Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Jasna Okopni

Pozitivno definitne matrice

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Jasna Okopni

Pozitivno definitne matrice

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović

Suvoditelj: dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2017.

Sadržaj

Sažetak: U radu ćemo se baviti posebnom vrstom hermitskih matrica zvanih pozitivno definitne matrice. Definirat ćemo pojmove i iskazati tvrdnje koje ćemo koristiti u daljnjem radu. Također ćemo iskazati i dokazati poznati Sylvesterov kriterij te važnu Cholesky dekompoziciju koja je učinkovita u numeričkim rješavanjima linearnih jednadžbi te ćemo pokazati koja posebna svojstva vrijede za pozitivno definitne matrice.

Ključne riječi: matrica, pozitivno definitna matrica, svojstvene vrijednosti, Sylvesterov kriterij, Cholesky dekompozicija

Abstract: This paper will deal with the special type of Hermitian matrices, so called positive definite matrices. The terms and claims which are going to be used further in this paper will also be defined and stated. The well-known Sylvester's criterion will be determined and proved as well as the important Cholesky decomposition, which is effective in numerical solving of linear equations. The special properties which are valid for positive definite matrices will also be shown.

Key words: matrix, positive definite matrix, eigenvalues, Sylvester's criterion, Cholesky decomposition

Uvod

Linearna algebra i teorija matrica su jedne od temeljnih područja matematike, također se ekstenzivno primjenjuju i u drugim prirodnim te društvenim znanostima. Znanje o matricama potrebno je za razumjevanje gotovo bilo kojeg područja matematičke znanosti. Tema ovog rada su pozitivno definitne matrice koje su posebna vrsta matrica jer imaju specifična svojstva koje ćemo iskazati i dokazati.
Na početku ćemo definirati najbitnije pojmove i teoreme koje ćemo koristiti. Definirat ćemo pozitivno definitne matrice te navesti njihove karakteristike kao što je pozitivnost svojstvenih vrijednosti. Nadalje iskazat ćemo Sylvesterov kriterij koji je nužan i dovoljan uvjet za provjeravanje je li hermitska matrica pozitivno definitna. Cholesky dekompozicija je rastav pozitivno definitne matrice na produkt donjetrokutaste matrice i njezine adjungirane matrice, te ćemo dokazati da je ona jedinstvena. Na posljetku ćemo navesti još neka svojstva pozitivno definitnih matrica.

1. Pozitivno definitne matrice

1.1. Osnovni pojmovi

Za početak, definirat ćemo najbitnije pojmove i iskazat ćemo teoreme koje ćemo koristiti u radu kao što su matrica, adjungirana i hermitska matrica, svojstvene vrijednosti, svojstveni vektor i dr.

Definicija 1.1. *Za prirodne brojeve m i n, preslikavanje* $\mathcal{A}\colon \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ *naziva se* matrica tipa (m, n) *s koeficijentima iz polja* $\mathbb{F}$.

Napomena 1.1. *Za matricu tipa (m, n) koristimo još i naziv matrica reda $m \times n$.*

Definicija 1.2. *Za prirodne brojeve m i n, skup svih matrica reda $m \times n$ čini vektorski prostor, uz standardne operacije matričnoga zbrajanja i množenja skalara s matricom. Taj skup označavamo s $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$.*

Napomena 1.2. *Specijalno, $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ često se označava s $\mathbb{C}^{m\times n}$ kao i $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ s $\mathbb{R}^{m\times n}$. Nadalje, ako je $m = n$ tada $\mathcal{M}_{mn}$ obično pišemo kratko $\mathcal{M}_n$. U ovom slučaju govorimo o kvadratnim matricama reda n.*

Obično se funkcije $\mathcal{A}$ pišu tablično u m redaka i n stupaca, tako da se funkcijska vrijednost $A(i, j)$, koju najčešće označavamo s a_{ij} piše u i-ti redak i j-ti stupac. Matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ zapisujemo kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{ij}.$$

Definicija 1.3. Glavna dijagonala *kvadratne matrice sastavljena je od elemenata a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn}.*
Dijagonalna matrica *je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nula tj. $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$.*

Primjer 1.1. *Ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *onda je $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

