Osnovni teoremi diferencijalnog i integralnog računa

Mihalj, Glorija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Glorija Mihalj

Osnovni teoremi diferencijalnog i integralnog računa

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Glorija Mihalj

Osnovni teoremi diferencijalnog i integralnog računa

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2018.

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo osnovne teoreme diferencijalnog i integralnog računa. Diferencijalni račun obilježili su teoremi o srednjim vrijednostima (Rolleov, Lagrangeov i Cauchyjev) koje ćemo iskazati i dokazati te objasniti njihovo geometrijsko značenje. Također ćemo iskazati i dokazati Fermatov teorem koji je poznat kao nužan uvjet za postojanje ekstrema, ali i za dokazivanje Rolleovog teorema. Pod osnovne teoreme integralnog računa navest ćemo Riemannov teorem, teorem o monotonosti, teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije te jednu od najznačajnijih formula - Newton-Leibnizovu formulu koja nam daje vezu između određenog i neodređenog integrala.

Ključne riječi

Fermatov teorem, Rolleov teorem, Lagrangeov teorem, Cauchyjev teorem, L'Hôpitalovo pravilo, Newton-Leibnizova formula

Fundamental theorems of calculus

Summary

In this paper, we will consider fundamental theorems of calculus. The primary objects of study in differential calculus are The mean value theorems (Rolle's, Lagrange's and Cauchy's) that we will prove and give their geometric interpretation. Also, we will make a statement and a proof of Fermat's theorem known as a necessary condition in existance of local minimum and maximum. In Section 2, we will discuss Riemann's theorem, the theorem on monotone functions, the mean value theorem for integrals and one of the most important formula - Newton-Leibniz formula that gives us the connection between the indefinite and the definite integral.

Key words

Fermat's theorem, Rolle's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem, L'Hôpital's rule, Newton-Leibniz formula

Sadržaj

Uvod

Diferencijalni račun i derivaciju funkcije počeli su, neovisno jedan od drugog, razvijati Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz u 17. stoljeću. I. Newton bavio se fizikalnim problemom određivanja brzine materijalne točke, a G. W. Leibniz geometrijskim problemom nalaženja tangente na zadanu krivulju u nekoj točki. Newton i Leibniz otkrili su vezu između tangente i površine te je njihovo otkriće osnova integralnog računa. Integralni račun bavi se operacijom integriranja, tj. nalaženja funkcija čija je derivacija zadana. Slike u ovome završnom radu preuzete su iz [1, 2, 4].

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici je pojam funkcije koju ćemo sada definirati.

Definicija 1. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ zovemo funkcija ili preslikavanje sa D u K i pišemo $f : D \to K$ ili $x \mapsto f(x)$, $x \in D$.*

Sada ćemo dati definiciju pojma neprekidnosti funkcije.

Definicija 2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i točka $x_0 \in I$. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u točki x_0 ako postoji limes funkcije f u točki x_0 i*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija je neprekidna na skupu I ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in I$.

Prethodni pojam moguće je opisati i bez upotrebe limesa, tj. pomoću Cauchyjeve definicije neprekidnosti funkcije.

Definicija 3. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $x_0 \in I$ i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Funkcija f je neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in I$ ako je $|x - x_0| < \delta$ onda je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Primjer 1. *Funkcija $f(x) = x^2 + 3x - 5$ neprekidna je u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$, dok funkcija $g(x) = 3 - x \sin\frac{1}{x}$ ima prekid u točki $x_0 = 0$.*

Kao rješenje problema kojima su se bavili I. Newton i G. W. Leibniz nameće se broj kojemu teži izraz oblika $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Taj broj naziva se kvocijent diferencija te pomoću njega definiramo pojam derivabilnosti funkcije.

Definicija 4. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki x_0 otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ako postoji*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Taj broj zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$.

Napomena 1. *Geometrijski, derivacija funkcije f u točki x_0 predstavlja kvocijent smjera tangente na krivulju Γ_f u točki x_0.*

Sada razmotrimo vezu između derivabilnosti i neprekidnosti funkcije f. Ako je funkcija f neprekidna u nekoj točki, ona ne mora biti nužno derivabilna u toj točki. To se vidi u sljedećem primjeru.

