lijeva, niti u jednom trenutku nemožemo imati više zatvorenih zagrada od otvorenih.

Primjer 3. Zagrade koje imaju sljedeći redosljed "(()()(()))" dobro su postavljene, svaka otvorena zagrada ima svoju zatvorenu zagradu, dok zagrade "())()(()()" nisu dobro postavljene iz razloga što dvije zagrade nemaju svoj par.

Koliko ovakvih grupiranja je moguće napraviti za $n \in \mathbb{N}$ parova zagrada?

n=0	*	1 način
n=1	()	1 način
n=2	()(), (())	2 načina
n=3	()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))	5 načina
n=4	()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((())))	14 načina
n=5	()()()()(), ()()()(()), ()()(())(), ()()(()()), ()()((())), ()(())()(), ()(())(()), ()(()())(), ()((()))(), ()(()()()), ()(()(())), ()((())()), ()((()())), ()(((()))), (())()()(), (())()(()), (())(())(), (())(()()), (())((())), (()())()(), (()())(()), ((()))()(), ((()))(()), (()()())(), (()(()))(), ((())())(), ((()()))(), (((())))(), (()()()()), (()()(())), (()(())()), (()(()())), (()((()))), ((())()()), ((())(())), ((()())()), (((()))()), ((()()())), ((()(()))), (((())())), (((()()))), ((((()))))	42 načina

Tablica 6.

Iz gornje tablice vidimo sve moguće kombinacije zagrada, koje zadovoljavaju uvjet, za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Radi lakšeg razumjevanja definirajmo n brojeva $a_1, a_2, ..., a_n$. Problem zagrada ćemo svesti na problem množenja brojeva $a_1 a_2 ... a_n$, tj. na koliko različitih načina možemo pomnožiti dane brojeve bez da mijenjamo njihovu poziciju. Na primjer, za $n = 2$ imamo tri broja i dva načina zagradivanja $(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$, za $n = 3$ imamo 4 broja i pet načina zagradivanja $(a_1a_2)(a_3a_4) = ((a_1a_2)a_3)a_4 = (a_1(a_2a_3))a_4 = a_1((a_2a_3)a_4) = a_1(a_2(a_3a_4))$. Bez obzira na veličinu broja n na kraju uvijek množimo dva broja, a to su broj dobiven množenjem prvih k brojeva, gdje $k \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$, te broj dobiven množenjem preostalih brojeva, tj. množenjem $a_1 a_2 \cdots a_k$ i $a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_n$. Na primjer, za $n = 6$ i $k = 2$, dobijemo $(a_1a_2)(((a_3a_4)a_5)a_6)$. Znači prvih k brojeva moguće je pomnožiti na Z_k načina, a ostalih $n - k$ na Z_{n-k} načina. Prema principu produkta ukupan broj je umnožak $Z_k Z_{n-k}$ za dani k. Ostaje nam sve zbrojit, čime dobivamo

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k Z_{n-k}.$$

Ova rekurzivna relacija daje nam upravo Catalanove brojeve.

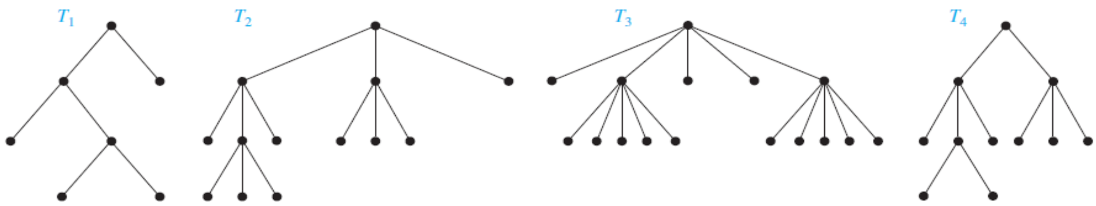
2.4 Problem binarnog stabla

Stablo predstavlja nelinernu strukturu podataka u kojem su podaci predstavljeni u hijerarhiskom odnosu.

Definicija 11 *Dva vrha u i v iz grafa G su povezana ako postoji put $(u, v) \in G$. Za graf G kažemo da je povezan ako su svaka dva međusobno različita vrha u i v iz G povezana.*

Definicija 12 *Ciklus je put u kojim su svi vrhovi međusobno različiti, te počinje i završava u istom vrhu.*

Formalno gledano, stablo je povezani graf koji nema ciklusa.



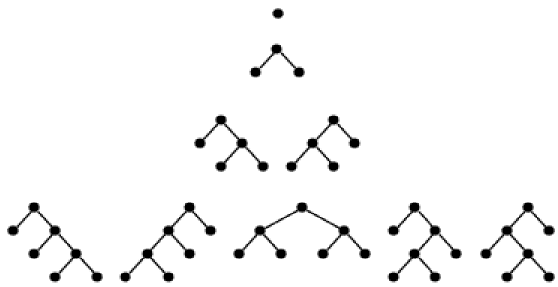
Slika 3.

Stablo T sastoji se od korijena ($root[T]$) i čvorova koji su podređeni korijenu. Izvorni korijen nema nadređen čvor. Radi lakše terminologije korijen se može zvati i roditelj, a sve njemu podređene elemente su djeca. Stablo ima svojstvo da svako djete koje ima svoje podređene predstavlja novi korijen, odnosno roditelj je za to podstablo.

