

# Riemann - Stieltjesov integral

---

**Strmečki, Josip**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:336725>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-12**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Josip Strmečki

# **Riemann-Stieltjesov integral**

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Josip Strmečki

# **Riemann-Stieltjesov integral**

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Lebesgue-Stieltjesov integral</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Riemann-Stieltjesov integral i primjeri</b>	<b>7</b>
2.1	Riemann-Stieltjesov integral . . . . .	7
2.2	Svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala . . . . .	12
2.3	Računanje matematičkog očekivanja . . . . .	15
2.4	Primjeri i zadaci . . . . .	17
	<b>Literatura</b>	<b>21</b>

# Riemann-Stieltjesov integral

## Sažetak

U radu ćemo se baviti Riemann-Stieltjesovim integralom, njegovim svojstvima i primjenama. Doved ćemo u vezu Lebesgue-Stieltjesov i Riemann-Stieltjesov integral, kao i Riemann-Stieltjesov i Riemannov integral. Definirat ćemo pojmove kao što su matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesova mjera, disperzija, Lebesgue-Stieltjesov integral, te Lebesgueov integral kao poseban slučaj prethodno navedenog integrala. Najbitnije tvrdnje i teoreme, kao i svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala ćemo dokazati. Također, uz primjere i zadatke pokazat ćemo kako se Riemann-Stieltjes integral koristi u praksi.

## Ključne riječi

Riemann-Stieltjesov integral, matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesov integral, Riemannov integral.

# Riemann-Stieltjes integral

## Abstract

In this work our topic will be Riemann-Stieltjes integral, it's properties and applications. We will show the difference between Lebesgue-Stieltjes and Riemann-Stieltjes integral, as well as difference between Riemann-Stieltjes and Riemann integral. We will define terms such as mathematical expectation, Lebesgue-Stieltjes integral and Lebesgue integral as special case of Lebesgue-Stieltjes integral. Most important claims and theorems, as well as properties of Riemann-Stieltjes integral will be proved. Also, through examples and tasks we will demonstrate how is Riemann-Stieltjes integral used in practice.

## Key words

Riemann-Stieltjes integral, mathematical expectation, Lebesgue-Stieltjes integral, Riemann integral.

## Uvod

Veliki dio teorije vjerojatnosti bavi se proučavanjem slučajnih varijabli i njihovih svojstava. Tema ovog rada je Riemann - Stieltjesov integral i njegova svojstva, kao i primjene. Definirat ćemo najbitnije pojmove, te iskazati i dokazati neke nužne tvrdnje i teoreme. Neki od tih pojmova su matematičko očekivanje, Lebesgueova mjera, itd. Također ćemo definirati Lebesgue-Stieltjesov integral i pokazati neka njegova svojstva. Nadalje, uspostaviti ćemo vezu između Lebesgue-Stieltjes i Riemann-Stieltjesovog integrala. Osnovna svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala ćemo iskazati i dokazati, kao i uvjete koje funkcija mora zadovoljavati da bi bila Riemann-Stieltjes integrabilna. Isto tako, zanimati će nas nepravi Riemann-Stieltjesov integral zbog čestog pojavljivanja u primjenama. Na kraju rada pokazat ćemo kada i kako je moguće integriranje po skupu  $\Omega$  svesti na integriranje po  $\mathbb{R}$ . Uz to, navest ćemo konkretne primjere određivanja matematičkog očekivanja diskretnih i nekih tipova neprekidnih slučajnih varijabli.

# 1 Lebesgue-Stieltjesov integral

Jedan od osnovnih pojmova u teoriji vjerojatnosti je vjerojatnosni prostor  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Vjerojatnosni prostor nam služi za proučavanje slučajnih pokusa. Jedna od osnovnih numeričkih karakteristika slučajne varijable je matematičko očekivanje. U slučaju da slučajna varijabla može poprimiti sve realne vrijednosti, odnosno, da ju promatramo nad općim vjerojatnosnim prostorom, zbog dobivanja sadržajne matematičke teorije, najbolje se koristiti Lebesgue-Stieltjesovim integralom. Ipak, u stvarnim problemima, računanje matematičkog očekivanja svodi se na računanje Riemann-Stieltjes ili najčešće Riemannova integrala.

Za početak, definirat ćemo najbitnije pojmove te istaknuti važne propozicije i teoreme. Pojmovi koji su bitni za ovo poglavlje su vjerojatnosni prostor, matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesova mjera i drugi.

Neka je  $\Omega$  prostor elementarnih događaja, dakle,  $\Omega$  je proizvoljan neprazan skup. Sa  $\mathcal{P}(\Omega)$  označimo partitivni skup od  $\Omega$ .

**Definicija 1:** <sup>1</sup> Familija  $\mathcal{F}$  podskupova od  $\Omega$  ( $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ) jest  $\sigma$ -algebra skupova (na  $\Omega$ ) ako je

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
2.  $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ .
3.  $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

Može se pokazati da je  $\mathcal{F}$  zatvorena na prebrojive presjeke i skupovne razlike.

**Definicija 2:** Neka je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na skupu  $\Omega$ . Uređeni par  $(\Omega, \mathcal{F})$  zovemo **izmjeriv prostor**.