Primjer 2. *Funkcija $f(x) = |x+3|$, $x \in \mathbb{R}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, a derivabilna na $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. No, f nije derivabilna u -3.*

Obratno, derivabilnost povlači neprekidnost. Više o metodama i pravilima deriviranja može se vidjeti u [3].
Sljedeće svojstvo funkcije koje ćemo objasniti je svojstvo integrabilnosti funkcije, a sada ćemo definirati neke osnovne pojmove vezane za integrabilnost.

Definicija 5. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$. Za $n \in \mathbb{N}$ podijelimo segment $[a,b]$ točkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ na n dijelova.*
Neka je $m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$ i $M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$, $k = 1, ..., n$.
Definirajmo sume

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Broj s zovemo donja Darbouxova suma, a S gornja Darbouxova suma. Neka je A skup svih donjih, a B skup svih gornjih Darbouxovih suma. Tada vrijedi:

$$I_*(f;a,b) = \sup A, \;\; I^*(f;a,b) = \inf B.$$

Broj I_* zovemo donji, a broj I^* gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$.

Neka svojstva i odnosi između Darbouxovih suma mogu se vidjeti primjerice u [2].

Teorem 1 (Vidi [3])**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija, $I^*(f;a,b)$ gornji i $I_*(f;a,b)$ donji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$. Tada je*

$$I_*(f;a,b) \leq I^*(f;a,b).$$

Definicija 6. *Za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a,b]$ kažemo da je integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako je*

$$I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b).$$

Tada se broj $I = I_* = I^*$ naziva integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka

$$I = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Napomena 2. *Geometrijski, određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu područja P ispod grafa funkcije f, a iznad $[a,b]$.*

Definicija 7. *Funkciju $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazivamo primitivnom funkcijom funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ako vrijedi:*

$$F'(x) = f(x), \text{ za svaki } x \in [a, b].$$

Primjer 3. *Funkcija $F(x) = 2x^5 + 4$ je primitivna funkcija od $f(x) = 10x^4$.*

Jer je derivacija konstantne funkcije jednaka nuli bitno je uočiti da se sve primitivne funkcije zadane funkcije f razlikuju do na konstantu.

Definicija 8. *Neka $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju. Skup svih primitivnih funkcija od f naziva se neodređeni integral od f i označava s*

$$\int f(x)dx.$$

Tablice osnovnih integrala i metode integriranja mogu se vidjeti u [1]. Ilustrirajmo nešto od toga na sljedećem primjeru:

Primjer 4. *Vrijedi:*

$$\int (8x^3 - \sin x)dx = 2x^4 + \cos x + c, \ c \in \mathbb{R}$$
$$\int_0^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Definicija 9. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima:*

(a) lokalni maksimum $f(c)$, ako postoji $\delta > 0$ takav da je za svaki $x \in I$

$$(|x - c| < \delta) \Rightarrow (f(x) \leq f(c)),$$

(b) strogi lokalni maksimum $f(c)$, ako postoji $\delta > 0$ takav da je za svaki $x \in I$

$$(0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow (f(x) < f(c)),$$

(c) lokalni minimum $f(c)$, ako postoji $\delta > 0$ takav da je za svaki $x \in I$

$$(|x - c| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geq)),$$

(d) strogi lokalni minimum $f(c)$, ako postoji $\delta > 0$ takav da je za svaki $x \in I$

$$(0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow (f(x) > f(c)).$$

Takve točke zovemo točkama (strogih) lokalnih ekstrema.

Primjer 5. *Funkcija $f : x \mapsto x^2 - 5$ ima lokalni minimum u $x = 0$, funkcija $h : x \mapsto 3x^2 \operatorname{sgn} x$ u točki $x = 0$ nema lokalni ekstrem.*

1 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Osnovne teoreme diferencijalnog računa čine Fermatov, Rolleov, Lagrangeov i Cauchyjev teorem. U ovom ćemo ih poglavlju prezentirati i potkrijepiti primjerima te navesti njihov geometrijski smisao.

1.1 Fermatov teorem

Fermatov teorem poznat je kao nužan uvjet postojanja lokalnog ekstrema funkcije.

