

## B - Spline

---

**Bijelić, Aleksandra**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:772955>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-03**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Aleksandra Bijelić**

**B-spline**

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Aleksandra Bijelić**

**B-spline**

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2017.

## Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s još jednim pojmom iz Numeričke analize, B-spline. Definirat ćemo B-spline i neka njegova osnovna svojstva, te pokazati kako se računa. Bavit ćemo se pronalaskom stabilnog i brzog algoritma za procjenu B-spline funkcije  $F$ . Za kraj sve što smo naučili u ovom radu pokazat ćemo kroz par osnovnih primjera.

**Ključne riječi:** Definicija B-spline, osnovna svojstva, računanje B-spline, B-spline aproksimacija, inverza formula, ocjena B-spline

## Abstract

In this thesis we introduce B-spline which is one of the terms in numerical analysis. We will define B-spline and present how to calculate it. We will see what is B-spline approximation on given function and how to calculate approximation of the inverse function. We will deal with finding stable and fast algorithm for estimation of B-spline of function  $\mathcal{F}$ . In the end, we will provide several basic examples based on what we have learned in this thesis.

**Key words:** Definitions of B-spline, basic properties of B-spline, the computation of B-spline, B-spline Approximation, inversion formula, evaluation of B-spline

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Definicija B-spline</b>	<b>1</b>
1.1	Računanje B-spline . . . . .	7
<b>2</b>	<b>B-spline Aproksimacija</b>	<b>9</b>
2.1	Inverzna formula . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Ocjena B-spline</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Primjena B-spline</b>	<b>15</b>

# 1 Definicija B-spline

Spline funkcije su djelomični polinomi povezani razdiobom  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  na segmentu  $[a, b]$  u čvorovima  $x_i$ . Općenito, realna funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se zove djelomični polinom reda  $r$  i stupnja  $r - 1$ , ako se za svaki  $i = 0, \dots, n - 1$  restrikcija funkcije  $f$  na podintervale  $(x_i, x_{i+1})$  podudara s polinomom  $p_i(x)$  stupnja  $\leq r - 1$ . Kako bi se postiglo injektivno preslikavanje između  $f$  i niza  $(p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x))$  definiramo  $f$  u čvorovima  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , tako da funkcija postaje neprekidna s desna. Neke derivacije spline funkcije također mogu biti neprekidne, ovisno o tome jesu li uzastopni čvorovi različiti ili ne.

B-spline je kombinacija krivulja koje prolaze kroz određen broj točaka koje nazivamo kontrolnim točkama i tvore glatke krivulje. Ove funkcije omogućuju stvaranje i upravljanje složenim oblicima i površinama pomoću brojnih točaka.

B-spline reda  $n$  su osnovne funkcije svake spline funkcija istog reda, definirane na istim čvorovima, što znači, sve moguće funkcije spline mogu se graditi iz linearne kombinacije B-spline i postoji samo jedna jedinstvena kombinacija za svaku funkciju spline.

B-spline su posebni djelomični polinomi. Oni su nenegativni i iščezavaju svugdje osim na nekoliko susjednih intervala  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Neka je  $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana s

$$f_x(t) = (t - x)_+ = \max(t - x, 0) = \begin{cases} t - x, & \text{za } t > x \\ 0, & \text{za } t \leq x \end{cases}$$

i neka postoji  $f_x^r, r \geq 0$ , posebno za  $r = 0$

$$f_x^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } t > x \\ 0, & \text{za } t \leq x \end{cases}$$

Funkcija  $f_x^r(\cdot)$  se sastoji od dva polinoma stupnja  $\leq r$ : 0-polinom  $P_0(t) = 0$  za  $t \leq x$  i polinoma  $P_1(t) = (t - x)^r$ , za  $t > x$ .

Primijetimo da funkcija  $f_x^r$  ovisi o realnom parametru  $x$  i  $f_x^r(t)$  je definirana kao funkcija od  $x$  koja je neprekidna s desna za svaki fiksni  $t$ . Za  $r \geq 1$ ,  $f_x^r(t)$  je  $(r - 1)$  puta neprekidno diferencijabilna, tj klase  $C^{r-1}(\mathbb{R})$  u odnosu na  $t$  i  $x$ .

Podijeljena razlika  $f[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}]$  realne funkcije  $f(t)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je dobro definirana za svaki segment  $t_i \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_{i+r}$  realnih brojeva, čak i ako  $t_j$  nisu međusobno različiti. Jedini uvjet je da  $f$  bude  $(s_j - 1)$  puta diferencijabilna za  $t = t_j$ ,  $j = i, i + 1, \dots, i + r$ , ukoliko se  $t_j$  pojavljuje  $s_j$  puta u podsegmentu  $t_i \leq t_i + 1 \leq \dots \leq t_j$  koji završava sa  $t_j$ . Prema tome,

$$f[t_i, \dots, t_{i+r}] = \frac{f^{(r)}(t_i)}{r!}, \quad \text{za } t_i = t_{i+r} \quad (1)$$

$$f[t_i, \dots, t_{i+r}] = \frac{f[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] - f[t_i, \dots, t_{i+r-1}]}{t_{i+r} - t_i}, \quad \text{za } t_i \neq t_{i+r} \quad (2)$$

Induktivno po  $r$  slijedi, podijeljena razlika funkcije  $f$  je linearna kombinacija njegovih derivacija u točkama, tj:

$$f[t_i, \dots, t_{i+r}] = \sum_{j=1}^{i+r} \alpha_j f^{(s_j-1)}(t_j), \quad \alpha_{i+r} \neq 0 \quad (3)$$

Neka je  $r \geq 1$  cijeli broj i  $t = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  bilo koji beskonačna neogranična razdioba realnih brojeva  $t_i$ , pri čemu

$$\inf t_i = -\infty, \quad \sup t_i = +\infty \quad i \quad t_i < t_{i+r}, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

$i$ -ti B-spline reda  $r$  povezan s  $t$  je definiran kao funkcija od  $x$ :

$$\begin{aligned} B_{i,r,t}(x) &= (t_{i+r} - t_i) f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] \\ &= f_x^{r-1}[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] - f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r-1}] \end{aligned} \quad (4)$$

Pišemo kraće  $B_i$  ili  $B_{i,r}$ .