**Definicija 3:** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor. Funkcija  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  jest **vjerojatnost** (na  $\Omega$ , na  $\mathcal{F}$ ) ako vrijedi

1.  $P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}; P(\Omega) = 1$ .
2.  $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$  i  $A_i \cap A_j = \emptyset$  za  $i \neq j \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

**Definicija 4:** Uređenu trojku  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , gdje je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  i  $P$  vjerojatnost na  $\mathcal{F}$ , zovemo **vjerojatnosni prostor**.

Svojstva pod 1 iz Definicije 3 su svojstva **nenegativnosti i normiranosti vjerojatnosti**, respektivno, a drugo je svojstvo **prebrojive ili  $\sigma$ -aditivnosti vjerojatnosti**. Na jeziku teorije mjere, vjerojatnost je normirana mjera, tako da ćemo umjesto vjerojatnosti nekada koristiti termin **vjerojatnosna mjera**. Elemente  $\sigma$ -algebre zovemo **događaji**, a broj  $P(A), A \in \mathcal{F}$  zove se **vjerojatnost događaja A**.

<sup>1</sup>definicije preuzete iz *Teorija vjerojatnosti*, N.Sarapa [3]

Označimo sa  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -algebru generiranu familijom svih otvorenih podskupova na  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{B}$  zovemo  **$\sigma$ -algebra Borelovih skupova na  $\mathbb{R}$** , a elemente od  $\mathcal{B}$  zovemo **Borelovi skupovi**.

Prema definiciji slijedi da je svaki otvoren interval  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  Borelov skup. Kako je  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -algebra slijedi da je i svaki zatvoren interval  $[a, b]$  Borelov skup, jer je komplement otvorenog skupa.

**Definicija 5:** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor. Funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest **slučajna varijabla** (na  $\Omega$ ) ako je  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  za proizvoljno  $B \in \mathcal{B}$ , tj.  $X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$ .

**Definicija 6:** Neka je  $X$  slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $X$  je **jednostavna slučajna varijabla** ako je njezino područje definicije konačan skup.

Jedan od osnovnih motiva za naše proučavanje Lebesgue-Stieltjesovog i Riemann-Stieltjesovog integrala je njihova primjena u računanju matematičkog očekivanja. Matematičko očekivanje je, jedna od **numeričkih karakteristika** slučajne varijable, odnosno služi nam za bolje predočavanje i definiranje slučajnih varijabli.

Za dobivanje prikladnih svojstava matematičkog očekivanja usvajamo sljedeća pravila za računanje u slupu  $\overline{\mathbb{R}}^2$ :

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{ako je } a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ i } a > 0 \\ -\infty & \text{ako je } a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ i } a < 0 \end{cases},$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.$$

Neka je  $X$  slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Vrijedi  $X = X^+ - X^-$ , gdje je

$$X^+ = \max\{X, 0\} \geq 0, \quad X^- = \max\{-X, 0\} \geq 0.$$

Detalji o gornjem rastavu funkcije mogu se naći u ([3], 240. str.)

Neka je  $X$  nenegativna slučajna varijabla na  $\Omega$ . Može se pokazati da je tada  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , gdje je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  rastući niz nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli, i da je niz  $(EX_n, n \in \mathbb{N})$  rastući niz u  $\mathbb{R}_+$ . Vidi ([3], 288. str.)

**Definicija 7:** **Matematičko očekivanje** od  $X$  ili kraće **očekivanje** od  $X$  definira se sa

$$EX = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n.$$

Definirajmo sada matematičko očekivanje u općem slučaju. Neka je  $X$  proizvoljna slučajna varijabla na  $\Omega$ .

**Definicija 8:** Kažemo da **matematičko očekivanje od  $X$**  ili, kraće **očekivanje od  $X$** , koje označujemo s  $EX$  **postoji** ili da je **definirano** ako barem jedna od veličina  $EX^+$  ili  $EX^-$  konačna, tj. vrijedi

$$\min\{EX^+, EX^-\} < \infty.$$

Gdje je  $X = X^+ - X^-$ , a  $X^+, X^-$  su **pozitivan i negativan dio realne funkcije**. Tada stavljamo

$$EX = EX^+ - EX^-. \quad (1)$$

Budući da je dekompozicija slučajne varijable na njen pozitivan i negativan dio jedinstvena, očekivanje je dobro definirano.

---

<sup>2</sup> $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$



**Definicija 9:** Funkciju  $K_A : S \rightarrow \{0, 1\}$ , gdje je  $A \subseteq S$ ,  $S$  proizvoljan skup, definiranu formulom

$$K_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

nazivamo **karakteristična funkcija skupa**  $A$ .

U teoriji vjerojatnosti za matematičko očekivanje često se koriste oznake

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) P d\omega$$

**Definicija 10:** Neka je  $A \in \mathcal{F}$  proizvoljan događaj. Izrazom

$$\int_A X dP = \int_{\Omega} X K_A dP = E(X K_A)$$

definiramo integral koji zovemo **Lebesgue-Stieltjesov integral** od  $X$  u odnosu na vjerojatnosnu mjeru  $P$  po skupu  $A$ .

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  proizvoljan prostor s mjerom ( $\mu$  može primati i vrijednosti  $+\infty$ ) i  $g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  izmjeriva funkcija. Tada se Lebesgue-Stieltjesov integral  $\int_{\Omega} g d\mu$  definira analogno.

