Planimetrija na natjecanjima u osnovnoj školi

Vidačić, Slađana

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Slađana Vidačić

Planimetrija na natjecanjima u osnovnoj školi

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Slađana Vidačić

Planimetrija na natjecanjima u osnovnoj školi

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

Geometrija je grana matematike koja se bavi proučavanjem geometrijskih likova u ravnini (planimetrija) i geometrijskih tijela u prostoru (stereometrija).
Početci geometrije vezani su uz praktične potrebe poput mjerenja površine zemljišta i volumena posuda međutim, znanost je postala tek u doba Grka kada su se rezultati strogo dokazivali pomoću Talesova, Pitagorina te drugih poučaka.
U ovom radu, kroz pet poglavlja, istaknuta je važnost planimetrije na natjecanjima iz matematike u osnovnoj školi, a najviše pozornosti usmjereno je na trokut, pravokutnik, kružnicu i krug od petog do osmog razreda osnovne škole.
U prvom poglavlju naveden je kratki pregled natjecanja kroz povijest, vrste matematičkih natjecanja te uloga matematičkih natjecanja.
Kroz drugo poglavlje navedeni su udžbenici koji doprinose izradi ovog rada, te kratki pregled osnovnih pojmova geometrije nižih razreda.
U trećem poglavlju navedeno je gradivo s primjerima i zadatcima s natjecanja o trokutu.
Kroz četvrto poglavlje prikazano je gradivo s primjerima i zadatcima s natjecanja o pravokutniku.
U posljednjem poglavlju navedeno je gradivo i primjeri sa zadatcima s natjecanja o kružnici i krugu.

1 Povijesni pregled i uloga natjecanja iz matematike

1.1 Natjecanja kroz povijest

Prvo zabilježeno natjecanje iz matematike održano je u Mađarskoj još 1894. godine.
Većina zemalja uvela je natjecanja iz matematike sredinom 20. stoljeća, dok se u Hrvatskoj natjecanja iz matematike provode kontinuirano od 1959. godine. Iste godine u Rumunjskoj je održana *Međunarodna matematička olimpijada* (IMO), prvo takvo međunarodno natjecanje iz matematike. Najbolji uspjeh na međunarodnom natjecanju kroz niz godina osvajali su Zhuo Qun (Alex) Song iz Kanade (5 zlatnih i 1 brončana medalja), Teodor von Burg iz Republike Srbije (4 zlatne, 1 srebrna, i 1 brončana medalja) te Lisa Sauermann iz Savezne Republike Njemačke (4 zlatne i 1 srebrna medalja). (vidjeti [19])
Republika Hrvatska kao samostalna država sudjeluje od 1993. godine, ekipno s najviše 6 članova, i to sa sve boljim uspjehom. Od 13. do 24. srpnja 2017. godine održana je 58. IMO u Rio de Janeiru, u Brazilu. Nastupilo je 615 učenika iz 111 država, a reprezentacija Hrvatske osvojila je 2 srebrne i 3 brončane medalje, te pohvalu. (vidjeti [17])
Neven Elezović u svojoj knjizi *Matematička natjecanja* (vidjeti [1]) navodi kako na natjecanjima uvjerljivo pobjedu odnose muškarci, te Fieldsovu medalju[1] nikada nije osvojila žena, međutim 2014. godine Maryam Mirzakhani (Teheran, 3. svibnja 1977. - Palo Alto, Kalifornija 14. srpnja 2017.), prva je žena koja je osvojila prestižnu nagradu te time ušla u povijest kao jedina žena koja je dobila Fieldsovu medalju koja je pandan Nobelovoj nagradi[2] za neka druga područja znanosti. Iranska matematičarka školovanje je završila u Americi, radila je na Sveučilištu u Princetonu te Stanfordskom sveučilištu, te postala članicom francuke Akademije znanosti 2015. godine. Fieldsovu medalju dobila je za doprinos dinamici i geometriji Riemannovih ploha, no shrvana bolešću preminula je u 40 godini života. (vidjeti [16])

Slika 1.1: Maryam Mirzakhani

[1]Fieldsova medalja je visoko međunarodno odličje za matematičare. Dodjeljuje se svake četvrte godine prilikom međunarodnih matematičkih kongresa, a dobitnici moraju biti mlađi od 40 godina.

[2]Nobelova nagrada, nagrada koja se dodjeljuje iz zaklade A. B. Nobela od 1901 (s iznimkom 1940–42), svake godine na dan njegove smrti. Nobelovom oporučnom voljom namijenjene su onim pojedincima ili udrugama koji su stekli najveće zasluge na području (I) fizike, (II) kemije, (III) medicine ili fiziologije, (IV) književnosti te (V) mirotvorcima koji su pridonijeli razumijevanju među narodima, miru i razoružanju.

1.2 Vrste natjecanja u Republici Hrvatskoj

U Republici Hrvatskoj u školskom sustavu pojavljuju se natjecanja za učenike četvrtih razreda osnovnih škola pa do četvrtih razreda srednjih škola.
Hrvatsko matematičko društvo, u suradnji s Agencijom za odgoj i obrazovanje i Ministarstvom znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske organizira natjecanja, za svaki razred posebno i to školska, općinska (gradska), županijska te regionalna (državna) natjecanja. Od 1965. godine natječu se samo učenici sedmih i osmih razreda osnovne škole, a od 1994. godine natječu se učenici od četvrtog do osmog razreda na županijskim natjecanjima.
Tijekom 2017. godine Republika Hrvatska organizirala je devetnaesti put međunarodno matematičko natjecanje *Klokan bez granica*, u kojemu diljem svijeta sudjeluje veliki broj učenika. Natjecanje se održava izvan redovitog školskog programa te tako popularizira matematiku i izvan škole.
Postoje i neka druga matematička natjecanja, kao što su: *Balkanijada, Mediteransko matematičko natjecanje, Austrijsko-poljsko natjecanje, Ibero-američko natjecanje, Azijsko-pacifičko natjecanje* i dr. (vidjeti [18])

1.3 Uloga natjecanja iz matematike

Uspjeh na natjecanjima iz matematike vrlo se često uzima kao osnovni kriterij sposobnosti učenika. No, treba naglasiti da se na natjecanjima iz matematike može testirati samo mali aspekt matematičke darovitosti. Natjecanja iz matematike stvaraju situaciju kompetencije, u kojoj učenik isprobava svoje sposobnosti u sudaru sa svojim vršnjacima. To može imati vrlo pozitivan učinak na učenika, no neuspjeh na natjecanju može imati i loše posljedice za učenika, kao što je gubljenje želje za daljnji rad ili gubljenje ukupnog interesa za matematiku. Važniji i od samog natjecanja je proces pripreme, koji je zapravo nadopuna temeljnog obrazovanja, jer matematika ima dovoljno dubokih sadržaja da učenik ima mogućnosti usavršavanja, a da ne prelazi na gradivo za viši uzrast. Poznato je da neki preduvjeti djeci omogućuju bolji plasman na natjecanjima. Primjerice, bitna je brzina usvajanja nastavnog sadržaja, brzina procjene zadatka, svrstavanje zadatka u određenu skupinu da bi se lakše došlo do rješenja, dubina razumijevanja gradiva, zanimanje za predmet. Zanimanje i samootkrivanje također pomaže pri samopouzdanju koje je na natjecanjima od velike pomoći jer su učenici izloženi određenom pritisku, očekivanjima, ograničeni vremenom i suočeni sa zadatcima koji potražuju veliki umni angažman. Ciljevi natjecanja trebali bi biti: obuhvatiti što veći broj učenika u prvoj fazi natjecanja, stimulirati učenika na dodatni rad, u okviru njihovih mogućnosti, najboljim učenicima omogućiti međunarodnu kompetenciju. Učenici koji se uključuju u natjecanje moraju vidjeti još neke druge koristi od truda uloženog u dodatno matematičko obrazovanje, npr. uspješna priprema za maturu i upise na željeni fakultet.

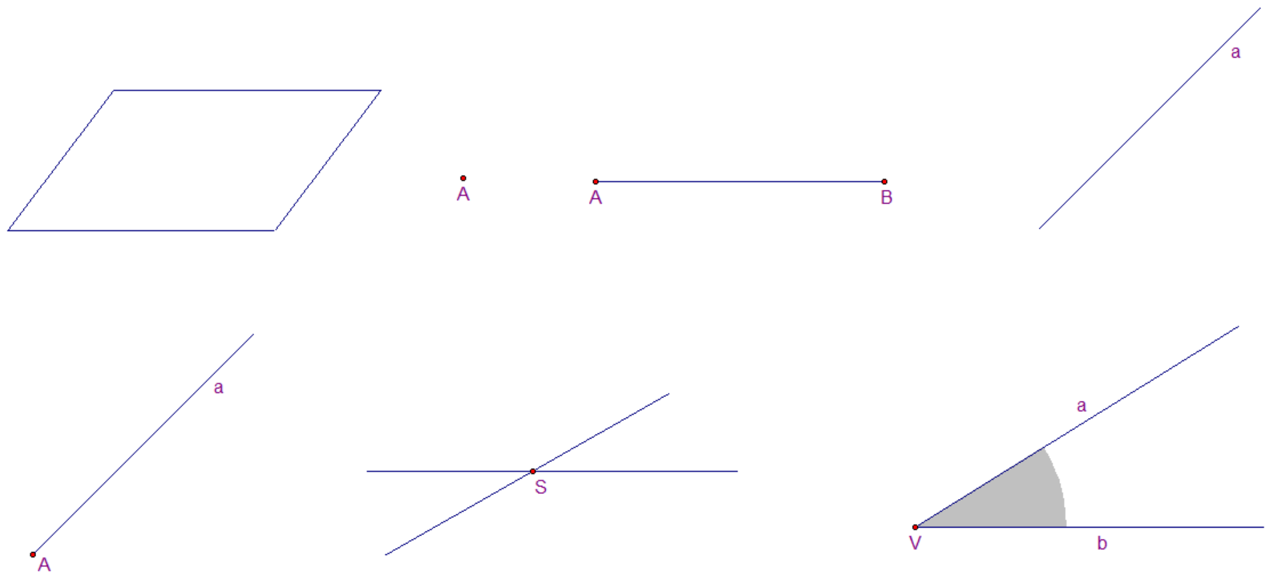
2 Geometrija od 1. do 4. razreda osnovne škole

U ovom i sljedećim poglavljima ovog rada razmatrat ćemo neke od udžbenika izdavačke kuće Alfa i Profil i vidjeti koji se sadržaji pojavljuju u udžbenicima vezani za temu diplomskog rada.

Promatrani udžbenici su:

1. MATEMATIKA 1, udžbenik za 1. razred osnovne škole, J. Markovac, Alfa, 2014.
2. MATEMATIKA 2, udžbenik za 2. razred osnovne škole, J. Markovac, Alfa, 2014.
3. MATEMATIKA 3, udžbenik za 3. razred osnovne škole, J. Markovac, Alfa, 2014.
4. MATEMATIKA 4, udžbenik za 4. razred osnovne škole, J. Markovac, Alfa, 2014.
5. MATEMATIKA 5, udžbenik i zbirka zadataka za 5. razred osnovne škole, 1. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
6. MATEMATIKA 5, udžbenik i zbirka zadataka za 5. razred osnovne škole, 2. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
7. MATEMATIKA 6, udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole, 1. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
8. MATEMATIKA 6, udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole, 2. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
9. MATEMATIKA 7, udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole, 1. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
10. MATEMATIKA 7, udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole, 2. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
11. MATEMATIKA 8, udžbenik i zbirka zadataka za 8. razred osnovne škole, 1. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.
12. MATEMATIKA 8, udžbenik i zbirka zadataka za 8. razred osnovne škole, 2. polugodište, T. Nemeth i G. Stajčić, Profil, 2007.

Učenici se od prvog razreda osnovne škole susreću s geometrijskim pojmovima. (*Slika 2.1*) Ravninu zamišljaju kao neograničenu ravnu plohu, točku kao najmanji dio ravnine i označavaju s križićem (x) ili kružićem (o), a imenuju velikim slovima abecede: $A, B, C, D, \ldots$ Dužinu zamišljaju kao ravnu crtu koja ima krajnje točke A i B, s oznakom $\overline{AB}$, pravac zamišljaju kao neograničenu ravnu crtu, koja se označava malim slovima abecede: $a, b, c, d, \ldots$ te polupravac kao ravnu crtu koja ima samo jednu krajnju točku, a označava se također malim slovima abecede: $a, b, c, d, \ldots$
Točku u kojoj se sijeku pravci uče kao sjecište, a kut kao dio ravnine omeđen s dva polupravca (kraci kuta) s istom početnom točkom (vrh kuta).



Slika 2.1: Osnovni geometrijski pojmovi

U nižim razredima osnovne škole učenici su upoznali osnovne geometrijske likove: trokut, pravokutnik, kvadrat, krug i kružnicu. Naučili su označavati elemente likova te računati opseg i površinu nekih od njih. Tako opseg, o, računaju kao zbroj duljina svih stranica, iz čega slijedi da je opseg trokuta:

$$o = a + b + c, \tag{2.1}$$

opseg pravokutnika:

$$o = 2 \cdot (a + b), \tag{2.2}$$

dok se opseg kruga uči u višim razredima. Također uče samo površinu pravokutnika, P, kao umnožak dviju susjednih stranica:

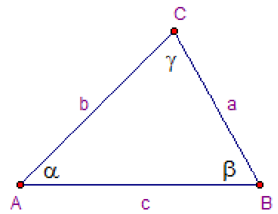
$$P = a \cdot b. \tag{2.3}$$

U sljedećim potpoglavljima proći ćemo kroz više razrede osnovne škole i navesti gradivo koje se pojavljuje u promatranim udžbenicima uz primjere i zadatke s natjecanja, s mrežnih stranica Antonije Horvatek ([2]).

3 Trokut

3.1 Pregled gradiva 5. razreda

U 5. razredu osnovne škole učenici nadopunjuju i proširuju znanje o trokutu naučeno u prvom obrazovnom ciklusu, tako trokut definiraju s tri točke A, B i C, koje ne pripadaju istom pravcu i te tri točke određene su dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. (*Slika 3.1*)
Tri dužine koje omeđuju trokut njegove su stranice $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ i $\overline{AC} = b$, zapisane u suprotnom smjeru kazaljke na satu, a kraći zapis riječi *trokut* ABC zapisuje se oznakom $\triangle ABC$. Svaka dužina ima svoju duljinu, a duljinu dužine $\overline{AB}$ označavaju oznakom |AB|, duljinu dužine $\overline{BC}$ oznakom |BC| te duljinu dužine $\overline{AC}$ oznakom |AC|.
Kutove u trokutu označavaju redom s α, β i γ, s time da je kut α pri vrhu A, kut β pri vrhu B te kut γ pri vrhu C.

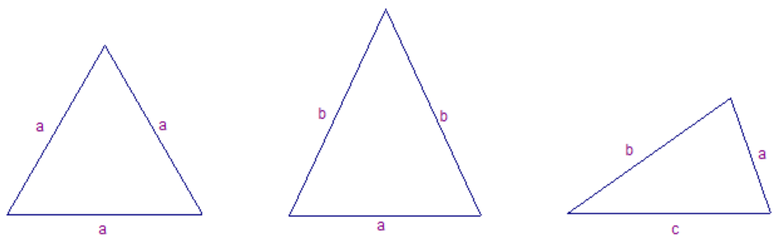


Slika 3.1: Trokut $\triangle ABC$

Zbog jednostavnijeg učenja pojmova, trokut dijelimo prema duljini stranica i veličini kutova. S obzirom na duljine stranica, trokut dijelimo na:

1. jednakostraničan trokut;
2. jednakokračan trokut;
3. raznostaničan trokut.

Za trokut kažemo da je jednakostraničan ako su mu sve stranice jednakih duljina, jednakokračan ako su mu dvije stranice jednakih duljina, te raznostraničan ako su mu sve stranice različitih duljina. (*Slika 3.2*)
Treba obratiti pažnju na jednakokračan trokut. Stranice jednakih duljina krakovi su toga trokuta, a treća stranica je osnovica toga trokuta.



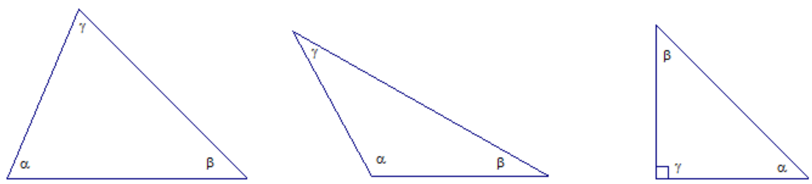
Slika 3.2: Jednakostraničan, jednakokračan i raznostraničan trokut

S obzirom na veličinu kutova, trokut dijelimo na:

1. šiljastokutan trokut;
2. tupokutan trokut;
3. pravokutan trokut.

Za trokut kažemo da je šiljastokutan ako ima sva tri kuta šiljasta, tj. manja od 90°, tupokutan ako mu je jedan kut tupi tj. veći od 90°, te pravokutan ako mu je jedan kut pravi tj. iznosi 90°. (*Slika 3.3*) Ukoliko bi kutomjerom mjerili kutove i zbrojili ih unutar jednog trokuta, dobili bismo 180°, odnosno vrijedi da je:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \tag{3.1}$$



Slika 3.3: Šiljastokutan, tupokutan i pravokutan trokut

U ovoj podjeli ističemo jedan od trokuta, a to je pravokutan trokut. Kod pravokutnog trokuta najdulja stranica naziva se hipotenuza i ona se nalazi nasuprot najvećeg kuta, a ostale dvije stranice nazivaju se katete.