$B_{i,r,t}(x)$  je dobro definirana za svaki  $x \neq t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}$  i prema (3) i (4) je linearna kombinacija funkcija

$$(t_j - x)_+^{r-s_j} |_{t=t_j}, \quad i \leq j \leq i+r \quad (5)$$

ako se vrijednost  $t_j$  pojavljuje  $s_j$  puta unutar podsegmenta  $t_i \leq t_i + 1 \leq \dots \leq t_j$ . Posebno, ako se vrijednost  $t_j$  pojavljuje  $n_j$  puta unutar cjelog segmenta  $t_i \leq t_i + 1 \leq \dots \leq t_{i+r}$  tada za svaki indeks  $\sigma$ ,  $1 \leq \sigma \leq n_j$  postoji točno jedan cijeli broj  $l = l(\sigma)$  koji zadovoljava

$$t_l = t_j, \quad s_l = \sigma, \quad i \leq l \leq i+r$$

$B_{i,r,t}$  je također linearna kombinacija od

$$(t_j - x)_+^s, \quad \text{gdje } r - n_j \leq s \leq r - 1, \quad i \leq j \leq i+r. \quad (6)$$

Stoga, funkcija  $B_{i,r,t}$  podudara se s polinomom stupnja najviše  $r - 1$  na svakom od otvorenih intervala u sljedećem skupu

$$\langle -\infty, t_i \rangle \cup \{(t_j, t_{j+1}), \quad i \leq j < i+r \quad \& \quad t_j < t_{j+1}\} \cup \langle t_{i+r}, +\infty \rangle.$$

$B_{i,r,t}(x)$  je djelomični polinom od  $x$  reda  $r$ , s podjelom realne osi danu s  $t_k$ ,  $k \in T_{i,r}$  pri čemu je

$$T_{i,r} = \{j | i \leq j < i+r \quad \& \quad t_j < t_{j+1}\} \cup \{i+r\}.$$

Samo u čvorovima  $x = t_k$ ,  $k \in T_{i,r}$ , funkcija  $B_{i,r,t}(x)$  može skočiti nepovezano, ali je neprekidna s desna, jer se funkcije  $(t_j - x)_+^s$  koje se pojavljuju u (5) i (6) su funkcije od  $x$  koje su neprekidne s desna svugdje, čak i u  $s = 0$ . Također prema (5) i (6) za svaki  $t = (t_j)$ , ako se  $t_j$  pojavljuje  $n_j$  puta unutar  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}$  (ako je  $n_j = r$  tada  $B_{i,r,t}(x)$  ima nepovezan skok na  $x = t_j$ ). Stoga je red diferencijabilnosti od  $B_{i,r,t}$  na  $x = t_j$  određen brojem ponavljanja vrijednosti od  $t_j$ .

Pogledajmo kako izgleda B-spline nekog reda  $i$ .

Neka je zadana neprekidna razdioba u čvorovima  $t = (t_i)$ . B-spline reda 1 u danim čvorovima je karakteristična funkcija ove razdiobe, tj. funkcija

$$B_{i,1}(t) = X_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } t_i \leq t < t_{i+1}; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (7)$$

Primjetimo da su sve ove izabrane funkcije neprekidne s desna. B-spline reda 1 mora dati u sumi jedinicu, tj.

$$\sum_i B_{i,1}(t) = 1, \quad \text{za svaki } t. \quad (8)$$

Posebno,

$$t_i = t_{i+1} \Rightarrow B_{i,1} = X_i = 0. \quad (9)$$

Pomoću B-spline **prvog reda**, rekurzivno dobivamo B-spline **višeg reda**:

$$B_{i,r} = \lambda_{i,r} B_{i,r-1} + (1 - \lambda_{i+1,r}) B_{i+1,r-1} \quad (10)$$

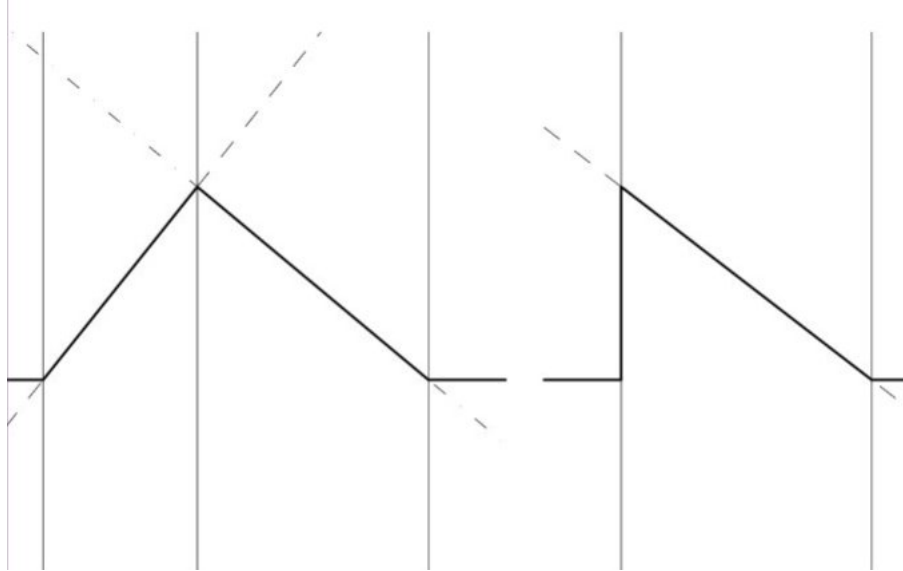
gdje je

$$\lambda_{i,r}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+r-1}-t_i}, & \text{za } t_i \neq t_{i+r-1}; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (11)$$

B-spline drugog reda dan je s:

$$B_{i,2} = \lambda_{i,2} X_i + (1 - \lambda_{i+1,2}) X_{i+1}, \quad (12)$$

i sastoji se, općenito, od dva netrivialna linearna djela koji se neprekidno spajaju i tvore djelomične linearne funkcije koje isčežavaju izvan intervala  $[t_i, t_{i+2})$ . Zbog toga,  $B_{i,2}$  zovemo linearni B-spline.



Slika 1: Linearni B-spline: (a) jednostruki čvorovi, (b) dvostruki čvorovi

Ukoliko je npr.  $t_i = t_{i+1}$  (u tome slučaju je  $X_i = 0$ ), ali je  $t_{i+1} < t_{i+2}$  tada se B-spline sastoji od samo jednog netrivialnog djela koji je neprekidan u dvostrukom čvoru  $t_i = t_{i+1}$ , kao što nam je prikazano na Slici 1(b).