Definicija 13 *Stablo je stupnja m ako svaki čvor ima najviše m djece, a u slučaju da svaki korijenski čvor ima točno m djece zovemo ga potpuno stablo stupnja m.*

Definicija 14 *Binarno stablo je potpuno stablo stupnja 2, tj. $m = 2$.*

Radi boljeg razumijevanja našeg problema binarno stablo možemo definirati kao prazan skup ili se sastoji od jednog istaknutog vrha (korijen) i uređenog para binarnih stabala koji se zovu lijevo i desno podstablo. Tako smo rekurzivno definirali binarno stablo. Pitamo se na koliko načina možemo konstruirati binarno stablo s unaprijed danim brojem korijena, tj. vrhova? Pa označimo binarno stablo s B_n, gdje $n \in \mathbb{N}_0$ broj vrhova stabla.



Slika 4.

Slika 4 pokazuje sve moguće načine grananja stabla s $n = 0, 1, 2, 3$ vrhova.

Analogno kao i u prethodnim problemima i ovdje binarno stablo možemo podijeliti na dva manja podstabla B_k i B_{n-k-1}, $k \in \mathbb{N}, k < n$. Sada imamo dva stabla, jedan s k vrhova i drugi s $n - k - 1$, a kako se radi o binarnom stablu znači da nisu povezana i međusobno su nezavisna. Broj ukupnih grananja za vrh k iznosi $B_k B_{n-k-1}$ i ostaje nam samo zbrojiti za sve k-ove. Dobivamo

$$\begin{aligned} B_n &= B_0 B_{n-1} + B_1 B_{n-2} + \cdots + B_{n-1} B_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B_k B_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Raspišemo li gornji izraz možemo vidjeti da dobiveni rezultati čine Catalanove brojeve.

2.5 Problem redosljeda množenja

Problem redosljeda množenja smo spomenuli kod problema zagrada. Ovdje ćemo ga detaljnije analizirati. Napomenimo samo da ovo osim za množenje, vrijedi i za sve ostale binarne računske operacije. Neka je zadan neki skup S na kojem je naša binarna operacija dobro definirana, te neka su $x, y, z \in S$. Naš umožak je dan izrazom xy i pretpostavljamo da operacija nije komukativan, tj. $xy \neq yx$, dok asocijativnost operatora vrijedi, tj. $(xy)z = x(yz)$, za sve $x, y, z \in S$. Promatarmo slučaj kada imamo $n+1$ brojeva iz S koje moramo množiti. Znači da je umnožak brojeva $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$, gdje je $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in S$, dobro definiran tek kad se odredi kojim redoslijedom množimo dane brojeve. Koristimo se zagradama da utvrdimo redoslijed množenja. Pokušati ćemo utvrditi broj načina na koji možemo zagraditi dan produkt. Ovaj problem je formuliro i proučavo sam Catalan.

Primjer 4. Nađimo sve moguće kombinacije zagrađivanja produkta $x_1x_2x_3x_4$.

Moramo paziti da svaku zagradu koju otvorimo moramo i zatvoriti. Ne smijemo imati nezatvorenih zagrada i množe se uvijek dva uzastopna člana u danom produktu i ne više. Kao rješenje onda dobivamo

$$((x_1(x_2x_3))x_4), \quad (x_1((x_2x_3)x_4)), \quad ((x_1x_2)(x_3x_4)),$$

$$(x_1(x_2(x_3x_4))), \quad (((x_1x_2)x_3)x_4).$$

Primijetimo da je za produkt od 4 broja nama bilo potrebno 3 para zagrada.

Definicija 15 *Kažemo da su u produktu zagrade dobro raspoređene ako se može dobiti rekurzivno nizom koji ima sljedeće uvjete*
1) u svakom pojedinom $x \in S$ su zagrade dobro raspoređene
2) ako su produktima A i B zagrade dobro raspoređene, tada su i u produktu (AB) zagrade dobro raspoređene.

Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo da nam je potrebno n parova zagrada kako bismo mogli dobro rasporediti zagrade u produktu s $n+1$ članova, odnosno da je za raspoređivanje zagrada u izrazu $x_1x_2\cdots x_{n+1}$ nama potrebno n parova zagrada.

$K1$: Gledamo prvo za $n = 1$. Kako je $n = 1$, a imamo produkt od $n + 1$ članova dobivamo produkt x_1x_2 u kojem treba rasporediti zagrade. Očito je da se u ovom produktu zagrade mogu rasporediti na samo jedan način (x_1x_2), pa imamo samo jedan par zagrada što odgovara našim $n = 1$.

$K2$: Pretpostavljamo da za $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$, gdje je $k < n$, tako da se produkt $x_1x_2 \cdots x_{k+1}$ može zagraditi s k zagrada.