Da bi zaokružili priča o trokutu, trebamo spomenuti dva pojma vrlo bitna za svaki geometrijski lik, a to su opseg i površina. Iz (2.1) dobivamo opseg jednakokračnog trokuta:

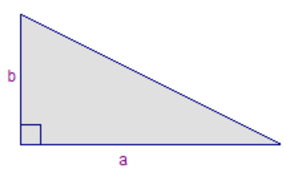
$$o = a + 2 \cdot b, \tag{3.2}$$

te jednakostraničnog trokuta:

$$o = 3 \cdot a. \tag{3.3}$$

Površina je nešto složenija matematička radnja u osnovnoj školi, pa se u petom razredu spominje samo za pravokutan trokut, (*Slika 3.4*) kao polovica umnoška duljina njegovih susjednih stranica:

$$P = (a \cdot b) : 2. \tag{3.4}$$



Slika 3.4: Površina pravokutnog trokuta

Primjer 3.1. *Gradski park ima oblik pravokutnog trokuta površine* 600 m^2. *Koliko treba duljine žice da bi se ogradio, ako je najdulja strana parka* 50 m, *a najkraća* 30 m? *(Slika 3.5.)*

Slika 3.5: Površina parka

Rješenje:

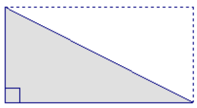
Da bi se uspješno riješio zadatak, treba se zaključiti da su zadane najdulja stranica, tj. hipotenuza, koju označavamo s c i jedna od kateta, po izboru neka je to stranica a. Kako je poznata površina iz (3.4), slijedi da je

$$\begin{aligned} 600 &= (30 \cdot b) : 2 \\ 600 &= 15 \cdot b \\ b &= 40\ m. \end{aligned}$$

S obzirom da su poznate sve strane parka, sada se na jednostavan način dolazi do duljine žice iz (2.1)

$$\begin{aligned} o &= 30 + 40 + 50 \\ o &= 120\ m. \end{aligned}$$

Primjer 3.2. *Nacrtajmo pravokutan trokut čija je površina* 12 cm^2 *i duljina jedne katete* $a = 8\ cm$.



Slika 3.6: Pravokutan trokut

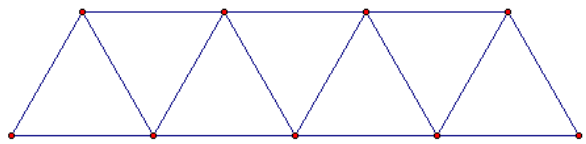
Rješenje:

Kako je poznata površina trokuta, 12 cm^2, ukoliko upotpunimo do pravokutnika, (*Slika 3.6*) iz (2.3) slijedi

$$\begin{aligned} 2 \cdot P &= a \cdot b \\ 24 &= 8 \cdot b / : 8 \\ b &= 3\ cm. \end{aligned}$$

3.1.1 Zadatci s natjecanja 5. razreda

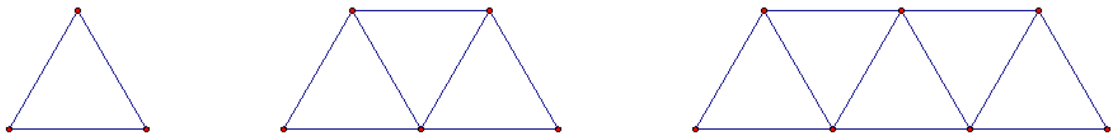
Zadatak 3.1. *(ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE,* 21. 1. 2016.*)*
Od šibica duljine 5 *cm Dijana je složila niz jednakostraničnih trokuta. (Slika 3.7) Ako je Dijana upotrijebila* 99 *šibica, kolika je udaljenost dviju najudaljenijih točaka u tako složenom nizu trokuta?*



Slika 3.7: Niz jednakostraničnih trokuta

Rješenje:

Iz slike (*Slika 3.8*) i tablice (*Tablica 3.1*) zaključuje se odnos broja trokuta i broja šibica,



Slika 3.8: Niz razdvojenih jednakostraničnih trokuta

Broj trokuta	1	2	3	4	5	...	x
Broj šibica	3	5	7	9	11	...	$2x+1$

Tablica 3.1: Odnos broja trokuta i šibica

što znači da je za izradu koji sadrži x trokuta potrebno $2x+1$ šibica, ako je Dijana upotrijebila 99 šibica, to znači da je morala složiti $(99-1):2=49$ trokuta u nizu.
Označimo li duljinu stranice trokuta s a, možemo pisati kao u tablici: (*Tablica 3.2*)

Broj trokuta	1	3	5	7	...	n
Razmak najudaljenijih točaka	$1a$	$2a$	$3a$	$4a$	...	$\Big((n+1):2\Big)\cdot a$

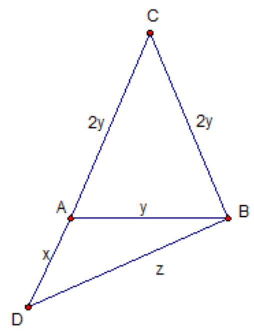
Tablica 3.2: Odnos broja trokuta i razmaka najudaljenijih točaka

dakle, ako u nizu imamo neparan broj trokuta, razmak naudaljenijih točaka je umnožak $\Big((broj\ \ trokuta+1):2\Big)$ i duljina stranice trokuta. Za niz od 49 trokuta traženi je razmak jednak umnošku $\Big((49+1):2\Big)$ i duljina stranice trokuta. Ako je svaka šibica duga $a=5$ cm, tada udaljenost dviju naudaljenijih točaka iznosi $(50:2)\cdot 5$ tj. 125 cm.

Zadatak 3.2. *(ŽUPANIJSKO NATJECANJE,* 15. 3. 2010.*)*
U jednakokračnom trokutu ABC krak $\overline{AC}$ je dvostruko dulji od osnovice $\overline{AB}$. Produlji krak $\overline{AC}$ preko vrha A do točke D. Koliko iznosi opseg trokuta ABC ako je opseg trokuta ABD 18 *cm, a opseg trokuta DBC* 3 *dm?*

Rješenje:

Nacrtamo li jednakokračan trokut i produljimo krak $\overline{AC}$, te označimo duljine stranica s x, y i z (*Slika 3.9*) prema uvjetima zadatka tada vrijedi



Slika 3.9: Jednakokračan trokut

$$\begin{aligned} x + y + z &= 18 \\ x + 4y + z &= 30 / \cdot (-1) \\ \hline \cancel{x} + y + \cancel{z} &= 18 \\ -\cancel{x} - 4y - \cancel{z} &= -30 \\ \hline -3y &= -12 / : (-3) \\ y &= 4\ cm. \end{aligned}$$

Iz dane slike (*Slika 3.9*) vrijedi da je opseg trokuta ABC jednak $o = 2y + 2y + y$ tj. 20 cm.

3.2 Pregled gradiva 6. razreda

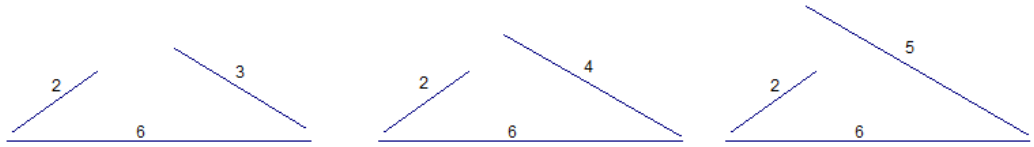
U 6. razredu osnovne škole učenici proširuju znanje o trokutu novim pojmovima: odnos stranica i kutova, konstrukcije trokuta, sukladnost, te visina i površina trokuta. U svakom trokutu vrijedi nejednakost, odnosno zbroj duljina dviju stranica veći od duljine treće stranice:

$$b + c > a, \qquad c + a > b, \qquad a + b > c$$

tj.

$$|b - c| < a < b + c, \qquad |c - a| < b < c + a, \qquad |a - b| < c < a + b.$$

Ukoliko želimo sastaviti trokut od tri štapića dužine 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm i 6 cm, vro brzo ćemo doći do zaključka da se trokut ne može sastaviti ako mu je zbroj drugih dviju stranica manji ili jednak trećoj stranici. (*Slika 3.10*)



Slika 3.10: Nejednakost trokuta

Poredamo li po veličini kutove, a zatim i stranice trokuta dobit ćemo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \beta > \gamma > \alpha \qquad & i \qquad b > c > a, \\ \beta > \alpha > \gamma \qquad & i \qquad b > a > c, \\ \alpha > \beta > \gamma \qquad & i \qquad a > b > c, \end{aligned}$$

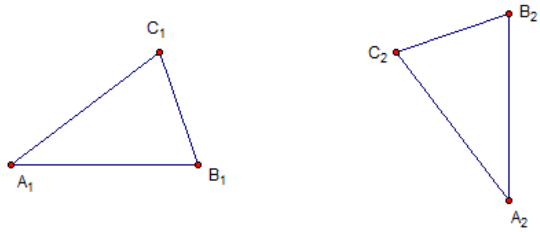
što znači da nasuprot duljoj stranici trokuta leži veći kut, nasuprot kraćoj stranici trokuta leži manji kut te nasuprot jednakim stranicama trokuta leže jednaki kutovi te obratno. Pomoću kutova i stranica možemo definirati sukladnost trokuta. Za dva trokuta, $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ kažemo da su sukladni ako se mogu položiti jedan na drugoga tako da se poklapaju. Oznaka za sukladnost je $\cong$, te vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} |AB| = |DE| \qquad & i \qquad |\angle A| = |\angle D|, \\ |BC| = |EF| \qquad & i \qquad |\angle B| = |\angle E|, \\ |CA| = |FD| \qquad & i \qquad |\angle C| = |\angle F|. \end{aligned}$$

Za provjeravanje sukladnosti nije potrebno provjeravati svih šest osnovnih veličina, već je dovoljno znati samo neke od njih.

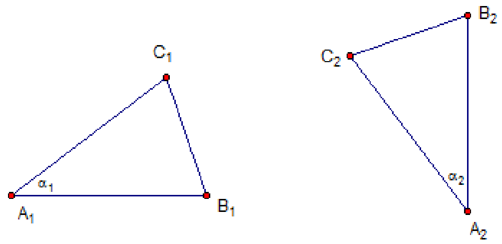
Poučci o sukladnosti:

1. POUČAK SSS (stranica - stranica - stranica)
   Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u sve tri stranice. (*Slika 3.11*)
   $|A_1B_1| = |A_2B_2|, \qquad |B_1C_1| = |B_2C_2|, \qquad |A_1C_1| = |A_2C_2|.$



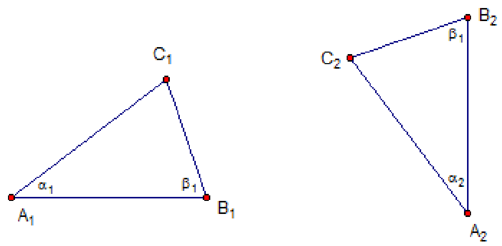
Slika 3.11: Poučak SSS

2. POUČAK SKS (stranica - kut - stranica)
   Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u dvije stranice i kutu između. (*Slika 3.12*)
   $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, $|A_1C_1| = |A_2C_2|$.



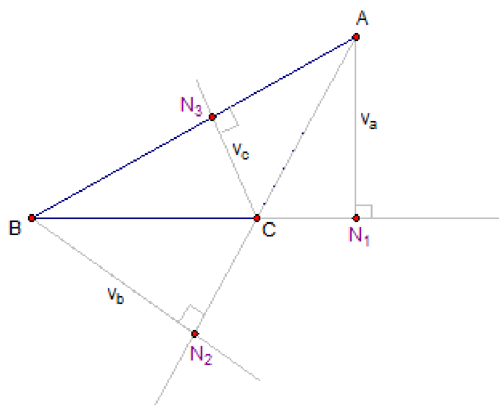
Slika 3.12: Poučak SKS

3. POUČAK KSK (kut - stranica - kut)
   Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu. (*Slika 3.13*)
   $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, $|\beta_1| = |\beta_2|$.



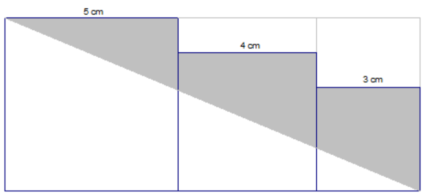
Slika 3.13: Poučak SKS

U šestom razredu učenici se po prvi puta susreću s pojmom visina trokuta i pojmom nožište. Na sljedećoj slici (*Slika 3.14*) prikazane su sve visine trokuta ABC s pripadajućim nožištima. Vidi se da dužina koja se proteže iz jednog vrha na suprotnu stranicu ili pravac pod pravim kutom je visina, a točka u kojoj visina siječe dužinu ili pravac je nožište trokuta. Iako znamo da se površina pravokutnog trokuta računa prema (3.4), učenici 6. razreda trebali bi znanjem doći do zaključka da je površina zapravo polovica umnoška dviju kateta, bez obzira na oznake, a iz ove naše slike, (*Slika 3.14*) jedna od stranica potrebna za računanje površine je upravo visina na stranicu. Visinu najčešće označavamo malim slovom v tj. v_a, v_b, v_c ovisno o tome na koju stranicu je spuštamo.



Slika 3.14: Visine i nožišta trokuta

Primjer 3.3. *Tri kvadrata stranica dugačkih* 5 cm, 4 cm *i* 3 cm *postavljenja su jedan uz drugoga kao na slici. (Slika 3.15) Izračunaj površinu osjenčanog područja.*



Slika 3.15: Površina

Rješenje:

Podijelimo li dani lik na nekoliko površina i označimo s P_1, P_2 i P_3 površine kvadrata, s P_u površinu svih kvadrata, P_t površina trokuta i P_l površina osjenčanog lika, tada prema (2.3) i (3.4) vrijedi

$$\begin{aligned}
P_1 &= 5 \cdot 5 = 25\ cm^2\\
P_2 &= 4 \cdot 4 = 16\ cm^2\\
P_3 &= 3 \cdot 3 = 9\ cm^2\\
P_u &= 25 + 16 + 9 = 50\ cm^2\\
P_t &= \big(5 \cdot (5 + 4 + 3)\big) : 2 = 30\ cm^2\\
P_l &= 50 - 30 = 20\ cm^2.
\end{aligned}$$

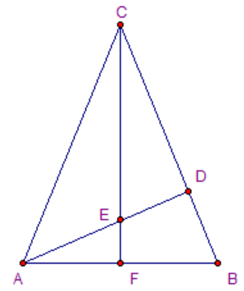
3.2.1 Zadatci s natjecanja 6. razreda

Zadatak 3.3. *Duljine dviju stranica trokuta su* 6.21 cm *i* 1.47 cm. *Kolika može biti duljina treće stranice, ako je njezina duljina prirodan broj?*

Rješenje:

Prirodni brojevi su pozitivni cijeli brojevi $1, 2, 3,\ldots$ Da bi znali riješiti zadatak, trebamo se prisjetiti odnosa stranica u trokutu.
Ako je $a = 6.21\ cm$ i $b = 1.47\ cm$, tada za stranicu c vrijedi $|a - b| < c < a + b$, odnosno $|a - b| = |6.21 - 1.47| = |4.74| = 4.74\ cm$ i $a + b = 6.21 + 1.47 = 7.68\ cm$.
Vidimo da je $4.74 < c < 7.68$. S obzirom da se traži prirodan broj, duljina stranice može imati ove vrijednosti $c = 5\ cm$, $c = 6\ cm$ i $c = 7\ cm$.