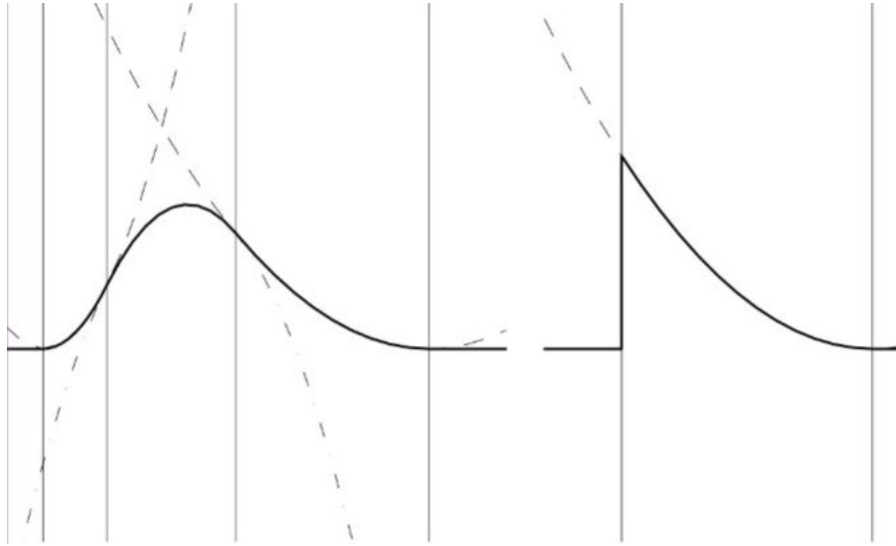
B-spline trećeg reda dan je s

$$\begin{aligned} B_{i,3} &= \lambda_{i,3} B_{i,2} + (1 - \lambda_{i+1,3}) B_{i+1,2} \\ &= \lambda_{i,3} \lambda_{i,2} X_i + (\lambda_{i,3} (1 - \lambda_{i+1,2}) \\ &\quad + (1 - \lambda_{i+1,3}) \lambda_{i+1,2}) X_{i+1} \\ &\quad + (1 - \lambda_{i+1,3}) (1 - \lambda_{i+2,2}) X_{i+2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Općenito, B-spline trećeg reda se sastoji od 3 netrivialna kvadratna djela, i, prema Slici 2 vidimo da se glatko spajaju u čvorovima i tvore po djelovima kvadratne funkcije klase  $C^1$



koje iščezavaju izvan intervala  $[t_i, t_{i+2})$ . Ukoliko je npr.  $t_i = t_{i+1} = t_{i+2}$  (tj.  $X_i = X_{i+1} = 0$ ), tada se  $B_{i,3}$  sastoji od samo jednog netrivialnog djela, koji je neprekidan u trostrukom čvoru  $t_i$ , ali je i dalje klase  $C^1$  u jednostrukom čvoru  $t_{i+3}$ , kako je i prikazano na Slici 2(b).

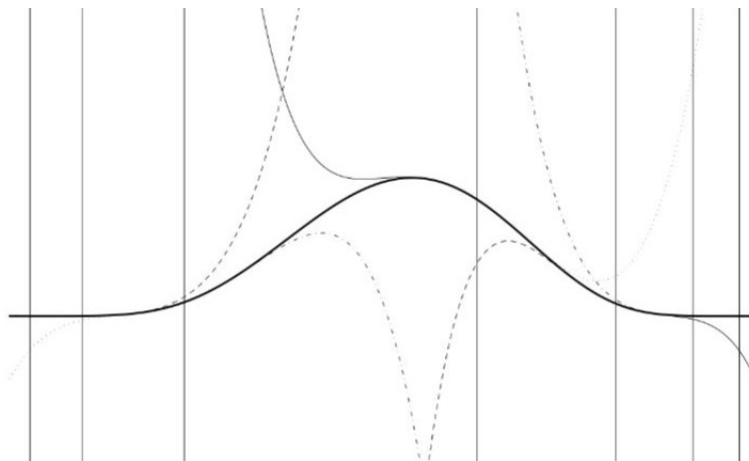


Slika 2: Kvadratni B-spline: (a) jednostruki čvorovi, (b) trostruki čvorovi

Nakon  $r - 1$  korak,  $B_{i,r}$  je oblika

$$B_{i,r} = \sum_{j=i}^{i+r-1} b_{j,r} X_j, \quad (14)$$

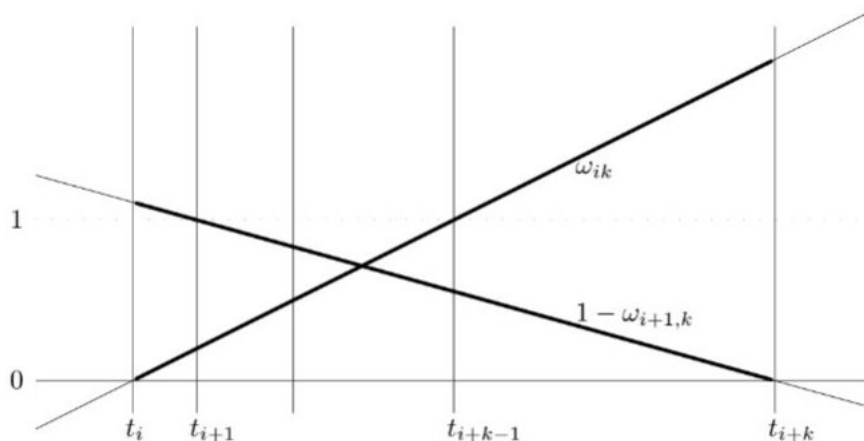
gdje je svaki  $b_{j,r}$  polinom stupnja  $< r$ , jer je zbroj produkta  $r - 1$  linearnih polinoma. Prema tome, B-spline reda  $r$  se sastoji od djelomičnih polinoma reda  $< r$ . (U stvrani, svi  $b_{j,r}$  su točno stupnja  $r - 1$ .)



Slika 3: B-spline 6. reda i 6 polinoma 5. stupnja koji zajedno čine B-spline

Iz ovoga, možemo zaključiti,  $B_{i,r}$  je djelomični polinom stupnja  $< r$  koji iščezava izvan intervala  $[t_i, t_{i+r})$  i sadrži moguće točke preloma  $t_i, t_{i+r}$  kao na Slici 3.

$B_{i,r}$  je nul-funkcija samo u slučaju  $t_i = t_{i+1}$ . Također prema indukciji,  $B_{i,r}$  je pozitivna na otvorenom intervalu  $(t_i, t_{i+r})$ , jer su i  $\lambda_{i,r}$  i  $1 - \lambda_{i+1,r}$  pozitivne na intervalu, primjer vidimo na Slici 4.



Slika 4: Dvije  $\lambda$  funkcije koje su pozitivne na intervalu  $(t_i, t_{i+r})$

**Teorem 1** [3]

- a)  $B_{i,r,t}(x) = 0$ , za  $x \notin [t_i, t_{i+r}]$
- b)  $B_{i,r,t}(x) > 0$ , za  $t_i < x < t_{i+r}$
- c)  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_i B_{i,r,t}(x) = 1$$

*i* suma sadrži konačno mnogo uvjeta, različitih od nula

**Dokaz**

(a) Za dokaz ovog djela bit će nam potreban sljedeći Teorem:

**Teorem 2** *Ako je  $f(x)$  polinom stupnja  $r$ , tada je*

$$f[x_0, \dots, x_k] = 0, \quad \text{za } k > r.$$

Za  $x < t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $f_x^{r-1}(t) = (t - x)^{r-1}$  je polinom stupnja  $(r - 1)$  u  $t$  koji sadrže  $r$  isčezavajućih podjeljenih razlika

$$f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{i,r}(x) = 0$$

po Teoremu 2.