Definicija 1.4. *Neka je matrica A reda $m \times n$. Na presjeku r redaka i s stupaca matrice A nalazi se matrica reda $r \times s$ koju nazivamo* submatrica ili podmatrica matrice A, *a pod* minorom *podrazumijevamo determinantu novonastale matrice.*

Definicija 1.5. *Neka je A matrica reda n. Submatrica matrice A reda k koja se dobije precrtavanjem zadnjih $n–k$ redaka i zadnjih $n–k$ stupaca matrice A zove se* vodeća glavna submatrica *matrice A reda k. Njezina determinanta zove se* vodeći glavni minor *matrice A reda k.*

Primjer 1.2. *Iz Primjera 1.1 matrica* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *je submatrica matrice A i to vodeća glavna submatrica reda 2.*

Definirajmo nadalje neke klase matrica s kojima ćemo se baviti u nastavku.

Definicija 1.6. *Neka je dana matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.* Adjungirana matrica *matrice A je matrica $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ za koju vrijedi $A^* = (\overline{a_{ji}})_{ij}$. Ako je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tada $A^* = A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nazivamo* transponirana matrica *matrice A za koju vrijedi $A^T = (a_{ji})_{ij}$.*

Definicija 1.7. *Za matricu $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kažemo da je* unitarna *ako je $Q^*Q = I$, to jest ako su stupci matrice Q ortonormirani s obzirom na standardni skalarni umnožak. Ako matrica $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zadovoljava $Q^*Q = Q^TQ = I$, onda kažemo da je matrica Q* ortogonalna.

Definicija 1.8. *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je* hermitska *ako vrijedi $A^* = A$. Ako je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ koristimo izraz* simetrična *te je $A^* = A^T = A$.*

Definicija 1.9. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Za broj $\lambda \in \mathbb{C}$ kažemo da je* vlastita (svojstvena) vrijednost *matrice A, a za vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ kažemo da je* vlastiti (svojstveni) vektor *pridružen vlastitoj vrijednosti λ matrice A, ako vrijedi $Ax = \lambda x$. Skup svih vlastitih vrijednosti matrice A se zove* spektar *matrice A.*

Napomena 1.3. *Dijagonalni elementi dijagonalne matrice su njene svojstvene vrijednosti.*

Hermitske matrice imaju važno svojstvo da su unitarno dijagonalizabilne, što je preciznije iskazano u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1. *Ako je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska, tada postoji unitarna matrica $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i dijagonalna $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tako da je $A = Q\Lambda Q^*$.*[1]

Napomena 1.4. *a) Ortonormirani stupci matrice Q svojstveni su vektori matrice A, a odgovarajuće svojstvene vrijednosti su dijagonalni elementi matrice Λ.*

b) Iz Teorema 1.1 slijedi da su svojstvene vrijednosti hermitskih matrica realne.

1.2. Pozitivno definitne matrice

Definicija 1.10. *Hermitska matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je* pozitivno definitna *ako vrijedi $x^*Ax > 0$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.*

Definicija 1.11. *Kažemo da je hermitska matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$* pozitivno semidefinitna *ako je $x^*Ax \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n$.*

Pozitivno definitna matrica je ujedino i pozitivno semidefinitna, ali pozitivno semidefinitna matrica ne mora nužno biti pozitivno definitna.

Primjer 1.3. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *i* $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Tada je $x^TAx = -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 < 0$ za svaki $x \neq 0$. Matrica A nije pozitivno definita.

Primjer 1.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *i* $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Tada je $x^TAx = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 > 0$ za svaki $x \neq 0$. Matrica A je pozitivno definitna.

[1]Za dokaz vidjeti Teorem 8.3 i Teorem 7.2 u [4].

Definicija 1.12. *Hermitska matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* negativno definitna *ako je* $-A$ *pozitivno definitna* ($x^*Ax < 0$, *za sve* $x \neq 0$). *Također kažemo da je matrica* A negativno semidefinitna *ako je* $-A$ *pozitivno semidefinitna* ($x^*Ax \leq 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{C}^n$).

Pozitivno (semi)definitne i negativno (semi)definitne matrice zajedno se nazivaju *definitne matrice*. Ako hermitska matrica nije definitna onda kažemo da je *indefinitna matrica* (x^*Ax poprima i pozitivne i negativne vrijednosti za različite x).