Zadatak 3.4. *(DRŽAVNO NATJECANJE,* 2014.*)*
U jednakokračnom trokutu ABC visina na krak $\overline{BC}$ i visina na osnovicu $\overline{AB}$ sijeku se u točki E tako da je $|CE| = |AB|$. Odredi veličine unutarnjih kutova trokuta ABC. (Slika 3.16)



Slika 3.16: Jednakokračan trokut

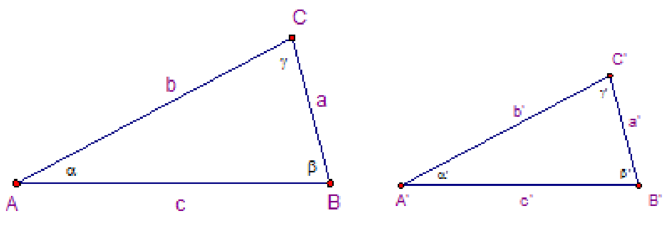
Rješenje:

Iz zadatka vrijedi $|\angle ECD| = |\angle BAD|$ i $|\angle CDE| = 90° = |\angle ADB|$ i $|CE| = |AB|$. Prema poučku K-S-K o sukladnost $\triangle CED \cong \triangle ABD$ pa je $|\angle DEC| = |\angle DBA|$.
Iz sukladnosti vrijedi $|CD| = |AD|$, pa je $\triangle ADC$ jednakokračan i pravokutan.
Veličine šiljastih kutova u $\triangle ADC$ iznose 45° pa je $|\angle ACB| = 45°$. Tada je

$$|\angle BAC| = |\angle CBA| = \frac{180° - 45°}{2} = 67.5°.$$

3.3 Pregled gradiva 7. razreda

U 7. razredu trokut se spominje kroz pojam sličnosti te primjene sličnosti u matematici. Općenito vrijedi za likove da su slični ako su odgovarajući omjeri u tim likovima jednaki. Taj omjer nazivamo koeficijent sličnosti i najčešće označavamo oznakom k. Također u sličnim likovima vrijedi da su odgovarajući kutovi jednake veličine. Po onome što smo da sada rekli dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ slična su što označavamo s $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, ako su im omjeri svih odgovarajućih duljina jednaki. (*Slika 3.17*)
Ako je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ onda je :



Slika 3.17: Sličnost trokuta

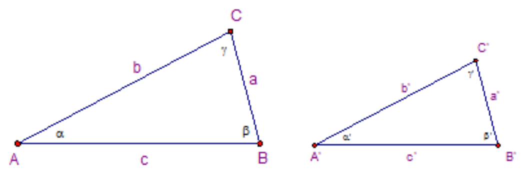
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

$$\alpha = \alpha',$$
$$\beta = \beta',$$
$$\gamma = \gamma'.$$

Poučci o sličnosti:

1. POUČAK KK (kut - kut)
   Dva su trokuta slična ako imaju odgovarajuće kutove jednakih veličina. (*Slika 3.18*)
   $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ako je:

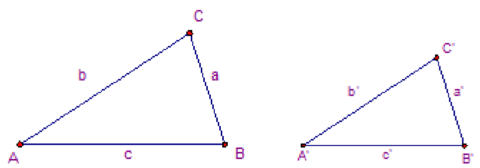
$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'.$$



Slika 3.18: Poučak KK

2. POUČAK SSS (stranica - stranica - stranica)
   Dva su trokuta slična ako su im sve tri odgovarajuće stranice proporcionalne. (*Slika 3.19*)
   $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ako je:

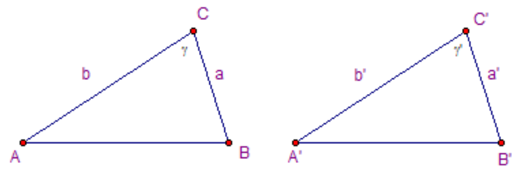
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$



Slika 3.19: Poučak SSS

3. POUČAK SKS (stranica - kut - stranica)
   Dva su trokuta slična ako su im dva para odgovarajućih stranica proporcionalna i kut između njih jednake veličine. (*Slika 3.20*)
   $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ako je:

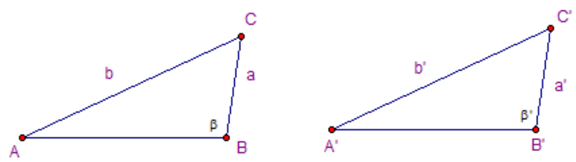
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \gamma = \gamma'.$$



Slika 3.20: Poučak SKS

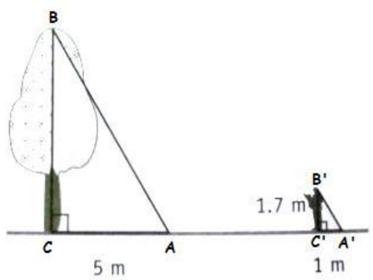
4. POUČAK SSK (stranica - stranica - kut) Dva su trokuta slična ako su im dva para odgovarajučih stranica proporcionalna i kutovi nasuprot duljim stranicama jednake veličine. (*Slika 3.21*)
   $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ako je:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad b > a, \qquad \beta = \beta'.$$



Slika 3.21: Poučak SSK

Primjer 3.4. *Veliko stablo nepoznate visine baca sjenu dugačku* 5 *m. Čovjek visok* 1.70 *m u isto vrijeme baca sjenu dugačku* 1 *m. Koliko je stablo visoko? (Slika 3.22)*



Slika 3.22: Visina stabla

Rješenje:

Iz sličnosti, prema poučku K-K, slijedi

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{A'C'}$$
$$\frac{|BC|}{|1.7|} = \frac{|5|}{1}$$
$$|BC| = 1.7 \cdot 5$$
$$|BC| = 8.5\ m.$$

Stablo je visoko 8.5 m.

Pokazali smo omjer stranica i kutova, preostaje pokazati omjer opsega i površina.
Neka su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ slični, te neka su redom a, b, c odnosno a', b', c' duljine njihovih stranica. Odredimo omjer njihovih opsega o i o'.

Kako je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, znamo da je

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

iz čega slijedi $a = k \cdot a'$, $b = k \cdot b'$ i $c = k \cdot c'$.

Zbrojimo li lijeve i desne strane prethodnih jednakosti dobit ćemo:
$a + b + c = k \cdot a' + k \cdot b' + k \cdot c'$,
$a + b + c = k \cdot (a' + b' + c')$.

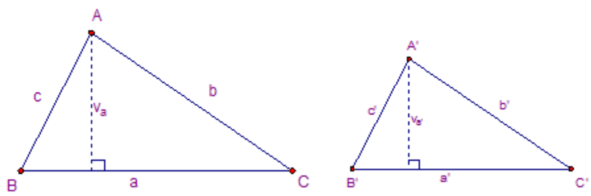
Budući da je $o = a + b + c$ opseg $\triangle ABC$ i $o' = a' + b' + c'$ opseg $\triangle A'B'C'$, tada drugu jednakost pišemo u obliku:

$$o = k \cdot o',$$

odnosno

$$\frac{o}{o'} = k.$$

Neka su trokuti $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. S a i a' označimo duljine odgovarajućih stranica tih trokuta, a s v_a i $v_{a'}$ duljine odgovarajućih visina na te stranice. Odredimo omjer njihovih površina P i P'. (*Slika 3.23*)



Slika 3.23: Omjer površina

Površina $\triangle ABC$ je $P = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$, a površina $\triangle A'B'C'$ je $P' = \dfrac{a' \cdot v_{a'}}{2}$.
Tada je omjer površina P i P':

$$\frac{P}{P'} = \frac{\frac{a \cdot v_a}{2}}{\frac{a' \cdot v_{a'}}{2}} = \frac{a \cdot v_a}{a' \cdot v_{a'}} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{v_a}{v_{a'}}.$$

Budući da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, omjeri a i a' te v_a i $v_{a'}$ jednaki su koeficijentu sličnosti, tj.

$$\frac{a}{a'} = k$$

$$\frac{v_a}{v_{a'}} = k.$$

Uvrstimo li to u prethodnu jednakost, dobit ćemo:

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{v_a}{v_{a'}} = k \cdot k = k^2.$$

Omjer površina sličnih trokuta jednak je kvadratu koeficijenata sličnosti tih trokuta:

$$\frac{P}{P'} = k^2.$$

Primjer 3.5. *Opsezi dvaju sličnih trokuta odnose se kao* 42 : 35*. Ako je površina manjeg trokuta* 75 cm^2*, izračunajmo površinu većeg trokuta.*

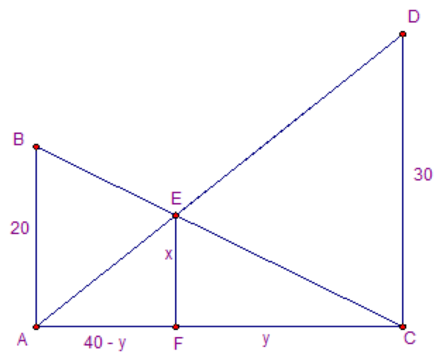
Rješenje:

Neka je P površina većeg trokuta, a $P' = 75cm^2$ površina manjeg trokuta. Kako su trokuti slični slijedi da je $P = P' \cdot k^2$. Budući se opsezi sličnih trokuta odnose $\frac{o}{o'} = k$, to je $\frac{\cancel{42}}{\cancel{35}} = \frac{6}{5} = k$. Iz toga dolazimo do površine većeg trokuta

$$P = P' \cdot k^2 = 75 \cdot \frac{36}{25} = 108\ cm^2.$$

3.3.1 Zadatci s natjecanja 7. razreda

Zadatak 3.5. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2012.*)*
Dva stupa su visine 20 m *i* 30 m*. Vrh svakog stupa povezan je s dnom onog drugog s nategnutim užetom. Na kojoj visini od tla se ta dva užeta križaju ako je udaljenost stupova* 40 m*? (Slika 3.24)*

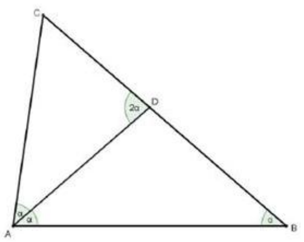


Slika 3.24: Visina užeta

Rješenje:

Prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\triangle ACB \sim \triangle FCE$. Iz sličnosti vrijedi $20 : x = 40 : y$ odnosno $y = 2 \cdot x$. Prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\triangle ACD \sim \triangle AFE$ te vrijedi $30 : x = 40 : (40 - y)$ odnosno $30 : x = 40 : (40 - 2 \cdot x)$ pa je $x = 12$.
Ta dva užeta križaju se na visini 12 m od tla.

Zadatak 3.6. *(DRŽAVNO NATJECANJE,* 2012.*)*
U trokutu $\triangle ABC$, gdje je $|\angle BAC| = 2|\angle ABC|$, simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, tako da je $|BD| = 5$ cm i $|DC| = 4$ cm. Izračunaj opseg tog trokuta. (Slika 3.25)



Slika 3.25: Opseg trokuta

Rješenje:

Kako je $|\angle DAB| = |\angle ABD| = \alpha$, onda je $\triangle ABD$ jednakokračan pa je $|AD| = |BD| = 5\ cm$.
Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle DAC$. S obzirom da je $|\angle CDA| = 2{\cdot}\alpha = |\angle CAB|\ i\ |\angle CAD| = \alpha = |\angle ABC|$, prema poučku K-K o sličnosti vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, te slijedi

$$\begin{aligned} |AC| : |CB| &= |CD| : |AC| \\ |AC| : 9 &= 4 : |AC| \\ |AC| \cdot |AC| &= 36 \\ |AC| &= 6\ cm, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} |BC| : |AB| &= |AC| : |AD| \\ 9 : c &= 6 : 5 \\ c &= \frac{9 \cdot 5}{6} \\ c &= 7\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

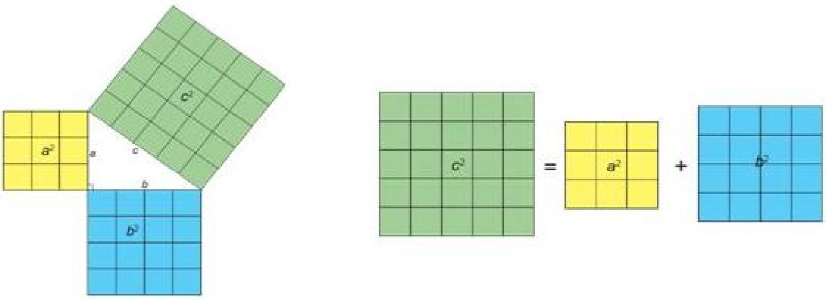
Na kraju iz (2.1) vrijedi

$$
\begin{aligned}
o &= 9 + 6 + 7\frac{1}{2} \\
o &= 22.5\ cm.
\end{aligned}
$$

Opseg trokuta $\triangle ABC$ je 22.5 cm.

3.4 Pregled gradiva 8. razreda

U završnom razredu osnovne škole sva pozornost usmjerena je na pravokutan trokut. Iz prijašnjih razreda znamo da pravokutan trokut ima jedan pravi kut, te vrh tog kuta obično označavamo s C. Također smo spomenuli da je najdulja stranica hipotenuza, a preostale dvije katete. Pravokutni trokut smo konstruirali, računali opseg i površinu, ali nikad nismo računali treću nepoznatu stranicu ako su zadane preostale dvije. Taj dio gradiva prikazat ćemo u ovom poglavlju. Gledajući ovu sliku (*Slika 3.26*) možemo postaviti pitanje koja je veza između površina kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta?

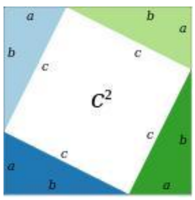


Slika 3.26: Površina kvadrata

Odgovor na to pitanje daje Pitagorin poučak, koji kaže da je zbroj površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak površini kvadrata nad hipotenuzom. U pravokutnom trokutu vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{3.5}$$

pri čemu je c duljina hipotenuze, a a i b su duljine kateta.
Postoje dokazi Pitagorinog poučka pomoću sličnosti, pomoću pravokutnika, no spomenut ćemo onaj koji se najčešće koristi u osnovnoj školi, a to je pomoću površina. (*Slika 3.27*)



Slika 3.27: Dokaz Pitagorina poučka pomoću površina

Nacrtamo kvadrat sa stranicama duljine $a + b$ i podijelimo ga kao na slici. (*Slika 3.27*) Površina velikog kvadrata je $(a + b)^2$, malog c^2, a pravokutnog trokuta $\frac{a \cdot b}{2}$. Površina velikog kvadrata jednaka je zbroju površina malog kvadrata i četiriju sukladnih pravokutnih trokuta pa imamo:

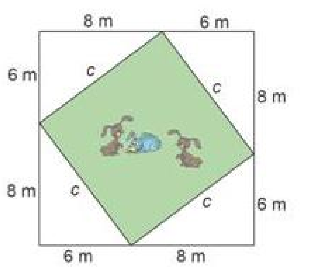
Dokaz.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \\ a^2 + \cancel{2 \cdot a \cdot b} + b^2 &= c^2 + \cancel{2 \cdot a \cdot b} \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

□

Ako za duljine stranica a, b i c nekog trokuta vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, tada je taj trokut pravokutan.

Primjer 3.6. *Koliku travnatu površinu imaju na raspolaganju zečevi koji su ograđeni u vrtu kao na slici? (Slika 3.28)*



Slika 3.28: Površina vrta

Rješenje:

Iz (3.5) slijedi

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + 8^2 \\ c^2 &= 100/\sqrt{} \\ c &= 10\ m. \end{aligned}$$

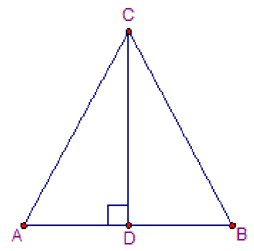
Iz (2.3) slijedi

$$\begin{aligned} P &= 10^2 \\ P &= 100\ m^2. \end{aligned}$$

Zečevi na raspolaganju imaju 100 m^2 travnate površine.

3.4.1 Zadatci s natjecanja 8. razreda

Zadatak 3.7. *Zadan je jednakokračan trokut $\triangle ABC$. Duljina visine iz vrha C na osnovicu je 6 cm. Kolike su duljine stranica tog trokuta, ako mu je opseg 20 cm? (Slika 3.29)*



Slika 3.29: Jednakokračan trokut

Rješenje:

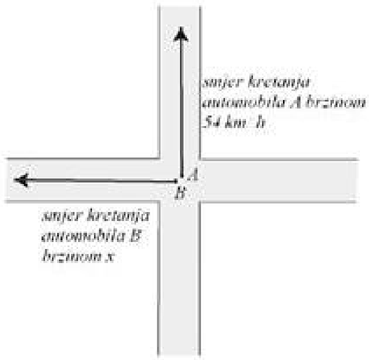
Neka je $|AB| = a$ duljina osnovice, $|AC| = |BC| = b$ duljina krakova i $|CD| = v = 6\ cm$ visina trokuta $\triangle ABC$. Iz (3.2) slijedi $a = 20 - 2 \cdot b$. tj.$\frac{a}{2} = 10 - b$. Primjenom (3.5) na pravokutni trokut $\triangle ADC$ dobivamo redom

$$
\begin{aligned}
b^2 &= v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
b^2 &= 6^2 + (10 - b)^2 \\
\cancel{b^2} &= 36 + 100 - 20 \cdot b + \cancel{b^2} \\
20 \cdot b &= 136 / : 20 \\
b &= 6.8\ cm,
\end{aligned}
$$

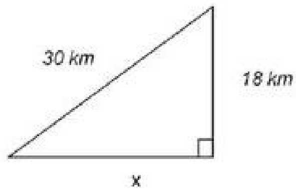
prema (3.2) slijedi

$$
\begin{aligned}
a &= 20 - 2 \cdot b \\
a &= 20 - 2 \cdot 6.8 \\
a &= 20 - 13.6 \\
a &= 6.4\ cm.
\end{aligned}
$$

Zadatak 3.8. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2016.*)*
Na križanju su se srela dva automobila. Nakon nekog vremena, istovremeno su krenuli dalje. Jedan prema sjeveru brzinom 54 *km/h, a drugi zapadno. Nakon* 20 *minuta bili su udaljeni* 30 *km. Kojom brzinom se kretao drugi automobil? (Slika 3.30)*



Slika 3.30: Križanje



Slika 3.31: Pravokutan trokut

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka uočavamo da se kretanje automobila može skicirati pravokutnim trokutom. (*Slika 3.31*) Prema (3.5) drugi automobil je prošao x kilometara, te iz (3.5) slijedi

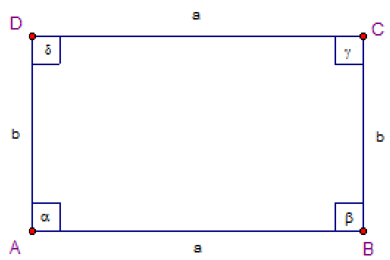
$$\begin{aligned} x^2 &= 30^2 - 18^2 \\ x^2 &= 900 - 324 \\ x^2 &= 576 / \sqrt{} \\ x^2 &= \sqrt{576} \\ x &= 24\ km. \end{aligned}$$

Ako u 20 minuta automobil prevali put od 24 km, za jedan sat prevalit će trostruko dulji put, tj. $3 \cdot 24 = 72\ km$. Dakle, njegova brzina iznosi 72 km/h.