**Definicija 11:** **Lebesgue-Stieltjesova mjera na  $\mathbb{R}$**  jest mjera  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  takva da je  $\mu(I) < \infty$  za svaki ograničeni interval  $I \subset \mathbb{R}$ .

Neka je  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rastuća i neprekidna zdesna funkcija. Može se dokazati da relacija

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a)$$

uspostavlja 1-1 korespondenciju između Lebesgue-Stieltjesovih mjera i rastućih neprekidnih zdesna funkcija na  $\mathbb{R}$ .

Prema tome, svaka rastuća neprekidna zdesna funkcija na  $\mathbb{R}$  generira jednoznačno mjeru na  $\mathbb{R}$ . Posebno je važna mjera generirana funkcijom  $F(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Nju zovemo **Lebesgueova mjera** na  $\mathbb{R}$  i označavamo s  $\lambda$

Za matematičku analizu posebno je važan slučaj  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ ,  $\mu = \lambda$  -Lebesgueova mjera. Integral  $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\lambda(x)$  zovemo **Lebesgueov integral funkcije**  $g$  i često ga označavamo s  $(L) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$  da bismo naznačili razliku od Riemannova integrala.

Također, ako je  $\mu$  Lebesgue-Stieltjesova mjera na  $\mathbb{R}$  i ako je  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rastuća i neprekidna zdesna funkcija koja odgovara  $\mu$ , tada integral  $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x)$  često označavamo (L-S)  $\int_{\mathbb{R}} g dF$ .

Ako neko svojstvo koje ovisi o točkama skupa  $\Omega$  vrijedi u svim točkama od  $\Omega$  osim eventualno podskupa od  $\Omega$ , koji je događaj i ima vjerojatnost nula, kažemo da je to svojstvo ispunjeno **gotovo sigurno** (g.s.) na  $\Omega$ . Sljedeće propozicije i teoreme koji su bitni u daljnjem radu navodimo bez dokaza. Detalji se mogu naći u ([3], str. 294-296).

**Propozicija 1:**<sup>3</sup>

1. Ako je  $X = 0$  (g.s.) tada je  $EX = 0$ .
2. Ako je  $X = Y$  (g.s.) i  $X \in \mathcal{L}(P)$ , tada je  $Y \in \mathcal{L}(P)$  i vrijedi  $EX = EY$ .

**Propozicija 2:**

1. Neka je  $X \geq 0$  i  $EX = 0$ . Tada je  $X = 0$  (g.s.).
2. Neka je  $X \in \mathcal{L}(P)$ ,  $Y \in \mathcal{L}(P)$  i neka je  $E(XK_A) \leq E(YK_A)$  za sve  $A \in \mathcal{F}$ . Tada je  $X \leq Y$  (g.s.). Specijalno, ako je  $E(XK_A) = E(YK_A)$  za sve  $A \in \mathcal{F}$ , tada je  $X = Y$  (g.s.).
3. Neka je  $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (proširena) slučajna varijabla i neka je  $E|X| < \infty$ . Tada je  $|X| < \infty$  (g.s.).

**Teorem 1:** Lebesgueov teorem o monotonij konvergenciji

Neka je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  rastući niz nenegativnih slučajnih varijabli i neka je (g.s.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ . Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

**Teorem 2:** Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji

Neka je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  niz slučajnih varijabli takav da je (g.s.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  i neka je  $|X_n| \leq Y$  (g.s.) za sve  $n$ , pri čemu je  $Y \in \mathcal{L}(P)$ . Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

<sup>3</sup> $\mathcal{L}(P)$  označava skup svih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  koje imaju konačno matematičko očekivanje.

## 2 Riemann-Stieltjesov integral i primjeri

### 2.1 Riemann-Stieltjesov integral

Prethodno smo matematičko očekivanje slučajne varijable  $X$  definirali kao Lebesgue-Stieltjesov integral od  $X$  u odnosu na vjerojatnosnu mjeru  $P$ . Takva definicija je pogodna zbog mnogih dobrih svojstava Lebesgue-Stieltjesovog integrala. Međutim, Riemannov integral je najpogodniji za primjene, ali je definiran samo za funkcije na  $\mathbb{R}$ , odnosno na  $\mathbb{R}^*$ . Konstrukcije Lebesgueova i Riemannova integrala radikalno se razlikuju. U Lebesgueovoj konstrukciji točke  $x \in \mathbb{R}$  grupiraju se na osnovi bliskosti vrijednosti funkcije koju integriramo (provodimo particiju osi ordinata), dok u Riemannovoj konstrukciji točke  $x$  grupiramo na osnovu njihove bliskosti s osi apscisa.

Neka je  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotono rastuća i neprekidna zdesna funkcija (**poopćena funkcija distribucije**) i neka je  $\mu_F$  Lebesgue-Stieltjesova mjera na  $\mathbb{R}$  koja odgovara  $F$ . Može se pokazati da tada za  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  vrijedi  $\mu_F(a, b] = F(b) - F(a)$ .

Neka je  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena funkcija.