$K3$: Neka je $n = k+1$. Trebamo dokazati da se produkt $x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}x_{k+2}$ može zagraditi s $k + 1$ zagrada. Kako je produkt asocijativan, promatramo prvo produkt prvih $k + 1$ članova, tj. $x_1x_2 \cdots x_{k+1}$. Prema $K2$, za produkt $x_1x_2 \cdots x_{k+1}$ potrebno nam je k zagrada. Ostaje nam sada dodati x_{k+2} kao umnožak. Kad smo zagradili $x_1x_2\cdots x_{k+1}$ njega promatramo onda kao jedan broj koji se množi s x_{k+2}, a prema $K1$ za to nam je potrebno 1 par zagrada. Slijedi, ukupan broj potrebnih parova zagrada iznosi $k + 1 + 1 = k + 2$ što nam je i trebalo za dokaz.

n = 0	(a)	1 način
n = 1	$(a \cdot b)$	1 način
$n = 2$	$((a \cdot b) \cdot c)$, $(a \cdot (b \cdot c))$	2 načina
$n = 3$	$(((a \cdot b) \cdot c) \cdot d)$, $((a \cdot b) \cdot (c \cdot d))$, $((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d)$, $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot d))$, $(a \cdot (b \cdot (c \cdot d)))$	5 načina
$n = 4$	$((((a \cdot b) \cdot c) \cdot d) \cdot e)$, $(((a \cdot b) \cdot c) \cdot (d \cdot e))$, $(((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot e)$, $((a \cdot b) \cdot ((c \cdot d) \cdot e))$, $((a \cdot b) \cdot (c \cdot (d \cdot e)))$, $(((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d) \cdot e)$, $((a \cdot (b \cdot c)) \cdot (d \cdot e))$, $((a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)) \cdot e)$, $((a \cdot (b \cdot (c \cdot d))) \cdot e)$, $(a \cdot (((b \cdot c) \cdot d) \cdot e))$, $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot (d \cdot e)))$, $(a \cdot ((b \cdot (c \cdot d)) \cdot e))$, $(a \cdot (b \cdot ((c \cdot d) \cdot e)))$, $(a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e))))$	14 načina

Tablica 7.

Može se vidjeti iz gornje tablice kako izgledaju sva moguća množenja do $n = 4$, te se može primijetiti kako zadnji stupac tvori početak niza Catalanovih brojeva, što ćemo i dokazati u nastavku.

Pokažimo sada da postoji bijektivna korespodencija između produkta $x_1x_2 \cdots x_{n+1}$ u kojem su zagrade dobro raspoređene i niza nenegativnih puteva koji počinju u ishodištu i završavaju u točki $(2n, 0)$. Svaki takav produkt tvori niz $\mathbf{p}$ duljine $3n + 1$ i sastoji se od 3 različita elementa: n lijevih zagrada, $n + 1$ varijabli i n desnih zagrada, dok nizovi nenegativnih puteva imaju samo dva različita broja, 1 i -1, te se obje vrijednosti ponavljanaju n-puta. Kako bismo dobili nekakvu strukturu sličnu nizu nenegativnih puteva konstruirajmo niz $\mathbf{q} = S(\mathbf{p})$ duljine $2n$ brisanjem zadnje varijable x_{n+1} i n desnih zagrada. Analizirajmo neka svojstva od $\mathbf{q}$.

<u>Lema</u> 1 *Niz $\mathbf{q} = S(\mathbf{p})$ ima n lijevih zagrada i n poredanih varijabli $x_1, x_2, ..., x_n$.*

Dokaz Leme 1 je očit jer smo upravo na taj način definirali $\mathbf{q}$.

<u>Lema</u> 2 *Neka je $\mathbf{q} = S(\mathbf{p})$, gdje je $\mathbf{p}$ produkt varijabli $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Za $i \leq 2n, i \in \mathbb{N}$ u kojem su zagrade dobro raspoređene, broj lijevih zagradi u nizu $q_1, q_2, ..., q_i$ iznosi najmanje broju varijabli koje čine produkt.*

Dokaz: Dokazat ćemo pomoću metode matematičke indukcije.
$K1:$ Za $n = 1$ imamo $\mathbf{p} = (x_1x_2)$, stoga $\mathbf{q} = (x_1$, što nam je i trebalo.

$K2:$ Pretpostavljamo da za $n \geq 2$ postoji $k \leq n, k \in \mathbb{N}$ broj varijabli koji dolazi iz dobro zagrađenog produkta $\mathbf{p}$.

$K3:$ Neka je $\mathbf{p}$ produkt u kojem su zagrade dobro raspoređene od $n+1$ varijabli. Iz rekurzivne definicije $\mathbf{p} = (AB)$ i čini umnožak dva neprazna produkata A i B s dobro raspoređenim zagradama. B ima jednu više zagradu od A, jer prva lijeva zagrada postavlja se prije AB. Ako je x_k zadnja varijabla u A, tada se ona ne pojavljuje u

$S(A)$, ali se pojavljuje nakon x_{k-1} u $\mathbf{q} = S(\mathbf{p})$. Prema tome, razlika u broju lijevih zagrada i broju varijabli u $\mathbf{q}$ nadmašuje odgovarajuću razliku u $S(A)$ za jedan član x_k, za koji postaje 0. Razlika za svaki član iz B je ista kao i za taj isti član u $\mathbf{p}$. Kako je A dobro zagrađenim produktom, slijedi prema pretpostavci $K2$ broj lijevih zagrada u $q_1 q_2 \cdots q_i$ za $i \leq 2n$ iznosi najmanje kao broju varijabli. ■

Ako niz $\mathbf{q}$ zadovoljava Lemu 1 i Lemu 2 onda kažemo da je on **pogodan**.

Teorem 3 *Postoji bijektivna korespodencija između skupa od pogodnih nizova duljine* $2n$ *i skupa dobro zagrađenih produkata duljine* $3n+1$.