S druge strane, ako je  $t_i \leq t \leq t_{i+r} < x$ , onda  $f_x^{r-1}(t) = (t - x)_+^{r-1} = 0$ , je trivijalno, pa je opet  $B_{i,r}(x) = 0$

(b) Za  $r = 1$  i  $t_i < x < t_{i+1}$ , tvrdnja sljedi iz definicije

$$B_{i,1}(x) = [(t_{i+1} - x)_+^0 - (t_i - x)_+^0] = 1 - 0 = 1,$$

i za  $r > 1$ , iz rekurzije (17) za funkciju  $B_{i,r}(x)$ .

(c) Prije nego dokažemo ovu tvrdnju, podsjetimo se Teorema o interpolacijskom polinomu i nekih karakteristika

**Teorem 3** *Neka je  $f \in C^{n+1}([a, b])$ , te  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , neka je  $P_n$  odgovarajući interpolacijski polinom onda za svaki  $\bar{x} \in [a, b]$  postoji  $\xi \in (a, b)$  takav da je*

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\bar{x}),$$

pri čemu je

$$\omega(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n).$$

Newton oblik interpolacijskog polinom

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (15)$$

Za  $(x_{n+1}, f_{n+1})$ , takav da je  $x_{n+1} = \bar{x}$ ,  $f_{n+1} = f(\bar{x})$  i  $\bar{x} \neq x_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$  iz Newton formula (15) slijedi

$$f(\bar{x}) = P_{n+1}(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] \omega(\bar{x})$$

ili

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] \omega(\bar{x}).$$

Prema Teoremu 3 mora vrijediti

$$f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \text{za neki } \xi \in [x_0, \dots, x_n, \bar{x}]$$

iz čega slijedi

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}, \quad \text{za neki } \xi \in [x_0, \dots, x_n]. \quad (16)$$

Dokažimo sada našu tvrdnu (c) Teorem 1, pretpostavimo prvo  $t_j < x < t_{j+1}$ .

Prema (a),  $B_{i,r}(x) = 0$  za svaki  $i, r$  takav da  $i + r \leq j$  i za svaki  $i \geq j + 1$ , vrijedi

$$\sum_i B_{i,r}(x) = \sum_{i=j-r+1}^j B_{i,r}(x).$$

Jednadžba (4) implicira,

$$B_{i,r}(x) = f_x^{r-1}[t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+r}] - f_x^{r-1}[t_i, t_{i+r}, \dots, t_{i+r-1}].$$

Slijedi,

$$\sum_i B_{i,r}(x) = f_x^{r-1}[t_{j+1}, \dots, t_{j+r}] - f_x^{r-1}[t_{j-r+1}, \dots, t_j] = 1 - 0.$$

Posljednja jednakost vrijedi jer je funkcija  $f_x^{r-1}(t) = (t-x)^{r-1}$  polinom stupnja  $(r-1)$  u  $t$  za  $t_j < x < t_{j+1} \leq t \leq t_{j+r}$ , za koje je  $f_x^{r-1}[t_{j+1}, \dots, t_{j+r}] = 1$  prema jednadžbi (16), i funkcija  $f_x^{(r-1)}(t) = (t-x)^{r-1} = 0$  isčezava za  $t_{j-r+1} \leq t \leq t_j < x < t_{j+1}$ . Za  $x = t_j$ , tvrdnja sljedi zbog neprekidnosti funkcije  $B_{i,r}$  s desna,

$$B_{i,r}(t_j) = \lim_{y \rightarrow t_j^+} B_{i,r}(y)$$

□

## 1.1 Računanje B-spline

B-spline možemo računati pomoću rekurzije. Rekurzija se temelji na generalizaciji Libnizove formule za derivaciju produkta dviju funkcija.

### **Teorem 4 (Pravilo produkta podjeljene razlike)**

Neka je  $t_i \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_{i+k}$ . Pretpostavimo nadalje da je funkcija  $f(t) = g(t)h(t)$  produkt dviju funkcija koje se razlikuju za neki  $t = t_j$ ,  $j = i, \dots, i+k$ , prema tome  $g[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]$  i  $h[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]$  su definirane kao (1). Pa slijedi

$$f[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] = \sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, t_{i+1}, \dots, t_r] h[t_r, t_{r+1}, \dots, t_{i+k}]$$

**Dokaz** Prema (15) polinomi

$$\sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, t_{i+1}, \dots, t_r] (t - t_i) \cdots (t - t_{r-1})$$

i

$$\sum_{s=i}^{i+k} h[t_s, \dots, t_{i+k}] (t - t_{s+1}) \cdots (t - t_{i+k})$$

interpoliraju funkciju  $g$  i  $h$  u točkama  $t = t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ . Produkt polinoma

$$F(t) = \sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, t_{i+1}, \dots, t_r] (t - t_i) \cdots (t - t_{r-1}) \cdot \sum_{s=i}^{i+k} h[t_s, \dots, t_{i+k}] (t - t_{s+1}) \cdots (t - t_{i+k})$$

interpolira funkciju  $f(t)$  za  $t = t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ . Ovaj produkt možemo zapisati kao sumu dva polinoma

$$F(t) = \sum_{r,s=i}^{i+k} \cdots = \sum_{r \leq s} \cdots + \sum_{r > s} \cdots = P_1(t) + P_2(t).$$

Budući da je svaka vrijednost sume  $\sum_{r > s} \Pi_{j=i}^{i+k}(t - t_j)$ , polinom  $P_2(t)$  interpolira 0-funkciju u  $t = t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ . Prema tome, polinom  $P_1(t)$ , stupnja  $\leq k$ ,

interpolira  $f(t)$  u  $t = t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ . Stoga,  $P_1(t)$  je jedinstveni interpolacijski polinom od  $f(t)$  stupnja  $\leq k$ . Prema Newton obliku interpolacijskog polinoma (15) najveći koeficijent od  $P_1(t)$  je  $f[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]$ . Poređenjem koeficijenata  $t^k$  s obe strane sume  $P_1(t) = \sum_{r \leq s} \dots$ ,  $P_1$  daje željenu formulu

$$f[t_i, \dots, t_{i+k}] = \sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, \dots, t_r] h[t_r, \dots, t_{i+r}],$$

□

Sada koristimo Teorem 4 kako bi izveli rekurziju za B-spline,  $B_{i,r}(x) \equiv B_{i,r,t}(x)$  prema jednakosti (4). Neka je

$$N_{i,r}(x) = \frac{B_{i,r}(x)}{t_{i+r} - t_i} \equiv f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}],$$

za koji sljedi jedinstvena rekurzija:

Za  $r \geq 2$  i  $t_i < t_{i+r}$ :

$$N_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_{i,r-1}(x) + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_i} N_{i+1,r-1}(x). \quad (17)$$