4 Pravokutnik

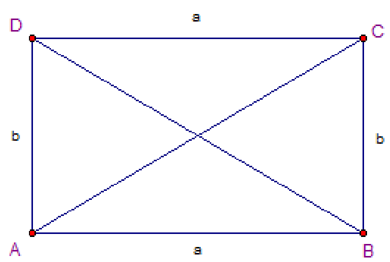
4.1 Pregled gradiva 5. razreda

U 5. razredu osnovne škole ponavlja se gradivo o pravokutniku naučeno u prvom obrazovnom ciklusu. Učenici su kroz četiri godine naučili imenovati i prepoznati pravokutnik. Naučili što su stranice, a što vrhovi pravokutnika, što su opseg i površina te kako se računaju, što možemo vidjeti iz (2.2) i (2.3). U 5. razredu pravokutnik je definiran kao četverokut kojemu su sva četiri kuta prava. Dužine koje omeđuju pravokutnik stranice su pravokutnika te se označavaju s $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = a$ i $\overline{AD} = b$. Nasuprotne stranice pravokutnika imenujemo istim malim slovom abecede, jer su istih duljina. Točke u kojima se sastaju stranice pravokutnika su njegovi vrhovi i to redom nabrojeni suprotno smjeru kazaljke na satu A, B, C i D. (*Slika 4.1*)



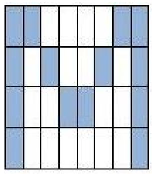
Slika 4.1: Pravokutnik

Ako vrhovi pravokutnika leže na istoj stranici, onda su oni susjedni vrhovi, a ako ne leže na istoj stranici tada su oni suprotni vrhovi.
Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ koje spajaju suprotne vrhove pravokutnika, dijagonale su tog pravokutnika. Dijagonale pravokutnika imaju jednake duljine i raspolavljaju se i vrijedi $|AC| = |BD|$. (*Slika 4.2*)



Slika 4.2: Dijagonale pravokutnika

Primjer 4.1. *Izračunaj površinu slova* $\boldsymbol{M}$ *ako je dimenzija jednog pravokutnika* $5\ mm \times 10\ mm$. *(Slika 4.3)*



Slika 4.3: Površina slova M

Rješenje:

Površina jednog pravokutnika je $P = 5 \cdot 10 = 50\ mm^2$. Slovo **M** sadrži 14 pravokutnika iz čega slijedi da je površina slova **M**, $P = 14 \cdot 50 = 700\ mm^2$.

Primjer 4.2. *Udžbenik iz matematike ima* 220 *stranica (dimenzije knjige su* $28\ cm \times 20\ cm$*). Može li se pomoću svih listova iz tog udžbenika prekriti pod učionice duge* $10\ m$*, a široke* $7\ m$*? Obrazloži odgovor.*

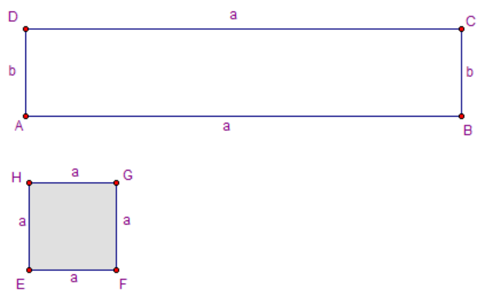
Rješenje:

Površina knjige iz (2.3) je $P = 28 \cdot 20 = 560\ cm^2$.
Površina sveukupnog broja stranica knjige je $P = 220 \cdot 560\ cm^2 = 123\ 200\ cm^2$.
Površina poda učionice iz (2.3) je $P = 1000\ cm \cdot 700\ cm = 700\ 000\ cm^2$.

Ne može se u potpunosti prekriti pod učionice jer je ukupna površina stranica knjige manja od ukupne površine učionice.

4.1.1 Zadatci s natjecanja 5. razreda

Zadatak 4.1. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2017.*)*
Zadan je pravokutnik $ABCD$ *kojem je jedna stranica dugačka* $42\ cm$*, a druga je* 5 *puta kraća od prve. Izračunaj površinu kvadrata* $EFGH$ *čiji je opseg tri puta manji od opsega zadanog pravokutnika. (Slika 4.4)*

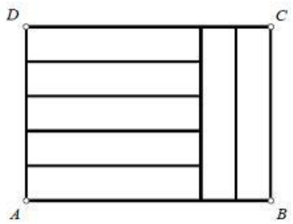


Slika 4.4: Pravokutnik i kvadrat

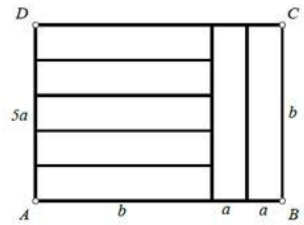
Rješenje:

Neka je a duljina stranice pravokutnika $ABCD$ tj. $a = 42\ cm = 420\ mm$. Duljina druge stranice je pet puta manja tj. $b = 420 : 5 = 84\ mm$. Opseg zadanog pravokutnika iz (2.2) je $o(ABCD) = 2 \cdot (420 + 84) = 2 \cdot 504 = 1\ 008\ mm$. Opseg kvadrata $EFGH$ 3 je puta manji od opsega pravokutnika $ABCD$ pa vrijedi $o(EFGH) = 1008 : 3 = 336\ mm$. Duljina stranice kvadrata $EFGH$ četiri je puta manja od opsega pa je $a = 336 : 4 = 84\ mm$. Površina kvadrata umnožak je dviju susjednih stranica pa je $P(EFGH) = 84 \cdot 84 = 7056\ mm^2$.

Zadatak 4.2. *(ŽUPANIJSKO NATJECANJE,* 2017.*)*
Lucija je izrezala sedam jednakih papirnatih traka i od njih sastavila pravokutnik $ABCD$ kao na slici. (Slika 4.5) Ako je površina pravokutnika $ABCD$ jednaka 560 cm^2*, odredi duljine stranica jedne papirnate trake.*



Slika 4.5: Pravokutnik



Slika 4.6: Pravokutnik

Rješenje:

Neka je duljina kraće stranice sukladnih pravokunika jednaka a, a duljina dulje stranice neka je b. Tada u pravokutniku $ABCD$ vrijedi $|BC| = |AD|$, tj. $b = 5a$ i $|AB| = b + a + a = 5 \cdot a + a + a = 7a$. Površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je 560 cm^2, a možemo je izračunati kao umnožak duljina stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, tj. vrijedi

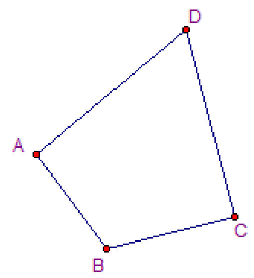
$$
\begin{aligned}
|AB| \cdot |AD| &= 560 \\
7a \cdot 5a &= 560 \\
35 \cdot a \cdot a &= 560 / : 35 \\
a \cdot a &= 16 \\
a &= 4\ cm,
\end{aligned}
$$

slijedi

$$
\begin{aligned}
b &= 5 \cdot a \\
b &= 5 \cdot 4 \\
b &= 20\ cm.
\end{aligned}
$$

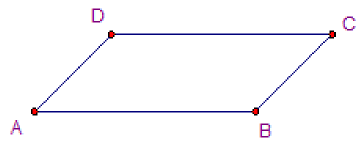
4.2 Pregled gradiva 6. razreda

U 6. razredu osnovne škole pravokutnik se spominje kao jedna vrsta paralelograma tj. četverokuta, te se promatraju neka svojstva. Ako nacrtamo četiri različite točke A, B, C i D i spojimo dužinama koje se međusobno ne presijecaju, tada dobijemo četverokut. Bitno svojstvo četverokuta je to da je zbroj unutarnjih kutova 360°, te je zbroj vanjskih kutova također 360°. (*Slika 4.7*)



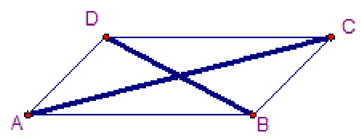
Slika 4.7: Četverokut

Ukoliko su nasuprotne stranice četverokuta paralelne riječ je o paralelogramu. (*Slika 4.8*)



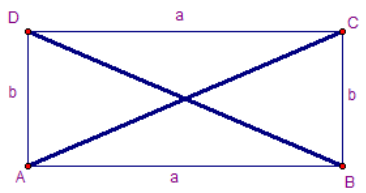
Slika 4.8: Paralelogram

Nasuprotni kutovi paralelograma jednake su veličine, a zbroj susjednih kutova u paralelogramu iznosi 180°. Također vrijedi da su nasuprotne stranice paralelograma jednake duljine. Ukoliko nacrtamo dijagonale paralelogramu vidjet ćemo da se one međusobno raspolavljaju. (*Slika 4.9*)



Slika 4.9: Dijagonale paralelograma

Među paralelogramima posebno izdvajamo skupinu paralelograma koji imaju sve prave kutove i skupinu paralelograma koji imaju sve stranice jednake duljine. Paralelogram čiji su svi unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik. Pravokutnik uz sva svojstva paralelograma ima i svojstvo da su mu dijagonale jednake duljine. (*Slika 4.10*)



Slika 4.10: Dijagonale pravokutnika

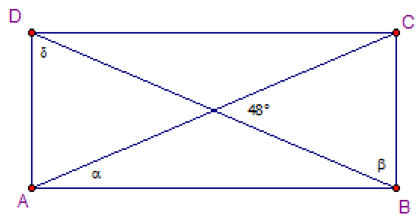
Ukoliko rezimiramo sva svojstva s početka priče, za pravokutnik zaključujemo sljedeće :

- Zbroj unutarnjih kutova iznosi 360°.
- Zbroj vanjskih kutova iznosi 360°.
- Zbroj susjednih kutova iznosi 180°.
- Nasuprotni kutovi jednake su veličine.
- Nasuprotne stranice jednake su duljine.
- Dijagonale su jednake duljine i međusobno se raspolavljaju.

Površinu iz (2.3) i opseg iz (2.2) pravokutnika znamo računati već od 4. razreda, no zadatci u 6. razredu su složeniji i zahtjevniji.

Primjer 4.3. *Četverokut $ABCD$ je pravokutnik. Koliko stupnjeva imaju kutovi α, β i δ kao na slici? (Slika 4.11)*

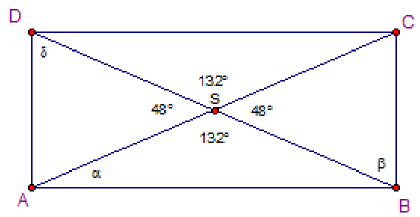
Rješenje:



Slika 4.11: Pravokutnik

Kut pri sjecištu dijagonala je 48°, pa je njegov susjedni kut $180° - 48° = 132°$. (*Slika 4.11*)

Pošto su dijagonale jednakih duljina i međusobno se raspolavljaju, trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle SCD$ te $\triangle BCS$ i $\triangle ASD$ su jednakokračni trokuti. (*Slika 4.12*)



Slika 4.12: Pravokutnik

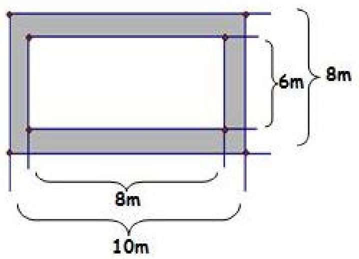
Kut α jednak je

$$\alpha = (180° - 132°) : 2 = 24°.$$

Kut β jednak je

$$\beta = \delta = (180° - 48) : 2 = 66°.$$

Primjer 4.4. *Izračunaj površinu staze prikazane na slici. (Slika 4.13)*



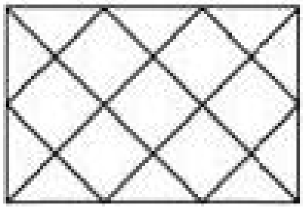
Slika 4.13: Staza

Rješenje:

Ako s P_1 označimo površinu većeg pravokutnika tada je $P_1 = 10 \cdot 8 = 80\ m^2$.
Ako s P_2 označimo površinu manjeg pravokutnika tada je $P_2 = 8 \cdot 6 = 48\ m^2$.
Ako s P označimo površinu staze tada je $P = P_1 - P_2 = 80\ m^2 - 48\ m^2 = 32\ m^2$.

4.2.1 Zadatci s natjecanja 6. razreda

Zadatak 4.3. *(DRŽAVNO NATJECANJE,* 2014.*)*
Na slici je pod u obliku pravokutnika dimenzija $2\ m \times 3\ m$*, koji je popločen sa* 7 *kvadratnih i* 10 *trokutastih pločica. Ako na isti način pločicama iste veličine trebamo popločiti pod dimenzija* $10\ m \times 20\ m$*, koliko kvadratnih pločica trebamo? (Slika 4.14)*

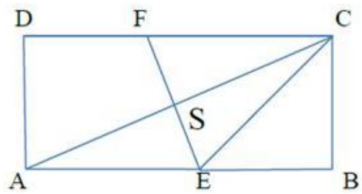


Slika 4.14: Pod

Rješenje:

Primijetimo da su trokutaste pločice jednakokračni pravokutni trokuti te da dvije trokutaste pločice spojene po hipotenuzi čine kvadratnu pločicu sukladnu kvadrtanim pločicama na podu. Površina poda prema (2.3) iznosi $2 \cdot 3 = 6\ m^2$, a na podu se nalazi 7 kvadratnih pločica i 5 kvadratnih pločica sastavljenih od po dvije trokutaste pločice. Površina jedne kvadratne pločice iznosi $6 : 12 = 0.5\ m^2$, te jedne trokutaste pločice $0.25\ m^2$. Primijetimo da se uz rubove poda nalaze trokutaste pločice, to znači da će uz stranicu duljine $10\ m$ biti 10, a uz stranicu duljine $20\ m$ bit će 20 trokutastih pločica. Na podu dimenzija $10\ m \times 20\ m$ bit će ukupno $2 \cdot (10 + 20) = 60$ trokutastih pločica. Pod dimenzija $10\ m \times 20\ m$ ima površinu $200\ m^2$. 60 trokutastih pločica ima površinu $60 \cdot 0.25 = 15\ m^2$, a razliku $200 - 15 = 185\ m^2$ prekrivaju kvadratne pločice, što znači da kvadrtanih pločica treba bit $185 : 0.5 = 370$.

Zadatak 4.4. *(DRŽAVNO NATJECANJE,* 2016.*)*
Zadan je pravokutnik $ABCD$*. Simetrala dijagonale* $\overline{AC}$ *siječe stranicu* $\overline{AB}$ *u točki* E*, a stranicu* $\overline{CD}$ *u točki* F *tako da je trokut* $\triangle EBC$ *jednakokračan.*
Odredi veličinu kuta $\angle DFE$*. (Slika 4.15)*



Slika 4.15: Pravokutnik

Rješenje:

Kako je trokut $\triangle EBC$ jednakokračan i pravokutan, vrijedi $|\angle ECB| = |\angle BEC| = 45°$. Budući da je $ABCD$ pravokutnik, slijedi $|\angle FCE| = 90° - |\angle ECB| = 45°$. S obzirom da točka E pripada simetrali EF dijagonale $\overline{AC}$, onda je $|EA| = |EC|$, što znači da je trokut $\triangle AEC$ jednakokračan. Tada je $|\angle ACE| = |\angle EAC|$.
Dalje vrijedi $|\angle EAC| = |\angle FCA|$, jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima. Slijedi $|\angle ACE| = |\angle FCA| = \dfrac{|FCE|}{2} = \dfrac{45°}{2} = 22.5°$. Kako je $\angle DFE$ vanjski kut trokuta $\triangle CFS$, slijedi $|\angle DFE| = |\angle CSF| + |\angle FCA| = 90° + 22.5° = 112.5°$.

4.3 Pregled gradiva 7. razreda

U 7. razredu osnovne škole ponavlja se gradivo o pravokutniku naučeno u prethodnim razredima i to najčešće opseg i površina pravokutnika. Kroz dva primjera istaknut ćemo primjenu postotka na pravokutnik te pravokutnik u ulozi mnogokuta.

Primjer 4.5. *Za koliko se promijeni površina pravokutnika ako se stranica a duljine 28 cm smanji za 15%, a stranica b duljine 25 cm poveća 14%?*

Rješenje:

Da bi znali riješiti ovaj zadatak, moramo se upoznati s osnovama postotnog računa.

Postotak p zapisujemo kao razlomak s nazivnikom 100, $p\% = \dfrac{p}{100}$.
Veličinu od koje računamo postotak nazivamo osnovna vrijednost. Izračunati postotak (p) od osnovne vrijednosti (x) nazivamo postotni iznos (y) ili prikazano matematičkom formulom:

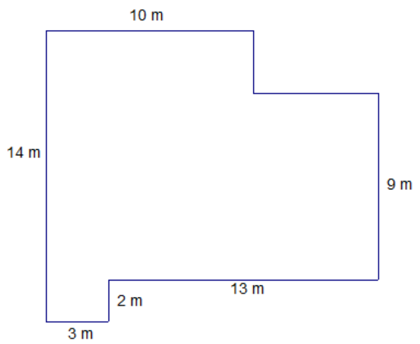
$$p\% \cdot x = y \tag{4.1}$$

U danom primjeru s P označimo površinu početnog pravokutnika te prema (2.3) vrijedi $P = 28 \cdot 25 = 700\ cm^2$.