Dokaz: Pokazat ćemo da je funkcija S bijekcija. Neka je $\mathbf{q}$ pogodan niz. Moramo pokazati da možemo rekonstruirati produkt $\mathbf{p}$ u kojem su zagrade dobro raspoređene, takav da je $\mathbf{q} = S(\mathbf{p})$. Prvo dodamo član x_{n+1} s desna od $\mathbf{q}$ i dobijemo novi niz $\mathbf{q}' = \mathbf{q}x_{n+1}$. Prema Lemi 1, niz $\mathbf{q}'$ ima n zagrada i $n+1$ varijabli $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Kako se $\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}'$ podudaraju u prvih $2n$ pozicija, označiti ćemo element od $\mathbf{q}'$ na poziciji $i, i \leq 2n$, s q_i. Tada $\mathbf{q}'$ zadovoljava Lemu 2. Teorem u nastavku dokazujemo metodom matematičke indukcije.

$K1$: Za $n = 1$ dobivamo $\mathbf{q}' = x_1 x_2$, pa imamo $\mathbf{p} = (x_1 x_2)$.

$K2$: Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i teorem je istinit kada zamijenimo n s $n-1$.

$K3$: Prema Lemi 1 i Lemi 2 zadnja dva elementa od $\mathbf{q}'$ su $x_{n-1}x_n x_{n+1}$ ili $(x_n x_{n+1}$. U oba slučaja $\mathbf{q}'$ će imati tri uzastopna elementa u obliku $(x_j x_{j+1}$ za neki $j \geq 1$. Neka je j^* minimalni j za koje to vrijedi. Sada ubacujemo desne zagrade u $\mathbf{q}'$ kako bi stvorili dobro zagrađen produkt, desna zarada mora odmah sljediti nakon $(x_{j^*} x_{j^*+1}$, kako bi $\mathbf{p}$ sadržao $(x_{j^*} x_{j^*+1})$. Zamijenimo $(x_{j^*} x_{j^*+1})$ s novom varijablom y_1 u $\mathbf{q}'$ kako bi formirali niz $\mathbf{q_1}$ koji ima $n-1$ lijevih zagrada i n varijabli. $\mathbf{q_1}$ zadovoljava i Lemu 1 kako smo zamijenili n s $n-1$. Pa prema pretpostavci indukcije produkt $\mathbf{p_1}$ može se rekonstruirati. Zamjenom $(x_{j^*} x_{j^*+1})$ za y_1 u $\mathbf{p_1}$ daje nam dobro zagrađen produkt $\mathbf{p}$ takav da je $\mathbf{q} = S(\mathbf{p})$. Kako je S inverzna surjekcija, slijedi da je S bijekcija. ■

Sada možemo i dokazati broj mogućih kombinacija množenja produkta s n varijabli uistinu Catalanov broj.

Teorem 4 *Broj produkata s dobro raspoređenim zagradama od $n+1$ varijabli je Catalanov broj c_n*

Dokaz: Prema Teoremu 3, svakom dobrom nizu od $x_1x_2\cdots x_{n+1}$ odgovara niz $\mathbf{q}$ duljine $2n$ s n lijevih zagradi i n varijabli $x_1x_2\cdots x_n$. Definiramo niz $z=(z_1,z_2,...,z_{2n})$ na sljedeći način

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{, ako je } q_i \text{ lijeva zagrada} \\ -1 & \text{, ako je } q_i \text{ varijabla } x_j. \end{cases}$$

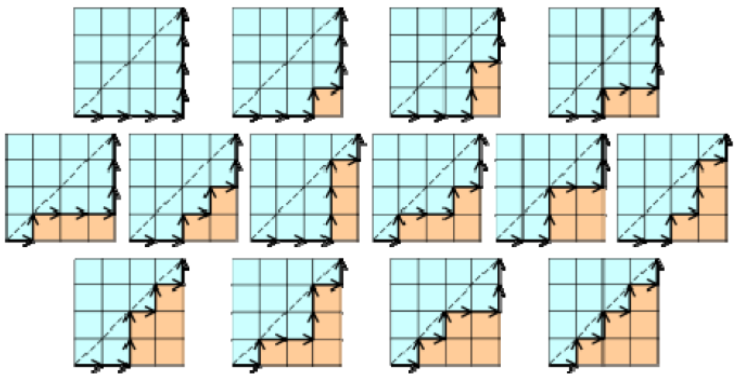
Tada iz Leme 2 sljedi da je parcijalna suma s_i od z nenegativna. Prema tome našli smo bijekciju izmđu $\mathbf{q}$ i nenegativnih puteva s polazištem u $(0,0)$ do točke $(2n,0)$. Iz Teorema 1 slijedi da je broj produkata od $n+1$ varijabli u kojima su zagrade dobro raspoređene c_n. ■

Možemo i odrediti rekurzivnu formulu za ovaj problem, ali kako se formulira na analogan način kao u problemu raspodjele zagrada nećemo je raspisivati nego samo navesti. Tako rekurzivna relacija dana je izrazom

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k Z_{n-k}.$$

2.6 Putevi u cjelobrojnoj mreži

Problem puteva u cjelobrojnoj mreži je jedan od najstarijih i najpoznatijih primjera koji se vežu uz Catalanove brojeve. Cjelobrojna mraža sastavljena je od pravaca koji prolaze kroz točke čije su koordinate cijeli brojevi, te su paralelni s koordinatnim osima u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Promatramo cjelobrojnu mrežu $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$. Ishodište nam je u jednom od krajeva cjelobrojne mreže i trebamo nači najkraći put do drugog kraja koji se nalazi na dijagonali s našom točkom ishodišta. Kretanje je samo dozvoljeno po pravcima mreže. Nadalje, uvodimo restrikciju da put kojim se krečemo nikad nesmije prijeći dijagonalu koju čine ishodište i kraj. Pa prema tome, očito je da se putevi mogu kretati samo u dva smjera, desno i gore.