**Dokaz** Pretpostavimo,  $x \neq t_j$  za svaki  $j$ . Primjenjujemo pravilo Teorema 4 na proizvod

$$f_x^{r-1}(t) = (t - x)_+^{r-1} = (t - x)(t - x)_+^{r-2} = g(t) f_x^{r-2}(t).$$

Znamo da je  $g(t)$  linearan polinom od  $t$ , prema (16) vrijedi

$$g[t_i] = t_i - x, \quad g[t_i, t_{i+1}] = 1, \quad g[t_i, \dots, t_j] = 0 \quad \text{za } j > i + 1,$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} f_x^{r-1}[t_i, \dots, t_{i+r}] &= (t_i + x) f_x^{r-2}[t_i, \dots, t_{i+r}] + 1 \cdot f_x^{r-2}[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] \\ &= \frac{t_i - x}{t_{i+r} - t_i} (f_x^{r-2}[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] - f_x^{r-2}[t_i, \dots, t_{i+r-1}]) + 1 \cdot f_x^{r-2}[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] \\ &= \frac{x - t_i}{t_{i+r} - t_i} f_x^{r-2}[t_i, \dots, t_{i+r-1}] + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_i} f_x^{r-2}[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}], \end{aligned} \quad (18)$$

što dokazuje tvrdnju (17) za  $x \neq t_i, \dots, t_{i+r}$ .

Rezultat je istinit za sve  $x$ , budući da su svi  $B_{i,r}(x)$  konstantni s desna i  $t_i < t_{i+r}$ .

□

Dokaz Teorema 1,(b) sada možemo upotpuniti: Prema (17), vrijednost  $N_{i,r}(x)$  je konveksna linearna kombinacija od  $N_{i,r-1}(x)$  i  $N_{i+1,r-1}(x)$  za  $t_i < x < t_{i+r}$  sa pozitivnom vrijednošću  $\lambda_i(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+r}-t_i} > 0$ ,  $1 - \lambda_i(x) > 0$ . Također  $N_{i,r}(x)$  i  $B_{i,r}(x)$  imaju isti predznak, a mi već znamo da je  $B_{i,1}(x) = 0$  za  $x \notin [t_i, t_{i+1}]$  i  $B_{i,r}(x) > 0$  za  $t_i < x < t_{i+1}$ . Indukcijom po  $r$ , koristeći (17), dobivamo  $B_{i,r} > 0$ , za  $t_i < x < t_{i+1}$ . Jednadžba

$$B_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} B_{i,r-1}(x) + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_{i+1}} B_{i+1,r-1}(x) \quad (19)$$

je jednaka (17), i predstavlja  $B_{i,r}(x)$  kao pozitivnu linearsnu kombinaciju od  $B_{i,r-1}(x)$  i  $B_{i+1,r-1}(x)$ . Ovo koristimo za računanje vrijednosti svih  $B$ -spline,  $B_{i,r}(x) = B_{i,r,t}(x)$  za danu fiksnu vrijednost  $x$ .

Kako bi ovo pokazali, neka je zadana vrijednost  $x$ . Neka je  $t_j \in t$  i  $t_j \leq x < t_{j+1}$ . Prema Teoremu 1(a) znamo  $B_{i,r}(x) = 0$  za svaki  $i, r$  i  $x \notin [t_i, t_{i+r}]$  tj. za  $i \geq j + 1$ . Prikažimo to pomoću tablice 1,  $B_{i,r}(x)$  nestaje na pozicijama gdje je 0:

0	0	0	0	...
0	0	0	$B_{j-3,4}(x)$	...
0	0	$B_{j-2,3}(x)$	$B_{j-2,4}(x)$	...
0	$B_{j-1,2}(x)$	$B_{j-1,3}(x)$	$B_{j-1,4}(x)$	...
$B_{j,1}(x)$	$B_{j,2}(x)$	$B_{j,3}(x)$	$B_{j,4}(x)$	...
0	0	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tablica 1

Prema definiciji  $B_{j,1} = B_{j,1}(x) = 1$ , za  $t_j \leq x < t_{j+1}$ , određuje prvu kolonu tablice 1. Preostali stupci mogu se izračunati uzastopno pomoću rekurzije (19): Svaki element  $B_{i,r}$  se može izvesti pomoću dva susjedna,  $B_{i,r-1}$  i  $B_{i+1,r-1}$ .

Ova metoda je numerički vrlo stabilna, jer se samo nenegativni višekratnici nenegativnih brojeva dodaju zajedno.

**Primjer 1** Za  $t_i = i$ ,  $i = 0, 1, \dots$  i  $x = 3.5 \in [t_3, t_4]$  tablica vrijednosti  $B_{i,r}$  je oblika:

r=	1	2	3	4
i=0	0	0	0	$\frac{1}{48}$
i=1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{48}$
i=2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{23}{48}$
i=3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$
i=4	0	0	0	0

Tablica 2

Na primjer,  $B_{2,4}$  je dobiven iz

$$B_{2,4} = B_{2,4}(3.5) = \frac{3.5 - 2}{5 - 2} \cdot \frac{6}{8} + \frac{6 - 3.5}{6 - 3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{48}.$$

## 2 B-spline Aproksimacija

**Definicija 1** [1]  $B$ -spline aproksimacija stupnja  $r - 1$  (reda  $r$ ) na prizvoljnu funkciju  $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$  je

$$S_r[f; x] = \sum_i f(\xi_i) B_{i,r}(x) \tag{20}$$

gdje je,

$$\xi_i = \frac{1}{r - 1} (t_{i+1} + t_{i+2} + \dots + t_{i+r-1}) \tag{21}$$

$\xi_i$  nazivamo čvorovima. B-spline aproksimacija je lokalna aproksimacije. Aproksimacija (20) sadrži  $r$  nenul uvjeta. U svakom trenutku, aproksimacija uzima u obzir samo lokalno ponašanje primitivne funkcije.