2. Karakterizacija pozitivno definitnih matrica

Za ispitivanje pozitivne definitnosti matrice A koristeći definiciju 1.10 treba provjeriti uvjet $x^*Ax > 0$ za sve nenul vektore. Kako je nekad taj postupak kompliciran, korisno je imati i neke druge kriterije koje ćemo navesti u ovom poglavlju.

Teorem 2.1. *Matrica A je pozitivno definitna ako i samo ako su joj sve svojstvene vrijednosti pozitivne.*

Dokaz. $\Longrightarrow$ Neka je A pozitivno definitna matrica i neka je $Ax = \lambda x$. Množeći prethodnu jednakost slijeva s $x^T,\ x \neq 0$, dobivamo

$$x^T A x = \lambda x^T x.$$

Jer je A pozitivno definitna matrica, slijedi da je lijeva strana veća od nule. Također je kvadrat norme ($x^T x = \|x\|^2$) od x nenegativna, ali u našem slučaju je veća od nule jer je $x \neq 0$, a iz toga nam slijedi da je $\lambda > 0$.
$\Longleftarrow$ Neka su svojstvene vrijednosti matrice A pozitivne. Korištenjem Teorema 1.1 dobivamo $A = Q\Lambda Q^T$. Za $x \neq 0$ slijedi $x^T Ax = x^T Q\Lambda Q^T x$. Označimo s $y = Q^T x$. Tada dobivamo

$$x^T Ax = y^T \Lambda y = \sum_i \lambda_i y_i^2 > 0,$$

odnosno da je matrica A pozitivno definitna. $\square$

Primjer 2.1. *Za dijagonalnu matricu iz primjera 1.4 vidimo da su svojstvene vrijednosti pozitivne, pa osim preko definicije možemo koristeći prethodni teorem također zaključiti da je pozitivno definitna.*

Za ustanoviti je li matrica pozitivno definitna prethodni teorem nam tvrdi da je potrebno izračunati sve svojstvene vrijednosti i provjeriti jesu li sve pozitivne. Jedini problem s tim je što je izračunavanje svojstvenih vrijednosti vrlo dugotrajan proces, osobito za velike matrice. Za hermitske matrice se njena pozitivna definitnost može provjeravati izračunavanjem samo najmanje svojstvene vrijednosti [2] i provjerom je li ona pozitivna. No, za velike hermitske matrice, koje se često pojavljuju u praksi, se za ispitivanje pozitivne definitnosti koristi se Cholesky dekompozicija, koju ćemo opisati u odjeljku 2.2. Sljedeći teoremi će nam dati nešto lakši put do dolaska na odgovor je li matrica pozitivno definitna.

2.1. Sylvesterov kriterij

Lema 2.1. *Svaka vodeća glavna podmatrica pozitivno definitne matrice je također pozitivno definitna.*

Dokaz. Neka je A_k vodeća glavna podmatrica matrice A reda n. Treba pokazati da je $x_k^* A_k x_k > 0$ za sve $x_k \neq 0$. Neka je x vektor dimenzije n dobiven od x_k nadopisivanjem nula. Tada

$$0 < x^* A x = \begin{bmatrix} x_k^* & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} A_k & * \\ \hline * & * \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = x_k^* A_k x_k,$$

što dokazuje da je A_k pozitivno definitna matrica. $\square$

[2] postoje specijalizirani algoritmi koji računaju svojstvene vrijednosti od interesa, kao npr. najmanju, najveću, najbližu nekog zadanom broju.

Teorem 2.2. *Neka je A hermitska matrica. A je pozitivno definitna ako i samo ako su svi glavni vodeći minori pozitivni.*

Dokaz. $\Longrightarrow$ Tvrdnja slijedi iz prethodne leme i Teorema 2.1. jer je determinanta produkt svojstvenih vrijednosti.
$\Longleftarrow$ Neka je A matrica reda n s pozitivnim vodećim minorima. Za dokaz teorema koristit ćemo princip matematičke indukcije po n.

1. Baza indukcije: za $n = 1$ očito vrijedi jer je $\det A = a_{11} > 0$.

2. Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvdnja vrijedi za $n - 1$, gdje je $n \geq 2$.