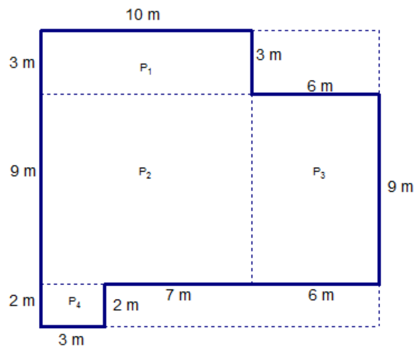
Stranica a duljine 28 cm smanjena je za 15%, odnosno 15% od 28 cm je $\dfrac{15 \cdot 28}{100} = 4.2\ cm$.
Nova stranica je $a_1 = 28 - 4.2 = 23.8\ cm$.

Stranica b duljine 25 cm povećana je za 14%, odnosno 14% od 25 cm je $\frac{14 \cdot 25}{100} = 3.5$ cm.
Nova stranica je $b_1 = 25 + 3.5 = 28.5$ cm.
Površina pravokutnika P_1 s promijenjenim stranicama je $P_1 = 23.8 \cdot 28.5 = 678.3$ cm^2.
Površina pravokutnika se promijeni za $P - P_1 = 700$ $cm^2 - 678.3$ $cm^2 = 21.7$ cm^2.

Primjer 4.6. *Na slici je tlocrt sportske dvorane. Kolika je njezina površina, a koliki opseg? (Slika 4.16)*



Slika 4.16: Tlocrt sportske dvorane



Slika 4.17: Tlocrt sportske dvorane

Rješenje:

Tlocrt sportske dvorane je mnogokut kojemu je teško izračunati površinu ukoliko ga ne podijelimo na manje pravokutnike te upotpunimo sliku do pravokutnika. (*Slika 4.17*)

Poznata je donja strana dvorane $3 + 13 = 16$ m. Dio gornje strane dvorane je 10 m, što znači da je ostatak gornje strane $16 - 10 = 6$ m. Lijeva strana dvorane je 14 m, a desna strana dvorane je $9 + 2 = 11$ m, što znači da je ostatak desne strane dvorane $14 - 11 = 3$ m. Ukoliko podijelimo na manje pravokutnike, zaključujemo kolike je duljine svaka strana, jer su kod pravokutnika nasuprotne strane jednake duljine. Iz danih veličina slijede površine kao što je prikazano na slici (*Slika 4.17*)

$$P_1 = 10 \cdot 3 = 30 \ m^2$$
$$P_2 = 10 \cdot 9 = 90 \ m^2$$
$$P_3 = 6 \cdot 9 = 54 \ m^2$$
$$P_4 = 3 \cdot 2 = 6 \ m^2.$$

Ukupna površina pravokutnika je

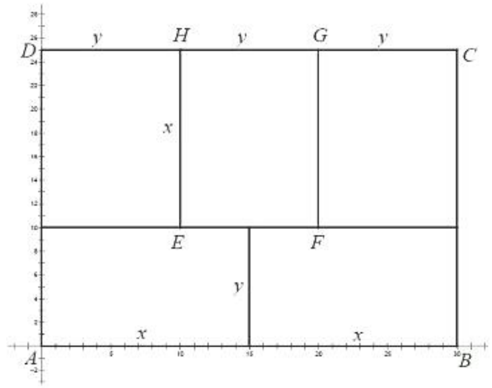
$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$
$$P = 30 + 90 + 54 + 6$$
$$P = 180 \ m^2.$$

Opseg dvorane je zbroj svih duljina stranica

$$o = 3 + 9 + 2 + 3 + 2 + 7 + 6 + 9 + 6 + 3 + 10$$
$$o = 60\ m.$$

4.3.1 Zadatci s natjecanja 7. razreda

Zadatak 4.5. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2014.*)*
Zadan je pravokutnik $ABCD$ čija je površina 750 cm^2. *Pravokutnik $ABCD$ je podijeljen na pet sukladnih pravokutnika kao na slici.* (Slika 4.18) *Pravokutnik $ABCD$ smjestite u I. kvadrantu pravokutnog koordinatnog sustava tako da je točka A u ishodištu, a točka B na osi apscisa. Odredite koordinate vrhova pravokutnika $EFGH$.*



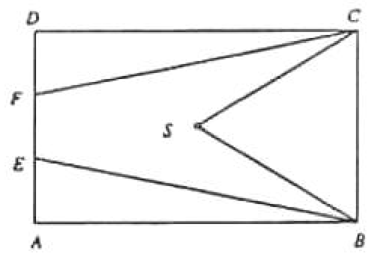
Slika 4.18: Pravokutnici

Rješenje:

Kako je pravokutnik $ABCD$ podijeljen na pet sukladnih pravokutnika, svaki manji pravokutnik ima površinu 150 cm^2, jer je $750 : 5 = 150$. Označimo duljinu dulje stranice manjeg pravokutnika s x, a kraće s y. Tada za površinu manjeg pravokutnika vrijedi $x \cdot y = 150$, pri čemu je $2 \cdot x = 3 \cdot y$. Slijedi da je $x = 15$, a $y = 10$. Dakle, točke imaju koordinate:

$$E(10, 10), F(20, 10), G(20, 25)\ i\ H(10, 25).$$

Zadatak 4.6. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2000.*)*
Dan je pravokutnik $ABCD$, kome je točka S sjecište dijagonala. Na stranici $\overline{AD}$ odabrane su točke E i F, tako da je $|AE| = |EF| = |FD|$. Odredi omjer površine peterokuta $EBSCF$ i površine pravokutnika $ABCD$. (Slika 4.19)



Slika 4.19: Pravokutnik

Rješenje:

Neka je:
$|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$
$|AE| = |EF| = |FD| = \frac{1}{3}b$.

U trokutu $\triangle SBC$, visina na stranicu $\overline{BC}$ ima duljinu $\frac{1}{2}a$, pa je

$$P_{SBC} = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}a = \frac{ab}{4},$$

$$P_{ABE} = P_{CDF} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}b = \frac{ab}{6},$$

$$P_{EBSCF} = P_{ABCD} - P_{SBC} - P_{ABE} - P_{CDF} = ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{6} = \frac{5}{12}ab.$$

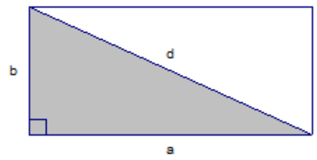
Omjer površina je

$$\frac{P_{EBSCF}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{12}\cancel{ab}}{\cancel{ab}} = \frac{5}{12}.$$

4.4 Pregled gradiva 8. razreda

U 8. razredu osnovne škole ponavlja se gradivo o pravokutniku naučeno u prethodnim razredima, na pravokutnik se primjenjuje Pitagorin poučak. Pravokutnik se također spominje u zadatcima s geometrijskim tijelima. Već smo se podsjetili da dijagonale dijele pravokutnik na dva sukladna pravokutna trokuta. Sada ćemo pokazati primjenu Pitagorina poučka na te trokute. Nacrtan je pravokutnik i jedna njegova dijagonala. (*Slika 4.20*) Duljina hipotenuza tih trokuta je d, a duljine kateta su a i b. Ako su a i b duljine stranica pravokutnika, a d duljina njegove dijagonale tada primjenom Pitagorina poučka imamo:

$$d^2 = a^2 + b^2 \tag{4.2}$$



Slika 4.20: Pravokutnik

Primjer 4.7. *Rubovi ekrana monitora odnose se kao* $4:3$. *Izračunaj površinu ekrana ako je on* 17*-inčni* ($17''$), *gdje je* 1 *inč* ≈ 2.54 *cm.*

Rješenje:

Ukoliko s a i b označimo duljinu i širinu monitora, tada se stranice odnose $a : b = 4 : 3$. Iz toga slijedi da je $a = \frac{4}{3}b$. Dijagonalu monitora označimo slovom d, odnosno $d = 17''$, što znači da je $17'' = 17 \cdot 2.54 = 43.18\ cm$. Obzirom da je monitor pravokutnog oblika, te dijagonala dijeli pravokutnik na dva sukladna pravokutna trokuta, primijenom (4.2) možemo izračunati preostale stranice

$$\begin{aligned} 43.18^2 &= \left(\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 \\ 1864.5124 &= \frac{16}{9}b^2 + b^2 \\ 1864.5124 &= \frac{25}{9}b^2 \\ \frac{25}{9}b^2 &= 1864.5124 / : \frac{25}{9} \\ b^2 &= 671.224464 / \sqrt{} \\ b &= 25.908\ cm. \end{aligned}$$

Uvrstimo li $b = 25.908$ u $a = \frac{4}{3}b$ dobijemo

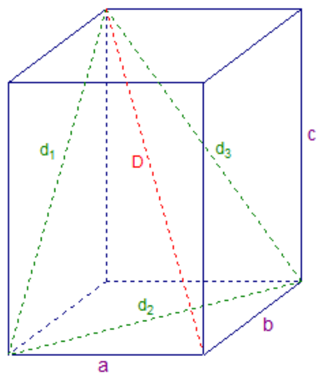
$$\begin{aligned} a &= \frac{4}{3}b \\ a &= \frac{4}{3} \cdot 25.908 \\ a &= 34.544\ cm. \end{aligned}$$

Površina pravokutnika slijedi iz (2.3)

$$\begin{aligned} P &= 34.544 \cdot 25.908 \\ P &= 894.965952 \\ P &\approx 895\ cm^2. \end{aligned}$$

Površina 17-inčnog monitora približno je 895 cm^2.

Pravokutnik se spominje i kod geometrijskih tijela, a posebnu važnost ima kod kvadra jer je kvadar geometrijsko tijelo omeđeno pravokutnicima. Treba napomenuti osnovne karakteristike kvadra. S a, b i c označeni su duljine bridova kvadra, s d_1, d_2 i d_3 duljine plošnih dijagonala, a s D je označena duljina prostorne dijagonale. Također treba zaključiti da se sve dijagonale računaju primjenom Pitagorinog poučka. Dok se oplošje kvadra računa tako da zbrojimo sve površine pravokutnika, a volume kvadra je umnožak površine baze i visine. (*Slika 4.21*)



Slika 4.21: Kvadar

Primjer 4.8. *Pločicama pravokutnog oblika duljine* $10\ cm \times 40\ cm$ *popločeno je dno i sve bočne strane bazena. Bazen je oblika kvadra dimenzija* $25\ m \times 50\ m \times 2.6\ m$*. S koliko je pločica bazen popločen?*

Rješenje:

Površina pločice, P_p prema (2.3) je

$$P_p = 10 \cdot 40$$
$$P_p = 400\ cm^2.$$

Površina dna, P_1 i bočnih strana bazena, P_2, P_3, P_4, P_5 prema (2.3) je

$$P_1 = 25 \cdot 50 = 1\ 250\ m^2$$
$$P_2 = 25 \cdot 2.6 = 65\ m^2$$
$$P_3 = 25 \cdot 2.6 = 65\ m^2$$
$$P_4 = 50 \cdot 2.6 = 130\ m^2$$
$$P_5 = 50 \cdot 2.6 = 130\ m^2.$$

Ukupna površina, P_u je

$$P_u = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$
$$P_u = 1250 + 65 + 65 + 130 + 130$$
$$P_u = 1\ 640\ m^2 = 16\ 400\ 000\ cm^2.$$

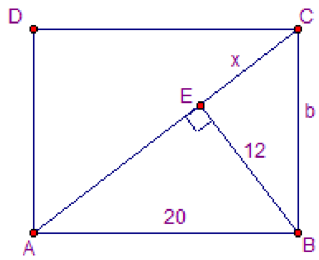
Ukupan broj ploica, b_p je

$$b_p = P_u : P_p$$
$$b_p = 16\ 400\ 000 : 400$$
$$b_p = 41\ 000.$$

Bazen je popločen s 41 000 pločica.

4.4.1 Zadatci s natjecanja 8. razreda

Zadatak 4.7. *Dan je pravokutnik $ABCD$ kojemu je duljina stranice $|AB| = 20$ cm. Duljina okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$ je 12 cm. Odredi opseg i površinu pravokutnika. (Slika 4.22)*



Slika 4.22: Pravokutnik

Rješenje:

Neka je $|BE| = 12cm$, $|BC| = b$ i $|CE| = x$.
Primjenom (3.5) na trokut $\triangle ABE$ možemo lako odrediti duljinu dužine $|AE|$

$$|AE|^2 = 20^2 - 12^2$$
$$|AE|^2 = 400 - 144$$
$$|AE|^2 = 256 / \sqrt{}$$
$$|AE| = 16\ cm.$$

Primjenom (3.5) na trokut $\triangle ABC$, vrijedi jednakost $b^2 = (16 + x)^2 - 20^2$.
Primjenom (3.5) na trokut $\triangle BCE$, vrijedi jednakost $b^2 = 12^2 + x^2$.
Kako su lijeve strane ovih jednakosti jednake, slijedi da su i desne strane jednake, odnosno

vrijedi

$$
\begin{aligned}
(16+x)^2 - 20^2 &= 12^2 + x^2 \\
16^2 + 2\cdot 16\cdot x + x^2 - 20^2 &= 12^2 + x^2 \\
256 + 32x + \cancel{x^2} - 400 &= 144 + \cancel{x^2} \\
32x &= 400 - 256 + 144 \\
32x &= 288 / : 32 \\
x &= 9\ cm.
\end{aligned}
$$

Sada lako možemo odrediti b prema (3.5)

$$
\begin{aligned}
b^2 &= 12^2 + x^2 \\
b^2 &= 12^2 + 9^2 \\
b^2 &= 144 + 81 \\
b^2 &= 225 / \sqrt{} \\
b &= 15\ cm.
\end{aligned}
$$

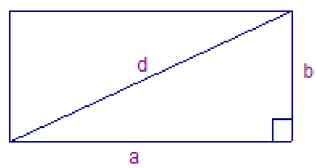
Opseg pravokutnika prema (2.2) je

$$
\begin{aligned}
o &= 2\cdot(20+15) \\
o &= 2\cdot 35 \\
o &= 70\ cm.
\end{aligned}
$$

Površina pravokutnika prema (2.3) je

$$
\begin{aligned}
P &= 20\cdot 15 \\
P &= 300\ cm^2.
\end{aligned}
$$

Zadatak 4.8. *Opseg pravokutnika je* 28 *cm, a duljina dijagonale je* 10 *cm. Odredi duljine stranica pravokutnika. (Slika 4.23)*



Slika 4.23: Pravokutnik

Rješenje:

Neka su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika.

Opseg pravokutnika prema (2.2) je

$$\begin{aligned}28 &= 2 \cdot (a+b) / : 2 \\ 14 &= a+b.\end{aligned}$$

Nakon kvadriranja ove jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}14 &= a+b /^2 \\ 14^2 &= (a+b)^2 \\ 196 &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Neka je d dijagonala pravokutnika. Tada prema (4.2) slijedi

$$\begin{aligned}10^2 &= a^2 + b^2 \\ 100 &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Supstitucijom jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}196 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ 100 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}196 &= 100 + 2ab \\ 2ab &= 96.\end{aligned}$$

Dopunimo li jednakost, dobivamo

$$\begin{aligned}2ab + 4 &= 96 + 4 \\ 2ab + 4 &= 100.\end{aligned}$$

Kako je desna strana jednaka $a^2 + b^2 = 100$, nova jednakost je

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 2ab + 4 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= 4 \\ (a-b)^2 &= 4 / \sqrt{} \\ a - b &= 2.\end{aligned}$$

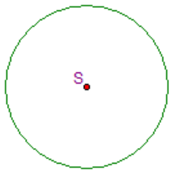
Traženo rješenje dobivamo rješavajući sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}a + \cancel{b} &= 14 \\ \underline{a - \cancel{b}} &\underline{= 2} \\ 2a &= 16 / : 2 \\ a &= 8\ cm.\end{aligned}$$

5 Kružnica i krug

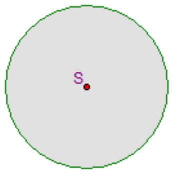
5.1 Pregled gradiva 5. razreda

U 5. razredu osnovne škole nadopunjuje se i proširuje znanje o kružnici i krugu naučeno u prvom obrazovnom ciklusu. Kružnica se definira kao skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od neke točke S te ravnine. Kružnica omeđuje (zatvara) dio ravnine. Točka S zove se središte kružnice. Kružnicu crtamo tako da oštricu šestara zabodemo u točku S pa zatim vrtimo dok ne nacrtamo cijelu kružnicu. (*Slika 5.1*)



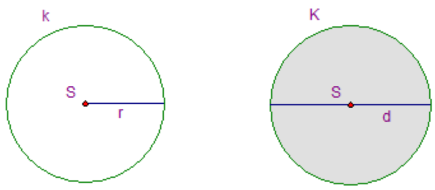
Slika 5.1: Kružnica

Dio ravnine omeđen kružnicom zove se krug. Točka S zove se središte kruga. (*Slika 5.2*) Krugu pripadaju sve točke koje leže na toj kružnici i sve točke koje su unutar te kružnice.



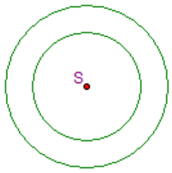
Slika 5.2: Krug

Dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice zove se polumjer kružnice tj. radijus i označava se slovom r. (*Slika 5.3*) Dužina koja prolazi kroz središte kružnice, a krajnje su joj točke na kružnici, zove se promjer kružnice tj. dijametar i označava se slovom d. (*Slika 5.3*) Kraći zapis kružnice u središtu S i polumjera r zapisujemo na sljedeći način $k(S, r)$, dok se kraći zapis kruga u središtu S i polumjera r zapisuje kao $K(S, r)$.