Teorem 2 (Fermatov teorem, vidi [1]). *Neka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ima lokalni ekstrem. Ako je f derivabilna u točki x_0, onda je*

$$f'(x_0) = 0.$$

Dokaz. Neka f ima u točki x_0 lokalni maksimum. Prema Definiciji 9 to znači da postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Prema Definiciji 4 derivacija funkcije f u točki x_0 jednaka je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako je $|x - x_0| < \delta$, onda je $f(x) \leq f(x_0)$. Budući da je $x - x_0$ unutrašnja točka intervala $\langle -\delta, \delta\rangle$, može biti pozitivna ili negativna.
Ako je $x - x_0 > 0$, slijedi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, tj.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

U suprotnom vrijedi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, tj.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Kako je f derivabilna u x_0, slijedi $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Dakle, $f'(x_0) = 0$. □

Napomena 3 (Geometrijski smisao Fermatovog teorema). *Tangenta na graf derivabilne funkcije u točki lokalnog ekstrema paralelna je s osi x pa joj je koeficijent smjera jednak nuli.*

Slika 1: *Geometrijski smisao Fermatovog teorema*

Primjer 6. *Funkcija može imati lokalni ekstrem i u točki u kojoj nije derivabilna. Funkcija $x \mapsto |x|$ ima strogi lokalni minimum u točki $x = 0$, a u toj točki nije derivabilna.*

Primjer 7. *Za funkciju $f(x) = x^5 + 1$ je $f'(x) = 5x^4$, tj. $f'(0) = 0$, ali f nema lokalni ekstrem u 0 jer je f monotono rastuća funkcija.*

Primjer 8. *Promotrimo funkciju $g(x) = x^2 + 4x + 4$. Vidimo da funkcija g ima minimum u točki $x_0 = -2$. Prema Fermatovom teoremu, za točku $x_0 = -2$ vrijedi*

$$g'(x) = 2x + 4,$$

tj. $g'(-2) = 0$.

Sada ćemo iskazati i dokazati teoreme srednje vrijednosti. Svaki od njih, pod određenim uvjetima, definira neku karakterističnu vrijednosti derivacije funkcije u unutrašnjoj točki segmenta.

1.2 Rolleov teorem

Teorem 3 (Rolleov teorem, vidi [1]). *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$, derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$f'(x_0) = 0.$$

Dokaz. Ako funkcija f nije konstanta, onda zbog pretpostavke o neprekidnosti na segmentu $[a, b]$ ima najmanju i najveću vrijednost. Ako se one dostižu u rubnim točkama segmenta $[a, b]$, tada je f konstantna funkcija. Dakle, funkcija f ima ekstremnu vrijednost u nekoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Kako je, prema pretpostavci o derivabilnosti na $\langle a, b\rangle$, funkcija f derivabilna u točki c, prema Fermatovom teoremu mora biti $f'(x_0) = 0$.

Ako je funkcija f konstanta, tj. ako vrijedi

$$f(x) = f(a) = f(b),$$

za sve $x \in [a, b]$, onda je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

□

Napomena 4 (Geometrijski smisao Rolleova teorema)**.** *Ako graf neprekidne funkcije siječe pravac $y = f(a)$ u dvije točke $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ i ako ima tangentu u svakoj međutočki, onda postoji barem jedna međutočka u kojoj je tangenta paralelna s x osi.*

Slika 2: *Geometrijski smisao Rolleovog teorema*

Primjer 9. *Pogledajmo funkcije $f, g, h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definirane s*

$$f(x) = x,\ g(x) = |x|,\ h(x) = f(x),\ \textit{za } x \in \langle -1, 1] \textit{ i } h(-1) = 1.$$

Za dane funkcije ne vrijede tvrdnje Teorema 3. Funkcija f nema jednake vrijednosti na krajevima segmenta $[-1, 1]$, tj. $f(-1) = -1$, a $f(1) = 1$. Funkcija g nije derivabilna na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tj. u točki $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Tada je

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Limesi slijeva i zdesna nisu isti pa funkcija g nije derivabilna u točki $x = 0$. Funkcija h ima prekid u točki $x = -1$.

Iako Rolleov teorem osigurava postojanje barem jedne točke u $\langle a, b\rangle$ u kojoj je derivacija jednaka nuli, funkcija koja ispunjava uvjete Rolleovog teorema može imati više takvih točaka.