3. Korak indukcije: kako je $\det A > 0$, slijedi da su sve svojstvene vrijednosti od A različite od nule. Pretpostavimo suprotno, tj. da nisu sve svojstvene vrijednosti pozitivne. Kako je $\det A > 0$, znači da imamo paran broj negativnih svojstvenih vrijednosti. Izaberimo dvije negativne svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 tako da $Au_i =\lambda_i u_i$, $i = 1, 2$, $u_i \neq 0$ i $(u_1, u_2) = 0$. Sada neka je $y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ za $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Tada slijedi

$$(A\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right), \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = |\alpha_1|^2 \lambda_1 |u_1|^2 + |\alpha_2|^2 \lambda_2 |u_2|^2 < 0. \tag{1}$$

Sada, uzmemo li proizvoljni $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, $x \neq 0$ po pretpostavci indukcije slijedi

$$\begin{bmatrix} x^* & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x^* A_{n-1} x, \quad z := (Az, z) > 0, \quad z = [x, 0]^T \tag{2}$$

gdje je matrica A_{n-1} vodeća glavna podmatrica matrice A reda $n-1$. Dimenzija vektorskog prostora $\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_n = 0\}$ jednaka je $n-1$, a dimenzija *span* $[u_1, u_2]$ je 2. Tada postoji neki nenul vektor $v \in \mathbb{C}^n$ koji se nalazi u oba ova potprostora od $\mathbb{C}^n$. Prvi način (1) pokazuje $(Av, v) < 0$, a drugi (2) da je $(Av, v) > 0$. Ova kontradikcija pokazuje da sve svojstvene vrijednosti moraju biti pozitivne. Prema Teoremu 2.1 to znači da je matrica A pozitivno definitna.

□

Ovaj teorem je poznat i kao Sylvesterov kriterij.

Primjer 2.2. *Neka je dana matrica* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *Neka je i-ta vodeća glavna minora označena s Δ_i. Tada je*

$$\Delta_1 = |1| > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

Prema Teoremu 2.2 matrica A je pozitivno definitna.

2.2. Cholesky dekompozicija

Definicija 2.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitska i pozitivno definitna matrica. Faktorizaciju oblika $A = LL^*$ ili ekvivalentno $A = R^* R$, pri čemu je L donjetrokutasta (R gornjetrokutasta) s pozitivnim dijagonalnim elementima zovemo* faktorizacija Choleskog matrice A ili Cholesky dekompozija matrice A.

Teorem 2.3. *A je pozitivno definitna ako i samo ako ima jedinstvenu Cholesky dekompoziciju.*

Dokaz. $\Longrightarrow$ Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitivno definitna matrica, $A = R^*R$, pri čemu je R gornjetrokutasta s pozitivnim dijagonalnim elementima.
Pretpostavimo da imamo dvije faktorizacije Choleskog:

$$A = R^*R = \widetilde{R}^*\widetilde{R}$$

Budući da su i R i $\widetilde{R}$ nesingularne, možemo prethodnu relaciju pomnožiti slijeva s R^{-*} i zdesna s $\widetilde{R}^{-1}$. Imamo $R\widetilde{R}^{-1} = R^{-*}\widetilde{R^*}$. Matrica R^* je donjetrokutasta, pa je donjetrokutasti i njezin inverz. Jednako tako $\widetilde{R}^{-1}$ je inverz gornjetrokutaste matrice, pa je i sama gornjetrokutasta. Prema tome, na lijevoj strani imamo gornjetrokutastu matricu, a na desnoj donjetrokutastu. To znači da matrice s obje strane prethodne jednakosti moraju biti dijagonalne. Dakle, $R\widetilde{R}^{-1} = D$ i $D = R^{-*}\widetilde{R^*}$. Iz prve jednakosti imamo

$$R = D\widetilde{R} \tag{3}$$

što odmah pokazuje da D mora biti realna matrica (d_{ii} su skalari kojim se realni dijagonalni elementi matrice $\widetilde{R}$ množe da se dobiju realni dijagonalni elementi matrice R) s pozitivnom dijagonalom. Iz druge jednakosti, konjugiranjem lijeve i desne strane, izlazi $\widetilde{R}R^{-1} = D$, odnosno

$$\widetilde{R} = DR. \tag{4}$$

Nadalje, primjenom (3) i (4) dobivamo $R = D^2R$, tj. $D^2 = I$ što je jedino moguće ako je $D = I$.
$\Longleftarrow$ Neka je dana faktorizacija matrice $A = R^*R$, pri čemu je R gornjetrokutasta s pozitivnim dijagonalnim elementima. Uočimo da je matica R nesingularna, tj. za svaki $x \neq 0$ vrijedi $Rx \neq 0$. Sada imamo $x^*Ax = x^*R^*Rx = (Rx)^*(Rx) = ||Rx||_2^2 > 0$. Dakle, dokazali smo da je matrica A pozitivno definitna. $\square$