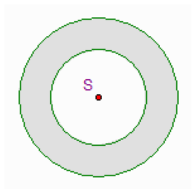
Slika 5.3: Polumjer i promjer

Dvije kružnice s istim središte zovu se koncentrične kružnice. (*Slika 5.4*)



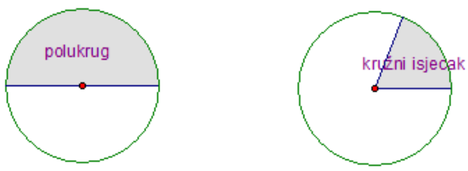
Slika 5.4: Koncentrične kružnice

Dio ravnine između dviju koncentričnih kružnica zove se kružni vijenac. (*Slika 5.5*)



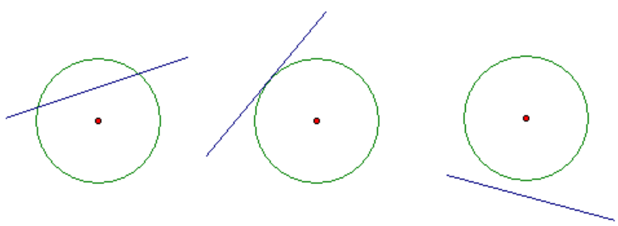
Slika 5.5: Kružni vijenac

Promjer dijeli krug na dva polukruga. Dva polumjera dijele krug na dva kružna isječka. (*Slika 5.6*)



Slika 5.6: Polukrug i kružni isječak

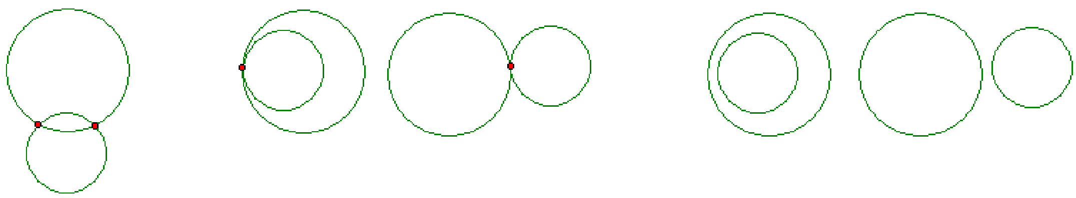
U petom razredu spominje se odnos kružnice i pravca te odnos dviju kružnica. Na sljedećoj slici (*Slika 5.7*) promotrit ćemo odnose kružnice i pravca.



Slika 5.7: Odnos kružnice i pravca

Kružnica i pravac mogu se sječi u dvije točke.
Kružnica i pravac mogu se dodirivati u jednoj točki.
Kružnica i pravac nemaju zajedničkih točaka.

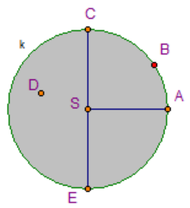
Na sljedećoj slici (*Slika 5.8*) promotrit ćemo odnose dviju kružnica.



Slika 5.8: Odnos dviju kružnica

Dvije kružnice mogu se sijeći u dvije točke.
Dvije kružnice mogu se dodirivati u jednoj točki.
Dvije kružnice nemaju zajedničkih točaka.

Primjer 5.1. *Promotri sliku (Slika 5.9), te odgovori na sljedeće tvrdnje s točno "T" ili netočno "N".*



Slika 5.9: Kružnica

Rješenje:

a) Točka D pripada kružnici k: N

b) Točka D pripada krugu K: T

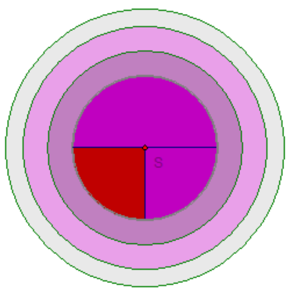
c) Točka C pripada kružnici k: T

d) Dužina $\overline{SA}$ je promjer kružnice k: N

e) Dužina $\overline{CE}$ je promjer kružnice k: T

Primjer 5.2. *Nacrtaj četiri koncentrične kružnice, tri kružna vijenca, polukrug i kružni isječak na jednoj slici.*

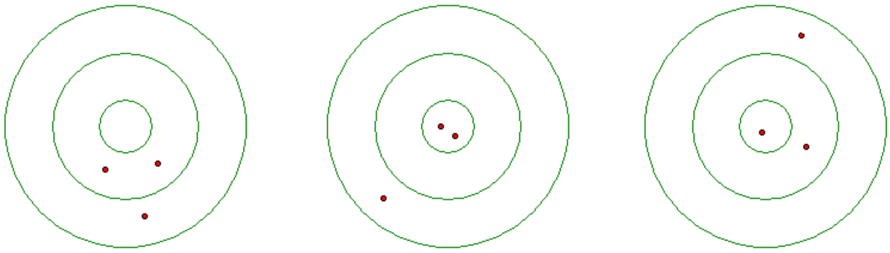
Rješenje: (*Slika 5.10*)



Slika 5.10: Kružnica

5.1.1 Zadatci s natjecanja 5. razreda

Zadatak 5.1. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2004.*)*
Janko je u prve dvije igre pikada gađao metu sa po tri strelice, te postigao 25 *bodova u prvoj igri i* 45 *bodova u drugoj igri. (Slika 5.11) Koliko je bodova postigao u trećoj igri? Svaki krug nosi neki broj bodova, a s točkom su označeni pogotci.*



Slika 5.11: Meta

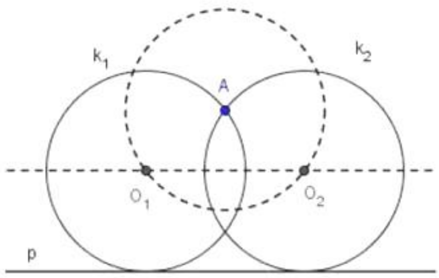
Rješenje:

Ako zbrojimo pogotke u prva dva gađanja, primjećujemo da je Janko pogodio dvaput u svaki krug i pritom osvojio 70 bodova. U trećem je gađanju jedanput pogodio svaki krug, pa je osvojio polovinu bodova, dakle 35 bodova.

Zadatak 5.2. *(REGIONALNO NATJECANJE,* 2000.*, ZAGREB)*
Zadan je pravac p i točka A koja je od pravca p udaljena 3 *cm. Konstruiraj kružnicu koja prolazi točkom A, dodiruje zadani pravac p i ima radijus* 2 *cm.*

Rješenje:

Neka je točka O središte tražene kružnice. Kako je $|OA| = 2\ cm$, te točka O pripada kružnici $k(A, 2\ cm)$, tj. kružnici središta A i radijusa 2 cm. Kako tražena kružnica dodiruje dani pravac p, središte kružnice mora pripadati pravcu usporednom s p i od njega udaljenom 2 cm. Središte tražene kružnice je zajednička točka ova dva skupa točaka.
Zadatak ima dva rješenja, k_1 i k_2. (*Slika 5.12*)

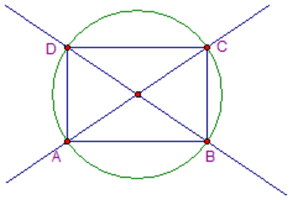


Slika 5.12: Konstrukcija kružnice

5.2 Pregled gradiva 6. razreda

U 6. razredu osnovne škole kružnica se ne spominje kao osnovni pojam, već se spominje kao opisana kružnica pravokutniku, odnosno opisana i upisana kružnica trokutu. U prvom primjeru pokazat ćemo opisanu kružnicu pravokutnika, dok ćemo u drugom primjeru pokazati opisanu, odnosno upisanu kružnicu trokuta.

Primjer 5.3. *Opiši kružnicu pravokutniku čije su stranice* 3 *cm i* 2 *cm.*

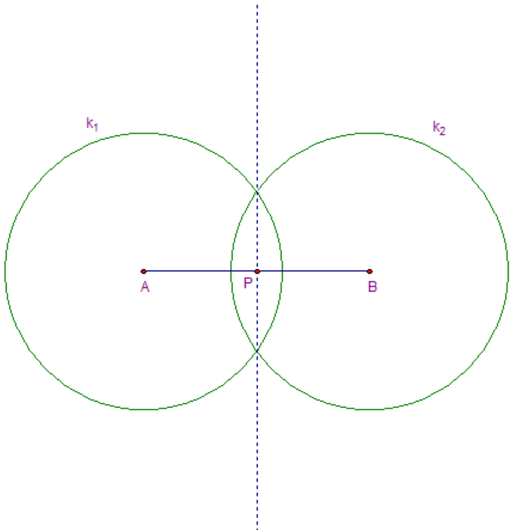


Slika 5.13: Opisana kružnica

Rješenje:

Nacrtajmo pravokutnik duljine 3 cm i širine 2 cm.
Nacrtajmo pravce kroz nasuprotne točke.
Sjecište pravaca je središte pravokutniku opisane kružnice. (*Slika 5.13*)

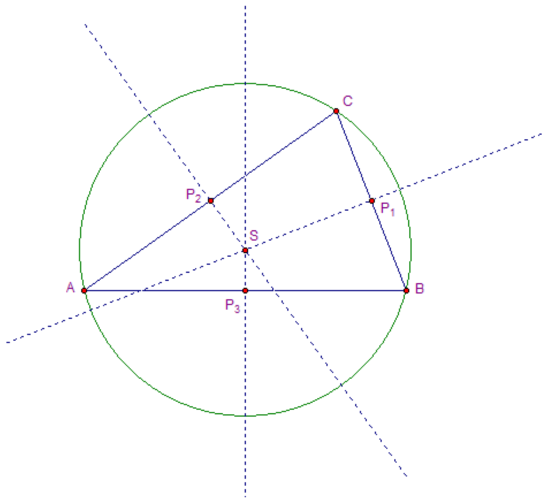
Da bi mogli pokazati opisanu kružnicu trokutu, prvo trebamo spomenuti simetralu i polovište dužine. Simetrala s zadane dužine $\overline{AB}$ je spojnica sjecišta dviju kružnica jednakih polumjera oko krajeva dužine A i B, tj. $k_1(A, |AB|)$ i $k_2(B, |AB|)$. Polovište P dužine $\overline{AB}$ je sjecište te dužine i njezine simetrale s. (*Slika 5.14*)



Slika 5.14: Simetrala dužine

Primjer 5.4. *Nactraj raznostraničan trokut, odredi simetrale stranica te opiši trokutu kružnicu.*

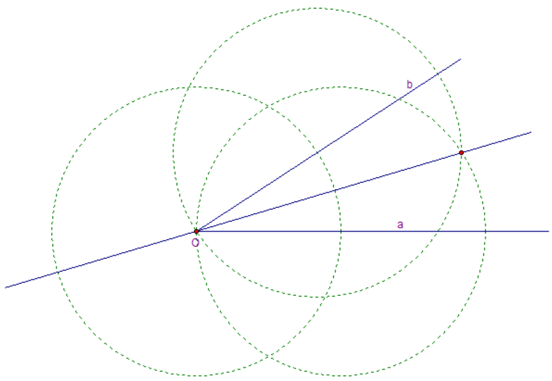
Rješenje:



Slika 5.15: Opisana kružnica

Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki S. Ta točka je središte trokutu opisane kružnice. (*Slika 5.15*)

Da bi mogli pokazati upisanu kružnicu trokutu, prvo trebamo spomenuti simetralu kuta. Oko vrha O zadanog kuta $\angle aOb$ po volji opišemo neku kružnicu. Zatim oko sjecišta te kružnice i krakova kuta a i b opišemo kružnice jednakih polumjera, recimo one kroz točku O. Drugo sjecište tih kružnica je druga točka simetrale s kuta $\angle aOb$. (*Slika 5.16*)

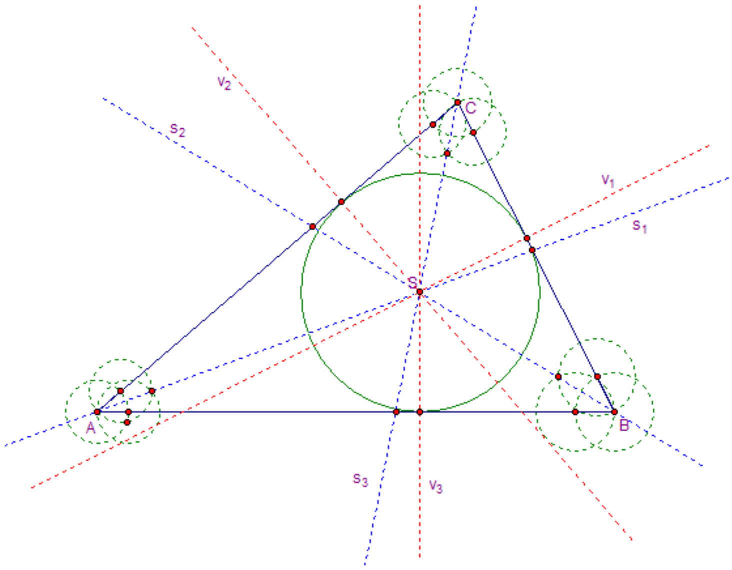


Slika 5.16: Simetrala kuta

Primjer 5.5. *Nacrtaj raznostraničan trokut, odredi simetrale kuta te upiši trokutu kružnicu.*

Rješenje:

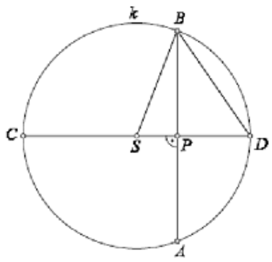
Simetrale kuta trokuta sijeku se u jednoj točki S. Ta točka je središte trokutu opisane kružnice. (*Slika 5.17*)



Slika 5.17: Upisana kružnica

5.2.1 Zadatci s natjecanja 6. razreda

Zadatak 5.3. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2007.*)*
Neka točke A i B pripadaju kružnici k sa središtem S i polumjerom r, te neka je $|AB| < 2r$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki P, a kružnicu k u točkama C i D, pri čemu su točke C i S s iste strane pravca AB. Dokaži da je $|PD| < |PB|$. (Slika 5.18)



Slika 5.18: Kružnica

Rješenje:

Budući da točke B i D pripadaju kružnici k, slijedi da je $|BS| = |DS|$, odnosno trokut $\triangle BSD$ je jednakokračan. To znači da je $\angle SDB = \angle DBS$.

Kako je

$$\angle DBP = \angle DBS - \angle PBS$$

slijedi

$$\angle DBP < \angle DBS$$

odnosno

$$\angle DBP < \angle SDB$$

pa je

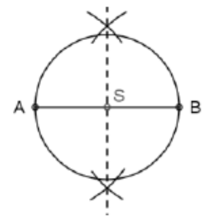
$$\angle DBP < \angle PDB$$

Promotrimo sada trokut $\triangle PDB$. Kako u trokutu nasuprot većeg kuta leži dulja stranica, vrijedi $|PD| < |PB|$, čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 5.4. *(ŠKOLSKO NATJECANJE, 2014.)*
Nartaj dužinu $\overline{AB}$. Konstruiraj kružnicu kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer. Odaberi bilo koju točku T na konstruiranoj kružnici, različitu od A i B. Odredi veličinu kuta $\angle ATB$.

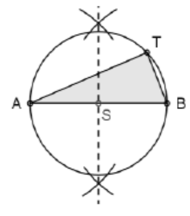
Rješenje:

1. Nacrta se neka dužina $\overline{AB}$.
2. Konstruira se simetrala dužine $\overline{AB}$, točka S je sjecište simetrale i dužine te je središte kružnice pa se konstruira kružnica. (*Slika 5.19*)



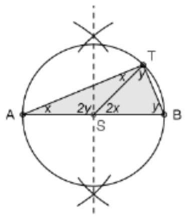
Slika 5.19: Simetrala dužine

3. Odabir točke T na konstruiranoj kružnici i označavanje $\angle ATB$ (odnosno $\triangle ABT$). (*Slika 5.20*)



Slika 5.20: Odabir točke T

4. Nacrtamo li dužinu $\overline{ST}$, tada ćemo $\triangle ABT$ podijeliti na dva trokuta: $\triangle AST$ i $\triangle SBT$. (*Slika 5.21*)

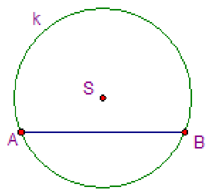


Slika 5.21: Podjela na trokute

Oba ova trokuta su jednakokračni trokuti s osnovicama $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$ (kraci su im polumjeri kružnice sa središtem u točki S i promjerom $\overline{AB}$). Veličine kutova uz osnovicu tih trokuta označimo s x i y redom. Jednakokračnom trokutu $\triangle AST$ veličina vanjskog kuta je $|\angle BST| = 2x$. Jednakokračnom trokutu $\triangle SBT$ veličina vanjskog kuta je $|\angle TSA| = 2y$. Kut $\angle BSA$ je ispruženi kut pa vrijedi $2x + 2y = 180°$. Dakle, $x + y = 90°$. Kako je $|\angle ATB| = x + y$, zaključujemo da je veličina traženoga kuta $90°$.