## 2.1 Inverzna formula

Neka je zadan skup vrijednosti  $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ , a mi želimo pronaći jedinstveni skup funkcijskih vrijednosti  $\{f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_m)\}$  takav da B-spline aproksimacija na  $f$  interpolira zadane podatke, odnosno želimo pronaći  $f(\xi_i)$  koji zadovoljava

$$S_r[f; \xi_i] = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (22)$$

ili u matričnom obliku, dobivamo sljedeći odnos

$$B \cdot F^T = Y^T \quad (23)$$

gdje je

$$B = \begin{pmatrix} B_{0,r}(\xi_0) & B_{1,r}(\xi_0) & \cdots & B_{m,r}(\xi_0) \\ B_{0,r}(\xi_1) & B_{1,r}(\xi_1) & \cdots & B_{m,r}(\xi_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{0,r}(\xi_m) & B_{1,r}(\xi_m) & \cdots & B_{m,r}(\xi_m) \end{pmatrix}$$

$$F = (f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_m))$$

$$Y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$$

$B$  je Gram matica za koju znamo da je invertibilna za različite skupove čvorova  $\{\xi_i\}$ , što je u većini slučajeva. Inverzna formula je tada

$$F^T = B^{-1} \cdot Y^T \quad (24)$$

## 3 Ocjena B-spline

Sljedeći je algoritam stabilna i brza metoda za procjenu B-spline funkcije  $F$  definirane na skupu od  $[0, n]$ , bez izračunavanja osnovnih funkcija  $B_{i,r}(x)$ .

$$F(x) = \sum_i A_i B_{i,r}(x) \quad (25)$$

Kako bi ocjenili funkciju (25) u točki  $x \in [t_j, t_{j+1})$ , potrebno je izračunati  $r$  brojeva

$$B_{i,r}(x), \quad i = j - r + 1, \dots, j;$$

$F(x)$  možemo zapisati kao

$$F(x) = \sum_{i=j-r+1}^j A_i B_{i,r}(x).$$

Diferencijal funkcije  $F(x)$  je:

$$\begin{aligned} B_{i,r}^{(1)}(x) &= \frac{d}{dt}[f_x^{r-1}[t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] - f_x^{r-1}[t_i, \dots, t_{i+r-1}]] \\ &= -(r-1)[N_{i+1,r-1}(x) - N_{i,r-1}(x)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x) &= (r-1) \sum_i A_i [N_{i,r-1}(x) - N_{i+1,r-1}(x)] \\ &= (r-1) \sum_i A_i^{(1)} B_{i,r-1}(x), \end{aligned} \quad (27)$$

gdje je

$$A_i^{(1)} = \frac{A_i - A_{i-1}}{t_{i+r-j} - t_i}. \quad (28)$$

Općenitije,

$$\begin{aligned} A_i^{(0)} &= A_i, \\ A_i^{(j)} &= \frac{A_i^{(j-1)} - A_{i-1}^{(j-1)}}{t_{i+r-j} - t_i}, \quad j > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

te vrijedi

$$F^{(j)}(x) = (r-1) \cdots (r-j) \sum_i A_i^{(j)} B_{i,r-j}(x). \quad (30)$$

Ukoliko je

$$t_i = t_0 + ih, \quad \text{za svaki } i,$$

tada je (30) jednako

$$F^{(j)}(x) = h^{-j} \sum_i (\nabla^j A_i) B_{i,r-j}(x)$$

Funkciju  $F(x)$  možemo zapisati i pomoću B-spline nižeg reda, sa određenim koeficijentima polinoma.

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_i A_i B_{i,r}(x) \\ &= \sum_i A_i (x - t_i) N_{i,r-1}(x) + (t_{i+r} - x) N_{i+1,r-1}(x) \\ &= \sum_i A_i (x - t_i) + A_{i-1} (t_{i+r-1} - x) N_{i,r-1}(x) \\ &= \sum_i A_i^{[1]}(x) B_{i,r-1}(x), \end{aligned}$$

gdje je,

$$A_i^{[1]}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} A_i + \frac{t_{i+r-1} - x}{t_{i+r-1} - t_i} A_{i-1}.$$



Općenitije,

$$A_i^{[j]}(x) = \begin{cases} A_i, & j = 0 \\ \frac{x-t_i}{t_{i+r-j}-t_i} A_i^{[j-1]}(x) + \frac{t_{i+r-j}-x}{t_{i+r-j}-t_i} A_{i-1}^{[j-1]}(x), & j > 0, \end{cases} \quad (31)$$

dobivamo

$$F(x) = \sum_i A_i^{[j]}(x) B_{i,r-j}(x). \quad (32)$$

Kako je  $B_{i,1}(x) = 1$  za  $t_i \leq x < t_{i+1}$  i nula inače, sledi da je

$$F(x) = \sum_i A_i^{[r-1]}(x), \quad t_i \leq x < t_{i+1}. \quad (33)$$

Stoga, ukoliko je  $x \in [t_i, t_{i+1})$ , tada  $F(x)$  možemo naći pomoću  $A_{i-r+1} \dots, A_i$ , stvaranjem konveksnih kombinacija pomoću 31. Neka je

$$(t-x)^{r-1} = \sum_i \varphi_{i,r}(x) B_{i,r}(x), \quad \varphi_{i,r}(t) = \prod_{k=1}^{r-1} (t-t_{i+k}), \quad \text{za svaki } i, \quad (34)$$

to dobivamo iz

$$A_i^{[0]}(x) = A_i = \varphi_{i,r}(t), \quad \text{za svaki } i,$$

a prema (31) sledi

$$\begin{aligned} A_i^{[1]}(x) &= \{(x-t_i)\varphi_{i,r}(t) + (t_{i+r-1}-x)\varphi_{i-1,r}(t)\}/(t_{i+r-1}-t_i) \\ &= \varphi_{i,r-1}(t)\{(x-t_i)(t-t_{i+r-1}) + (t_{i+r-1}-x)(t-t_i)\}/(t_{i+r-1}-t_i) \\ &= \varphi_{i,r-1}(t)(t-x) \end{aligned} \quad (35)$$

stoga

$$\sum_i \varphi_{i,r}(t) B_{i,r}(x) = (t-x) \sum_i \varphi_{i,r-1}(t) B_{i,r-1}(x).$$

Kako je

$$\sum_i \varphi_{i,1}(t) B_{i,1}(x) \equiv \sum_i B_{i,1}(x) \equiv 1,$$

indukcija po  $r$  sada dokazuje (34). Potencirajmo obje strane jednačbe (34) s  $t$  i usporedimo koeficijente, sledi

$$\sum_i B_{i,r}(x) \equiv 1, \quad (36)$$

potvrđujući zaljučak prema (31) i (32) da, za  $x \in [t_i, t_{i+1})$ , broj  $F(x)$  je konveksna kombinacija brojeva  $A_{i-r+1}, \dots, A_i$ .

Također iz (34) sledi

$$(x-t)^{r-1} = \sum_i \psi_{i,r}(x) B_{i,r}(t), \quad \psi_{i,r}(x) = (t_{i+1}-x) \cdot (t_{i+r-1}-x); \quad (37)$$

Kako bi izračunali ocjenu B-spline koristit ćemo dva algoritma.

Prvi algoritam se temelji na (31) i (32). Cilj nam je pronaći  $i$  takav da  $t_i \leq x < t_{i+1}$ , koji generira sve unose u pripadnu tablicu, koristeći (31):

$$\begin{array}{cccc}
A_{i-r+1}^{[0]}(x) & & & \\
A_{i-r+2}^{[0]}(x) & A_{i-r+2}^{[1]}(x) & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
A_{i-1}^{[0]}(x) & A_{i-1}^{[1]}(x) & \cdots & A_{i-1}^{[r-2]}(x) \\
A_i^{[0]}(x) & A_i^{[1]}(x) & \cdots & A_i^{[r-2]}(x) & A_i^{[r-1]}(x)
\end{array}$$

Desni najniži unos je traženi broj  $F(x)$ .