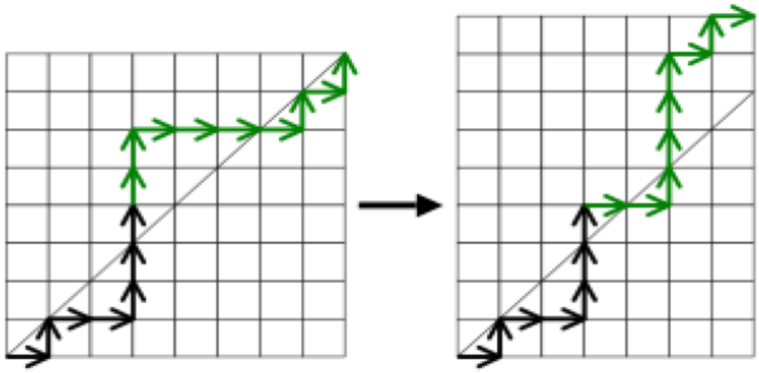


Slika 5.

Iz Slike 5 vidimo kako putevi za mrežu dimenzije 4×4 trebaju izgledati. Primjetimo da sa svakim korakom naš put se približava kraju. Postoji više načina rješavanja ovog problema. Jedan način, s kojim ćemo dobiti i formulu za rješenje mreže dimenzije $n \times n$, a ujedno i formulu za n-ti Catalanov broj, je da prebrojimo sve mogući puteve i od tog broja oduzmemo broj puteva koji prelaze dijagonalu.

Definirajmo prvo dva vektora pomaka i to su vektor pomaka udesno $(1, 0)$ i vektor pomaka prema gore $(0, 1)$. Kako se radi o mreži koja je određena svojom dimenzijom $n \times n$, što znači da imamo n pomaka u desno i n pomaka prema gore, pa ukupan broj pomaka iznosi $2n$. Broj takvih kombinacija puteva koji polaze iz ishodišne točke $(0, 0)$ do krajne točke (n, n) iznosi $\binom{2n}{n}$. Analogno vrijedi i kad bi uzeli gornji lijevi kraj za naše ishodište samo što bi onda promatrali vektor pomaka prema dolje.

Ostaje nam sada prebrojati sve puteve koje prolaze dijagonalom u cjelobrojnoj mreži $n \times n$. Gledamo prvu točku koja se nalazi na nedozvoljenom putu, tj. na putu koji prijelazi dijagonalu. Od te točke svaki sljedeći korak definiramo tako da svaki pomak udesno zamijenimo pomakom prema gore i pomak prema gore zamijenimo pomakom udesno, što pokazuje Slika 6.



Slika 6.

Kako smo došli jedan korak iznad dijagonale, dosad smo napravili k koraka prema desno i $k+1$ koraka prema gore, gdje $k \leq n,\ k \in \mathbb{N}$ i to znači da nam je preostalo još $n-k$ pomaka desno i $n-k-1$ pomaka gore kako bismo došli do kraja (n, n). Kako smo pomake ponovo definirali, mjenja se i broj preostalih pomaka pa će sada put imati $k+(n-k-1) = n-1$ pomaka udesno i $(k+1)+(n-k) = n+1$ prema gore, pa će kraj biti u točki $(n-1, n+1)$ i svaki nedozvoljen put se može tako definirati na jedinstven način. Svaki najkraći put u mreži od $(0,0)$ do $(n-1, n+1)$ možemo rekonstruirati u točno jedan nedozvoljen put od $(0,0)$ do (n,n), na isti način kad prijeđe dijagonalu. Time smo uspostavili bijektivnu korespodenciju izmedu skupa svih najkraćih putova koji prelaze dijagonalu i skupa svih najkraćih putova u cjelobrojnoj mreži do točke $(n-1, n+1)$, a takvih ima $\binom{2n}{n+1}$. Oduzmimo sad broj svih puteva u cjelobrojnoj mreži dimenzije $n \times n$ s brojem puteva koji prelaze dijagonalu. Dobivamo

$$\begin{aligned} c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

gdje nam c_n predstavlja opći član niza Catalanovih brojeva.

Još jedan od mogućih načina rješavanja ovog problema jest da svedemo na problem s zagradama, gdje predstavljamo svaki pomak udesno s lijevom zagradom, a svaki pomak prema gore desnom zagradom.

2.7 Primjeri s Catalanovim brojevima

Sad ćemo samo navesti još nekoliko poznatih primjera bez da ulazimo u njihovu detaljnu analizu.

- **Dyckovi planinski putevi ili problem planinskih vrhova**

Problem se temelji na pronalasku svih mogućih kombinacija planinskih lanaca koji se sastoje od točno n uspona i n padova, uz pretpostavku da se oni uvijek nalaze iznad početne razine puta.