Da bi smo odredili Cholesky dekompoziciju matrice 3×3 moramo riješiti sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \\ &= LL^T = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}l_{11} & l_{31}l_{11} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Elemente matrice L ispod dijagonale ($l_{ik}, i > k$) računamo $l_{21} = \frac{1}{l_{11}}a_{21}$, $l_{31} = \frac{1}{l_{11}}a_{31}$, $l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21})$, a dijagonalne elemente $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$, $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$, $l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)}$.
Na sličan bismo način dobili sljedeću formulu za računanje elemenata ispod dijagonale matrice L za hermitsku pozitivno definitnu matricu reda n:

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj}),$$

dok dijagonalne elemente računamo formulom

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}.$$

Cholesky dekompozicija je otprilike dva puta učinkovitija od poznate LU dekompozicije za rješavanje linearnih sustava jednadžbi.

Primjer 2.3. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$. *Cholesky dekompozicija matrice A dana je s*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.4. *Riješimo sustav* $Ax = b$, *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Cholesky dekompozicija matrice matrice A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix} = LL^T.$$

Sustav $Ax = b$, *odnosno sustav* $LL^T x = b$ *rješavamo tako da najprije algoritmom supstitucija unaprijed riješimo sustav* $Ly = b$, *potom sustav* $L^T x = y$ *pomoću algoritma povratnih supstitucija.*[3]

Primjenom algoritama dobivamo rješenje sustava $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \\ 30 \end{bmatrix}$.

[3]Algoritme supstitucija unaprijed i povratnih supstitucija vidjeti u [4, str. 64 i 65].

3. Neka svojstva pozitivno definitnih matrica

U ovom poglavlju navesti ćemo neka često korištena svojstva pozitivno definitnih matrica.

Lema 3.1. *Ako je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska i pozitivno definitna, ona je nesingularna.*

Dokaz. Ako je A singularna onda postoji x, $x \neq 0$, takav da je $Ax = 0$. Množenjem slijeva s x^* dobivamo da je $x^*Ax = 0$, što je kontradikcija jer je A pozitivno definitna. □

Lema 3.2. *Hermitska pozitivno definitna matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ima pozitivne dijagonalne elemente.*

Dokaz. Neka je $x = e_i$ i-ti vektor kanonske baze. Tada vrijedi $0 < e_i^* A e_i = a_{ii}$. □

Lema 3.3. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska i pozitivno definitna, onda se element s najvećim modulom nalazi na glavnoj dijagonali.*

Dokaz. Neka je A_2 podmatrica 2×2 od A, tj.

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ \overline{a_{ij}} & a_{jj} \end{bmatrix}.$$

Za nju mora vrijediti $a_{ii},\ a_{jj} > 0$ i $\det(A_2) = a_{ii}a_{jj} - |a_{ij}|^2 > 0$, odnosno

$$|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}}.$$

Ako s α označimo

$$\alpha = \max_{i,j}\{a_{ii}, a_{jj}\},$$

onda vrijedi

$$|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \leq \sqrt{\alpha^2} = \alpha,$$

što pokazuje da element s najvećim modulom takve matrice mora biti na dijagonali. □

Lema 3.4. *Ako je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska i pozitivno definitna i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nesingularna, onda je matrica B^*AB hermitska i pozitivno definitna.*

Dokaz. Pokažimo da vrijedi hermitičnost matrice:

$$(B^*AB)^* = B^*A^*B = B^*AB.$$

Budući da je B nesingularna, onda za svaki vektor $x \neq 0$ je $y = Bx \neq 0$, pa vrijedi

$$x^*B^*ABx = (Bx)^*A(Bx) = y^*Ay > 0,$$

što pokazuje da je B^*AB pozitivno definitna.