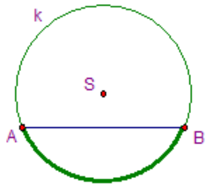
5.3 Pregled gradiva 7. razreda

U 7. razredu osnovne škole nadopunjuje se i proširuje znanje o kružnici i krugu naučeno u prethodnim razredima, te se uče novi pojmovi kao što je Talesov poučak, odnos pravca i kružnice te opseg i površina. Pojam kružnice, kruga, polumjera, promjera, polukruga, kružnog isječka, kružnog vijenca te koncentričnih kružnica upoznali smo u petom razredu. U sedmom razredu uči se tetiva kružnice i definira kao dužina koja spaja dvije točke kružnice. (*Slika 5.22*)



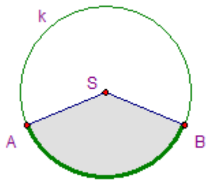
Slika 5.22: Tetiva

Dio kružnice omeđen dvjema njezinim točkama naziva se kružni luk. (*Slika 5.23*)



Slika 5.23: Kružni luk

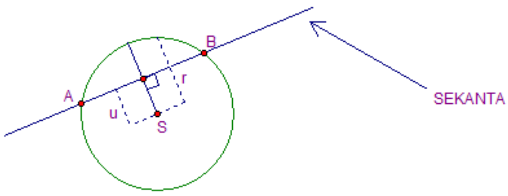
Na slici (*Slika 5.23*) istaknut je kružni luk $\widehat{AB}$, a točke navodimo u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu. Dio kruga omeđen s dva polumjera i kružnim lukom naziva se kružni isječak. (*Slika 5.24*)



Slika 5.24: Kružni isječak

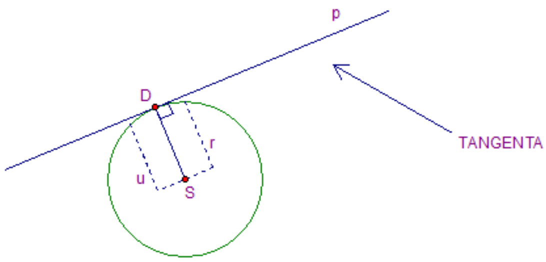
U petom razredu naveli smo odnos pravca i kružnice. (*Slika 5.7*) Sada ćemo promotriti svaki slučaj za sebe. Koji će od tih položaja imati kružnica i pravac p, ovisi o radijusu kružnice r i o udaljenosti u središta kružnice S od pravca p.

Ako je $u < r$, onda kružnica i pravac imaju dvije zajedničke točke, tj. onda se kružnica i pravac sijeku u dvije točke koje se nazivaju sjecišta pravca i kružnice. Pravac koji siječe kružnicu naziva se sekanta kružnice. (*Slika 5.25*)



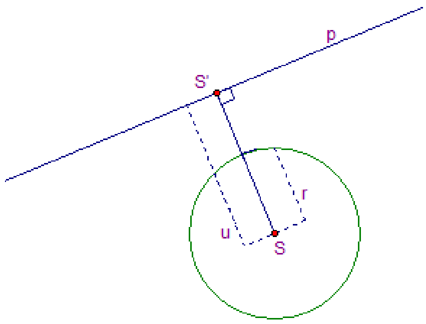
Slika 5.25: Sekanta

Ako je $u = r$, onda kružnica i pravac imaju jednu zajedničku točku, tj. onda se kružnica i pravac diraju u jednoj točki koja se naziva dirałište pravca i kružnice. Pravac koji dira kružnicu naziva se tangenta kružnice. (*Slika 5.26*)



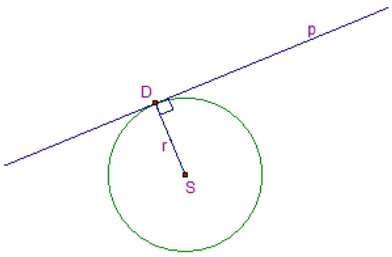
Slika 5.26: Tangenta

Ako je $u > r$, onda kružnica i pravac nemaju zajedničkih, tj. kružnica i pravac se ne sijeku. (*Slika 5.27*)



Slika 5.27: Nema zajedničkih točaka

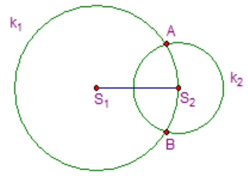
Tangenta je okomita na polumjer koji spaja središte kružnice S s diralištem D. (*Slika 5.28*)



Slika 5.28: Diralište

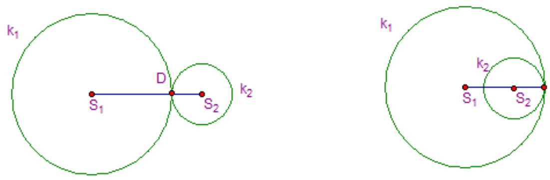
Kružnica je jedinstveno određena s tri točke A, B i C koje ne pripadaju istom pravcu. To je opisana kružnica trokutu $\triangle ABC$. U petom razredu naveli smo odnos dviju kružnica. (*Slika 5.8*) Sada ćemo promotriti svaki slučaj za sebe.

Kružnice k_1 i k_2 imaju dvije zajedničke točke A i B koje se nazivaju sjecišta tih kružnica, tada kažemo da se kružnice sijeku. (*Slika 5.29*)



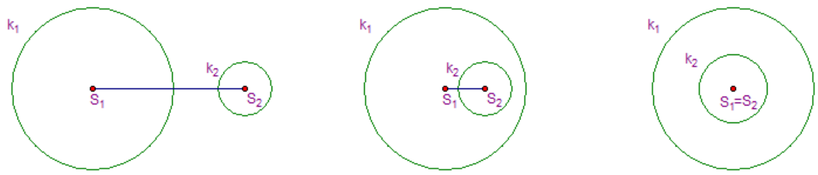
Slika 5.29: Kružnice koje se sijeku

Kružnice k_1 i k_2 imaju jednu zajedničku točku D koje se naziva dirалište kružnica. Kažemo da se kružnice dodiruju izvana na prvoj slici i iznutra na drugoj slici. (*Slika 5.30*)



Slika 5.30: Kružnice koje se dodiruju

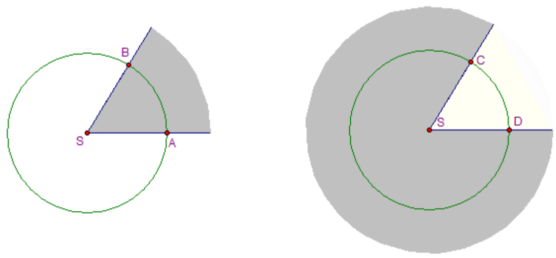
Kružnice k_1 i k_2 nemaju zajedničkih točka. (*Slika 5.31*)



Slika 5.31: Kružnice koje se ne dodiruju

Već smo spomenuli što je kružni luk, no treba definirati središnji i obodni kut kružnog luka.

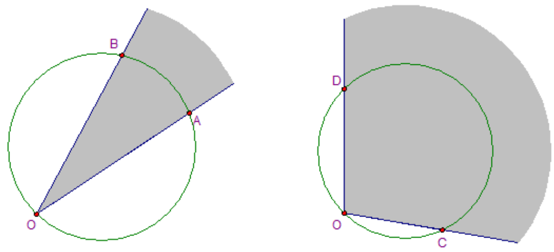
Kut čiji je vrh u središtu kružnice naziva se središnji kut te kružnice. (*Slika 5.32*)



Slika 5.32: Središnji kut

Puni kut je 360°, a veličina središnjeg kuta manja je od 360°. Središnji kut $\angle ASB$ sadrži kružni luk $\overset{\frown}{AB}$ pa kažemo da su oni međusobno pridruženi. Kružnom luku pridružen je jedan središnji kut.

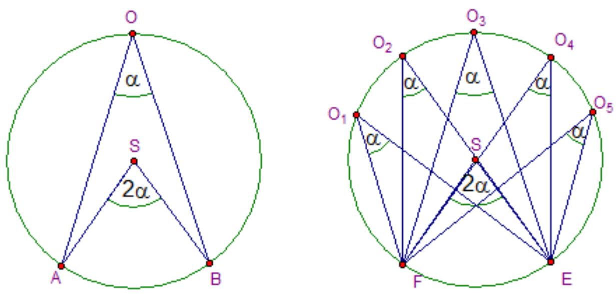
Kut čiji vrh pripada kružnici i čiji krakovi sijeku tu kružnicu naziva se obodni kut kružnice. (*Slika 5.33*)



Slika 5.33: Obodni kut

Ispruženi kut je 180°, a veličina obodnog kuta manja je od 180°. Obodni kut $\angle AOB$ sadrži kružni luk $\overset{\frown}{AB}$ pa kažemo da su oni međusobno pridruženi. Kružnom luku pridruženo je beskonačno mnogo obodnih kutova.

Naučili smo da je kružnom luku pridružen jedan središnji i beskonačno mnogo obodnih kutova. Ukoliko nacrtamo kružnicu s pripadajućim kružnim lukom $\overset{\frown}{AB}$ i pripadajućim središnjim i obodnim kutom primijetiti ćemo da je središnji kut dva puta veći od svakog obodnog kuta što nam govori i sljedeći poučak. (*Slika 5.34*)

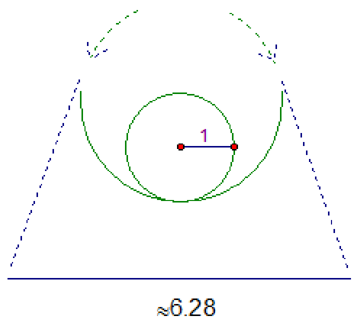


Slika 5.34: Središnji i obodni kutovi

TALESOV POUČAK O SREDIŠNJEM I OBODNOM KUTU

> Ako su središnji i obodni kut pridruženi istom kružnom luku, onda je središnji kut dva puta veći od obodnog kuta.

Kako smo definirali sve pojmove vezane za kružnicu i krug, preostaje još pokazati opseg i površinu kruga. Kako je teže objasniti opseg i površinu kruga poslužit ćemo se najjednostavnijim primjerom pomoću konca. Duljinu kružnice radijusa 1 *cm* mogli bismo odrediti tako da oko nje čvrsto omotamo konac koji zatim izravnamo i izmjerimo. Uočili bismo da je kružnica nešto dulja od 6 *cm*. (*Slika 5.35*)



Slika 5.35: Duljina kružnice

Omjer duljine kružnice o i njenog promjera $2r$ jest broj π. Približna vrijednost jest 3.14. Kako je

$$\frac{o}{2r} = \pi,$$

slijedi formula kojom računamo duljinu kružnice radijusa r odnosno opseg kruga:

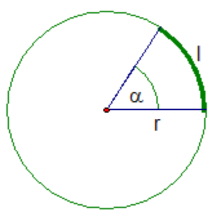
$$o = 2 \cdot r \cdot \pi. \tag{5.1}$$

Duljina kružnog luka i veličina njemu pridruženog središnjeg kuta proporcionalne su veličine. Kružnom luku duljine l pridružen je središnji kut α, a cijeloj kružnici duljine $2r\pi$ središnji kut od $360°$ (*Slika 5.36*) pa vrijedi proporcionalnost:

$$\frac{l}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360°},$$

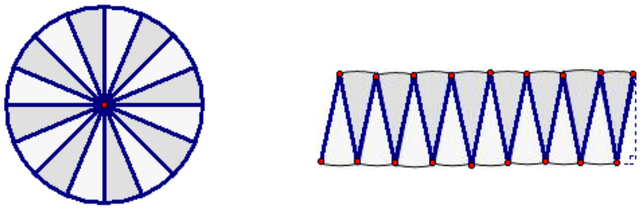
sređujući izraz dobijemo formulu za računanje kružnog luka:

$$l = r\pi \cdot \frac{\alpha}{180°}. \tag{5.2}$$



Slika 5.36: Duljina kružnog luka

Sljedeća slika (*Slika 5.37*) ilustrira nam valjanost formule po kojoj računamo površinu kruga.



Slika 5.37: Površina kruga

Ukoliko podijelimo kružnicu na dijelove kao na slici (*Slika 5.37*) te primjenimo (2.3) slijedi

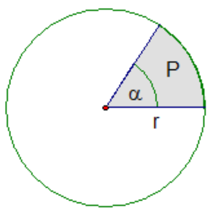
$$P = r \cdot \pi \cdot r = r^2\pi. \tag{5.3}$$

Površina kružnog luka i veličina njemu pridruženog središnjeg kuta proporcionalne su veličine. Kružnom isječku površine P pridružen je središnji kut α, a cijelom krugu površine $r^2\pi$ središnji kut od $360°$ (*Slika 5.38*) pa vrijedi proporcionalnost:

$$\frac{P}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360°},$$

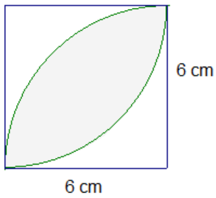
sređujući izraz dobijemo formulu za računanje površine kružnog isječka:

$$P = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}. \tag{5.4}$$

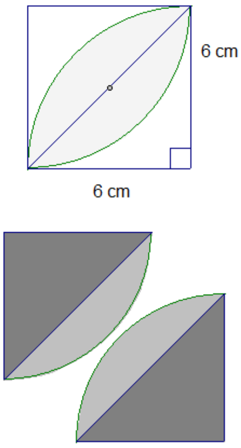


Slika 5.38: Površina kružnog isječka

Primjer 5.6. *Odredi površinu sivog dijela kvadrata duljine stranice* 6 *cm. (Slika 5.39)*



Slika 5.39: Površina



Slika 5.40: Površina

Rješenje:

Ukoliko spojimo suprotne vrhove, dobit ćemo dva kružna isječka u kojima se treba izračunati svjetliji dio lika. Svjetliji dio lika dobit ćemo tako da oduzmemo površinu pravokutnog trokuta od površine kružnog isječka. (*Slika 5.40*)

Neka je P_t površina pravokutnog trokuta, P_i površina kružnog isječka, te P_s površina dva svjetlija dijela lika. Tada je

$$P_t = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2$$

$$P_i = 6^2\pi \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = 9\pi\ cm^2$$

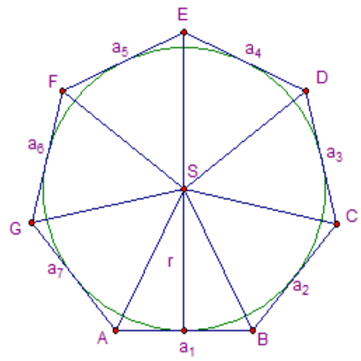
$$P_s = 2 \cdot (P_i - P_t)$$
$$P_s = 2 \cdot (9\pi - 18)$$
$$P_s = (18\pi - 36)\ cm^2.$$

5.3.1 Zadatci s natjecanja 7. razreda

Zadatak 5.5. *(ŽUPANIJSKO NATJECANJE,* 2003.*)*
Oko kruga promjera $3\frac{1}{5}$ *cm opisan je sedmerokut čije sve stranice dodiruju krug. Površina sedmerokuta je* 20 cm^2*. Izračunaj opseg sedmerokuta.*

Rješenje:

Označimo stranice sedmerokuta s $a_1, \ldots, a_7$. (*Slika 5.41*)



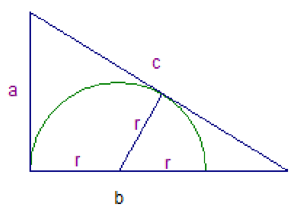
Slika 5.41: Sedmerokut

Polumjer kruga upisanog u sedmerokutu iznosi $r = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{8}{5} = 1.6\ cm$. Sedmerokut je podijeljen na sedam trokuta: $\triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS, \triangle DES, \triangle EFS, \triangle FGS$ i $\triangle GAS$ čije su površine redom: $P_{ABS} = \frac{a_1 \cdot r}{2}, \ldots, P_{GAS} = \frac{a_7 \cdot r}{2}$.
Zbroj površina tih trokuta jednak je površini sedmerokuta, odnosno

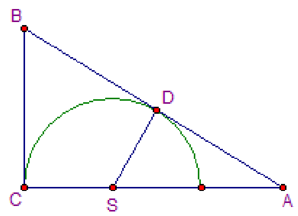
$$\begin{aligned}
\frac{a_1 \cdot r}{2} + \frac{a_2 \cdot r}{2} + \frac{a_3 \cdot r}{2} + \frac{a_4 \cdot r}{2} + \frac{a_5 \cdot r}{2} + \frac{a_6 \cdot r}{2} + \frac{a_7 \cdot r}{2} &= 20 \\
\frac{r \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}{2} &= 20 / \cdot 2 \\
\frac{8}{5} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) &= 40 / \cdot \frac{5}{8} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 25.
\end{aligned}$$

Dakle, opseg sedmerokuta je zbroj svih stranica, odnosno 25 cm.

Zadatak 5.6. *(DRŽAVNO NATJECANJE,* 2013.*)*
Na slici (Slika 5.42) je pravokutan trokut sa stranicama duljina a, b i c. U trokut je ucrtana polukružnica. Kolika je duljina polumjera r te polukružnice, izražena pomoću a, b i c?



Slika 5.42: Pravokutan trokut



Slika 5.43: Pravokutan trokut

Rješenje:

Neka je $|CS| = |SD| = r$. Tada je $|AS| = b - r$. Kako je AB tangenta polukružnice u točki D, onda je $\overline{SD} \perp \overline{AB}$. (*Slika* 5.43) Dakle, vrijedi $|\angle SDA| = 90^\circ = |\angle ACB|$ i $|\angle DAS| = |\angle BAC|$ pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\triangle DAS \sim \triangle CAB$. Iz sličnosti slijedi $|AS| : |AB| = |SD| : |BC|$ odnosno $(b - r) : c = r : a$ pa je $c \cdot r = (b - r) \cdot a$.

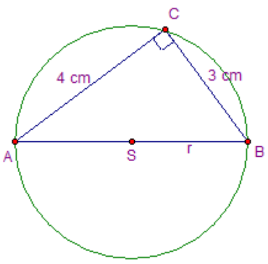
Vrijedi

$$\begin{aligned}
c \cdot r &= a \cdot b - a \cdot r \\
c \cdot r + a \cdot r &= a \cdot b \\
r \cdot (a + c) &= a \cdot b / : (a + c) \\
r &= \frac{a \cdot b}{a + c}.
\end{aligned}$$

5.4 Pregled gradiva 8. razreda

U 8. razredu osnovne škole kružnica i elementi kružnice ne spominju se kao novi pojmovi, već se spominje u zadatcima zajedno s pravokutnim trokutom, pojavljuje se u preslikavanjima ravnine, te kao element kod geometrijskih tijela poput valjka, stošca i kugle.