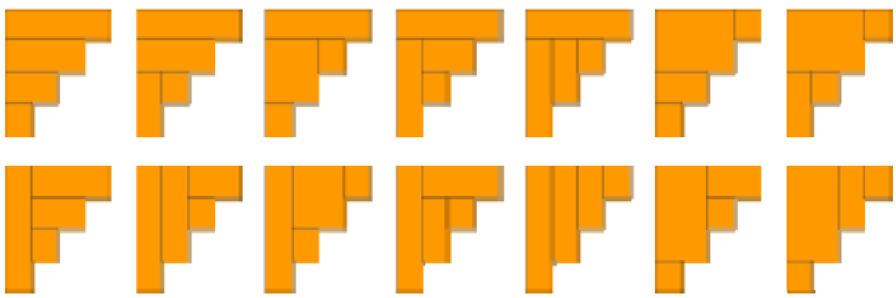
$n = 0$:	*	1
$n = 1$:	/\	1
$n = 2$:	/\ /\/\, / \	2
$n = 3$:	/\ /\ /\ /\/\ / \ /\/\/\, /\/ \, / \/\, / \, / \	5

Tablica 8.

Iz gornje tablice se mogu vidjeti sve kombinacije za $n \leq 3, n \in \mathbb{N}$. Ako promatramo zadnji stupac tablice koji prikazuje sve moguće načine za pripadajući n možemo primjetiti kako su to upravo prva 4 člana niza Catalonovih brojeva.

- **Problem slaganja pravokutnika**

Još jedan problem u kojem se pojavljuju Catalanovi brojevi je problem slaganja pravokutrika. Problem se sastoji u kreiranju "stepenica" visine $n \in \mathbb{N}$ sa n pravokutnika. Slika 7 ilustrira kako to treba izgledati za $n = 4$.

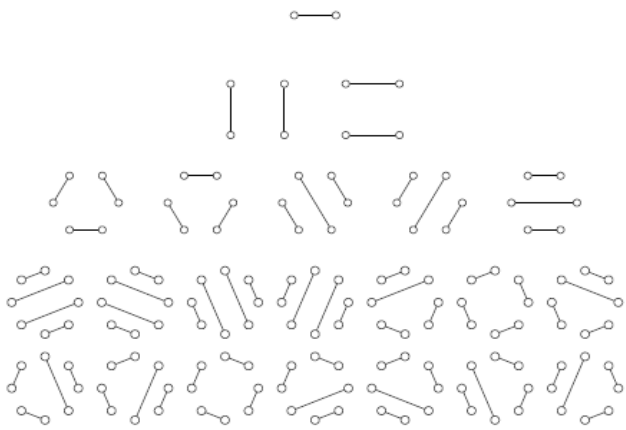


Slika 7.

Jasno je da za $n = 0$ postoji samo jedan način, $n = 1$ isto 1 jer je to samo kvadrat, $n = 2$ ima 2 načina jer imamo samo kvadrat i pravokutik. Za $n = 3$ postoji 5 načina kako 4 rješenja dobijemo preslagivanjem kvadrata, pravokutnika i većeg pravokutnika, a zadnji način s 3 kvadrata. Te za $n = 4$, kako se može vidjeti sa slike, postoji 14 načina.

- **Problem rukovanja preko stola**

Ako se u prostoriji nalazi $2n$ osoba koje sjede za okruglim stolom na koliko se načina oni mogu istovremeno rukovati s drugom osobom za stolom tako da im se ruke međusobno ne križaju? Svi mogući načini za $n \leq 4, n \in \mathbb{N}$ se mogu vidjeti i na slici.

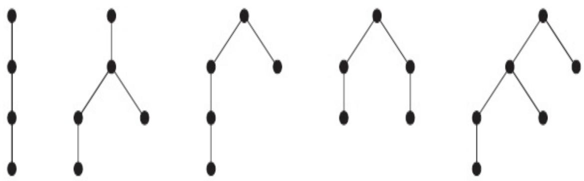


Slika 8.

Primjetimo samo da dužine gore u slici predstavljaju rukovanja između dvije osobe, te da se one niti u jednom trenutku ne sjeku. Broj načina takvih rukovanja za pojedine n-ove je upravo Catalonov broj c_n.

- **Jednostavno binarno stablo**

U ranijem smo primjeru promatrali potpuno binarno stablo. Sada gledamo binarno stablo, gdje korijen može imati do dvoje djece. Broj mogućih binarnih stabala s n vrhova je Catalanov broj c_n.



Slika 9.

Poglavlje 3

Funkcija izvodnica za Catalanove brojeve

U prošlom poglavlju mogli smo se uvjeriti da je niz Catalanovih brojeva prisutan u jako mnogo kombinatornih prebrojavanja, sada želimo izvesti neku opću funkciju, odnosno funkciju izvodnicu za Catalanove brojeve. Funkcija izvodnica je red potencija čiji su koeficijenti članovi nekog niza brojeva. Prema prošlim primjerima vidili smo da se Catalanovi brojevi mogu dobiti s rekurzijom:

$$C_0 = 1$$
$$C_1 = C_0C_0$$
$$C_2 = C_1C_0 + C_0C_1$$
$$\cdots$$
$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \cdots + C_1C_{n-2} + C_0C_n$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}.$$

Naš cilj je pronaći funkciju koju kada raspišemo u red potencija kao koeficijente uz potencije od z ima vrijednosti iz niza Catalanovih brojeva. Kada bi to uspjeli znali bi onda kako izgleda njegova funkcija izvodnica. Pa počnimo definiranjem funkcije $f(z)$ koja sadrži sve Catalanove brojeve:

$$f(z) = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + \ \cdots \ = \sum_{k=0}^{\infty} C_kz^k \tag{3.1}$$

Sada pomnožimo funkciju $f(z)$ samu sa sobom, pa dobivamo

$$(f(z))^2 = C_0C_0 + (C_1C_0 + C_0C_1)z + (C_2C_0 + C_1C1 + C_0C_2)z^2 + \ \cdots . \tag{3.2}$$