Particija  $\mathcal{P}$  od  $[a, b]$  jest konačan skup točaka  $x_0, x_1, \dots, x_n$  takav da je  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Stavimo

$$M_i = \sup \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$m_i = \inf \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

i definirajmo gornje i donje sume sa

$$U(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n M_i [F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad (2)$$

$$L(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n m_i [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \quad (3)$$

Definirajmo jednostavne funkcije  $g_U, g_L$  sa

$$g_U(x) = M_i \text{ za } x_{i-1} < x \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$g_L(x) = m_i \text{ za } x_{i-1} < x \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

i  $g_U(a) = g_L(a) = g(a)$ . Pretpostavimo da je funkcija  $F$  neprekidna u točki  $a$ . Tada je

$$U(\mathcal{P}, g, F) = (L - S) \int_a^b g_U(x) dF(x) = \int_a^b g_U d\mu_F,$$

$$L(\mathcal{P}, g, F) = (L - S) \int_a^b g_L(x) dF(x) = \int_a^b g_L d\mu_F.$$

Particija  $\mathcal{P}'$  **profinjuje** particiju  $\mathcal{P}$  ako je  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ .

**Teorem 3:** Ako particija  $\mathcal{P}'$  profinjuje particiju  $\mathcal{P}$ , tada je

$$L(\mathcal{P}, g, F) \leq L(\mathcal{P}', g, F) \quad (4)$$

$$U(\mathcal{P}', g, F) \leq U(\mathcal{P}, g, F) \quad (5)$$

**DOKAZ:** Da bi dokazali (4), pretpostavimo prvo da  $\mathcal{P}'$  sadrži samo jednu točku više nego  $\mathcal{P}$ . Označimo tu dodatnu točku s  $x^*$  i pretpostavimo da je  $x_{i-1} < x^* < x_i$ , gdje su  $x_{i-1}$  i  $x_i$  dvije uzastopne točke iz  $\mathcal{P}$ .

Stavimo

$$w_1 = \inf g(x), \quad (x_{i-1} < x < x^*)$$

$$w_2 = \inf g(x), \quad (x^* < x < x_i)$$

Očito je  $w_1 \geq m_1$  i  $w_2 \geq m_1$ , gdje je

$$m_1 = \inf g(x), \quad (x_{i-1} < x < x_i).$$

Stoga

$$\begin{aligned} & L(\mathcal{P}', g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) \\ &= w_1[F(x^*) - F(x_{i-1})] + w_2[F(x_i) - F(x^*)] - m_1[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= (w_1 - m_1)[F(x^*) - F(x_{i-1})] + (w_2 - m_1)[F(x_i) - F(x^*)] \geq 0. \end{aligned}$$

Ako  $\mathcal{P}'$  sadrži  $k$  točaka više nego  $\mathcal{P}$ , tada ponavljajući gornji postupak dolazimo do (4). Dokaz za (5) provodi se analogno.  $\square$

Neka je sada  $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$  niz particija od  $[a, b]$  takav da je  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$  za sve  $n$  i neka je  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{P}_n| = 0$ . Tada za jednostavne funkcije  $g_{U_n}, g_{L_n}$  pridružene particijama  $\mathcal{P}_n (n \in \mathbb{N})$ , prema gornjem vrijedi

$$g_{U_1} \geq g_{U_2} \geq \dots \geq g \geq \dots \geq g_{L_2} \geq g_{L_1}.$$

Odavde slijedi da postoje funkcije  $\bar{g} = \lim_n g_{U_n}$  i  $g = \lim_n g_{L_n}$  i da je  $g \leq \bar{g}$ . Ako je  $|g| \leq M$  na  $[a, b]$ , tada je  $|g_{U_n}| \leq M, |g_{L_n}| \leq M$ , pa prema Teoremu o dominiranoj konvergenciji (Teorem 2) slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x) dF(x), \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \quad (7)$$

**Definicija 12:** Ako su limesi u (6) i (7) konačni, podudaraju se i njihova zajednička vrijednost ne zavisi od izbora niza particija  $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ , tada kažemo da je funkcija  $g$  **Riemann - Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  u odnosu na  $F$  i označavamo**

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) \text{ ili } (R - S) \int_a^b g(x) F(dx). \quad (8)$$

U slučaju da je  $F(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , integral (8) se svodi na Riemannov integral. Prema tome, sva svojstva Riemann - Stieltjesova integrala vrijede i za Riemannov integral. Za teoriju vjerojatnosti vrlo je važna sljedeća propozicija.

**Propozicija 3:** *Ako je funkcija  $g$  neprekidna na  $[a, b]$ , tada je ona Riemann - Stieltjes integrabilna i vrijedi*

$$(L - S) \int_a^b g(x) dF(x) = (R - S) \int_a^b g(x) dF(x).$$

DOKAZ: Budući da je  $g$  neprekidna na  $[a, b]$ , imamo  $\bar{g} = \lim_n g_{U_n} = g$ ,  $g = \lim_n g_{L_n} = g$ , pa vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, g, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \quad \square$$

Sljedeći teorem generalizira tu tvrdnju.