Označimo

$$\begin{aligned}
A(k, t) &= A_{i-r+k}^{[t-1]}(x), & k = t, \dots, r, & \quad t = 1, \dots, r, \\
a_1(k) &= t_{i+r} - x, & k = 1, \dots, r, \\
a_2(k) &= x - t_{i-r+k}, & k = 1, \dots, r,
\end{aligned} \tag{38}$$

radi jednostavnosti. Tada

$$\begin{aligned}
A(k, 1) &= A_{i-r+k}, & k = 1, \dots, r, \\
A(k, t+1) &= \frac{a_2(k) \cdot A(k, t) + a_1(k-t) \cdot A(k-1, t)}{a_2(k) + a_1(k-t)}, & k = t+1, \dots, r; \quad t = 1, \dots, r-1.
\end{aligned} \tag{39}$$

Primjetimo kako je

$$\begin{aligned}
a_2(k) + a_1(k-t) &= x - t_{i-r+k} + t_{i+k-t} - x \\
&= t_{i+k-t} - t_{i+k-r} \geq t_{i+1} - t_i > 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

pa proizvoljne točke iz razdiobe ne uzrokuju dodatne poteškoće ukoliko je, kako smo i pretpostavili,  $i$  izabran tako da  $t_i \leq x < t_{i+1}$ .  $A(k, t)$  možemo računati stupac po stupac, npr.

$$k = t, \dots, r; \quad t = 2, \dots, r$$

ili red po red, npr.

$$t = 2, \dots, k; \quad k = 2, \dots, r$$

ili dijagonalno prema dolje, npr.

$$t = 2, \dots, j; \quad k = t + r - j; \quad j = 2, \dots, r.$$

Svaki način zahtjeva samo jedan jednodimenzionalan niz sa  $r$  unosa za spremanje uspješno izračunatih vrijednosti  $A(k, t)$ . U prvom slučaju bi računali unos  $a_1$ , u zadnjem, računavali bi  $a_2$ , dok bi drugi trebao računati vrijednosti  $a_1$  i  $a_2$ .

Ukoliko su nam potrebne u isto vrijeme vrijednosti funkcije  $F(x)$  i neke njegove derivacije, tada je vjerojatno bolje koristiti algoritam koji stvara u isto vrijeme sve brojeve  $B_{i,j}(x)$  koji nisu nula za dani  $x$ . Pretpostavimo stoga,

$$t_i \leq x < t_{i+1},$$

to nam omogućava stvaranje svih vrijednosti sljedeće trokutaste matrice:

$$\begin{array}{cccccc}
B_{i,1}(x) & B_{i-1,2}(x) & \cdots & B_{i-r+2,r-1}(x) & B_{i-r+1,r}(x) & \\
& B_{i,2}(x) & \cdots & B_{i-r+3,r-1}(x) & B_{i-r+2,r}(x) & \\
& & \ddots & \vdots & \vdots & \\
& & & B_{i,r-1}(x) & B_{i-1,r}(x) & \\
& & & & B_{i,r}(x) & 
\end{array}$$

$(r - j)$  stupac ove tablice sadrži brojeve potrebne za procjenu  $F^{(j)}(x)$  pomoću (30),  $j = 0, \dots, r - 1$ . Iz tog razloga, pokazat ćemo samo kako generirati tablicu stupac po stupac. Radi pojednostavljenja, neka je

$$\begin{aligned}
B(k, t) &= B_{i+k-t,t}(x), \\
a_1(k) &= t_{i+k} - x, \quad k = 1, \dots, r \\
a_2(k) &= x - t_{i+1-k}, \quad k = 1, \dots, r
\end{aligned} \tag{41}$$

Vrijednosti tablice su tada

$$B(k, t), \quad k = 1, \dots, t; \quad t = 1, \dots, r,$$

pri čemu je

$$B(k, t) = 0, \quad \text{za } k > t \text{ ili } k < 1. \tag{42}$$

Uz oznake (41), i pomoću (19) slijedi

$$\begin{aligned}
B(k, t + 1) &= a_2(t + 1 - k + 1) \frac{B(k - 1, t)}{a_1(k - 1) + a_2(t + 1 - k + 1)} \\
&+ a_1(k) \frac{B(k, t)}{a_1(k) + a_2(t + 1 - k)}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Ova formula ne utječe na moguću pristunost koeficijenata  $t_j$ , budući da

$$a_1(k) + a_2(t + 1 - k) = t_{i+k} - t_{i+k-t} \geq t_{i+1} - t_i > 0$$

za sve vrijednosti  $k$  i  $t$ . Jednadžbe (41) i (43) dovode nas do algoritma za računanje  $B(k, t)$ :

- 1:  $B(1, 1) = 1$
- 2: **for**  $t = 1, \dots, r - 1$  **do**
- 3:      $a_1(t) = t_{i+t} - x$ ,  $a_2(t) = x - t_{i+1-t}$ ,
- 4:      $B(1, t + 1) = 0$ ;
- 5:     **for**  $k = 1, \dots, t$ , **do**
- 6:          $N = B(k, t) / (a_1(k) + a_2(t + 1 - k))$
- 7:          $B(k, t + 1) = B(k, t + 1) + a_1(k)N$
- 8:          $B(k + 1, t + 1) = a_2(t + 1 - k)N$
- 9:     **end for**
- 10: **end for**

Ovaj algoritam se može prilagoditi kako bi koristio samo jednodimenzijonalne nizove od  $r$  unora za pohranu  $B(k, t)$ , prepisivanjem uzastupnih stupaca.

## 4 Primjena B-spline

Prije nego što krenemo s primjerima i geometrijskom interpretacijom, definirajmo još neke potrebne pojmove.

**Definicija 2** *B-spline krivulja stupnja  $r - 1$  (reda  $r$ ) povezana poligonom  $\mathcal{P}$  je*

$$S_n[\mathcal{P}] = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,r}(x), \quad 0 \leq x_n \quad (44)$$

zadana radiobom  $t_0, t_1, \dots, t_n$  tako da je  $t_i < t_{i+1}$ .