Primjer 5.7. *Kolika je duljina kružnice opisane pravokutnom trokutu ako su mu katete duljina* 3 *cm i* 4 *cm? (Slika 5.44)*



Slika 5.44: Talesov poučak

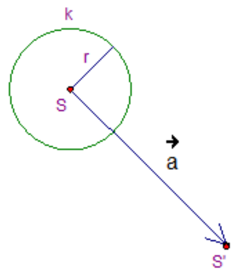
Rješenje:

Prema Talesovom poučku, znamo da je kut nad promjerom kružnice, pravi kut. Prema tome treba izračunati promjer kružnice, odnosno hipotenuzu trokuta. Ukoliko su zadane katete, prema (3.5) dobivamo

$$\begin{aligned}
(2 \cdot r)^2 &= 4^2 + 3^2 \\
4 \cdot r^2 &= 16 + 9 \\
4 \cdot r^2 &= 25 / : 4 \\
r^2 &= \frac{25}{4} / \sqrt{} \\
r &= \frac{5}{2}\ cm.
\end{aligned}$$

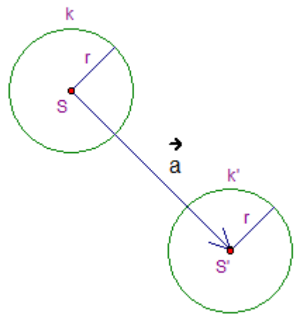
Spomenuli smo da se kružnica pojavljuje u raznim preslikavanjima, tako kružnicu možemo translatirati, preslikati osnom simetrijom, centralnom simetrijom, te rotirati. U svim simetrijama čuva se početni oblik kružnice. Kroz nekoliko primjera prikazati ćemo simetrije te istaknuti bitne pojmove preslikavanja.

Primjer 5.8. *Translatiraj kružnicu za vektor* $\overrightarrow{a}$*, ako je zadano kao na slici. (Slika 5.45)*



Slika 5.45: Translacija

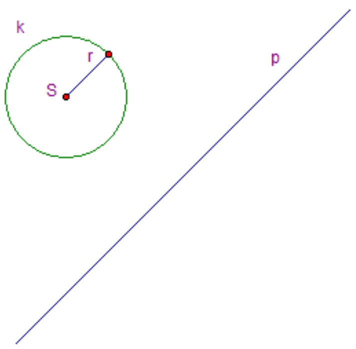
Rješenje:



Slika 5.46: Translacija

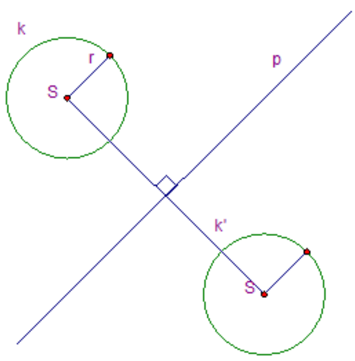
S dužinom učenici su se prvi put susreli u prvom obrazovnom ciklusu, a s vektorima tijekom sedmog razreda u fizici te s vektorima i translacijom tijekom osmog razredu u matematici.
Da bi translatirali kružnicu, trebamo spomenuti da je translacija usporedni pomak za vector $\overrightarrow{a}$ koji svakoj točki T ravnine pridružuje točku T' ravnine tako da je $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{a}$, gdje je vektor usmjerena dužina koja je određena duljinom, smjerom i orijentacijom. (*Slika 5.46*)

Primjer 5.9. *Odredi osnosimetričnu sliku kružnice s obzirom na pravac p. (Slika 5.47)*



Slika 5.47: Osna simetrija

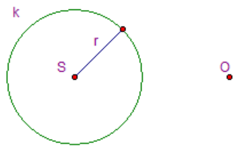
Rješenje:



Slika 5.48: Osna simetrija

Da bi kružnicu preslikali osnom simetrijom, trebamo spomenuti da je osna simetrija s obzirom na pravac p preslikavanje ravnine koje svakoj točki T pridružuje točku T' tako da je pravac p simetrala dužine $\overrightarrow{TT'}$. (*Slika 5.48*)

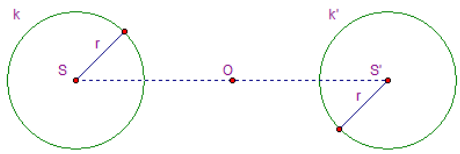
Primjer 5.10. *Odredi centralnosimetričnu sliku kružnice s obzirom na točku O. (Slika 5.49)*



Slika 5.49: Centralna simetrija

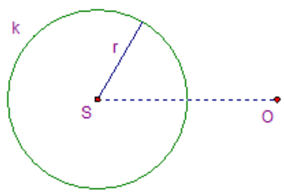
Rješenje:

Da bi kružnicu preslikali centralnom simetrijom, trebamo spomenuti da je centralna simetrija s obzirom na točku O preslikavanje ravnine koje svakoj točki T pridružuje točku T' tako da je O polovište dužine $\overrightarrow{TT'}$. (*Slika 5.50*)



Slika 5.50: Centralna simetrija

Primjer 5.11. *Rotiraj kružnicu k oko točke O. (Slika 5.51)*

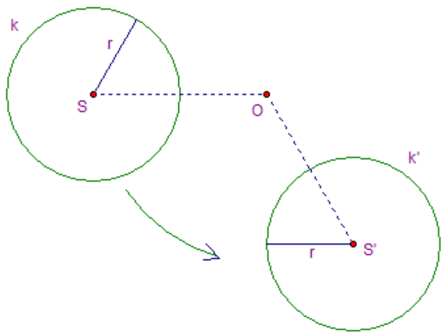


Slika 5.51: Rotacija

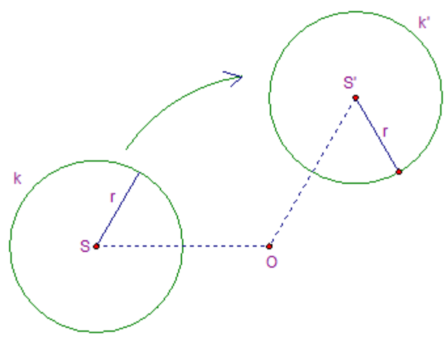
a) 120° *(Slika 5.52)*

b) -120° *(Slika 5.53)*

Rješenje:



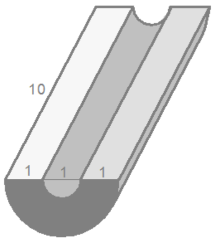
Slika 5.52: Rotacija za 120°



Slika 5.53: Rotacija za -120°

Neka je O zadana točka ravnine, a α kut. Rotacija oko točke O za kut α preslikavanje je ravnine koje svakoj točki T ravnine, različitoj od točke O, pridružuje točku T' takvu da vrijedi $|OT| = |OT'|$ *i* $\angle TOT' = \alpha$. (*Slika 5.52*) i (*Slika 5.53*).

Primjer 5.12. *Izračunaj obujam tijela sa slike (Slika 5.54) ako su duljine zadane u metrima.*



Slika 5.54: Valjak

Rješenje:

Na slici je prikazan valjak presiječen na pola. Obujam valjka, V računamo tako da pomnožimo površinu baze i visinu valjka. Obujem zadanog valjka dobit ćemo tako da oduzmemo obujam manjeg polovičnog valjaka, V_m od obujma većeg polovičnog valjka, V_v.

Površina većeg valjka, P_v prema (5.3) je

$$P_v = 1.5^2 \cdot 3.14$$
$$P_v = 7.065\ m^2.$$

Površina manjeg valjka, P_m prema (5.3) je

$$P_m = 0.5^2 \cdot 3.14$$
$$P_m = 0.785\ m^2.$$

Obujam većeg valjka, V_v je

$$V_v = 7.065 \cdot 10$$
$$V_v = 70.65\ m^3.$$

Obujam manjeg valjka, V_m je

$$V_m = 0.785 \cdot 10$$
$$V_m = 7.85\ m^3.$$

Obujam tijela, V je

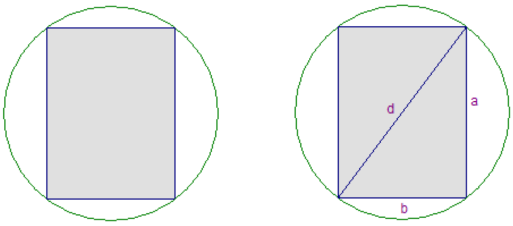
$$V = 70.65 - 7.85$$
$$V = 62.8\ m^3.$$

5.4.1 Zadatci s natjecanja 8. razreda

Zadatak 5.7. *(ŠKOLSKO NATJECANJE,* 2014.*)*
Pravokutniku je opisana kružnica. Duljine susjednih stranica pravoktnika odnose se kao $4:3$. *Površina pravokutnika iznosi* $108\ cm^2$. *Izračunaj površinu neosjenčanog dijela kruga.*

Rješenje:

Treba izračunati površinu kruga, te oduzeti površinu pravokutnika. Da bi znali izračunati površinu pravokutnika, iz dva uvijeta treba izračunati stranice, te izračunati dijagonalu pravokutnika koja je ujedno i promjer kružnice. (*Slika 5.55*)



Slika 5.55: Opisan pravokutnik

Iz uvijeta zadatka vrijedi

$$a \cdot b = 108,$$
$$a : b = 4 : 3.$$

Iz druge jednakosti izrazimo jednu veličinu

$$3 \cdot a = 4 \cdot b$$
$$a = \frac{4b}{3}.$$

Uvrstimo li u prvu jednakost, dobivamo

$$\frac{4b}{3} \cdot b = 108 / \cdot \frac{3}{4}$$
$$b^2 = 81 / \sqrt{}$$
$$b = 9\ cm.$$

Uvrstimo li u prvu jednakost, dobivamo

$$a \cdot 9 = 108 / : 9$$
$$a = 12\ cm.$$

Pomoću Pitagorina poučka dobivamo dijagonalu

$$d^2 = 12^2 + 9^2$$
$$d^2 = 144 + 81$$
$$d^2 = 225 / \sqrt{}$$
$$d = 15\ cm.$$

Tada je polumjer pravokutniku upisane kružnice duljine 7.5 cm.

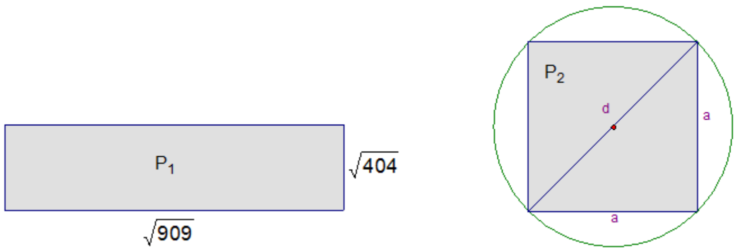
Površina kruga je

$$P = (7.5)^2 \cdot 3.14$$
$$P = 176.625\ cm^2.$$

Površina neosjenčanog dijela je

$$P = 176.625 - 108$$
$$P = 68.625\ cm^2.$$

Zadatak 5.8. *(ŠKOLSKO NATJECANJE, 2013.)*
Duljine susjednih stranica pravokutnika su $\sqrt{404}$ cm i $\sqrt{909}$ cm. Odredi opseg i površinu kružnice opisane kvadratu čija je površina jednaka površini zadanoga pravokutnika. (Slika 5.56)



Slika 5.56: Pravokutnik

Rješenje:

Površina danog pravokutnika, P_1 jednaka je umnošku duljina njegovih susjednih stranica

$$P_1 = \sqrt{404} \cdot \sqrt{909}$$
$$P_1 = \sqrt{4 \cdot 101} \cdot \sqrt{9 \cdot 101}$$
$$P_1 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{101} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{101}$$
$$P_1 = 2 \cdot 3 \cdot 101$$
$$P_1 = 606\ cm^2.$$

Neka je duljina stranice kvadrata koji ima jednaku površinu, P_2 kao dani pravokutni jednaka a, tada

$$606 = a^2 / \sqrt{}$$
$$\sqrt{606} = a.$$

Duljina dijagonale je ujedno i promjer tražene kružnice, stoga pomoću Pitagorina poučka dobivamo

$$
\begin{aligned}
d^2 &= 2a^2 / \sqrt{} \\
d &= a\sqrt{2} \\
d &= \sqrt{606} \cdot \sqrt{2} \\
d &= \sqrt{606 \cdot 2} \\
d &= \sqrt{303 \cdot 2 \cdot 2} \\
d &= 2\sqrt{303}\ cm.
\end{aligned}
$$

Polumjer tom kvadratu opisane kružnice jednak je

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{303}}{\cancel{2}} = \sqrt{303}\ cm.$$

Opseg dane kružnice iznosi

$$
\begin{aligned}
o &= 2 \cdot r \cdot \pi \\
o &= 2\sqrt{303}\pi\ cm.
\end{aligned}
$$

Površina dane kružnice iznosi

$$
\begin{aligned}
P_2 &= r^2\pi \\
P_2 &= \left(\sqrt{303}\right)^2\pi \\
P_2 &= 303\pi\ cm^2.
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] N. Elezović, *Matematička natjecanja i rad s darovitim učenicima*, Matematika i škola, $30(2005), 206 - 215$.

[2] A. Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, dostupno na: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm 2017.

[3] J. Markovac, *Matematika* 1*, udžbenik za* 1*. razred osnovne škole*, Alfa, 2014.

[4] J. Markovac, *Matematika* 2*, udžbenik za* 2*. razred osnovne škole*, Alfa, 2014.

[5] J. Markovac, *Matematika* 3*, udžbenik za* 3*. razred osnovne škole*, Alfa, 2014.

[6] J. Markovac, *Matematika* 4*, udžbenik za* 4*. razred osnovne škole*, Alfa, 2014.

[7] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 5*, udžbenik i zbirka zadataka za* 5*. razred osnovne škole,* 1*. polugodište*, Profil, 2007.

[8] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 5*, udžbenik i zbirka zadataka za* 5*. razred osnovne škole,* 2*. polugodište*, Profil, 2007.

[9] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 6*, udžbenik i zbirka zadataka za* 6*. razred osnovne škole,* 1*. polugodište*, Profil, 2007.

[10] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 6*, udžbenik i zbirka zadataka za* 6*. razred osnovne škole,* 2*. polugodište*, Profil, 2007.

[11] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 7*, udžbenik i zbirka zadataka za* 7*. razred osnovne škole,* 1*. polugodište*, Profil, 2007.

[12] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 7*, udžbenik i zbirka zadataka za* 7*. razred osnovne škole,* 2*. polugodište*, Profil, 2007.

[13] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 8*, udžbenik i zbirka zadataka za* 8*. razred osnovne škole,* 1*. polugodište*, Profil, 2007.

[14] T. Nemeth, G. Stajčić , *Matematika* 8*, udžbenik i zbirka zadataka za* 8*. razred osnovne škole,* 2*. polugodište*, Profil, 2007.

[15] V. Stošić, *Matematička natjecanja učenika osnovnih škola*, Element, Zagreb, 1994.

[16] *Hrvatska enciklopedija*, LZMK, http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70202 2107.

[17] *Hrvatsko matematičko društvo*, http://www.matematika.hr/natjecanja/meunarodna/imo/ 2017.

[18] *Hrvatsko matematičko društvo*, http://www.matematika.hr/natjecanja/meunarodna/ 2017.

[19] *Međunarodna matematička olimpijada*, https://www.imo-official.org/hall.aspx 2017.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su zadatci geometrijskog tipa koji se pojavljuju na natjecanjima iz matematike u osnovnoj školi. U radu je navedeno gradivo koje se proteže od petog do osmog razreda vezano za trokut, pravokutnik, kružnicu i krug sa slikama, primjerima te zadatcima s natjecanja. Treba napomenuti da vrlo bitnu ulogu u matematici ima konstruiranje i crtanje likova, što može pomoći u nastavi, a jedan od programskih paketa u kojemu i sami učenici mogu crtati je programski paket The Geometer's Sketchpad, koji je korišten i u ovom radu. Nimalo nebitan dio rada posvećen je povijesti natjecanja, vrsti natjecanja u Republici Hrvatskoj te ulozi samih natjecanja iz matematike kod svakog učenika.

Ključne riječi: planimetrija, trokut, pravokutnik, kružnica, natjecanja iz matematike

Summary

The theme of this graduate thesis are tasks of geometric type that appear in mathematics primary school competitions. The paper lists the material that stretches from the fifth to the eighth grade related to a triangle, a rectangle, the circle with images, and examples of tasks from the competition. It should be noted that a very important role in mathematics has constructions and drawing characters, which can help in teaching and one of program packages in which they themselves the students can draw is The Geometer's Sketchpad software package, which was used in this work. Part of the work, almost irrelevant, is devoted to the history of the competition, the type of competition in the Republic Croatia and the role of mathematical competitions at each student.

Key words: planimetry, triangle, rectangle, circle, math competition

Životopis

Moje ime je Slađana Vidačić. Rođena sam 15. rujna 1985. godine u Bjelovaru. Od 1992. do 2000. godine pohađala sam osnovnu školu Mirka Pereša u Kapeli. Kao odlična učenica, 2000. godine upisala sam prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Bjelovaru. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja 2004. godine upisala sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.