**Teorem 4:** *Ako je  $g$  Riemann - Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$ , tada je ona i Lebesgue - Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  i vrijedi*

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x).$$

DOKAZ: Neka je  $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$  niz particija od  $[a, b]$ ,  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$  za sve  $n$  i  $|\mathcal{P}_n| \rightarrow 0$  za  $n \rightarrow \infty$ . Tada iz gore navedenog slijedi

$$\begin{aligned} (R - S) \int_a^b g(x) dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x) dF(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \end{aligned}$$

Iz  $g \leq \bar{g}$  i Propozicije 2 slijedi  $g = g = \bar{g}$  (g.s.)  $(\mu_F)$ . Odatle slijedi da je  $g$  izmjeriva, a prema Propoziciji 1 imamo

$$(L - S) \int_a^b g(x) dF(x) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x) dF(x) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \quad \square$$

Može se dokazati da je ograničena funkcija  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  u odnosu na  $F$  ako i samo ako je  $g$  neprekidna (g.s.) ( $\mu_F$ ) na  $[a, b]$ .

**Primjedba 1:** Neka je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  u odnosu na funkciju  $F$  i neka  $F$  nije neprekidna u točki  $a$ . Lagano se pokaže da je tada

$$\begin{aligned} (R - S) \int_a^b g(x) dF(x) &= (R - S) \int_{[a,b]} g(x) dF(x) \\ &= (R - S) \int_{(a,b]} g(x) dF(x) + g(a)[F(a) - F(a-)] \\ &= (R - S) \int_{a+0}^b g(x) dF(x) + g(a)[F(a) - F(a-)]. \end{aligned}$$

Prema tome, vidimo da dodavanje jedne točke području integracije može dovesti do promjene vrijednosti integrala.

Ako je  $F$  neprekidna u točki  $a$ , imamo

$$(R - S) \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a),$$

a ako  $F$  u točki  $a$  ima prekid, vrijedi

$$(R - S) \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a-).$$

**Primjedba 2:** Neka je  $\mathcal{P}$  particija od  $[a, b]$  zadana s  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Neka je  $\tilde{x}_i$  proizvoljna točka u intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Stavimo

$$S(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Neka je  $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$  niz particija od  $[a, b]$  takva da je  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{P}_n| = 0$ . Može se dokazati da je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  u odnosu na  $F$  ako i samo ako postoji  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{P}_n, g, F)$  koji je konačan i ne ovisi od izbora particija niti od izbora točaka  $\tilde{x}_i$ .

U tom slučaju vrijedi

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{P}_n, g, F). \quad (9)$$

To znači da za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da za proizvoljnu particiju  $\mathcal{P}$ , takvu da je  $|\mathcal{P}| < \delta$  vrijedi

$$|(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) - S(\mathcal{P}, g, F)| < \varepsilon, \quad (10)$$

neovisno o izboru točaka  $\tilde{x}_i$ .

**Teorem 5:** Funkcija  $g$  je Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na  $F$  ako i samo ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji particija  $\mathcal{P}$  takva da je

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < \varepsilon.$$

**Teorem 6:** Neka je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$ , u odnosu na  $F$ ,  $m \leq g \leq M$ ,  $\phi$  neprekidna funkcija na  $[m, M]$  i  $h(x) = \phi(g(x))$  na  $[a, b]$ . Tada je  $h$  Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na  $F$  na  $[a, b]$ .

DOKAZ: Odaberimo  $\varepsilon > 0$ . Kako je  $\phi$  uniformno neprekidna na  $[m, M]$ , postoji  $\delta > 0$  takav da je  $\delta < \varepsilon$  i  $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$  ako je  $|s - t| < \delta$  i  $s, t \in [m, M]$ .

Kako je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna, prema Teoremu 5 postoji particija  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  segmenta  $[a, b]$  takva da je

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < \delta^2. \quad (11)$$

Neka su

$$M_i = \sup \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$m_i = \inf \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

i neka su  $M_i^*$  i  $m_i^*$  analogni brojevi za funkciju  $h$ . Podijelimo brojeve u dvije klase:  $i \in A$  ako je  $M_i - m_i < \delta$  te  $i \in B$  ako je  $M_i - m_i \geq \delta$ .

Za  $i \in A$ , slijedi da je  $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$ . Za  $i \in B$  vrijedi  $M_i^* - m_i^* \leq 2K$ , gdje je  $K = \sup |\phi(t)|$ ,  $m \leq t \leq M$  iz (11) imamo

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta F_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta F_i < \delta^2 \quad (12)$$

tako da je  $\sum_{i \in B} \Delta F_i \leq \delta$ . Sada slijedi da je

$$U(\mathcal{P}, h, F) - L(\mathcal{P}, h, F) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta F_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta F_i$$

$$\leq \varepsilon [F(b) - F(a)] + 2K\delta < \varepsilon [F(b) - F(a) + 2K].$$

Kako je  $\varepsilon$  proizvoljan, iz Teorema 5 slijedi da je  $h$  Riemann-Stieltjes integrabilna.  $\square$

## 2.2 Svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala

Sljedeća svojstva lako dobijemo iz definicije integrala, dokazi svih svojstava mogu se naći u ([2], 128.-130. str.).