Primjer 10. *Funkcija $x \mapsto \sin(x)$ na segmentu $[0, n \cdot \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljava uvjete Rolleova teorema i ima n točaka u kojima je derivacija jednaka nuli.*

Primjer 11. *Primjenimo Rolleov teorem na sljedeću funkciju*

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

na segmentu $[1, 2]$.
Rješenje:
Funkcija f *je neprekidna pa možemo koristiti Rolleov teorem. Također je i derivabilna, tj.*

$$f'(x) = 2x - 3.$$

Provjerimo vrijednost funkcije u rubovima segmenta. Slijedi, $f(1) = 0$ *te* $f(2) = 0$*. Funkcija* f *postiže jednaku vrijednost u obje rubne točke segmenta pa možemo primjeniti Rolleov teorem. Izjednačimo* $f'(x)$ *s nulom da bismo odredili točku u kojoj je tangenta paralelna s* x*-osi.*

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 3, \\ 2x &= 3, \\ x &= \frac{3}{2} = 1.5. \end{aligned}$$

1.3 Lagrangeov teorem

Teorem 4 (Lagrangeov teorem, vidi [1])**.** *Ako je funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a, b]$ *i derivabilna na* $\langle a, b\rangle$*, onda postoji točka* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Dokaz. Neka je $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i neka je funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$g(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a). \tag{1}$$

Deriviranjem dobivamo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Kako je funkcija g neprekidna na $[a, b]$, derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i kako je

$$g(a) = g(b) = 0,$$

funkcija g zadovoljava uvjete Rolleova teorema. Stoga postoji točka $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takva da je $g'(x_0) = 0$. Iz jednakosti (1) slijedi

$$g'(x) = f'(x) - \lambda.$$

Dakle,

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \lambda = 0,$$

tj.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Napomena 5 (Geometrijski smisao Lagrangeovog teorema)**.** *Neka je dana funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$*. Za svaku sekantu na graf funkcije* f *koja prolazi točkama* $(a, f(a))$ *i* $(b, f(b))$*,* $a, b \in I$ *postoji tangenta s diralištem* $(c, f(c))$ *na grafu* $\Gamma(f)$ *koja je paralelna s tom sekantom, tj. jednaki su im koeficijenti smjerova.*

Slika 3: *Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema*

Primjer 12. *Ako je funkcija* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *derivabilna i ako je* $f'(x) = 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$*, tada primjenom Lagrangeovog teorema za funkciju* f *na segmentu* $[x_1, x_2]$ *dobivamo*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0.$$

Kako prethodna jednakost vrijedi za svaki $x_1 \in \langle a, b\rangle$ *i svaki* $x_2 \in \langle x_1, b\rangle$*, funkcija* f *je konstantna na* $\langle a, b\rangle$*.*

Primjer 13. *Funkcija* $f : x \mapsto \sin x$ *ispunjava uvjete Lagrangeovog teorema na segmentu* $[x, y]$ *za sve* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x < y$*. Prema tome, postoji* $c \in (x, y)$ *takav da je*

$$\sin(y) - \sin(x) = \cos(c) \cdot (y - x).$$

Prelaskom na apsolutnu vrijednost i korištenjem definicije funkcije kosinus slijedi nam nejednakost $|\sin(y) - \sin(x)| \leq |y - x|$*.*

Primjer 14. *Provjerimo zadovoljava li funkcija*

$$f(x) = \frac{x-2}{x-4}$$

Lagrangeov teorem na segmentu $[5, 6]$*.*
Rješenje:
Uočimo kako funkcija f ima prekid u točki $x_0 = 4$*, ali je neprekidna i derivabilna na segmentu* $[1, 3]$*. Deriviranjem dobivamo*

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-4}\right)' &= \frac{(x-2)'(x-4) - (x-2)(x-4)'}{(x-4)^2} \\ &= \frac{(x-4) - (x-2)}{(x-4)^2} \\ &= -\frac{2}{(x-4)^2}. \end{aligned}$$

Korištenjem Lagrangeove formule dobivamo

$$\begin{aligned} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &\Longrightarrow -\frac{2}{(c-4)^2} = \frac{f(6)-f(5)}{6-5} \\ &\Longrightarrow -\frac{2}{(c-4)^2} = -1 \\ &\Longrightarrow (c-4)^2 = 2 \\ &\Longrightarrow c-4 = \sqrt{2} \\ &\Longrightarrow c = 4+\sqrt{2} \approx 5.41 \end{aligned}$$

Dakle, točka u kojoj je tangenta na graf funkcije f paralelna sa sekantom leži u segmentu $[5, 6]$ i jednaka je $c = 4 + \sqrt{2}$.