Usporedimo li gornju rekurzivnu formulu za Catalanove brojeve s našim koeficijentima u (3.2) koji su uz z možemo primijetiti da se podudaraju. Uvrstimo brojeve iz rekurzije u (3.2)

$$(f(z))^2 = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + \cdots . \tag{3.3}$$

Kako indeksi u (3.3) ne odgovaraju potencijama od z, pomnožit ćemo (3.3) s z i dodati $C_0 = 1$ jer nam i on nedostaje. Sada imamo

$$z(f(z))^2 + C_0 = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4 + \cdots$$
$$z(f(z))^2 + C_0 = f(z)$$

$$z(f(z))^2 - f(z) + 1 = 0. \tag{3.4}$$

Može se odmah vidjeti da je (3.4) obična kvadratna jednadžba koju rješavamo po $f(z)$, pa ćemo primjeniti formulu za rješavanje kvadratnih jednadžbi.

$$f(z)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

$$f(z)_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{3.5}$$

$$f(z)_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{3.6}$$

Od rješenja (3.5) i (3.6) samo jedno je prihvatljivo, a to je za koje vrijedi $f(0) = C_0 = 1$. Kako bi provjerili za koji od naša dva izraza to vrijedi gledati ćemo limes pojedinih rješenja za $z \to 0$.

$$\lim_{z \to 0} f(z)_1 = 1 \tag{3.7}$$

$$\lim_{z \to 0} f(z)_2 = \infty. \tag{3.8}$$

Vidimo da nam za (3.6) vrijednost funkcije ide u ∞, za $x \to 0$, pa odbacujemo to rješenje. Znači da je (3.5) naše pravo rješenje, jer zadovoljava uvjet $f(0) = C_0 = 1$.

Sada je potrebno razviti našu funkciju (3.5) u red potencija. Najprije koristimo binomnu formulu na $\sqrt{1-4z}$. Binomna formula zadana je sljedećim izrazom

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2} b^2 + \cdots + \frac{n}{1} a^1 b^{n-1} + b^n$$

gdje su a i b varijable, a $n \geq 0$.

U našem slučaju, gdje nam je $n = \frac{1}{2}$, a ne cijeli broj, naša formula neće imati fiksni završetak. Odnosno, imamo:

$$(1+4z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k. \tag{3.9}$$

Raspišimo (3.9)

$$(1+4z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(\frac{1}{2})}{1} 4z + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2 \cdot 1}(4z)^2 - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3 \cdot 2 \cdot 1}(4z)^3 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(4z)^4 - \cdots.$$

Riješimo se potencije kako bi dobili

$$(1-4z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!}2z - \frac{1}{2!}4z^2 - \frac{3 \cdot 1}{3!}8z^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!}16z^4 - \ \cdots. \tag{3.10}$$

Sada iz (3.5) i (3.10) dobivamo

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2!}2z + \frac{3 \cdot 1}{3!}4z^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!}8z^3 + \ \cdots. \tag{3.11}$$

Kako vrijede sljedeće jednakosti, $2^2 \cdot 2! = 4 \cdot 2$, $2^3 \cdot 3! = 6 \cdot 4 \cdot 2$, $2^4 \cdot 4! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, tada je $(5 \cdot 3 \cdot 1) \cdot 2^3 \cdot 3! = 6!$. Primjenimo to sada u (3.11)

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{2!}{1!1!}\Big)z + \frac{1}{3}\Big(\frac{4!}{2!2!}\Big)z^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{6!}{3!3!}\Big)z^3 + \ \cdots \ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} z^k.$$

Iz ove formule možemo zaključiti da je k-ti Catalanov broj dan formulom

$$c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

Poglavlje 4

Zanimljivosti s Catalanovim brojevima

4.1 Catalanov trokut brojeva

Svi znamo za Pascalov trokut, gdje članove dobivamo formulom

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

s tim da je n red, a k stupac Pascalovog trokuta, odnosno svaki član se može dobiti direktno zbrajanjem dva člana koja se nalaze iznad njega. Na sličan način možemo konstruirati trokut brojeva s Catalanovim brojevima i ujedno dobijemo dobru metodu za generiranje tih brojeva.

Trokut ćemo popunjavati odozgo prema dolje. Znamo da je $c_0 = 1$, pa prema tome prvi red se sastoji od jednog člana, a to je 1. Nastavljamo sljedećim postupkom, pri tom zapamtimo da svaki naredni red mora imati točno jedan član više od prošlog. Jednom kad popunimo red prelazimo u novi red i gledamo prvo prazno mjesto s lijeve strane. Njega dobivamo tako da zbrojimo broj koji se nalazi točno iznad njega s brojem koji se nalazi pored njega s lijeve strane. Ako nema broja iznad ili pored našeg člana smatramo da su njihove vrijednosti 0. Jednom kad smo popunili mjesto prelazimo na prvo desno mjesto do njega. Tako nastavljamo sve dok ne popunimo cijeli red. Ovaj postupak se može vidjeti na Slici 10.