**Teorem 7:** 1. Neka su  $g_1$  i  $g_2$  Riemann-Stieltjes integrabilne. Tada je  $g_1 + g_2$  Riemann-Stieltjes integrabilna funkcija i vrijedi

$$(R - S) \int_a^b [g_1(x) + g_2(x)]dF(x) = (R - S) \int_a^b g_1(x)dF(x) + (R - S) \int_a^b g_2(x)dF(x).$$

2. Neka je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna. Tada je i  $cg$  Riemann-Stieltjes integrabilna za svaku konstantu  $c \in \mathbb{R}$  i vrijedi

$$(R - S) \int_a^b cg(x)dF(x) = (R - S) c \int_a^b g(x)dF(x).$$

3. Neka su  $g_1$  i  $g_2$  Riemann-Stieltjes integrabilne. Ako je  $g_1(x) \leq g_2(x)$  za sve  $x \in [a, b]$  tada je

$$(R - S) \int_a^b g_1(x)dF(x) \leq (R - S) \int_a^b g_2(x)dF(x).$$

4. Neka je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  te  $a < c < b$ . Tada je

$$(R - S) \int_a^b g(x)dF(x) = (R - S) \int_a^c g(x)dF(x) + (R - S) \int_c^b g(x)dF(x).$$

5. Ako je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna na  $[a, b]$  i ako vrijedi  $|g(x)| \leq M$  na  $[a, b]$  tada je

$$|(R - S) \int_a^b g(x)dF(x)| \leq M[F(b) - F(a)].$$

6. Ako je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na  $F_1$  te u odnosu na  $F_2$  tada vrijedi

$$(R - S) \int_a^b g(x)d[F_1(x) + F_2(x)] = (R - S) \int_a^b g(x)dF_1(x) + (R - S) \int_a^b g(x)dF_2(x).$$



7. Neka je  $g$  Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na  $F$ . Ako je  $c$  pozitivna konstanta tada vrijedi

$$(R - S) \int_a^b g(x) d[cF(x)] = (R - S) c \int_a^b g(x) dF(x).$$

ДОКАЗ: Ako je  $g = g_1 + g_2$  i  $\mathcal{P}$  bilo koja particija od  $[a, b]$ , tada imamo

$$L(\mathcal{P}, g_1, F) + L(\mathcal{P}, g_2, F) \leq L(\mathcal{P}, g, F) \leq U(\mathcal{P}, g, F) \leq U(\mathcal{P}, g_1, F) + U(\mathcal{P}, g_2, F). \quad (13)$$

Prvo ćemo dokazati da ako su  $g_1$  i  $g_2$  (R-S) integrabilne, tada je i  $g = g_1 + g_2$  (R-S) integrabilna. Neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan, postoje particije  $\mathcal{P}_1$  i  $\mathcal{P}_2$  takve da je

$$U(\mathcal{P}_1, g_1, F) - L(\mathcal{P}_1, g_1, F) < \varepsilon,$$

$$U(\mathcal{P}_2, g_2, F) - L(\mathcal{P}_2, g_2, F) < \varepsilon.$$

Gornje nejednakosti ostaju valjane ako  $\mathcal{P}_1$  i  $\mathcal{P}_2$  zamijenimo particijom  $\mathcal{P}$  koja je njihovo zajedničko profinjenje. Tada (11) povlači

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < 2\varepsilon, \quad (14)$$

što znači da je  $g$  (R-S) integrabilna. Nadalje imamo

$$U(\mathcal{P}, g_j, F) < \int g_j dF + \varepsilon \quad (j = 1, 2), \quad (15)$$

pa (11) povlači

$$\int g dF \leq U(\mathcal{P}, g, F) < \int g_1 dF + \int g_2 dF + 2\varepsilon.$$

Kako je  $\varepsilon$  proizvoljan, zaključujemo da je

$$\int g dF \leq \int g_1 dF + \int g_2 dF. \quad (16)$$

Ako u (14)  $g_1$  i  $g_2$  zamijenimo s  $-g_1$  i  $-g_2$  dobijamo obrnutu nejednakost, iz čega slijedi jednakost integrala.  $\square$

Dokazi ostalih tvrdnji teorema vrlo su slični gornjem dokazu, pa ćemo ih izostaviti.

**Primjedba 3:** Iz egzistencije jednog od integrala  $(R-S) \int_a^b g(x)dF(x)$  odnosno  $(R-S) \int_a^b F(x)dg(x)$  slijedi egzistencija drugog i vrijedi

$$(R-S) \int_a^b g(x)dF(x) + (R-S) \int_a^b F(x)dg(x) = g(b)F(b) - g(a)F(a). \quad (17)$$

Gornju relaciju zovemo **formula parcijalne integracije**.

Da bismo dokazali ovu relaciju pretpostavimo da postoji  $(R-S) \int_a^b F(x)dg(x)$ . Za particiju  $\mathcal{P}$  od  $[a, b]$  načinimo sumu

$$S(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})]. \quad (18)$$

Za  $\tilde{x}_0 = a$  vrijedi

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}, g, F) &= - \sum_{i=1}^n F(x_{i-1})[g(\tilde{x}_i) - g(\tilde{x}_{i-1})] - F(x_0)g(\tilde{x}_0) + F(x_n)g(\tilde{x}_n) \\ &= g(b)F(b) - g(a)F(a) - \{F(b)[g(b) - g(\tilde{x}_n)] + \sum_{i=1}^n F(x_{i-1})[g(\tilde{x}_i) - g(\tilde{x}_{i-1})]\}. \end{aligned}$$

Izraz u vitičastoj zagradi odgovara integralnoj sumi za  $(R-S) \int_a^b F(x)dg(x)$ . U teoriji vjerojatnosti često srećemo nepravu Riemann-Stieltjesovu odnosno Riemannovu integrale.