□

Napomena 3.1. *Sylvesterov zakon o inerciji je generalizacija prethodne leme. Teorem nam tvrdi da hermitska matrica A i matrica B^*AB, gdje je B nesingularna imaju istu inerciju. Inercija je uređena trojka (ν, ζ, π), gdje ν predstavlja broj negativnih, ζ broj nula, a π broj pozitivnih svojstvenih vrijednosti matrice. Sylvesterov zakon inercije kaže da su takvom transformacijom koju zovemo kongruencija, očuvani predznaci svojstvenih vrijednosti, ali ne moraju biti i njihove veličine.*

Lema 3.5. *Ako su A i B pozitivno definitne matrice, onda je $A + B$ pozitivno definitna matrica.*

Dokaz. Za svaki $x \neq 0$ vrijedi $x^*(A+B)x = x^*Ax + x^*Bx > 0$. □

Lema 3.6. *Neka je A simetrična i pozitivno definitna matrica. Onda je i A^{-1} simetrična i pozitivno definitna.*

Dokaz. Transponiranjem jednakosti $AA^{-1} = I$ dobivamo $A^{-T}A^T = A^{-T}A = I$ iz čega nam slijedi $A^{-1} = A^{-T}$, odnosno da je A^{-1} također simetrična matrica. Kako je A pozitivno definitna vrijedi:

$$x^T Ax > 0, \quad x \neq 0,$$

iz čega nadalje slijedi

$$0 < x^T Ax = x^T AA^{-1}Ax = (Ax)^T A^{-1}Ax.$$

Znamo da je A nesingularna i ako označimo s $b = Ax \neq 0$, slijedi nam tvrdnja da je i A^{-1} također pozitivno definitna matrica. □

Teorem 3.1. *Ako su matrice $A, B \in \mathcal{M}_n$ pozitivno definitne, tada vrijedi*

$$||A^r + B^r|| \leq ||(A+B)^r||, \; r \geq 1 \tag{5}$$

$$||A^r + B^r|| \geq ||(A+B)^r||, \; 0 \leq r \leq 1 \tag{6}$$

Dokaz. Fiksirajmo $m \geq 0$. Neka je Ω_m skup realnih brojeva u intervalu $[1, m]$ za koje je ispunjena nejednakost (5). Skup Ω_m je zatvoren i neprazan jer je $1 \in \Omega_m$.
Pokažimo da je i povezan:
Za $r, s \in \Omega_m$ neka je $t = \frac{r+s}{2}$. Iz

$$\begin{bmatrix} A^t + B^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{s}{2}} & 0 \\ B^{\frac{s}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

slijedi

$$||A^t + B^t|| \leq \left\| \begin{bmatrix} A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{s}{2}} & 0 \\ B^{\frac{s}{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\|$$

Iz svojstva norme $||X|| = ||X^*X||^{\frac{1}{2}} = ||XX^*||^{\frac{1}{2}}$ imamo

$$\begin{aligned} ||A^t + B^t|| &\leq ||A^r + B^r||^{\frac{1}{2}} ||A^s + B^s||^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ||(A+B)^r||^{\frac{1}{2}} ||(A+B)^s||^{\frac{1}{2}} \\ &= ||A+B||^{\frac{r}{2}} ||A+B||^{\frac{s}{2}} \\ &= ||A+B||^t = ||(A+B)^t||, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $t \in \Omega_m$, a $\Omega_m = [1, m]$. Time smo pokazali prvu nejednakost (5).
Drugu nejednakost dobijemo primjenom (5). Za $0 < r \leq 1$ je $\frac{1}{r} \geq 1$ pa je

$$||(A^r)^{\frac{1}{r}} + (B^r)^{\frac{1}{r}}|| \leq ||(A^r + B^r)^{\frac{1}{r}}|| = ||A^r + B^r||^{\frac{1}{r}}$$

što je ekvivalentno $||(A+B)^r|| \leq ||A^r + B^r||$.

□

Literatura

[1] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1990. https://www.scribd.com/doc/76822329/Roger-A-Horn-and-Charles-R-Johnson-Matrix-Analysis

[2] G. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins Univ Pr., 3rd edition, 1996.

[3] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.
https://www.mathos.unios.hr/nm/materijali/Num.PDF

[4] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[5] http://slpl.cse.nsysu.edu.tw/chiaping/la/pdm.pdf

[6] https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/Algoritmi_za_matrice_sa_strukturom/pred.pdf