1.4 Cauchyjev teorem

Teorem 5 (Cauchyjev teorem, vidi [1])**.** *Ako su funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne na $[a, b]$, derivabilne na $\langle a, b\rangle$ i ako je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda je*

$$g(a) \neq g(b).$$

Osim toga, postoji $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Iz uvjeta $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ slijedi

$$g(b) \neq g(a).$$

U suprotnom bi funkcija $\tilde{g}$ definirana formulom

$$\tilde{g}(x) = g(x) - g(b)$$

na segmentu $[a, b]$ ispunjavala sve uvjete Rolleova teorema pa bi postojala točka $c \in \langle a, b\rangle$ za koju je $\tilde{g'}(c) = g'(c) = 0$. Neka je $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ i neka je funkcija $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\rho(x) = f(x) - f(a) - \lambda(g(x) - g(a)).$$

Iz prethodne jednakosti slijedi $\rho(a) = 0$ i

$$\rho(b) = f(b) - f(a) - \lambda(g(b) - g(a)) = 0.$$

Prema tome, funkcija ρ zadovoljava uvjete Rolleova teorema pa postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $\rho'(c) = 0$, odnosno

$$f'(c) = \lambda \cdot g'(c).$$

□

Napomena 6. *Za $g(x) = x$ iz Cauchyjeva teorema dobiva se Lagrangeov teorem, tj. Cauchyjev teorem je poopćenje Lagrangeovog teorema.*

Primjer 15. *Pogledajmo jesu li ispunjeni uvjeti Cauchyjevog teorema za funkcije $f(x) = \sin x + 1$ i $g(x) = \cos x + 3$ na segmentu $[0, \frac{\Pi}{2}]$.*
Rješenje:
Funkcije f i g su neprekidne na $[0, \frac{\Pi}{2}]$ i derivabilne na $\langle 0, \frac{\Pi}{2}\rangle$. Deriviranjem dobivamo

$$f'(x) = \cos x \ i \ g'(x) = -\sin x.$$

Vidimo da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle 0, \frac{\Pi}{2}\rangle$. Jasno je da su zadovoljeni svi uvjeti Cauchyjevog teorema pa možemo naći točku x_0 takvu da je

$$\frac{f(\frac{\Pi}{2}) - f(0)}{g(\frac{\Pi}{2}) - g(0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Kako je $f(\frac{\Pi}{2}) = 2$, $f(0) = 1$, $g(\frac{\Pi}{2}) = 3$ te $g(0) = 4$, slijedi

$$\frac{\cos x_0}{\sin x_0} = 1,$$

tj. $x_0 = \frac{\Pi}{4}$.

1.5 Primjene diferencijalnog računa. L'Hôpitalovo pravilo

Teoremi o srednjoj vrijednosti mogu se iskoristiti za pronalaženje graničnih vrijednosti oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Odgovarajuća pravila vežu se za ime švicarskog matematičara Bernoullija (1667.-1748.), no poznata su kao L'Hôpitalova pravila jer ih je francuski matematičar L'Hôpital (1661.-1704.) objavio u prvoj tiskanoj knjizi o diferencijalnom računu. Cauchyjev teorem može se iskoristiti u dokazu tzv. L'Hôpitalovog pravila. Ono nam koristi za računanje limesa jednog od neodređenih oblika $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty \ldots$

Teorem 6 (L'Hôpitalovo pravilo, Vidi [2])**.** *Neka su f i g funkcije definirane na $I \setminus \{c\} \subset \mathbb{R}$, neka su derivabilne na tom skupu i neka je*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *ili* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$,
2. $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ *za svaki* $x \in I \setminus \{c\}$,
3. *postoji* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada je

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Ako funkcije f i g dodefiniramo u točki c s

$$f(c) = g(c) = 0,$$

dobivamo neprekidne funkcije na I.

One zadovoljavaju uvjete Cauchyjeva teorema pa za svaki $x \in I \setminus \{c\}$ vrijedi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

gdje je $c_x \in \langle c, x \rangle$.
Sada zbog $x \to c$ vrijedi $c_x \to c$ iz čega slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Iako je teorem iskazan i dokazan za neodređene oblike $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$, uz određene modifikacije smije se primijeniti i za ostale neodređene oblike (vidi [1]).