**Definicija 13:** Neka je  $F$  poopćena funkcija distribucije na  $\mathbb{R}$  i neka je  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, takva

da za svaki segment  $[a, b]$  postoji integral  $(R-S) \int_a^b g(x)dF(x)$ . Ako postoji

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} (R-S) \int_a^b g(x)dF(x)$$

i ako je taj limes konačan, onda ga zovemo **nepravu Riemann-Stieltjesovu integral** od  $g$  i označavamo

$$(R-S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

**Teorem 8:** Neka je  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna funkcija i neka  $g$  ima nepravi Riemann-Stieltjesov integral. Tada je  $g$  Lebesgue-Stieltjes integrabilna na  $\mathbb{R}$  (u odnosu na  $\mu_F$ ) i vrijedi

$$(R - S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = (L - S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g d\mu_F.$$

DOKAZ: Za  $n \in \mathbb{N}$  stavimo  $g_n = gK_{[-n,n]}$ . Za svako  $n$  postoji  $(R - S) \int_{-n}^n g(x) dF(x)$  i prema Teoremu 3 vrijedi

$$(R - S) \int_{-n}^n g(x) dF(x) = \int_{-n}^n g d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} gK_{[-n,n]} d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu_F.$$

Imamo  $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$  i  $g = \lim_n g_n$ , pa prema Lebesgueovom teoremu o monotonij konvergenciji (Teorem 1) slijedi

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu_F = \lim_n \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu_F = \lim_n (R - S) \int_{-n}^n g(x) dF(x) = (R - S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x). \quad \square$$

### 2.3 Računanje matematičkog očekivanja

Neka je  $X$  slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , neka je  $P_x$  vjerojatnosna mjera inducirana na  $X$  i neka je  $F_x$  funkcija distribucije od  $X$ . Tada vrijedi sljedeći teorem:

**Teorem 9:** Ako je  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borelova funkcija, tada za proizvoljno  $B \in \mathcal{B}$  vrijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X) dP = \int_B g dP_x = (L - S) \int_B g(x) dF_x(x)$$

DOKAZ: Uzmimo prvo da je  $g = K_E$ ,  $E \in \mathcal{B}$ . Tada zbog  $K_E(X) = K_{X^{-1}(E)}$  gornja jednakost prelazi u

$$P(X^{-1}(E \cap B)) = P_X(E \cap B)$$

što je istina prema definiciji od  $P_X$ . Ako je  $g$  nenegativna jednostavna Borelova funkcija,  $g = \sum_{i=1}^k x_i K_{E_i}$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $E_i \in \mathcal{B}$ , tada zbog linearnosti integrala i ranije dokazanog slijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X) dP = \sum_{i=1}^k x_i \int_{X^{-1}(B)} K_{E_i}(X) dP = \sum_{i=1}^k x_i \int_B K_{E_i} dP_X = \int_B g dP_X. \quad (19)$$

Neka je sada  $g$  nenegativna Borelova funkcija. Tada postoji rastući niz  $(g_n, n \in \mathbb{N})$  nenegativnih jednostavnih Borelovih funkcija takav da je  $g = \lim_n g_n$ .

Iz Lebesgueova teorema o monotonij konvergenciji slijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)dP = \lim_n \int_{X^{-1}(B)} g_n(X)dP = \lim_n \int_B g_n dP_X = \int_B g dP_X,$$

dakle jednakost iz teorema vrijedi za nenegativne Borelove funkcije.

Neka je sada  $g = g^+ - g^-$  ( $g^+, g^- \geq 0$ ) proizvoljna Borelova funkcija. Ako je  $\int_B g^+ dP_X < \infty$ , tada je

$\int_{X^{-1}(B)} g^+(x)dP < \infty$ , a odatle slijedi ako jedan od integrala u tvrdnji teorema postoji, tada postoji

i drugi i vrijednosti su im jednake.  $\square$

Ako sada stavimo  $B = \mathbb{R}$  dobijamo

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X)dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X = (L - S) \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_x(x).$$

Gornji izraz i tvrdnja prethodnog teorema ključni su za teoriju vjerojatnosti zbog toga što integriranje po  $\Omega$  svode na integriranje po  $\mathbb{R}$ . Ako sada stavimo  $g(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  dobijemo

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x dP_X = (L - S) \int_{-\infty}^{\infty} x dF_x(x). \quad (20)$$

Dovedimo još u vezu Riemann-Stieltjesov i klasični Riemannov integral. Sljedeća konstrukcija preuzeta je iz ([1], 10. str.)

Neka je  $F$  po dijelovima konstantna na intervalu  $[a, b]$ , sa skokom iznosa  $p$  u točki  $c$  unutar tog intervala:

$$F(x) = \begin{cases} r, & x \leq c \\ r + p, & x > c. \end{cases} \quad (21)$$

Neka je  $g$  neprekidna na  $[a, b]$ . Izračunajmo sada Riemann-Stieltjesov integral funkcije  $g$  u odnosu na funkciju  $F$  na intervalu  $[a, b]$ .