Periodična ili zatvorena B-spline krivulja nastaje ukoliko je funkcija B-spline definirana razdiobom  $t_0, t_1, \dots, t_n$ ,  $t_i < t_{i+1}$  gdje je

$$x_i = x_{(i-r/2) \bmod n} \quad (45)$$

Tumačenje predhodnog algoritma geometrijski dovodi do konstruktivne metode za određivanje točke B-spline krivulje. Formula (31) u uvjetima vrhova poligona  $P_i$  je oblika

$$P_i^{[j]}(x) = \begin{cases} P_i, & j = 0 \\ \lambda P_i^{[j-1]}(x) + (1 - \lambda) P_{i-1}^{[j-1]}(x), & j > 0, \end{cases} \quad (46)$$

gdje je

$$\lambda = \frac{x - t_i}{t_{i+r-j} - t_i}$$

**Primjer 2** *Neka je zadan zatvoren poligon  $P_0 P_1 \dots P_{12}$  želimo pronaći točke B-spline krivulje reda  $r = 4$  koji odgovara  $x = 7.6$ ,  $t_i = i$ , za  $i = 0, \dots, 13$  prema (45) vrijedi*

$$t_i = t_{(i-2) \bmod 13} = (i - 2) \bmod 13$$

Prema algoritamu  $t_i \leq x < t_{i+1}$  pa  $t_i = 7$  zadovoljava uvjet, tj.  $i = 9$ . Prema (46) za  $j = r - 1$  vrijedi  $P_i^{[r-1]}(x) = P_9^{[3]}(7.6)$

Primjenom rekurzivnog algoritma vrijedi:

$$\begin{aligned} P_9^{[3]}(7.6) &= \lambda P_9^{[2]}(7.6) + (1 - \lambda) P_8^{[2]}(7.6) \\ \text{gdje } \lambda &= \frac{x - t_9}{t_{10} - t_9} = \frac{7.6 - 7.0}{8 - 7} = \frac{0.6}{1} = 0.6 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} P_9^{[2]}(7.6) &= \lambda P_9^{[1]}(7.6) + (1 - \lambda) P_8^{[1]}(7.6) \\ \text{gdje } \lambda &= \frac{x - t_9}{t_{11} - t_9} = \frac{7.6 - 7.0}{9 - 7} = \frac{0.6}{2} = 0.3 \end{aligned} \quad (48)$$

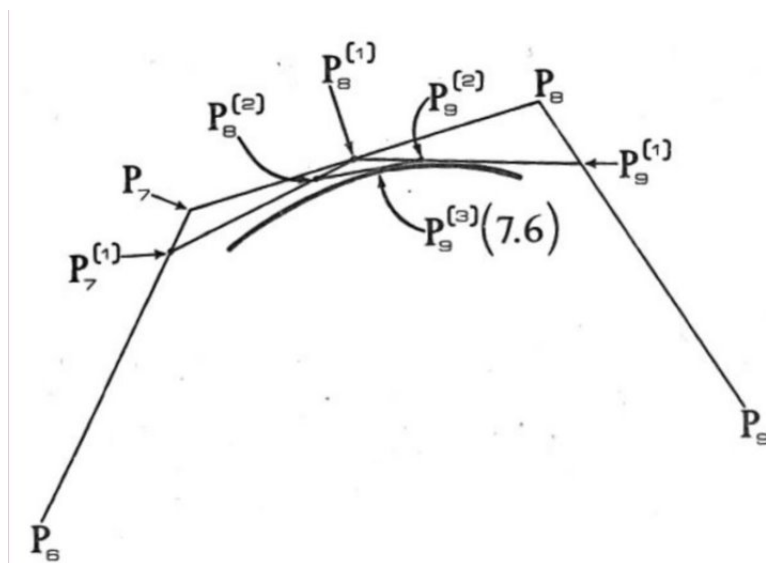
$$\begin{aligned} P_8^{[2]}(7.6) &= \lambda P_8^{[1]}(7.6) + (1 - \lambda) P_7^{[1]}(7.6) \\ \text{gdje } \lambda &= \frac{x - t_8}{t_{10} - t_8} = \frac{7.6 - 6}{8 - 6} = \frac{1.6}{2} = 0.8 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
P_9^{[1]}(7.6) &= \lambda P_9 + (1 - \lambda)P_8 \\
\text{gdje } \lambda &= \frac{x - t_9}{t_{12} - t_9} = \frac{7.6 - 7.0}{10 - 7} = \frac{0.6}{3} = 0.2
\end{aligned}
\tag{50}$$

$$\begin{aligned}
P_8^{[1]}(7.6) &= \lambda P_8 + (1 - \lambda)P_7 \\
\text{gdje } \lambda &= \frac{x - t_8}{t_{11} - t_8} = \frac{7.6 - 6.0}{9 - 6} = \frac{1.6}{3} = 0.53
\end{aligned}
\tag{51}$$

$$\begin{aligned}
P_7^{[1]}(7.6) &= \lambda P_7 + (1 - \lambda)P_6 \\
\text{gdje } \lambda &= \frac{x - t_7}{t_{10} - t_7} = \frac{7.6 - 5.0}{8 - 5} = \frac{2.6}{3} = 0.87
\end{aligned}
\tag{52}$$

Na Slici 5 vidimo dane vrhove i pripadnu interpolaciju našeg primjera.



Slika 5: Geometrijska konstrukcija B-spline

Ako uzmemo da je polinom  $\mathcal{P}$  po djelovima linearna funkcija  $\mathcal{F}$ , pri čemu je  $\mathcal{F}$  definirana tako da B-spline krivulja je parametarska aproksimacija B-spline na  $\mathcal{F}$ , pa prema (20) i (21)  $\mathcal{F}$  zapisati kao

$$\mathcal{F}(\xi_i) = \mathcal{P}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

gdje je

$$\xi_i = \frac{1}{r-1}(t_{i+1} + t_{i+2} + \dots + t_{i+r-1}) \tag{53}$$

**Primjer 3** Neka je zadan otvoren B-spline reda  $r = 4$  određen poligonom  $P_0P_1 \cdots P_5$  i  $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 < t_4 = 1 < t_5 = 2 < t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 3$   
Prvo ćemo pomoću 53 izračunati vrijednosti  $\xi_i$ :

$$\xi_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$\xi_1 = \frac{1}{3}(t_2 + t_3 + t_4) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$\xi_3 = \frac{1}{3}(t_4 + t_5 + t_6) = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$\xi_4 = \frac{1}{3}(t_5 + t_6 + t_7) = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$$

$$\xi_5 = \frac{1}{3}(t_6 + t_7 + t_8) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

Funkcija  $\mathcal{F}$  tada ima vrijednost:

$$\mathcal{F}(0) = P_0 \quad \mathcal{F}(1/3) = P_1 \quad \mathcal{F}(1) = P_2$$

$$\mathcal{F}(2) = P_3 \quad \mathcal{F}(8/3) = P_4 \quad \mathcal{F}(3) = P_6$$

## Literatura

- [1] Richard Riesenfeld, Applications of B-spline approximation to geometric problems of computer-aided design 1973.
- [2] deBoor, C. On Calculating with B-splines. Journal of Approximation Theory, vol. 6 1972.
- [3] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer Verlag, New York, 1993.