Primjer 16. *Neka su $f(x) = x - \sin(x)$, $g(x) = x^3$.*
Za $c = 0$ su ispunjeni svi uvjeti Teorema 6 pa vrijedi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}.$$

Nekada je potrebno više puta primijeniti L'Hôpitalovo pravilo.

Analogne tvrdnje vrijede i u slučajevima kada promatramo samo lijevu ili samo desnu graničnu vrijednost u točki u kojoj kvocijent ima neodređenost s lijeve, odnosno s desne strane, a također i za $c = \pm\infty$. Posljednje slijedi iz:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \frac{(f(\frac{1}{y}))'}{(g(\frac{1}{y}))'} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})(\frac{-1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y})(\frac{-1}{y^2})} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Primjer 17.

(a) neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

(b) neodređeni oblik $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$$

2 Osnovni teoremi integralnog računa

Za razliku od diferencijalnog računa koji se bavi određivanjem derivacija te diferencijala zadane funkcije, integralni račun koristi već poznate derivacije i diferencijale kako bi odredio o kojoj se funkciji radi. Integralni račun često shvaćamo kao inverznu operaciju diferencijalnog računa.
U Poglavlju (1) navedeni su osnovni teoremi diferencijalnog računa, a sada ćemo navesti osnovne teoreme integralnog računa.

2.1 Riemannov teorem

Teorem 7 (Riemannov teorem, vidi [2])**.** *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Tada je ona R-integrabilna na* $[a,b]$.

Dokaz teorema može se vidjeti u [1, 2]. Obrat Riemannovog teorema ne vrijedi. Postoje funkcije zadane na segmentu koje se mogu integrirati na tom segmentu, a nisu neprekidne.

Primjer 18. *Pogledajmo funkciju* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *zadanu s* $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
Funkcija f *ima prekid u* $x_0 = 1$, *ali njen integral na segmentu* $[0,2]$ *iznosi*

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 2dx = 3.$$

2.2 Teorem o monotonosti

Teorem 8 (Teorem o monotonosti, vidi [3])**.** *Ako je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monotona funkcija na* $[a,b]$ *onda je ona ograničena i integrabilna na* $[a,b]$.

Dokaz. Uzmimo da je funkcija f rastuća, tj. da vrijedi $x < x' \to f(x) \leq f(x')$ za $x, x' \in [a,b]$. Tada je

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

za svaki $x \in [a,b]$, tj. f je ograničena funkcija na $[a,b]$.
Podijelimo segment $[a,b]$ na n jednakih dijelova. Površina pravokutnika kojega graf funkcije f zatvara s x osi jednaka je

$$[f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n},$$

a dva puta iscrtanog pravokutnika

$$[f(x_k) - f(x_{k-1})]\frac{b-a}{n}.$$

Uzimajući u obzir da funkcija f raste, definiramo $m_k = \inf f(x)$, $M_k = \sup f(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$ što povlači $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$.

Tada je lijeva Darbouxova suma dana izrazom

$$s_n = [f(x_0) + ... + f(x_{n-1})]\frac{b-a}{n},$$

a desna s

$$S_n = [f(x_1) + ... + f(x_n)]\frac{b-a}{n}.$$

Odavdje je

$$S_n - s_n = [f(x_n) - f(x_0)]\frac{b-a}{n},$$

što povlači

$$S_n = s_n + [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n} \leq I_*(f; a, b) + [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n},$$

jer je $s_n \leq \sup A = I_*(f; a, b)$.

S druge strane je $s_n \geq \inf B = I^*(f; a, b)$. Prema tome vrijedi

$$I^*(f; a, b) \leq I_*(f; a, b) + [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n}, n \in \mathbb{N}.$$

Zbog proizvoljnosti prirodnog broja n vrijedi $I^*(f; a, b) \leq I_*(f; a, b)$ što zajedno s Teoremom 1 daje

$$I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b),$$

tj. integrabilnost funkcije f na $[a, b]$. □

Obrat Teorema 8 ne vrijedi.