Za bilo koju particiju vrijedi  $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0$  za svaki indeks  $i$  osim za onaj za koji je  $x_{i-1} \leq c < x_i$ , jer je  $F$  konstantna lijevo i desno od točke  $c$ . Zato u integralnoj sumi ostaje jedino član

$$S(\mathcal{P}, g, F) = g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = g(\tilde{x}_i)p.$$

U limesu kada  $\Delta \rightarrow 0$ , točka  $\tilde{x}$  teži ka  $c$ . Zato je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = g(c) \cdot p. \quad (22)$$

Ako  $F$  ima skokove iznosa  $p_i$  u točkama  $c_i$ , za njen Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot p_i. \quad (23)$$

Neka je sada  $F$  neprekidno diferencijabilna. Tada, po teoremu srednje vrijednosti imamo  $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ , za neku točku  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ . Integralna suma glasi

$$\sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (24)$$

Limes integralne sume (23) očito definira Riemannov integral, pa je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)F'(x)dx. \quad (25)$$

## 2.4 Primjeri i zadaci

Daljni primjeri i zadaci preuzeti su iz ([1], 12 str.) i ([3], 307-309 str.). Pogledajmo kako sada formula (19) izgleda za dva, u primjenama, najvažnija tipa slučajnih varijabli. Neka je  $X$  diskretna slučajna varijabla zadana zakonom razdiobe

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Tada je vjerojatnosna mjera  $P_x$  koncentrirana na diskretnom skupu  $D = \{x_1, x_2, \dots\}$  i za svako  $k$  vrijedi

$$E[g(X)] = \sum_k g(x_k)p_k.$$

Gornji red interpretira se kao

$$\sum_k g^+(x_k)p_k - \sum_k g^-(x_k)p_k$$

i jedna od ovih suma mora biti konačna. U daljnjim primjerima ćemo izostavljati oznake ispred integrala, jer će biti jasno o kojem se integralu radi.

Neka je sada  $X$  neprekidna slučajna varijabla. U primjerima koji slijede navest ćemo najvažnije tipove neprekidnih slučajnih varijabli i izračunati njihova matematička očekivanja.

1. Neka  $X$  ima uniformnu razdiobu na segmentu  $[a, b]$ . Tada je matematičko očekivanje dano s

$$EX = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

2. Neka  $X$  ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Tada je

$$EX = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[ -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Neka  $X$  ima dvostranu eksponencijalnu razdiobu s parametrom  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Tada je

$$EX = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\lambda|x|} dx = 0,$$

jer je podintegralna funkcija neparna.

4. Neka  $X$  ima jediničnu Cauchyjevu razdiobu s parametrom  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Tada je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Odavde slijedi da  $|X|$  nije integrabilna, dakle ni  $X$  nije integrabilna, odnosno, to znači da  $X$  nema očekivanje.

Pokažimo sada na primjerima računanje Riemann-Stieltjesovog integrala.

**Zadatak 1:** Izračunati  $\int_0^1 x dx^2$ .

**Rješenje:** Označimo  $g(x) = x$ ,  $F(x) = x^2$ . Kako je funkcija  $g$  ograničena na  $[0, 1]$  i  $F$  je neprekidno derivabilna, prema relaciji (25) je

$$\int_0^1 x dx^2 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

**Zadatak 2:** Izračunati Riemann-Stieltjesov integral  $\int_0^\pi x d \cos(x)$ .

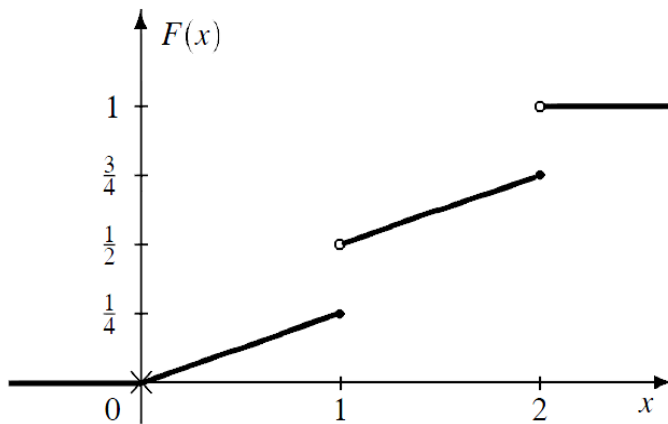
**Rješenje:** Prema formuli parcijalne integracije (17) slijedi

$$\int_0^\pi x d \cos x + \int_0^\pi \cos x dx = \pi \cos(\pi) - 0(\cos(0)),$$

$$\int_0^\pi x d \cos x + \sin x \Big|_0^\pi = -\pi,$$

$$\int_0^\pi x d \cos x = -\pi.$$

**Zadatak 3:** Izračunati očekivanje slučajne varijable čija je funkcija razdiobe zadana slikom.



**Rješenje:** Funkcija razdiobe glasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

$F$  ima skokove iznosa  $\frac{1}{4}$  u točkama  $x = 1$  i  $x = 2$ . Zato je

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \\ &= \int_0^1 x F'(x) dx + 1 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^2 x F'(x) dx + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4} dx + \frac{1}{4} + \int_1^2 \frac{x}{4} dx + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$



## Literatura

- [1] N. ELEZOVIĆ, *Vjerojatnost i statistika, Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2007.
- [2] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York, 1976.
- [3] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.