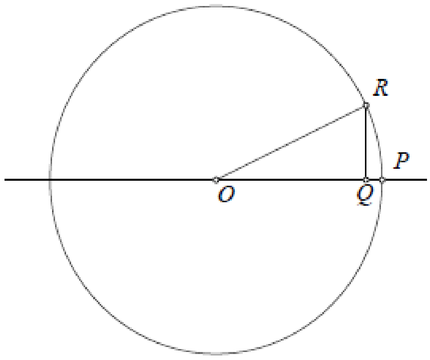
0	0							
0	1	0						
0	1	1	0					
0	1	2	2	0				
0	1	3	5	5	0			
0	1	4	9	14	14	0		
0	1	5	14	28	42	42	0	
0	1	6	20	48	90	132	132	0

Slika 10.

I sada, ako promatramo zadnje brojeve u svakom redu možemo vidjeti da je to upravo niz Catalanovih brojeva, što se vidi na Slici 10.

4.2 Catalanovi brojevi u geometriji

Neka nam je zadana kružnica radijusa r, $r > 0$, sa središtem u točki O, te imamo pravokutan trokut $\triangle ORQ$ s hipotenuzom $\overline{OR}$ duljine r i katetom $\overline{RQ}$ duljine 1. Nadalje, imamo točku P takva da je $|\overline{OP}| = r$ i Q leži na dužini $\overline{OP}$. Kolika je duljina od $\overline{QP}$? Pogledajmo sliku Sliku 11., gdje se vidi kako to treba izgledati.



Slika 11.

Kako imamo sve osim radijusa r, zadatak bi trebao biti jednostavan. Znamo da je

$$|\overline{QP}| = |\overline{OP}| - |\overline{OQ}| = r - |\overline{OQ}|,$$

te pomoću Pitagorinog poučka imamo da je

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{|\overline{OR}|^2 - |\overline{RQ}|^2} = \sqrt{r^2 - 1}.$$

Prema tome za $|\overline{QP}|$ imamo

$$|\overline{QP}| = r - \sqrt{r^2 - 1}.$$

Provjerimo što ćemo dobiti za $r = 5$. Imamo

$$|\overline{QP}| = 0.101020514433643803\ ...$$

Primjetimo da se na decimalnim mjestima počinju pojavljivati Catalanovi brojevi 1, 1, 2, 5 i 14.

Uzmimo sad veći r, npr. $r = 5000000$. Dobivamo

$$|\overline{QP}| = 0.000000\mathbf{1}0000000000000\mathbf{1}0000000000000\mathbf{2}0000000000000\mathbf{5}000000000000\mathbf{14}$$

$$000000000000\mathbf{42}00000000000\mathbf{132}00000000000\mathbf{429}0000000000\mathbf{1430}$$

$$0000000000\mathbf{4862}000000000\mathbf{16796}000000000\mathbf{58786}00000000\mathbf{208012}$$

$$00000000\mathbf{742900}0000000\mathbf{2674440}0000000\mathbf{9694845}000000\mathbf{35357670}$$

$$00000\mathbf{129644790}00000\mathbf{477638700}0000\mathbf{1767263190}0000\mathbf{6564120420}$$

$$000\mathbf{24466267020}000\mathbf{91482563640}00\mathbf{343059613650}0\mathbf{1289904147324}$$

$$0\mathbf{4861946401452}18367353072152695335509160066374795175037002240 \ldots$$

koji sadrži 25 uzastonih Catalanovih brojeva.

Sažetak

U današnje vrijeme su nizovi brojeva od posebnog interesa jer se pojavljuju u mnogim matematičkim problemima. U ovom radu smo promatrali i analizirali niz koji se zove niz Catalanovih brojeva. Catalanovi brojevi pojavljuju se u mnogim kombinatornim prebrojavanjima, kao što su kombinatorna prebrojavanja s konveksnim n-terokutom, binarnim stablima i sl. Također smo u radu opisali i nastojali objasniti neka od poznatijih kombinatornih prebrojavanje, gdje se Catalanovi brojevi pojavljuju kao rješenje. Izveli smo i njihovu funkciju izvodnicu, s kojom smo dobili formulu za računanje općeg člana niza.

Ključne riječi: Catalan, nizovi, kombinacije, prebrojavanje, binarno stablo, konveksan n-terokut, funkcija izvodnica

Summary

In today times sequences make a interesting data structure because they appear in many mathematical problems. In this paper we have looked at and analyzed s number sequence called Catalan numbers. Catalan numbers appear in many combinatorial counts such like combinatorial counts in a convex polygon, binary trees, etc. Also we have described and tried to explain some of the more famous combinatorial counts in which Catalan numbers appear as the solution. We also calculated the generating function, with which we got the formula for calculating the general number of the sequence.

Key words: Catalan, sequences, combinations, count, binary tree, convex polygon, generating function

Literatura

[1] T. Davis, *Catalan numbers*, dostupno na
$http://www.geometer.org/mathcircles$, 2006.

[2] T. A. Dowling, *Catalan numbers*, Ohio State University

[3] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 2012.

[4] D. Veljan, *Kombinatorika i diskretana matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[5] History of mathematics, *Eugene Charles Catalan*, dostupno na
$https://www.history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Catalan.html$

Životopis

Mario Mijić rođen je 2.3.1988. u Gradačcu, u Bosni i Hercegovini. Prva dva razreda završio je u Walldorfu, u Njemačkoj, a osnovnu školu završio je u Domaljevcu, u Bosni i Hercegovini. Nakon osnovne škole upisao je Trgovačku i komercijalnu školu u Osijeku. 2007. godine upisuje Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Završetkom preddiplomskog studija upisuje diplomski studiji Poslovne i financijske matematike na istom sveučilištu.