Primjer 19. *Pogledajmo funkciju* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \textit{za } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 1, & \textit{za } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 2, & \textit{za } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Funkcija f *nije monotona na* $[0, 1]$. *Gornji Riemannov integral funkcije* f *jednak je*

$$\overline{\int}_{[0,1]} f = \inf\{\int_{[0,1]} g;\ \textit{g je po dijelovima konstanta na [0,1] i g(x)} \geq f(x) \textit{ za svaki } x \in [0, 1]\}$$
$$= \frac{5}{3}.$$

Donji integral funkcije f *dan je s*

$$\underline{\int}_{[0,1]} f = \inf\{\int_{[0,1]} g;\ \textit{g je po dijelovima konstanta na [0,1] i g(x)} \leq f(x) \textit{ za svaki } x \in [0, 1]\}$$
$$= \frac{5}{3}.$$

Kako su gornji i donji Riemannov integral jednaki, slijedi da je funkcija f *Riemann integrabilna.*

2.3 Teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije

Sada ćemo iskazati teorem o primitivnoj funkciji koji nam služi za dokazivanje teorema o srednjoj vrijednosti za integral neprekidne funkcije.

Teorem 9 (Vidi [1])**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te neka je $c \in [a,b]$ proizvoljan. Tada je funkcija*

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt$$

derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$ i vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

Dokaz prethodnog teorema može se vidjeti u [1].
Sada slijedi teorem o srednjoj vrijednosti za integral neprekidne funkcije.

Teorem 10 (Teorem o srednjoj vrijednosti za integral neprekidne funkcije, vidi [2])**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji $c \in [a,b]$ takav da je*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dokaz. Neka je $x_0 \in [a,b]$ proizvoljan. Definiramo funkciju

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt.$$

Prema Teoremu 9 funkcija F je derivabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$, a po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti (Teorem 4 koji smo iskazali u Poglavlju 1) znamo da postoji neki $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je

$$\begin{aligned} F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} &\iff f(c) = \frac{\int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^c f(t)dt}{b-a} \\ &\iff f(c) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}. \end{aligned}$$

$\square$

Napomena 7 (Geometrijska intepretacija teorema srednje vrijednosti)**.** *Za pozitivnu funkciju f postoji vrijednost c takva da pravokutnik duljine $[a,b]$ i širine $f(c)$ zatvara istu površinu kao i graf funkcije f s osi x.*

Ilustrirajmo sada Teorem 10 na sljedećem primjeru:

Primjer 20. *Pogledajmo funkciju*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x$$

na segmentu $[-1,2]$. Derivacija funkcije f je

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

Primijenimo teorem srednje vrijednosti na funkciju f. Imamo:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}. \end{aligned}$$

Dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$3c^2+4c-5=0$$

čija su rješenja

$$c=\frac{-4\pm\sqrt{76}}{6}.$$

Primijetimo da je rješenje

$$c=\frac{-4+\sqrt{76}}{6}\approx 0.79$$

jer se nalazi u segmentu $[-1,2]$.

Sada ćemo iskazati još jedan teorem o primitivnoj funkciji.

Teorem 11 (vidi[1]). *Neka je $I\subseteq\mathbb{R}$ otvoren interval $f:I\to\mathbb{R}$ funkcija neprekidna na I. Tada postoji primitivna funkcija od f na I.*

Dokaz ovog teorema može se vidjeti u [2], a on predstavlja prvi dio osnovnog teorema integralnog računa poznatog kao Newton-Leibnizova formula.

2.4 Newton-Leibnizova formula

Iskazat ćemo Newton - Leibnizovu formulu koja daje vezu između primitivne funkcije (odnosno pojma derivacije) i Riemannovog integrala funkcije.

Teorem 12 (Newton-Leibnizova formula, vidi [2]). *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a,b]$ onda je*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{2}$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija definirana s

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

za svaki $x\in[a,b]$. Tada zbog $F(a)=0$ vrijedi (2).
Ako je G bilo koja druga primitivna funkcija od f na $[a,b]$, tada vrijedi

$$G(x)=f'(x),$$

pa postoji $c\in\mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$G(x)=F(x)+c,$$

za svaki $x\in[a,b]$.

Sada je

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Primjer 21. *Primjenom Newton - Leibnizove formule slijedi nam:*

(a) $\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{x}dx = 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 10x\ dx = \left| \begin{array}{rcl} 10x & = & t \\ 10dx & = & dt \end{array} \right| = \frac{1}{10}\int_0^{5\pi} \sin t dt = -\frac{1}{10}\cos t\Big|_0^{5\pi} = \frac{2}{10}.$

Literatura

[1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 1994.

[2] B. Guljaš, *Matematička analiza I i II*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2012.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje)*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[4] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.